CARPETA SALT

MONTERO ESPINOSA

ROBERTO MARTÍN **2018**

Señales Aleatorias (SALT)

Teoría

Carpeta Academia Montero Espinosa Roberto Martín 2018

TEMA 1: PROBABILIDAD

1.1 Definiciones

Experimento aleatorio

Se trata de una prueba que cumple las siguientes propiedades:
- Se puede repetir tantas veces como sea necesario bajo las mismas condiciones.
- El resultado es impredecible, aunque los posibles resultados son conocidos.
- A medida que repetimos el experimento los resultados definen un cierto modelo de regularidad.

Ejemplo:

En algunos textos se designa el espacio muestral como E y se reserva Ω para la colección de todos los posibles sucesos

Espacio muestral

Conjunto de resultados posibles asociados a un experimento aleatorio. Normalmente lo denotaremos con la letra griega omega mayúscula Ω. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
lanzar un dado

Ejemplo:

Suceso

Cualquier subconjunto del espacio muestral. $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{3\}$, $S_3 = \Omega$

Ejemplo:

Veremos como a cada suceso elemental se le puede asignar una determinada probabilidad

Tipos de sucesos

- Simple o elemental: un resultado posible que no puede descomponerse en más sucesos.
- Compuesto: unión de sucesos simples.

Operaciones básicas entre sucesos

Recuerda estos dos tríos para el futuro:
$(\cup, ó, +)$
$(\cap, y, \cdot)$

Sean los sucesos A y B:
- Negación $\overline{A}$: suceso que ocurre cuando no ocurre A.
- Unión $A \cup B$: suceso que ocurre cuando ocurre A u ocurre B o ambos a la vez. 'o'
- Intersección $A \cap B$: suceso que ocurre cuando ocurre A y también ocurre B. 'y'

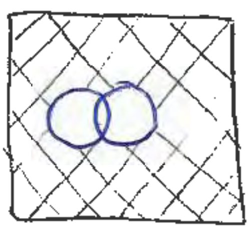
Ejemplo:

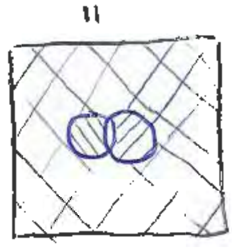
Estas leyes son la base para construir circuitos digitales

Leyes de De Morgan $\left\{ \begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array} \right\}$

Comprobación gráfica a partir de diagramas de Venn:

$\overline{A \cup B} \longrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$





Estas dos definiciones pueden generalizarse para una colección de sucesos.

Sucesos incompatibles y exhaustivos

Dados dos sucesos A y B se dice que son **incompatibles o disjuntos** cuando la ocurrencia de uno fuerza la no ocurrencia del otro:

$$A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0$$

Dados dos sucesos A y B se dice que son **exhaustivos** cuando su unión es el espacio muestral:

$$A \cup B = \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = 1$$

Se dice que A y B forman una **partición** de Ω si y solo si son incompatibles y exhaustivos.

$$\begin{Bmatrix} S_i \cap S_j = \varnothing \\ \cup S_i = E \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:

1.2 Probabilidad

Dado un experimento aleatorio llamamos **probabilidad** a toda aplicación:

$$\begin{aligned} P: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longrightarrow P(A) = p \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $0 \leq p \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

De ésta definición se deducen algunas propiedades:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Si A y B son incompatibles $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Diferentes aproximaciones al concepto de probabilidad

- Clásica o de Laplace: sólo válida para sucesos elementales equiprobables

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

- Frecuentista o de Von Mises: es una definición "a posteriori" de probabilidad

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{realizaciones\ favorables}{realizaciones\ totales}$$

- Subjetiva u opinática: basada en la creencia personal

1.3 Espacios muestrales finitos NO

Son aquellos que constan de un número finito de elementos.

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \bigcup_{\forall i} w_i$$

Si los w_i son incompatibles $\Rightarrow \sum_{\forall i} P(w_i) = 1$ (condición de normalización).

Dado un suceso $A = \left\{w_{A_1}, w_{A_2}, \dots, w_{A_m}\right\}$. Entonces

$$P(A) = P(w_{A_1} \cup w_{A_2} \cup \dots \cup w_{A_m}) = P(w_{A_1}) + P(w_{A_2}) + \dots + P(w_{A_m})$$

CASO PARTICULAR: Espacio muestral finito equiprobable

Todos los w_i tienen la misma probabilidad. $P(w_i) = p \ \forall i$

$$\sum_{\forall i} P(w_i) = 1 \Rightarrow P(w_1) + P(w_2) + \dots + P(w_n) = 1 \Rightarrow p + p + \dots + p = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{N}$$

$$P(A) = P(w_{A_1}) + P(w_{A_2}) + \dots + P(w_{A_m}) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} = \frac{m}{N}$$

En un espacio muestral equiprobable de m elementos y N casos posibles, $P(A) = \dfrac{m}{N}$

Definición clásica o de Laplace de probabilidad

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}}$$

1.4 Probabilidad Condicional

Definimos la probabilidad de que ocurra un suceso A condicionado a que previamente haya sucedido un suceso B como:

Fórmula que puede ser razonada a partir de la definición clásica o de Laplace

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propiedades

- $0 \le P(A/B) \le 1$
- $P(\Omega/B) = 1$
- Si A_1 y A_2 son incompatibles: $P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B)$
- $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$

¡¡Muy importante mantener la condición!!

1.5 Teorema de la Probabilidad Condicionada

Sea A y B dos sucesos del espacio muestral. Se cumple que:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B)}$$

Generalizando para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tenemos que:

$$\boxed{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$$

Ejemplo:

1.6 Independencia de sucesos

Ejemplo: A = {sacar un as}   B = {que el Barca gane la Liga}

$P(A) = \frac{4}{40}$ $P(A/B) = \frac{4}{40} = P(A) \Rightarrow$ A y B son independientes

$P(B) = 0{,}15$ $P(B/A) = 0{,}15 = P(B) \Rightarrow$ A y B son independientes

Dos sucesos A y B son **independientes** si y sólo si:

$$P(A) = P(A / B)$$
$$P(B) = P(B / A)$$

Si A y B son sucesos independientes entonces se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo: Sea el experimento muestral "Extraer una carta de la baraja española de 40 cartas (excluyendo 8,9,10)" y definiendo los sucesos $\left\{ \begin{array}{l} R = "sacar\ un\ rey" \\ F = "sacar\ una\ figura" \\ C = "sacar\ copas" \end{array} \right\}$. Calcular las probabilidades de cada uno de estos sucesos, calcular las diferentes probabilidades condicionadas posibles y razonar si los diferentes sucesos son independientes entre sí

Resumen de fórmulas

	Caso general	Sucesos independientes	Sucesos incompatibles
Condicionadas		$\left\{\begin{matrix} P(A/B)=P(A) \\ P(B/A)=P(B) \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} P(A/B)=0 \\ P(B/A)=0 \end{matrix}\right\}$
Unión	$P(A\cup B)$ $=P(A)+P(B)$ $-P(A\cap B)$	$P(A\cup B)=$ $P(A)+P(B)$ $-P(A)\cdot P(B)$	$P(A\cup B)=$ $P(A)+P(B)$
Intersección	$P(A\cap B)$ $=P(A)\cdot P(B/A)$ $=P(B)\cdot P(A/B)$	$P(A\cap B)$ $=P(A)\cdot P(B)$	$P(A\cap B)=0$

1.7 Teorema de la Probabilidad Total

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades condicionadas $p(B / A_i)$. El teorema de la Probabilidad Total establece que las probabilidades $p(B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\ P(B/A_n)}$$

EJEMPLO

Tenemos una caja con 6 bolas blancas y 5 bolas negras. Extraemos dos bolas consecutivamente y sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

Vamos a definir cada uno de los sucesos posibles:

¡Este paso es fundamental! Nunca olvides definir los sucesos que aparecen en tu problema. Es importantísimo si quieres entender el ejercicio perfectamente

$B_1 \equiv$ Sacar una bola blanca en la primera extracción

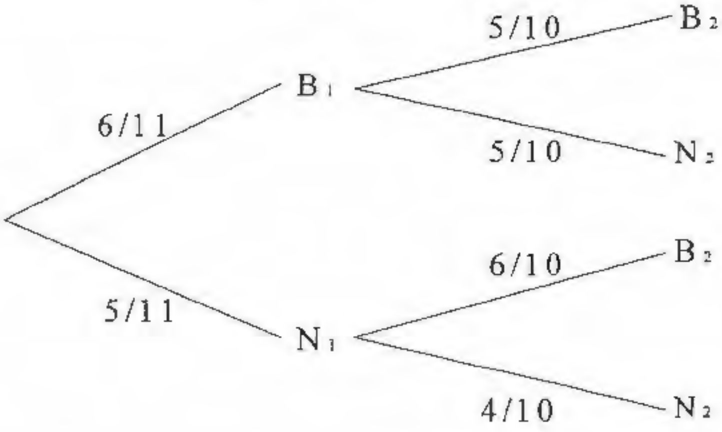
$N_1 \equiv$ Sacar una bola negra en la primera extracción

$B_2 \equiv$ Sacar una bola blanca en la segunda extracción

$N_2 \equiv$ Sacar una bola negra en la segunda extracción

Pues bien, asignados ya los nombres, nos disponemos a formar el árbol correspondiente, que es el paso fundamental de este tipo de problemas:

A la hora de hacer el árbol recuerda que la extracción es "sin reemplazamiento". Esto significa que cuando sacamos la primera bola ya no la volvemos a meter en la caja. Por tanto cuando hacemos la segunda extracción hay sólo 10 bolas en la caja, una bola menos que al principio



Se trata ahora de aplicar el **Teorema de la probabilidad total**:

Este paso siempre lo daremos apoyándonos en el árbol previamente construido. En este caso hemos cogido todos los "caminos" que llevan a *N2*

$$P(N_2) = P(B_1)\ P(N_2/B_1) + P(N_1)\ P(N_2/N_1)$$

$$P(N_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}$$

y ahora sólo queda operar para hallar la probabilidad pedida:

¡Ojo! Por supuesto el resultado debe estar siempre entre 0 y 1

$$P(N_2) = \frac{30}{110} + \frac{20}{110} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11} = 0{,}454$$

Solución: $P(N_2) = \dfrac{5}{11} = 0{,}4543$

1.8 Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $p(B / A_i)$. El teorema de Bayes establece que las probabilidades $p(A_i / B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\boxed{P(A_i / B) \;=\; \frac{P(A_i) \quad P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) \;+\; P(A_2) \cdot P(B / A_2) \;+ \ldots +\; P(A_n) \quad P(B / A_n)}}$$

Observaciones

- Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan probabilidades *a priori*.
- Las probabilidades $p(A_i / B)$ se denominan probabilidades *a posterior*".
- Los ejercicios en los que se utiliza Bayes suelen estar escritos en pasado con expresiones del tipo "si <u>ha salido</u> una bola blanca qué probabilidad hay de que ..." o "si se <u>eligió</u> el as de oros qué probabilidad hay de que..."
- Al igual que en el Teorema de la Probabilidad Total (estudiado en el punto anterior 1.7) antes de utilizar el Teorema de Bayes es imprescindible definir bien el significado de cada suceso así como dibujar el árbol de probabilidades. Para ver todo el procedimiento utilizaremos el ejemplo de la siguiente hoja.

EJEMPLO

> Tenemos una caja con 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Extraemos dos bolas consecutivamente y sin reemplazamiento. Si la segunda bola ha salido negra calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca.

Vamos a definir cada uno de los sucesos posibles:

¡Este paso es fundamental! Nunca olvides definir los sucesos que aparecen en tu problema. Es importantísimo si quieres entender el ejercicio perfectamente

$B_1 \equiv$ Sacar una bola blanca en la primera extracción

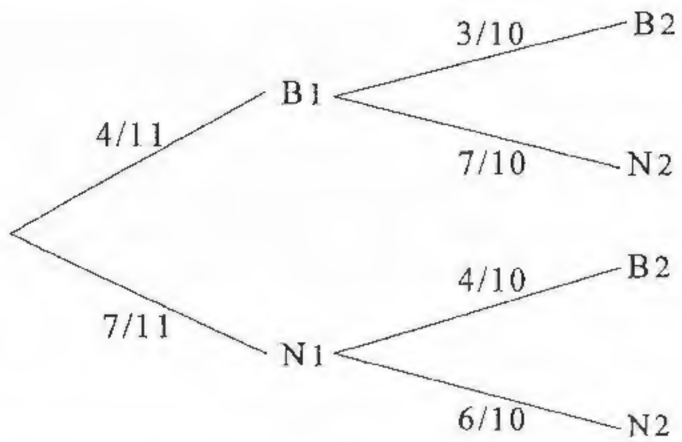
$N_1 \equiv$ Sacar una bola negra en la primera extracción

$B_2 \equiv$ Sacar una bola blanca en la segunda extracción

$N_2 \equiv$ Sacar una bola negra en la segunda extracción

Pues bien, asignados ya los nombres, nos disponemos a formar el árbol correspondiente, que es el paso fundamental de este tipo de problemas:

A la hora de hacer el árbol recuerda que la extracción es "sin reemplazamiento". Esto significa que cuando sacamos la primera bola ya no la volvemos a meter en la caja. Por tanto cuando hacemos la segunda extracción hay sólo10 bolas en la caja, una bola menos que al principio



Se trata ahora de aplicar el **Teorema de Bayes**:

Pista: Los ejercicios en los que se utiliza Bayes suelen estar escritos en pasado con expresiones como "ha salido" o "salió"

$$P(B_1/N_2) = \frac{P(B_1) \quad P(N_2/B_1)}{P(B_1) \quad P(N_2/B_1) \quad + \quad P(N_1) \quad P(N_2/N_1)}$$

Este paso siempre lo daremos apoyándonos en el árbol previamente construido.

$$P(B_1/N_2) = \frac{\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}}$$

y ahora sólo queda operar para hallar la probabilidad pedida:

¡Ojo! Por supuesto el resultado debe estar siempre entre 0 y 1

$$P(B_1/N_2) = \frac{28/110}{28/110 + 42/110} = \frac{28/110}{70/110} = \frac{28}{70} = 0{,}4$$

$$\boxed{\textbf{Solución: } P(B_1/N_2) = \frac{28}{70} = 0{,}4}$$

Nota:

Queremos volver a resaltar la importancia que en este tipo de problemas tiene el árbol de probabilidades. Es importantísimo que practiques haciendo muchos. Y, ni que decir tiene que, para tener bien el árbol, siempre debes comenzar definiendo los sucesos que intervienen en el problema. Si consigues tener bien definido el árbol es muy difícil que te salga mal el problema.

1.9 Técnicas de enumeración

1.9.1 Variaciones sin repetición

En las variaciones el ORDEN es lo importante

Variaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m.
Son todas las maneras posibles de elegir m elementos de entre los n, de manera que los conjuntos elegidos son distintos si son distintos los elementos que los componen o bien si es distinto el orden de colocación de dichos elementos.

$$\boxed{V_{n,m} = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

1.9.2 Variaciones con repetición

Variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.
Variaciones pudiendo repetir elementos.

$$\boxed{VR_{n,m} = n^m}$$

1.9.3 Combinaciones sin repetición

En las combinaciones el ORDEN NO es importante

Combinaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m.
Son todas las maneras posibles de elegir m elementos de entre los n de forma que los conjuntos elegidos son distintos entre sí si tienen distintos elementos.

$$\boxed{C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}}$$

1.9.4 Combinaciones con repetición

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.
Combinaciones pudiendo repetir elementos.

$$\boxed{CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}}$$

TEMA 2: VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL .

2.1 Definiciones

La idea está en que a partir de ahora vamos a manejar números reales en lugar de sucesos

Sea Ω un espacio muestral. Se denomina **variable aleatoria** a cualquier función del espacio muestral en los números reales:

$$\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longrightarrow \mathbf{X}(w)$$

Llamamos **rango** o **recorrido** al conjunto de las imágenes del espacio muestral Ω en R:

$$R_X = \{\mathbf{X}(w) : \forall w \in \Omega\}$$

Tipos de variables aleatorias

Se dice que una variable aleatoria **X** es **discreta** si su recorrido R_X es un conjunto finito o infinito numerable de números reales.

Se dice que una variable aleatoria **X** es **continua** si su recorrido R_X es infinito no umerable y su función de distribución es una función continua.

Se dice que una variable aleatoria **X** es **mixta** si su recorrido R_X es infinito no numerable y tiene puntos de discontinuidad no nula.

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio "Lanzar dos monedas al aire" vamos a definir diferentes variables aleatorias (v.a.) a partir de los posibles sucesos elementales

ej:

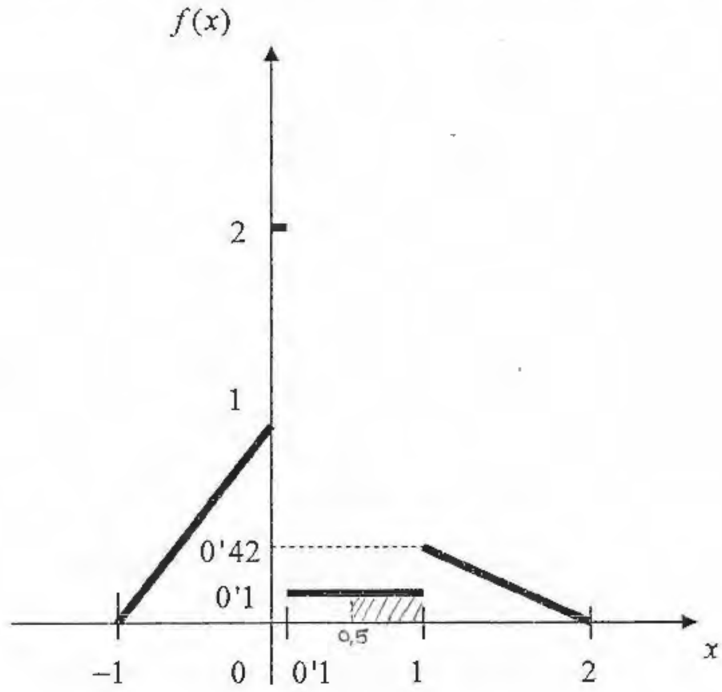
posibles resultados	Variable aleatoria (v.a) X	V.a $Y\begin{cases}0, \text{ si son } \neq \\ 1, \text{ si son } =\end{cases}$
CC	2	1
CX	1	0
XC	1	0
XX	0	1

V.a $\begin{cases}+375, \text{ si } XX \\ -100, \text{ resto}\end{cases}$

-100
-100
-100
+375

Todas ellas son v.a discretas. En una v.a siempre podemos distinguir su campo de variación: $x_i = 0,1,2$ y su propabilidad $\left(P(x=0) = 1/4 \quad P(x=1) = 2/4 \quad P(x=2) = 1/4\right)$

Ejemplo: Sea la función de densidad representada en la siguiente figura:



a) Posibles valores de la v.a. $x \in [-1, 2]$

b) $P(X = 3)$ 0 (xk esta fuera y xk es un punto concreto)

c) $P(X = 0)$ 0 (xk es un punto en concreto)

d) $P(X > -2)$ 1 (engloba todo)

e) $P(X \geq 2)$ 0

f) $P(X \leq -5)$ 0

g) $P(X < 2)$ 1

h) $P(0'5 < X < 1)$ $\int_{0,5}^{1} f(x)\,dx$

i) $P(-0'5 \leq X < 0)$ $\int_{-0,5}^{0} f(x)\,dx$

j) $P(-3 \leq X < 1)$ $\int_{\cancel{-3}\,-1}^{1} f(x)\,dx$

k) $P(0'2 \leq X \leq 3)$ $\int_{0,2}^{\cancel{3}\,2} f(x)\,dx$

l) $P(-1 \leq X \leq 2)$ 1

En una variable aleatoria continua la probabilidad de un punto en concreto es cero, pues al haber infinitos valores posibles, la probabilidad de cada uno $\frac{1}{\infty}$ $(\rightarrow 0)$

2.2 Función de densidad de probabilidad (fdp)

La función de densidad de probabilidad (fdp) lo que hace es informar sobre la cantidad de probabilidad que hay en un intervalo determinado del eje de abcisas (eje x).

2.2.1 Variable aleatoria discreta

Una función $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria discreta $\mathbf{X}$ si cumple:

1.- $p_X(x) \geq 0$

2.- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(\mathbf{X}=k) = 1$

2.2.2 Variable aleatoria continua

Una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria continua $\mathbf{X}$ si cumple:

En continua es la misma formula que la discreta pero:
$\Sigma \longrightarrow \int$

1.- $f_X(x) \geq 0$

2.- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{R_X} f_X(x)\, dx = 1$

3.- f_X admite a lo más un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de $\mathbb{R}$, es decir, f_X es integrable Riemann.

Importante: Para v.a. continuas la probabilidad que hay en un punto concreto del eje x es siempre cero. Esto no es así para las v.a. discretas donde un punto puede tener probabilidad distinta de cero.

2.3 Función de distribución ACUMULATIVA

La función de distribución de una cierta variable aleatoria se define como:

Esta definición es válida tanto para v.a. continuas como discretas

$$F_X(x) = P(\mathbf{X} \leq x)$$

La función de distribución lo que hace es "acumular" la probabilidad que hay a la izquierda de un determinado punto del eje de abcisas (eje x). Es decir nos informa de la cantidad de probabilidad que hay a la izquierda de cualquier punto del eje x.

Propiedades

1.- $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2.- $F_X(x)$ es no decreciente y continua por la derecha.

3.- $F_X(+\infty) = 1$
$F_X(-\infty) = 0$
$F_X(x)$ vale 1 a la derecha del R_X y vale 0 a la izquierda de R_X

4.- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$

$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$

$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$

$P(X = c) = F_X(c) - F_X(c^-)$

5.- La relación entre la función de distribución y la función de densidad de probabilidad (fdp) continua es la siguiente:

En este caso la integral sólo tiene sentido para v. a. continuas. Para v.a. discretas se trata, como se puede observar, de un sumatorio

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

En el caso de v.a. discretas la relación es la siguiente:

$$F_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} p_X(\mathbf{X} = k)$$

Importante: la principal diferencia entre la función de distribución en v.a. discretas y v.a. continuas es:

- En las v.a. discretas la función de distribución F(x) no es continua, pegando saltos en los puntos en los que encuentra probabilidad
- En las v.a. continuas la función de distribución F(x) sí es continua, pues no existe ningún punto con probabilidad

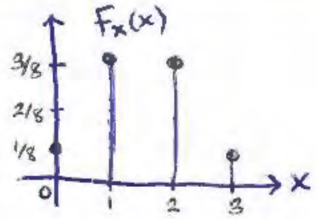
CCC
CCX
CXC
CXX
XCC
XCX
XXC
XXX

Experimento aleatorio "lanzar una moneda 3 veces"

V.a X = "nº de caras"
↓
v.a discreta

Media

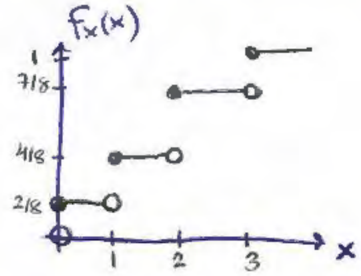
Función de densidad : $f_X(x) = \begin{cases} P(x=0) = 1/8 \\ P(x=1) = 3/8 \\ P(x=2) = 3/8 \\ P(x=3) = 1/8 \\ \Sigma = 1 \end{cases}$



$f_X(x) = \frac{1}{8}\delta(x) + \frac{3}{8}\delta(x-1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) + \frac{1}{8}\delta(x-3)$

Función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3)$

EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria discreta

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire una moneda tres veces. Definimos una variable aleatoria **X** como "el número de caras obtenidas". Calcular la función de densidad y la función de distribución. Calcular su media y su varianza.

Media

$$U_x = E(x) = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$$

Varianza

$$\sigma_x^2 = V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

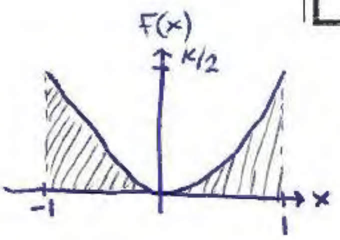
EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria continua

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2/2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcular los valores de k para los cuales $f(x)$ es una función de densidad y obtener su función de distribución
b) Calcular su media y su varianza
c) Obtener un valor V tal que el 90% de los valores de la v.a. no superen V



a)

$f(x)$ es función de densidad si $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1 \xrightarrow{\text{simetría}}$

$$\longrightarrow 2\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \rightarrow \cancel{2}\int_0^1 k\frac{x^2}{\cancel{2}}\,dx = 1 \rightarrow k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \longrightarrow$$

$$\frac{k}{3}(1-0) = 1 \longrightarrow \boxed{k=3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2\,dt \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}(x^3+1), \quad -1 \leq x < 1$$

comprobación rápida: si X es v.a cont $\longrightarrow$ F(x) es v.a continua

b)

$$\left[\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,\frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{8}(1-1) = 0\right]$$

$$\left[\sigma_x^2 = V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 0{,}6 - 0^2 = 0{,}6\right]$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,\frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{10}(1-(-1)) = \frac{3}{5}$$

c)

OPCION 1: $\int_{-1}^{V} f(x)\,dx = 0{,}90 \longrightarrow \int_{-1}^{V} \frac{3}{2}x^2\,dx = 0{,}90 \longrightarrow \frac{\cancel{3}}{2}\,\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_{-1}^{V} = 0{,}90$

$$\longrightarrow V^3 + 1 = 1{,}80 \longrightarrow V = \sqrt[3]{0{,}80} = 0{,}9283$$

OPCION 2: $F(V) = 0{,}90 \longrightarrow \frac{1}{2}(V^3+1) = 0{,}90 \longrightarrow \ldots$

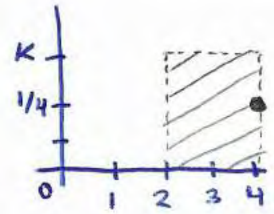
EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria mixta

Tenemos una máquina que nos devuelve aleatoriamente un número real entre 2 y 4 todos ellos con igual probabilidad. El problema es que la máquina tiene un defecto de fabricación de forma que una de cada cuatro veces nos devuelve el número 4.
Si definimos la variable aleatoria **X** como "número real que devuelve la máquina" se pide calcular la fdp y la función de distribución de dicha variable aleatoria.

V.a X = "nº real que devuelve la maquina"

$$f(x) = \begin{cases} K & , 2 < x < 4 \quad \to \text{V.a continua} \\ P(x=4) = \frac{1}{4} & \to \text{V.a discreta} \end{cases}$$



f(x) es función de densidad si $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \longrightarrow \int_2^4 K \cdot dx + P(x=4) = 1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow K\left[x\right]_2^4 + \frac{1}{4} = 1 \longrightarrow 2K = \frac{3}{4} \longrightarrow \boxed{K = \frac{3}{8}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3/8 & , \text{ si } 2 \leq x < 4 \\ P(x=4) = 1/4 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 2 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_2^x \frac{3}{8}\,dt = \frac{3}{8}\left[t\right]_2^x = \frac{3}{8}(x-2) & , 2 \leq x < 4 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

$F(2^-) = 0$
$F(2^+) = 0$

V.a continua

$F(4^-) = 3/4$
$F(4^+) = 1$

V.a discreta

salto de 1/4

2.4 Transformaciones de variable aleatoria

2.4.1 Transformación de una v.a. continua en una v.a. continua

- Sea **X** una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua estrictamente creciente o decreciente sobre R_X y tal que existe inversa φ^{-1} y admite derivada continua.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$.

Entonces **Y** es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|(\varphi^{-1})'(y)\right| & si \quad y \in R_Y \\ 0 & si \quad y \notin R_Y \end{cases}$$

Por supuesto, la nueva v.a. **Y** tendrá un rango R_Y distinto al de **X** que habrá que calcular.

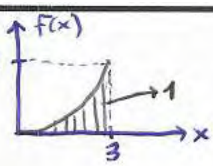
EJEMPLO

Sea **X** una v.a. continua con rango $R_X = (0, 3)$ y fdp:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & si \quad 0 < x < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

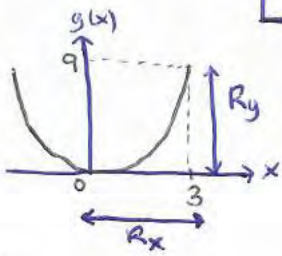
Caracterizar la v.a. dada por $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2$.

v.a X ~ $f_X(x) = \dfrac{x^2}{9}$, $0 < x < 3$



Transformación : $Y = x^2$

$y = g(x) = x^2$



Transformación de v.a continua (x) en v.a continua (y)

1) $g(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_x = (0,3)$

2) Existe inversa $g^{-1}(y)$: $y = x^2 \to \sqrt{y} = x \to x = \boxed{+\sqrt{y} = g^{-1}(y)}$

3) $g^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_y = (0,9)$

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Se cumplen las 3 condiciones, podemos aplicar la formula de la transform.

$$f_y(y) = \underbrace{f_x(x = g^{-1}(y))}_{\frac{(\sqrt{y})^2}{9}} \cdot \underbrace{\left|(g^{-1})'(y)\right|}_{\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|} =$$

$$\frac{(\sqrt{y})^{\cancel{2}}}{9} \cdot \left|\frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}}\right| = \frac{\sqrt{y}}{18}, \quad 0 < y < 9$$

comprobar $\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\,dy = 1$

2.4.2 Generalización de la transformación de una v.a continua en una v.a. continua

Claro está que, al tratarse de una generalización del teorema anterior todos los problemas que se podían resolver con aquel teorema ahora también se pueden resolver con éste.

Sucede con frecuencia que la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no es estrictamente creciente ni decreciente. En ese caso el teorema de la página anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

- Sea **X** una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable $\forall x\in R_X$ tal que φ' es continua y $\varphi'\neq 0$ salvo en un número finito de puntos.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y}=\varphi(\mathbf{X})$.
- Sea $\{x_1, x_2,\dots,x_n\}$ el conjunto de las preimágenes de $y=\varphi(x)$.

Ya no se exige que sea estrictamente creciente ni que tenga inversa

Entonces **Y** es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i=\varphi_i^{-1}(y))\cdot\left|(\varphi_i^{-1})'(y)\right| & \text{si } y\in R_Y\\ 0 & \text{si } y\notin R_Y\end{cases}$$

Lo más habitual en los ejercicios es que cada imagen de la transformación φ tenga solo dos preimágenes $\{x_1, x_2\}$. En este caso la anterior fórmula queda como sigue:

Esta es la fórmula que utilizaremos habitualmente

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(x_1=\varphi_1^{-1}(y))\cdot\left|(\varphi_2^{-1})'(y)\right| + f_X(x_2=\varphi_2^{-1}(y))\cdot\left|(\varphi_2^{-1})'(y)\right| & \text{si } y\in R_Y\\ 0 & \text{si } y\notin R_Y\end{cases}$$

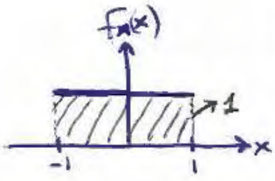
Al igual que antes, la nueva v.a. **Y** tendrá un rango R_Y distinto al de **X** que hay que calcular.

Importante: Si las operaciones matemáticas necesarias para aplicar la fórmula presentada anteriormente para la transformación de v.a. continua a v.a. continua resultan demasiada pesadas, puede ser interesante probar con otra fórmula equivalente para la transformación de v.a. continua a v.a. continua. Es la siguiente:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{f_X(x_i)}{\left|\varphi'(x_i)\right|}\right|_{x_i=g_i^{-1}(y)} & \text{si } y\in R_Y\\ 0 & \text{si } y\notin R_Y\end{cases}$$

EJEMPLO

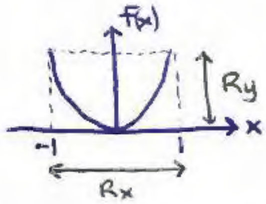
Sea **X** una v.a. uniforme en el intervalo [–1 , 1]. Caracterizar la v.a. $Y = X^2$.



V.a $X \sim U(-1,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{2}$, si $-1 < x < 1$

Transformación : $Y = X^2$

$$y = g(x) = x^2$$



Transformación de v.a continua(x) en v.a continua (Y)

g(x) tiene parte decreciente y parte creciente en $R_x = (-1,1)$

PARTE 1 :

$-1 < x < 0$

1) $g_1(x)$ es estrictamente decreciente en $R_x = (-1,0)$

2) Existe $g_1^{-1}(y)$: $y = x^2 \rightarrow \boxed{x = -\sqrt{y} = g_1^{-1}(y)}$

3) $(g_1^{-1})'(y) = -\frac{1}{2} y^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$g_1^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_y = (0,1)$

PARTE 2 :

1) $g_2(x)$ es estrictamente creciente en $R_x = (0,1)$

2) Existe $g_2^{-1}(y)$: $y = x^2 \longrightarrow \boxed{x = +\sqrt{y} = g_2^{-1}(y)}$

3) $g_2'(y)$ es continua y derivable en $R_y = (0,1)$

$$(g_2^{-1})'(y) = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Se cumplen las 3 condiciones, podemos aplicar la formula de la transf

$$f_Y(y) = \underbrace{f_X(x = g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)|}_{\text{PARTE 1}} + \underbrace{f_X(x = g_2^{-1}(y)) \cdot |(g_2^{-1})'(y)|}_{\text{PARTE 2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right|} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \ , \ 0 < y < 1$$

2.4.3 Transformación de una v.a continua en una v.a. discreta

- Sea $\mathbf{X}$ una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$.
- Sea $R_Y = \varphi(R_X)$ un conjunto discreto.

Entonces $\mathbf{Y}$ es una v.a. discreta y su fdp viene definida por:

$$p_Y(\mathbf{Y} = y_i) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{x/\varphi(x)=y\}} f_X(x)dx & si \quad y \in R_Y \\ 0 & si \quad y \notin R_Y \end{cases}$$

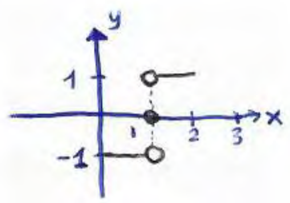
Por supuesto, la nueva v.a. $\mathbf{Y}$ tendrá un rango R_Y distinto al de $\mathbf{X}$ que habrá que calcular.

EJEMPLO

Sea $\mathbf{X}$ una v.a. continua con rango $R_X = (0,3)$ y fdp:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Caracterizar la v.a. dada por $\mathbf{Y} = \begin{cases} -1 & si \quad \mathbf{X} < 1 \\ 0 & si \quad \mathbf{X} = 1 \\ 1 & si \quad \mathbf{X} > 1 \end{cases}$.



$\text{V.a } \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x) = \dfrac{x^2}{9}, \quad 0 < x < 3 \qquad y = g(x)$

TRANSFORMACIÓN DE V.a CONTINUA EN V.a DISCRETA (X) (Y)

- $P(Y=-1) = P(X<1) = \displaystyle\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{1} f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{9}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{27}$

X v.a continua

- $P(Y=0) = P(X=1) = 0$
- $P(Y=1) = P(X>1) = \displaystyle\int_1^{\cancel{\infty}\,3} f(x)dx = \int_1^3 \frac{x^2}{9}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{27}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{27}\,\delta(y+1) + \frac{26}{27}\,\delta(y-1)$$

Notar que no existe la transformación de v.a. discreta a v.a. continua

2.4.4 Transformación de una v.a discreta en una v.a. discreta

- Sea $\mathbf{X}$ una v.a. discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y fdp $p_X(\mathbf{X} = x_i)$, $\forall x_i \in R_X$.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$.

Entonces $\mathbf{Y}$ es una v.a. discreta y su fdp viene definida por:

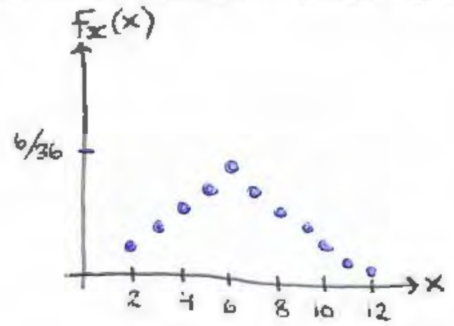
$$p_Y(\mathrm{Y} = y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \{x \in \mathbb{R} \,/\, \varphi(x) = y\}} p_X(\mathrm{X} = x) & \text{si } \ y \in R_Y \\ 0 & \text{si } \ y \notin R_Y \end{cases}$$

Por supuesto, la nueva v.a. $\mathbf{Y}$ tendrá un rango R_Y distinto al de $\mathbf{X}$ que habrá que calcular.

EJEMPLO

Sea $\mathbf{X}$ la variable aleatoria que indica la suma en el lanzamiento de dos dados. Consideramos el juego siguiente: un jugador gana 5 unidades monetarias si la suma es 7 u 11, pierde 3 unidades si la suma es 3 ó 12 y no gana ni pierde en cualquier otro caso. Caracterizar la v.a. $\mathbf{Y}$ definida como "ganacia del jugador".

$$f_X(x) \begin{cases} P(X=2) = 1/36 \\ P(X=3) = 2/36 \\ P(X=4) = 3/36 \\ P(X=5) = 4/36 \\ P(X=6) = 5/36 \\ P(X=7) = 6/36 \\ P(X=8) = 5/36 \\ P(X=9) = 4/36 \\ P(X=10) = 3/36 \\ P(X=11) = 2/36 \\ P(X=12) = 1/36 \end{cases}$$

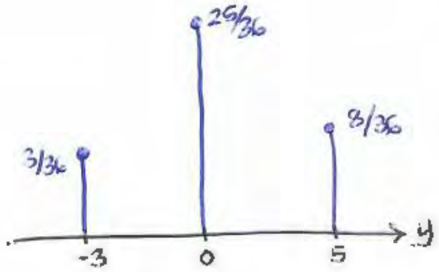


Transformación Y

$$= \begin{cases} -3 \ , \text{ si } X = 3, 12 \\ 0 \ , \text{ resto} \\ 5 \ , \text{ si } X = 7, 11 \end{cases}$$

ganancia jugador

$$P(Y=-3) = P(X=3) + P(X=12) = 3/36$$
$$P(Y=0) = 1 - \frac{3}{36} - \frac{9}{36} = 25/36$$
$$P(Y=5) = P(X=7) + P(X=11) = 8/36$$



$$f_Y(y) = \frac{3}{36}\,\delta(y+3) + \frac{25}{36}\,\delta(y) + \frac{8}{36}\,\delta(y-5)$$

2.5 Parámetros de una variable aleatoria

2.5.1 Esperanza matemática

La **esperanza matemática** de una variable aleatoria se define de la siguiente manera:

$$E(\mathbf{X}) = \sum_i x_i\, p_X(\mathbf{X}=x_i) \qquad \text{para v.a. discretas}$$

$$E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \qquad \text{para v.a. continuas}$$

Propiedades

1.- $E(a\mathbf{X} \pm b) = E(a\mathbf{X}) \pm E(b) = a\,E(\mathbf{X}) \pm b$

2.- $E(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) \pm E(\mathbf{Y})$

3.- Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes $\Rightarrow$ $E(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = E(\mathbf{X})\cdot E(\mathbf{Y})$

4.- Si $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$, la esperanza queda definida por:

¡¡ Importante: muy típico en exámenes de Grado!!

$$E(g(\mathbf{X})) = \sum_i g(x_i)\; p_X(\mathbf{X}=x_i) \qquad \text{para v.a. discretas}$$

$$E(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx \qquad \text{para v.a. continuas}$$

2.5.1 Varianza

La **varianza** de una variable aleatoria se define en función de la esperanza de la siguiente forma:

$$V(\mathbf{X}) = E\left[\left(\mathbf{X}-E(\mathbf{X})\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^2\, f_X(x)\, dx \quad NO$$

Sin embargo, nosotros normalmente no utilizaremos la anterior definición para calcular la varianza de una v.a. **X** sino que la calcularemos con la siguiente fórmula práctica:

Por supuesto, se puede demostrar que ambas expresiones de la varianza son equivalentes

$$V(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - (E(\mathbf{X}))^2$$

La **desviación típica** se define a partir de la varianza como:

$$\sigma_X = \sqrt{V(\mathbf{X})}$$

Propiedades

1.- $V(a\mathbf{X} + b) = a^2\, V(\mathbf{X})$

Esta fórmula se verá con más detalle en el Tema 3

2.- $V(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y}) \pm 2C_{X,Y}$

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes $\Rightarrow$ $V(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y})$

2.6 Momentos

El concepto de esperanza se puede generalizar. Para ello vamos a definir el concepto de momento.

2.6.1 Momentos respecto al origen

Se llama **momento de orden k de la v.a. X respecto al origen**, a la esperanza matemática de $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^k$. es decir:

$$\alpha_k = E(\mathbf{X}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx$$

De esta forma, se podemos afirmar que la media es el momento respecto al origen de orden uno:

$$\alpha_1 = E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

2.6.2 Momentos respecto a la media

Se llama momento respecto a la media de orden k, o momento central de orden k , de la v.a. **X**, a la esperanza matemática de $g(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-\alpha_1)^k$. Es decir:

$$\mu_k = E\left[(\mathbf{X}-\alpha_1)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^k f_X(x)\, dx$$

Un caso particular importante es el momento respecto a la media de orden dos que es la varianza:

Esta es la definición rigurosa de varianza

$$\mu_2 = V(\mathbf{X}) = E\left[(\mathbf{X}-\alpha_1)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^2 f_X(x)\, dx$$

2.7 Distribuciones importantes

Existen ciertas variables aleatorias de especial interés. Las características de cada una de estas variables aleatorias (fdp, función de distribución, momentos, etc...) son conocidas y todas ellas están recogidas en el apéndice "Distribuciones importantes". Aquí lo único que vamos a hacer es enumerar estas distribuciones.

2.7.1 Distribuciones discretas

- **Distribución binomial**
  La más conocida de las distribuciones discretas. Posee propiedad reproductiva.
- **Distribución de Poisson**
  Posee propiedad reproductiva.
- **Distribución geométrica**

2.7.2 Distribuciones continuas

- **Distribución normal**
  La más importante de todas las distribuciones. Posee propiedad reproductiva.
- **Distribución exponencial**
- **Distribución uniforme**
  La distribución continua más sencilla. Con esta distribución casi todos los cálculos se pueden hacer gráficamente.

2.8 Teorema central del límite

Existen muchas formas de enunciar este importante teorema. Aquí damos tres de ellas de más a menos restrictiva.

Primera versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$. Si todas las $\mathbf{X}_i$ tienen la misma distribución entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

Segunda versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$. Si todas las $\mathbf{X}_i$ tienen la misma media y la misma varianza (aunque tengan distribucines distintas) entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

Tercera versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Si $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$ entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

CUADRO RESUMEN DE DISTRIBUCIONES

Nombre de la distribución	Discreta/Continua	Parámetros	Función de densidad	Esperanza	Varianza	¿Qué indica? ¿Cuándo se utiliza?
Binomial	Discreta	n, p	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0,1,2 \ldots n$	np	$np(1-p)$	Nos indica el número de éxitos en una situación de éxito-fracaso
Poisson	Discreta	λ	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,2 \ldots$	λ	λ	Nos indica el número de veces que sucede un experimento en un determinado espacio de tiempo
Geométrica	Discreta	p	$f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$, $x = 1,2 \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Nos indica el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito en una situación de éxito-fracaso
Normal	Continua	μ, σ	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$	μ	σ^2	Se suele utilizar como aproximación de otras distribuciones (TCL)
Uniforme	Continua	a, b	$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Se suele utilizar cuando nos dan los valores extremos (mínimo y máximo) que puede tomar una variable aleatoria
Exponencial	Continua	λ	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Nos indica el tiempo transcurrido hasta conseguir el primer éxito en una situación de éxito-fracaso

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. binomial:

Sean n ensayos repetidos e independientes donde sólo hay dos resultados posibles y las probabilidades, p y 1-p, son las mismas en todos los ensayos. Entonces la variable aleatoria binomial se define como:

$$\mathbf{X} = \text{"Número de éxitos en } n \text{ ensayos"}$$

Se lee "Sea X una distribución binomial de parámetros n y p"

y se representa:

$$\mathbf{X} \equiv B(n, p)$$

Función de densidad: $P(\mathbf{X} = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n$

Función de distribución: $P(\mathbf{X} \leq x) = \sum_{i \leq x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

Momentos:

$$E[\mathbf{X}] = np$$

$$E[\mathbf{X}^2] = np + n(n-1)p^2$$

$$V[\mathbf{X}] = npq$$

Caso particular:

A la distribución binomial B(1, p), es decir con $n = 1$, se le denomina Distribución de Bernouilli.

Propiedad reproductiva:

La suma de variables aleatorias binomiales independientes con el mismo parámetro p es binomial con parámetro p. Sean $\mathbf{X}_1 \equiv B(n_1, p), \ldots, \mathbf{X}_m \equiv B(n_m, p)$ m distribuciones binomiales, entoncesse cumple que:

$$\mathbf{X}_1 + \ldots + \mathbf{X}_m \equiv B(n_1 + \ldots + n_m, p)$$

Aproximación por una Distribución Normal:

Siempre que se cumpla $np \geq 5$ la distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal de la siguiente forma:

Este es un caso particular del teorema central del limite

$$\mathbf{X} \equiv B(n, p) \xrightarrow{np \geq 5} \mathbf{X} \equiv N(np, \sqrt{npq})$$

EJEMPLO DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Un examen está compuesto de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Un alumno decide contestar las 10 preguntas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente 4 preguntas?

Consideramos los siguientes sucesos y sus probabilidades:

Éxito: A = "contestar bien" $\Rightarrow P(A) = p = \frac{1}{4} = 0,25$

Fracaso: $\overline{A}$ = "no contestar bien" $\Rightarrow P(\overline{A}) = 1-p = \frac{3}{4} = 0,75$

Leyendo atentamente el enunciado llegamos a la conclusión de que se trata de una distribución binomial de parámetros $B(10,\ 0'25)$.

Ahora definimos la siguiente variable aleatoria:

X = "número de preguntas contestadas correctamente"

Y calculamos lo que nos piden:

Los cálculos de estas expresiones son, a veces, muy laboriosos; por esta razón se han construido tablas que nos proporcionan directamente el resoltado para los distintos valores de n y de x

$$P(\text{acertar } 4) = P(X=4) = \binom{10}{4}\cdot 0,25^4 \cdot 0,75^6 = \frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!}\cdot 0,25^4\cdot 0,75^6 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,25^4\cdot 0,75^6 = \frac{5040}{24}\cdot 0,25^4\cdot 0,75^6 = 0,1460$$

Solución: $P(\text{acertar } 4) = 0,1460$

Nota teórica:

Importante: Cuando identifiques estas tres características en el enunciado de un ejercicio, no lo dudes: se trata de una distribución binomial

Decimos que un experimento sigue el modelo de **distribución binomial** siempre que cumple las siguientes tres características:

1. En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados, éxito o fracaso.
2. El resultado obtenido en cada prueba es independiente de resultados anteriores.
3. La probabilidad de éxito es constante y no varía de una prueba a otra.

A la variable aleatoria X que expresa el número de éxitos obtenidos la llamaremos variable aleatoria binomial y lo escribiremos de la siguiente forma:

$$X \sim B(n,p)$$

Siendo n el número de veces que se realiza el experimento y p la probabilidad de éxito cada vez que se realiza una prueba del experimento.

La función de probabilidad nos permite calcular la probabilidad de obtener x éxitos en n intentos

La función de probabilidad de la distribución binomial viene dada por:

$$P(\text{obtener } x \text{ exitos}) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. de poisson:

La distribución de Poisson surge como aproximación de la distribución binomial cuando la probabilidad de que ocurra el suceso es muy pequeña (en concreto, la distribución de Poisson es buena si en la distribución binomial tenemos que $p < 0{,}1$ y $np < 5$).

Así pues, diremos que una v.a. **X** tiene una distribución de Poisson de parámetro λ si su función de densidad es:

Función de densidad: $P(\mathbf{X} = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n$

Función de distribución: $P(\mathbf{X} \leq x) = \sum\limits_{r \leq x} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$

Momentos:

$E[\mathbf{X}] = \lambda$

$E[\mathbf{X}^2] = \lambda + \lambda^2$

$V[\mathbf{X}] = \lambda$

EJEMPLO DE DISTRIBUCIÓN DE POISSON

En los últimos 600 años se han producido 12 grandes terremotos en España. Determínese la probabilidad de que se produzcan 2 en los próximos 25 años.

El suceso que vamos a estudiar es: los grandes terremotos en España. La probabilidad de que tenga lugar este suceso será:

$$p = \frac{12}{600} = 0,02$$

Por tanto, el valor promedio de dicho suceso será:

Fíjate que queremos estudiar lo que pasará en los próximos 25 años, por eso n=25.

$$\lambda = np = 25 \cdot 0,02 = 0,5$$

Leyendo atentamente el enunciado llegamos a la conclusión de que se trata de una distribución de Poisson de parámetro $Pois(0,5)$ ya que queremos estudiar la probabilidad de que se produzcan 2 terremotos.

Ahora definimos la siguiente variable aleatoria:

X = "número de terremotos importantes que tienen lugar en España"

Y calculamos lo que nos piden:

$$P(2 \text{ terremotos}) = P(X=2) = \frac{0,5^2}{2!}e^{-0,5} = \frac{0,25}{2 \cdot 1}e^{-0,5} = 0,0758$$

Solución: $P(2 \text{ terremotos}) = 0,0758$

Resumen:
La Poisson es la distribución de los sucesos "raros", es decir que aparecen raramente. Así, cuando nos hablen de terrenotos, accidentes, piezas defectuosas, etc... habitualmente se trata de una Poisson

Nota teórica:

Decimos que un experimento sigue el modelo de **distribución de Poisson** siempre que cumple las siguientes tres características:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo es independiente del número que ocurre en otro intervalo disjunto. Los sucesos aparecen aleatoriamente de forma independiente. Se dice que el proceso no tiene memoria

2. La probabilidad de que un resultado sencillo ocurra en un intervalo pequeño es proporcional a la longitud de dicho intervalo. Además dicha probabilidad permanece constante, de forma que se puede definir un número medio de resultados por unidad de intervalo. Se dice que el proceso es estable

3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

Cuando identifiques estas tres características en el enunciado de un ejercicio, no lo dudes: se trata de una distribución de Poisson

A la variable aleatoria X que expresa el número de resultados que aparecen en el experimento la llamaremos variable aleatoria de Poisson y la escribiremos como:

$$X \sim Pois(\lambda)$$

Siendo x el número de veces que se produce un determinado suceso y λ el valor promedio de dicho suceso.

La función de probabilidad de la distribución de Poisson viene dada por:

La función de probabilidad nos permite calcular la probabilidad de que se den x sucesos con valor promedio λ

$$p(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. geométrica:

Sea un experimento aleatorio determinado y sea A un suceso del espacio muestral correspondiente a dicho experimento aleatorio del que conocemos la probabilidad de que ocurra $P(A) = p$. Consideremos también una serie de pruebas independientes del citado experimento aleatorio, hasta que se obtiene el suceso A. La variable aleatoria geométrica se define como:

X = "Número de pruebas necesarias para que el suceso A aparezca por primera vez"

Función de densidad: $p\left(X = x\right) = \left(1 - p\right)^{x-1} p \qquad x = \quad 1, 2, \dots n$

Función de distribución: $F\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 1 \\ 1 - \left(1 - p\right)^{x} & \text{si } \; x \geq 1 \end{cases}$

Momentos:

$$E\left[\mathbf{X}\right] = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{X}^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V\left[\mathbf{X}\right] = \frac{1-p}{p^2}$$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Tipo de variable aleatoria: Continua

Definición de la v.a. uniforme:

Una v.a. se dice que tiene una distribución uniforme de parámetro a y b, y se representa por:

$$X \equiv U[a, b]$$

si modeliza fenómenos en los que sabemos que la v.a no puede tomar valores superiores a b ni inferiores a a, siendo los sucesos en este intervalo equiprobables. Su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

Momentos:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

EJEMPLO DE DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Se sabe que el peso de las uvas se distribuye siempre de forma equiprobable entre 6 y 10 gramos. Determina la función de densidad del peso de las uvas y el peso medio de las uvas.

Definimos la siguiente variable aleatoria:

X = "peso de las uvas (en gramos)"

Observamos que dicha variable aleatoria sigue una distribución uniforme ya que podemos escribir su función de densidad como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10-6} = \dfrac{1}{4} & \text{para } 6 < x < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Quieren saber el peso medio de las uvas, y sabiendo que la variable aleatoria sigue una distribución uniforme bastará con realizar la siguiente operación:

Fíjate lo rápido que lo haces cuando te das cuenta de que es una distribución uniforme.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{6+10}{2} = 8$$

También podrías haber realizado este cálculo como lo haces habitualmente, integrando

En este caso este procedimiento es mucho más largo

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{6} xf(x)\,dx + \int_{6}^{10} xf(x)\,dx + \int_{10}^{\infty} xf(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{6} x\cdot 0\,dx}_{=0} + \int_{6}^{10} x\cdot\frac{1}{4}\,dx + \underbrace{\int_{10}^{\infty} x\cdot 0\,dx}_{=0}\ \mu = \frac{1}{4}\int_{6}^{10} x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_6^{10} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{10^2}{2} - \frac{6^2}{2}\right) = \frac{1}{4}(50-18) = 8$$

y, evidentemente, obtenemos el mismo resultado.

Solución: $E(X) = 8$

Nota teórica:

Se dice que una variable X sigue una **distribución uniforme** en el intervalo (a, b) si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x \notin (a,b) \end{cases}$$

A la variable aleatoria X se la denota como: $X \sim U(a,b)$ siendo a y b los extremos del intervalo.

En este caso es muy fácil determinar la esperanza o media y la varianza, ya que no es necesario integrar como lo hacemos normalmente.

Sus propiedades son: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ y $\text{var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Tipo de variable aleatoria: Continua

Definición de la v.a. exponencial:

Una v.a. se dice que tiene una distribución exponencial de parámetro λ, y se suele representar por:

$$\mathbf{X} \equiv \exp(\lambda)$$

si su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ \ x > 0 \end{cases}$

Momentos:

$$E[\mathbf{X}] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E\left[\mathbf{X}^2\right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V[\mathbf{X}] = \frac{1}{\lambda^2}$$

EJEMPLO DE DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona que se le haya implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro entre los 10 y los 20 años?

Definimos la siguiente variable aleatoria:

X = "Años de duración de un marcapaso en una persona"

Nos dicen que la distribución es exponencial cuya media es 16, por lo que $\lambda = \frac{1}{16}$,

y tenemos una distribución exponencial $X \sim \exp\left(\frac{1}{16}\right)$

Queremos saber la probabilidad de que haya que reimplantar el marcapasos entre los 10 y los 20 años de su implantación, es decir

Ten cuidado que la probabilidad la obtenemos con la función de distribución, no con la función de densidad. Además es la diferencia del límite superior menos el inferior ya que la función de distribución es el área que se encuentra a la izquierda de un determinado valor.

$$P(10 < x < 20) = F(20) - F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{16}\cdot 20} - \left(1 - e^{-\frac{1}{16}\cdot 10}\right) =$$

$$= \cancel{1} - e^{-20/16} \cancel{-1} + e^{-10/16} = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0,2488$$

Solución: $P(10 < x < 20) = 0,2488$

Nota teórica:

Ejemplos de distribuciones exponenciales serían el tiempo de vida de un objeto o el tiempo entre llamadas.

La **distribución exponencial** es aquella que modela el tiempo transcurrido entre dos sucesos que se producen de forma independiente, separada y uniforme en el tiempo.

A la variable aleatoria X se la denota como

$$X \sim \exp(\lambda)$$

Siendo λ el número medio de ocurrencias del suceso por unidad de tiempo

La función de densidad de la distribución exponencial viene dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{para } x \geq 0$$

y su función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La esperanza será $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y la varianza $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

TEMA 3: VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

En el tema precedente, hemos descrito un experimento aleatorio con la ayuda de una sola variable aleatoria. Sin embargo, en ciertas situaciones, es imposible o no deseable representar un experimento aleatorio por una sola variable aleatoria.

Por tanto, se trata ahora, en este tema, de ampliar lo ya visto en el tema anterior a experimentos aleatorios definidos mediante dos variables aleatorias.

3.1 Definiciones

Sea Ω un espacio muestral. Se denomina **variable aleatoria bidimensional** a cualquier función del espacio muestral en los números reales:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X},\mathbf{Y}):\ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ w &\longrightarrow (\mathbf{X}(w),\ \mathbf{Y}(w))\end{aligned}$$

El **rango** o **recorrido** es el conjunto de las imágenes del espacio muestral Ω en R^2:

$$R_{XY} = \{\ (\mathbf{X}(w), \mathbf{Y}(w)) : \forall w \in \Omega\ \}$$

Tipos de variables aleatorias

Se dice que una variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es **discreta** si su recorrido R_{XY} es un subconjunto finito o infinito numerable del plano R^2.

Se dice que una variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es **continua** si su recorrido R_{XY} es un subconjunto infinito no numerable del plano R^2 y su función de distribución es una función continua.

3.2 Función de densidad de probabilidad (fdp)

Ahora la fdp va a ser una superficie y la probabilidad va a venir representada como el volumen bajo esa superficie

Una función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria bidimensional **(X, Y)** si cumple:

1.- $f_{XY}(x, y) \geq 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

2.- f_{XY} es integrable Riemann en $\mathbb{R}^2$

3.- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx = 1$

3.3 Función de distribución

Dada la variable aleatoria bidimensional **(X, Y)** llamamos función de distribución conjunta
a la expresión:

$$F_{XY}(x, y) = P_{XY}(\mathbf{X} \leq x,\ \mathbf{Y} \leq y)$$

La función de distribución de una v.a. bidimensional lo que hace es "acumular" la probabili-dad que hay por debajo y a la izquierda de un determinado punto (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$.

Propiedades

1.- $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$

2.- $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$
$F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$

3.- $P(a \leq \mathbf{X} \leq b,\ \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(a,d)$
$P(\mathbf{X} \leq b,\ c \leq \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(b,c)$
$P(a \leq \mathbf{X} \leq b,\ c \leq \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

4.- La relación entre la función de distribución y la función de densidad de probabilidad es la siguiente:

En este caso la integral sólo tiene sentido para v. a. continuas. Para v.a. discretas se trataría de un sumatorio

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x}$$

Estos conceptos son exclusivos de v.a. bidimensionales. Por tanto, no existen para v.a. unidimensionales

ejemplo:

X	5	10	15	
2	1/6	1/12	1/4	1/2
4	1/6	1/3	0	1/2
	1/3	5/12	1/4	1

$$f_x(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$

$$P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j)$$

3.4 fdp marginales

Las funciones de densidad de probabilidad marginales de una determinada v.a. (**X**, **Y**) se definen como:

- v.a. continua: $\left[f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \right]$ $\left[f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx \right]$
- v.a discreta: $\left[f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y) \right]$ $\left[f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y) \right]$

3.5 Distribuciones condicionales

La fdp de **X** condicionada por **Y** se obtiene mediante:

$$\left[f_X(x/\mathbf{Y}=y_0) = \frac{f_{XY}(x,y_0)}{f_Y(y_0)} \right]$$

y la función de distribución condicional se obtiene por integración de la fdp condicional:

$$F(x/\mathbf{Y}=y_0) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u/\mathbf{Y}=y_0)\,du$$

Análogamente, la fdp de **Y** condicionada por **X** se obtiene mediante:

$$f_Y(y/\mathbf{X}=x_0) = \frac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)}$$

y la función de distribución condicional se obtiene por integración de la fdp condicional:

$$F(y/\mathbf{X}=x_0) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u/\mathbf{X}=x_0)\,du$$

3.6 Independencia

Dos variables continuas son **independientes** si las funciones de densidad que caracterizan su distribución de probabilidad conjunta y sus fdp marginales satisfacen:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \qquad \forall x, y$$

también se puede decir que son independientes si se cumple que:

Ambas definiciones son equivalentes

$$f_X(x/y) = f_X(x)$$

$$f_Y(y/x) = f_Y(y)$$

3.7 Transformación de variable aleatoria

3.7.1 Transformación de una v.a continua en una v.a. continua

- Sea $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ una v.a. bidimensional continua con rango R_{XY} y fdp $f_{XY}(x, y)$.
- Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $\varphi(z,t) = (z(x,y), t(x,y))$. Es decir, sea la transformación dada por las ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \end{cases}$

Si este determinante sale igual a cero no se puede aplicar este teorema

- Sea el jacobiano (determinante de la matriz jacobiana): $J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$

Entonces $(\mathbf{Z}, \mathbf{T})$ es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

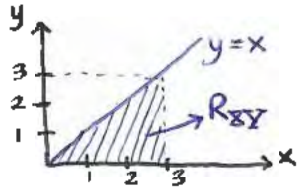
$$f_{ZT}(z,t) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x(z,t), y(z,t))}{|J(x(z,t), y(z,t))|} & \text{si } (z,t) \in R_{ZT} \\ 0 & \text{si } (z,t) \notin R_{ZT} \end{cases}$$

Al igual que sucedía en el tema anterior la nueva v.a. $(\mathbf{Z}, \mathbf{T})$ tendrá un rango R_{ZT} distinto al de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ que habrá que calcular.

EJEMPLO

Dada la variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8xy}{81} & \text{si } 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Hallar la distribución conjunta del vector aleatorio $(\mathbf{Z}, \mathbf{T})$ tal que $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, $\mathbf{T} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$

Transformación $\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{cases}$ Transformación de v.a bidimensional continua (X,Y) en v.a bidimensional continua (Z,T)

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la formula de la transformación

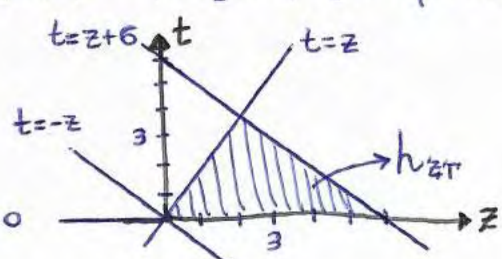
$$f_{ZT}(z,t) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=\frac{1}{2}(z+t) \\ y=\frac{1}{2}(z-t)}} = \frac{8xy/81}{|-2|} = \frac{4}{81}\cdot\frac{1}{2}(z+t)\frac{1}{2}(z-t) = \frac{1}{81}(z^2-t^2)$$

$\begin{cases} z = x+y \\ t = x-y \end{cases}$ $\oplus\ x = \frac{1}{2}(z+t)$ $\ominus\ y = \frac{1}{2}(z-t)$

$$R_{Z,T}: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{1}{2}(z+t) \le 3 \longrightarrow 0 \le z+t \le 6 \\ 0 \le \frac{1}{2}(z-t) \le \frac{1}{2}(z+t) \longrightarrow 0 \le z-t \le z+t \end{cases}$$

$$0 \le z+t \le 6 \begin{cases} 0 \le z+t \Rightarrow \boxed{t \ge -z} \\ z+t \le 6 \Rightarrow \boxed{t \le -z+6} \end{cases}$$

$$0 \le z-t \le z+t \begin{cases} 0 \le z-t \longrightarrow \boxed{t \le z} \\ \cancel{z}-t \le \cancel{z}+t \longrightarrow \boxed{t \ge 0} \end{cases}$$



3.7.2 Transformación de v.a. bidimensional en v.a. unidimensional

En ocasiones nos definen una variable aleatoria unidimensional en función de una v.a. bidimensional:

$$\mathbf{Z} = f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

Como nos falta otra ecuación para poder aplicar el teorema de transformación de v.a. bidimensional en v.a. bidimensional visto en el punto 3.7.1 lo que hacemos es proceder de la siguiente forma:

- Definimos otra variable aleatoria ficticia y la igualamos a cualquiera de las dos ya definidas, de forma que la situación queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{W} &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

- Ahora si que tenemos un sistema de dos ecuaciones que relaciona una v.a bidimensional (**X**, **Y**) en otra v.a. bidimensional (**Z**, **W**). Aplicamos, por tanto, sobre este sistema el teorema de transformación de v.a. bidimensional y obtenemos la fdp $f_{ZW}(z, w)$.

- Por último, calculamos la fdp marginal de **Z** obteniendo $f_Z(z)$ que era nuestro objetivo.

3.8 Parámetros de una variable aleatoria bidimensional

3.8.1 Esperanza matemática

La **esperanza matemática** de una variable aleatoria bidimensional es:

$$\left[E(\mathbf{XY}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy \right]$$

Se dice que dos v.a. **X** e **Y** son **ortogonales** si se cumple que $E(\mathbf{XY}) = 0$!

Propiedades

1.- $\left.\begin{cases} E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \\ E(kX) = k \cdot E(X) \\ E(k) = k \end{cases}\right\} k \in \mathbb{R}$

Para la izq no!!

2.- Si **X** e **Y** son independientes $\Rightarrow$ $E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X}) \cdot E(\mathbf{Y})$

3.- Si $\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, la esperanza queda definida por:

$$E(\mathbf{Z}) = E(g(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

¡¡ Muy típico de examen en Grado!!

4.- Si $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$, la esperanza queda definida por:

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x)\, f_X(x)\, dx$$

3.8.2 Covarianza. Coeficiente de correlación

- La **covarianza** de una variable aleatoria bidimensional **(X, Y)** se define como:

$$\boxed{C_{XY} = E\left[\left(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})\right)\left(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})\right)\right] = E(\mathbf{XY}) - E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})}$$

- Se dice que dos v.a. **X** e **Y** están **incorreladas** si se cumple que:

$$C_{XY} = 0 \iff E(\mathbf{XY}) - E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y}) = 0 \iff E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$$

Ojo: el recíproco no es cierto

esto es como lo general — y esto es un caso particular

- Si **X** e **Y** son independientes $\Rightarrow$ **X** e **Y** son incorreladas

$\not\Leftarrow$ (independiente linealmente)

- El **coeficiente de correlación** se define como:

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

donde σ_X y σ_Y son las desviaciones típicas de las v.a. **X** e **Y**.

Propiedades

1.- $\left.\begin{cases} V(X \cdot Y) \neq V(X) \cdot V(Y) \\ V(kX) = k^2 \cdot V(X) \\ V(k) = 0 \end{cases}\right\} k \in \mathbb{R}$

2.- $V(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y}) \pm 2C_{X,Y}$

Si **X** e **Y** son independientes $\Rightarrow V(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y})$

3.- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

4.- Si **X** e **Y** son independientes $\rho_{XY} = 0$

5.- $\rho_{XY} = 1 \iff \mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$

Es decir, si el coeficiente de correlación entre dos variables es 1 o -1 podemos afirmar que ambas variables están relacionadas de forma lineal.

Ejemplo: Calcular la distribución de la v.a. $T = 3N(\overset{\uparrow\,\text{media}}{2},\overset{\uparrow\,\text{desv típica}}{1}) - 2N(-1,2) + 8$, siendo las distribuciones normales independientes entre sí

$$= N(6,3) - N(-2,4) + 8 \underset{\uparrow\,\text{indep}}{=} N\Big(\underbrace{6-(-2)+8}_{\text{media } \mu}, \underbrace{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0}}_{\text{desv típica } \sigma}\Big)$$

nunca se resta

lo haces con la varianza y luego pones la raíz

$$= N(16,5)$$

Variable Aleatoria Bidimensional Uniforme

Esto va a ser muy importante de cara a ejercicios. Por ejemplo:
- 3.7
- 3.9
- 3.12
- 3.14
- 3.16

- Si tenemos dos variables aleatorias X e Y uniformemente distribuidas e independientes $X \sim U(a,b)$, $Y \sim U(c,d)$
  → la variable aleatoria bidimensional (X,Y) seguirá también una distribución uniforme con fdp conjunta: $f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, \begin{matrix} a < x < b \\ c < y < d \end{matrix}$

- Por otro lado, si nos dicen que $\left\{ \begin{matrix} (X,Y)\, sigue\, una\, distribución\, uniforme \\ ó \\ f_{XY}(x,y) = número \end{matrix} \right\}$

  → $f_{XY}(x,y) = número = \dfrac{1}{Área(R_{XY})}$

  → $P(zona\, de\, R_{XY}) = \dfrac{Área(Zona\, de\, R_{XY})}{Área(R_{XY})}$

TEMA 4: PROCESOS ESTOCÁSTICOS

4.1 Definiciones

Sea un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral asociado. Se denomina **proceso estocástico** (*PE*) a cualquier función de Ω sobre el conjunto $\{\text{funciones de } t\}$ que asocia a cada suceso una función de t :

La diferencia entre v.a. y PE es que la v.a. asigna a cada suceso un número y el PE asigna a cada suceso una función temporal

$$\begin{aligned} PE: \Omega &\rightarrow \{\text{funciones de } t\} \\ w &\rightarrow \quad X(w,t) \end{aligned}$$

Habitualmente denotaremos un proceso estocástico como $X(t)$ o bien $X[n]$ si es en tiempo discreto.

Dado un proceso estocástico, dependiendo si fijamos un suceso concreto, un instante concreto o ambos tenemos los siguientes casos:

$$X(w,\, t) \;: \text{Proceso estocástico}$$
$$X(w_0,\, t) : \text{función de } t \; (\text{Realización del proceso})$$
$$X(w,\, t_1) \;: \text{Variable aleatoria}$$
$$X(w_0,\, t_1) : \text{punto, número real } (\text{Valor concreto})$$

De esta forma, si fijamos un instante de tiempo t_1 obtenemos una variable aleatoria unidimensional, es decir, una correspondencia entre sucesos y números reales.
Ahora bien, si fijamos dos instantes de tiempo t_1 y t_2 obtenemos una variable aleatoria bidimensional.

Estadísticos de primer orden son los resultantes de fijar un instante t y estudiar la variable aleatoria unidimensional resultante.

Estadísticos de segundo orden son los resultantes de fijar dos instantes t_1 y t_2 y estudiar la variable aleatoria bidimensional resultante.

4.2 Estadísticos de primer orden

1) Función de distribución

$$F_X(x,\, t_1) = P\big(X(t_1) \le x\big)$$

2) Función de densidad de probabilidad

$$f_X(x,\, t_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\big[x \le X(t_1) \le x + \Delta x\big]}{\Delta x}$$

3) Esperanza

$$E\big(X(t_1)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,t_1)\, dx$$

4) Varianza

$$V\big(X(t_1)\big) = E[X^2(t_1)] - E[X(t_1)]^2$$

4.3 Estadísticos de segundo orden

1) Función de distribución conjunta

$$F_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = P_{X_1X_2}(X(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2)$$

2) Función de densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \frac{P_{X_1X_2}[x_1 \le X_1 \le x_1 + \Delta x_1,\ x_2 \le X_2 \le x_2 + \Delta x_2]}{\Delta x_1\ \Delta x_2}$$

Propiedades interesantes
$$\begin{cases} R_X(t,s) = R_X(s,t) \\ R_X(t,t) = E\left[X^2(t)\right] \end{cases}$$

3) Autocorrelación $\quad R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$

$C_X(t,t) = Var[X(t)]$

4) Autocovarianza $\quad C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E(X(t_1))\,E(X(t_2))$

5) Correlación cruzada $\quad R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$

6) Covarianza cruzada $\quad C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - E(X(t_1))\,E(Y(t_2))$

¡¡ CUIDADO !!
Si la autocorrelación es igual a 0, se dice que los procesos son ortogonales (NO que son incorrelados)

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos estocásticos. Se dice que:

- $X(t)$ e $Y(t)$ son **incorrelados** $\Leftrightarrow C_{XY}(t_1, t_2) = 0$
- $X(t)$ e $Y(t)$ son **ortogonales** $\Leftrightarrow R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall\, t_1 \ne t_2$

4.4 Estacionariedad

- Se dice que un proceso es **estacionario** cuando $X(t)$ y $X(t+\varepsilon)$ tienen los mismos estadísticos $\forall\, \varepsilon$.

- $X(t)$ es **estacionario hasta orden** n cuando todos los estadísticos hasta los de orden n permanecen invariantes ante un desplazamiento del origen de tiempos.

Estas dos definiciones son muy importantes de cara a ejercicios:
- Estacionario de orden 1
- Estacionario en sentido amplio (de orden 2)

- Para ser estacionario de primer orden:

$$f_X(x, t) = f_X(x, t+\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon$$

  La única forma de que se cumpla es que $f_X(x, t)$ no dependa de t.

- Para ser estacionario de segundo orden:

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon$$

  Esto implica que $f_{X_1X_2}$ sólo depende de τ siendo $\tau = t_2 - t_1$.

  A los PE estacionarios de segundo orden también se les denomina **estacionarios en sentido amplio** ó débilmente estacionario (ESA).

Esta será la manera en que procederemos en los ejercicios

  La mejor manera de saber si un PE es estacionario en sentido amplio es comprobar si:
  - Su media es constante y
  - Su autocorrelación sólo depende de τ (diferencia de instantes de tiempo).

- Dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ son **conjuntamente estacionarios en sentido amplio** si:
  - $X(t)$ es estacionario en sentido amplio
  - $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio
  - La autocorrelación cruzada $R_{XY}(\tau)$ sólo depende de τ, no de t

4.5 Densidad espectral de potencia

Esta definición solo tiene sentido para procesos ESA

En tiempo discreto, la densidad espectral de potencia vendría dada por $S_X(\Omega)$, periódica de periodo 2π

Definimos la **densidad espectral de potencia** de la siguiente forma:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = TF\left[R_X(\tau)\right]$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

1.- $a\mathbf{X}(t)+b\mathbf{Y}(t) \leftrightarrow a\mathbf{X}(\omega)+b\mathbf{Y}(\omega)$

2.- $\mathbf{X}(t-t_0) \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$

3.- $\mathbf{X}(-t) \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega)$

4.- $\mathbf{X}(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega-\omega_0)$

Transformadas de Fourier más usuales

1.- $K \leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega)$

2.- $K\delta(t) \leftrightarrow K$

3.- $\cos(kt) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega-k)+\delta(\omega+k)]$

4.- $\text{sen}(kt) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+k)-\delta(\omega-k)]$

5.- $X(t)\cdot Y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$

6.- $X(t)*Y(t) \leftrightarrow X(\omega)\cdot Y(\omega)$

7.- $\frac{1}{2}e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1+\omega^2}$

8.- $\frac{sen(kt)}{\pi t} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1, & |\omega|<k \\ 0, & |\omega|\geq k \end{Bmatrix}$

4.6 Ruido blanco

El ruido blanco siempre es estacionario en sentido amplio (e.s.a.)

- $X(t)$ es **ruido blanco** $\Leftrightarrow X(t_1)$ y $X(t_2)$ son incorrelados $\forall\ t_1 \neq t_2$
  $\Leftrightarrow C_X(t_1,t_2)=0\ \forall\ t_1\neq t_2$
- $X(t)$ es **ruido blanco en sentido estricto**
  $\Leftrightarrow X(t_1)$ y $X(t_2)$ son independientes $\forall t_1 \neq t_2$

"White Noise" en inglés, por ello muchas veces se nota como W(t)

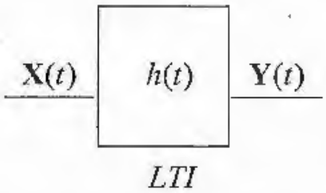
Si, además, tenemos un ruido blanco con media nula:

$$R(\tau)=\sigma^2\cdot\delta(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} S(\omega)=\sigma^2 \quad (potencia\ constante)$$

4.7 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Sea un sistema lineal e invariante (LTI), con entrada $\mathbf{X}(t)$ y salida $\mathbf{Y}(t)$:

Esto es de STLN: La salida de un sistema LTI se obtiene convolucionando la entrada con la respuesta al impulso.



$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot \mathbf{X}(t-\tau)d\tau$$

Si $\mathbf{X}(t)$ es estacionario en sentido amplio entonces $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ son procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio y existen relaciones simples entre los estadísticos media, autocorrelación y correlación cruzada de la entrada y salida:

Media 1) $E(\mathbf{Y}(t)) = E(\mathbf{X}(t))\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \quad \xleftrightarrow{TF} \quad E(\mathbf{Y}(t)) = E(\mathbf{X}(t))H(0)$

Correlación cruzada 2) $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad S_{XY}(w) = S_X(w)H(w)$

Autocorrelación 3) $R_Y(\tau) = R_{XY} * h(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad S_Y(w) = S_X(w)\left|H(w)\right|^2$

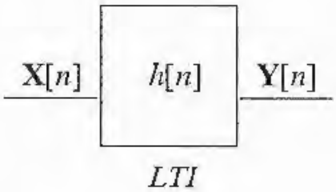
donde:

$H(w) = TF(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-jwt}dt$ es la respuesta en frecuencia del sistema LTI

$S_{XY}(w) = TF(R_{XY}(\tau))$ es el espectro cruzado

Sistemas discretos

En caso de sistemas discretos las diferencias de notación son las siguientes:



$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{X}[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\cdot \mathbf{X}[n-m]$$

$t \rightarrow n$

$t_1 \rightarrow n_1 \qquad t_2 \rightarrow n_2$

$\tau = t_2 - t_1 \quad \rightarrow \quad m = n_2 - n_1$

En tiempo discreto, los espectros de frecuencia son periódicos de periodo 2π

$h(t) \rightarrow h[n] \qquad\qquad H(w) \rightarrow H(\Omega) = H(e^{jw})$

Señales Aleatorias (SALT)

ANEXOS

Convoluciones con deltas de Dirac

- $f(t) * \delta(t) = f(t)$

- $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

- $f(t-t_1) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0-t_1)$

- $\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$

Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0,\ k \in \mathbb{R}$		
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
Potencial	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$	$f(x) = f^a$	$f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$
Irracional	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{f}$	$f'(x) = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^f$	$f'(x) = e^f \cdot f'$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^f$	$f'(x) = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Potencial exponencial	La derivamos como tipo potencial y le sumamos la derivada como exponencial. ***** Se suele hacer tomando logaritmos no se aplica esta fórmula.**		**Es una función f elevada a otra función g** $D\left[f^g\right] = \overbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}^{\text{Potencial}} + \overbrace{f^g \cdot g' \cdot \ln f}^{\text{Exponencial}}$ D quiere decir derivada	
Logarítmica	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln f$	$f'(x) = \frac{f'}{f}$
	$f(x) = \lg_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = \lg_a f$	$f'(x) = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$
		Trigonométricas		
Seno	$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \text{sen } f$	$f'(x) = \cos f \cdot f'$
Coseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen } x$	$f(x) = \cos f$	$f'(x) = -\text{sen } f \cdot f'$
Tangente	$f(x) = \text{tg } x \quad f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		$f(x) = \text{tg } f \quad f'(x) = \left(1 + \text{tg}^2 f\right) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$	
Arco seno	$f(x) = \text{arc sen } x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc sen } f$	$f'(x) = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco coseno	$f(x) = \text{arc cos } x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc cos } f$	$f'(x) = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco tangente	$f(x) = \text{arc tg } x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arc tg } f$	$f'(x) = \frac{f'}{1+f^2}$

REGLAS DE DERIVACIÓN

Suma	$(f + g)' = f' + g'$	La derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de estas funciones.
Resta	$(f - g)' = f' - g'$	La derivada de una diferencia de dos funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones.
Producto	$(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada de numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador y, todo ello, dividido por el denominador sin derivar al cuadrado.
Producto por un número	$(a \cdot f) = a \cdot f'$	La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función.
Composición	$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena

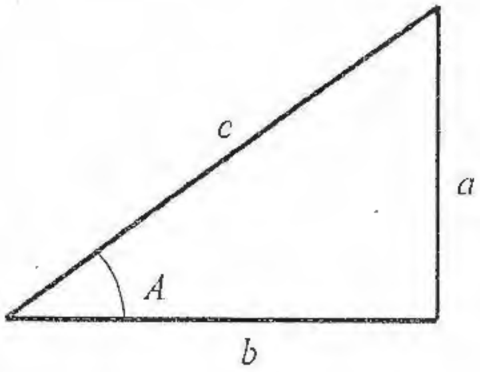
$\int dx = x + C$	$\int k dx = kx + C$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\lvert x+a\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u+a} dx = \ln\lvert u+a\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotan} x + C$	$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{cotan} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

Integral de la suma o resta	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
Integración por partes	$\int u dv = uv - \int v du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x) dx = F(x)\big\rvert_a^b = F(b) - F(a)$

Siendo: ***u***, ***v*** funciones de ***x***; ***a***, ***k***, ***n***, ***C*** constantes.

MONTERO ESPINOSA
CENTRO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS
Calle Hilarión Eslava, 21 Posterior
Tlf. 91 544 53 77 / 619 142 355

Trigonometría circular



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{a}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{b}{a}$$

Ecuación fundamental: $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

$1 + \operatorname{cotg}^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \sec^2 A$

Valores exactos de algunos ángulos

Ángulo A en grados	$\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

Ángulo en grados	Ángulo en radianes
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
180°	π
270°	$3\pi/2$

Reducción al primer cuadrante

	$-A$	$90°+A$	$90°-A$	$180°+A$	$180°-A$	$270°+A$	$270°-A$
sen	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\cos A$	$-\operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$-\cos A$
cos	$\cos A$	$-\operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$\operatorname{sen} A$	$-\operatorname{sen} A$
tg	$-\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{cotg} A$

	Seno	Coseno
Suma	$\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B$	$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$
Diferencia	$\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}A\cos B-\cos A\operatorname{sen}B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$
Ángulo doble	$\operatorname{sen}2A=2\operatorname{sen}A\cos A$	$\cos 2A=\cos^2 A-\operatorname{sen}^2 A$
Ángulo Mitad	$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$	$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$
Exponencial compleja	$e^{iA}=\cos A+i\operatorname{sen}A$ $\cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}$	$e^{-iA}=\cos A-i\operatorname{sen}A$ $\operatorname{sen}A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}$

Transformaciones de productos en sumas	Transformaciones de sumas en productos
$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=\frac{1}{2}\left(\cos(A-B)-\cos(A+B)\right)$	$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)$	$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$
$\operatorname{sen}A\cos B=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)\right)$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
	$\cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}$

Trigonometría hiperbólica

	Seno	Coseno
Definición	$\operatorname{senh}x=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh x=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
Ecuación Fundamental	$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$	
Suma Diferencia	$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$	$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$
Funciones inversas	$\arg\operatorname{sh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\arg\operatorname{ch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
Relación entre las funciones hiperbólicas y las circulares	$\operatorname{sen}(ix)=i\operatorname{sh}x$	$\cos(ix)=\operatorname{ch}x$
	$\operatorname{sh}(ix)=i\operatorname{sen}x$	$\operatorname{ch}(ix)=\cos x$

ALFABETO GRIEGO

	Nombre	Signo mayúscula	Signo minúscula	Transcripción latina	Transcripción románica
1	Alfa	Α	α	a	a
2	Beta	Β	β	b	b
3	Gamma	Γ	γ	g	g
4	Delta	Δ	δ	d	d
5	Épsilon	Ε	ε	e	e
6	Zeta	Ζ	ζ	z	z
7	Eta	Η	η	e	e
8	Theta	Θ	θ	th	t
9	Iota	Ι	ι	i	i
10	Kappa	Κ	κ	c	c
11	Lambda	Λ	λ	l	l
12	Mi	Μ	μ	m	m

	Nombre	Signo mayúscula	Signo minúscula	Transcripción latina	Transcripción románica
13	Ni	Ν	ν	n	n
14	Xi	Ξ	ξ	x	x
15	Ómicron	Ο	ο	o	o
16	Pi	Π	π	p	p
17	Rho	Ρ	ρ	r	r
18	Sigma	Σ	σ ς	s	s
19	Tau	Τ	τ	t	t
20	Ípsilon	Υ	υ	y	i
21	Fi	Φ	φ	ph	f
22	Chi	Χ	χ	ch	c / qu
23	Psi	Ψ	ψ	ps	ps
24	Omega	Ω	ω	o	o

SUMA DE SERIES

Suma de los primeros números naturales

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2} \cdot n$

Suma de la serie en progresión geométrica

- $\sum r^k = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$

- Idea feliz para resolver la siguiente suma: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-) \frac{d}{d\lambda} (e^{-\lambda k}) = -\frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda})^k =$$

$$= -\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{1-e^{-\lambda}} = -\frac{d}{d\lambda} (1-e^{-\lambda})^{-1} = -(-1) \cdot (1-e^{-\lambda})^{-2} \cdot (-e^{-\lambda}) \cdot (-1) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

TEMA 4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS (Fórmulas de utilidad)

Varianza de X: $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

Covarianza de X,Y: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

Autocovarianza de $X(t)$: $C_X(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau))-E(X(t))E(X(t+\tau))$

Covarianza cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$: $\left\{\begin{matrix} C_{XY}(t,t+\tau)=E(X(t)Y(t+\tau))-E(X(t))E(Y(t+\tau)) \\ C_{XY}(t,t+\tau)=0 \leftrightarrow X(t)\,e\,Y(t)\,incorrelados \end{matrix}\right\}$

Autocorrelación de $X(t)$: $\left\{\begin{matrix} R_X(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau)) \\ si\,R_X(\tau)\,no\,depende\,de\,t: E(X^2(t))=E(X(t)X(t))=R_X(0) \end{matrix}\right\}$

Correlación cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$: $\left\{\begin{matrix} R_{XY}(t,t+\tau)=E(X(t)Y(t+\tau)) \\ R_{XY}(t,t+\tau)=0 \leftrightarrow X(t)\,e\,Y(t)\,ortogonales \\ si\,R_{XY}(\tau)\,no\,depende\,de\,t: E(X(t)Y(t))=R_{XY}(0) \end{matrix}\right\}$

$X(t)$ Estacionario de orden 1: $f(x)$ no depende de t

$X(t)$ Estacionario de orden 2: $f(x_1,x_2,\tau)$ no depende de t, sólo depende de τ

$X(t)$ Estacionario en sentido amplio (e.s.a): $\left\{\begin{matrix} 1.\,E(X(t))=constante\,(no\,depende\,de\,t) \\ 2.\,R_X(\tau)\,no\,depende\,de\,t, sólo\,depende\,de\,\tau \end{matrix}\right\}$

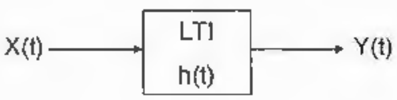
$X(t)$ e $Y(t)$ conjuntamente e.s.a.: $\left\{\begin{matrix} 1.\,X(t)\ e.s.a. \\ 2.\,Y(t)\ e.s.a. \\ 3.\,R_{XY}(\tau)\,sólo\,depende\,de\,\tau, no\,de\,t \end{matrix}\right\}$

$X(t)$ Ruido blanco: $\left\{\begin{matrix} X(t),X(t+\tau)\ incorrelados \\ e.s.a. \end{matrix}\right\}$

$X(t)$ Ruido blanco estricto: $\left\{\begin{matrix} X(t),X(t+\tau)\,independientes \\ e.s.a. \end{matrix}\right\}$

Si $X(t)$ es ruido blanco de media nula $E(X(t))=0$: $\left\{\begin{matrix} R_X(\tau)=\sigma^2\delta(\tau) \\ S_X(\omega)=\sigma^2\,(constante) \end{matrix}\right\}$

Para PE e.s.a.: $\left\{\begin{matrix} S_X(\omega)=TF(R_X(\tau)) \\ S_X(\Omega)=TF(R_X(m)) \quad , periódica\,de\,período\,2\pi \end{matrix}\right\}$



$$\left\{\begin{matrix} Y(t)=X(t)*h(t) \\ E(Y(t))=E(X(t))\cdot H(0) \\ R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)\leftrightarrow S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)\cdot H(\omega) \\ R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)\leftrightarrow S_Y(\omega)=S_X(\omega)\cdot\left|H(\omega)\right|^2 \end{matrix}\right\}$$

Otras fórmulas de utilidad

Propiedades de $E(X)$:
$$\begin{Bmatrix} E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \\ E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad \textit{sólo si son independientes} \\ E(kX) = k \cdot E(X) \\ E(k) = k \end{Bmatrix}$$

Propiedades de $V(X)$:
$$\begin{Bmatrix} V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \quad \textit{sólo si son independientes} \\ V(X \cdot Y) \neq V(X) \cdot V(Y) \\ V(kX) = k^2 \cdot V(X) \\ V(k) = 0 \end{Bmatrix}$$

Propiedades de $\delta(t)$:
$$\begin{Bmatrix} \delta(-t) = \delta(t) \\ X(t) * \delta(t - t_0) = X(t - t_0) \\ X(t) \cdot \delta(t - t_0) = X(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \end{Bmatrix}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad senx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$X \; v.a. N(\mu, \sigma): f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

Transformación de v.a. continua (X) en v.a. continua (Y):

$$f_Y(y) = \sum f_X(x = g^{-1}(y)) \cdot \left|(g^{-1})'(y)\right|$$

$$f_Y(y) = \sum \left. \frac{f_X(x)}{\left|(g)'(x)\right|} \right|_{x = g^{-1}(y)}$$

Transformadas de Fourier más útiles: $X(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

$$\begin{cases} k \leftrightarrow 2\pi k \delta(\omega) & k\delta(t) \leftrightarrow k \\ \cos(kt) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - k) + \delta(\omega + k)\right] & sen(kt) \leftrightarrow \pi j\left[\delta(\omega + k) - \delta(\omega - k)\right] \\ X(t) \cdot Y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) & X(t) * Y(t) \leftrightarrow X(\omega) \cdot Y(\omega) \\ \frac{1}{2} e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1 + \omega^2} & \frac{sen(kt)}{\pi t} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1, & |\omega| < k \\ 0, & |\omega| \geq k \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\textit{Integral Euleriana Gamma}: \int_{x=0}^{x=\infty} x^{p-1} \cdot e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} = \frac{(p-1)!}{a^p}$$

Señales Aleatorias (SALT)

Ejercicios por temas

Carpeta Academia Montero Espinosa Roberto Martín 2018

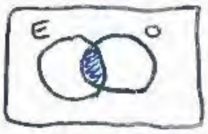
Un ingeniero químico es el responsable de un determinado proceso en una refinería de petróleo. Experiencias previas indican que el 10% de las interrupciones del proceso son debidas solamente a fallos del equipo, un 5% debidas a combinaciones de fallo del equipo y error del operador y un 40% en las que se involucra el error del operador. Bajo la hipótesis de que el proceso se interrumpa, calcúlese la probabilidad de que sea debido a:

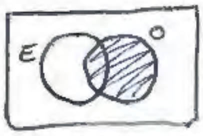
a) Fallo del equipo o error del operador
b) Sólo error del operador
c) Causa distinta a fallo del equipo o error del operador
d) Error del operador supuesto que el equipo falló previamente
e) Error del operador supuesto que el equipo no falló previamente
f) Fallo del equipo supuesto que el operador cometió un error
g) ¿Son los sucesos "error del operador" y "fallo del equipo" independientes?

Sucesos $\begin{cases} E: \text{Fallo del equipo} \\ O: \text{Fallo del operador} \end{cases}$

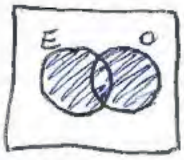
Datos:

$P(E \cap \bar{O}) = 0'10$ $\quad P(E \cap O) = 0'05$ $\quad P(O) = 0'40$

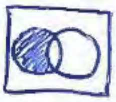


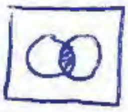


a) $P(E \cup O) = P(E) + P(O) - P(E \cap O)$



$= \left[P(E) = P(E \cap \bar{O}) + P(E \cap O) = 0'10 + 0'05 = 0'15 \right] =$

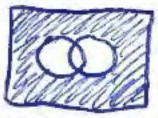




$= 0,15 + 0'4 - 0,05 = 0,5$

b) $P(O \cap \bar{E}) = P(O) - P(O \cap E) = 0'40 - 0'05 = 0,35$

c) $P(\overline{E \cup O}) = 1 - P(E \cup O) = 1 - 0'60 = 0,60$



d) $P(O/E) = \dfrac{P(O \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,05}{0,15} = 0,\hat{3}$

e) $P(O/\bar{E}) = \dfrac{P(O \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \dfrac{0'35}{1 - 0,15} = 0'41$

f) $P(E/O) = \frac{P(E \cap O)}{P(O)} = \frac{0'05}{0'40} = 0'125$

g) $\left.\begin{array}{l} P(O/E) = 0'\widehat{3} \\ P(O) = 0'40 \end{array}\right\} \longrightarrow$ E y O son independientes

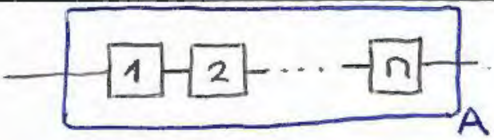
Se denomina fiabilidad de un sistema A a la probabilidad P(A) de que el sistema funcione con éxito en un tiempo determinado. El sistema está formado por subsistemas que pueden conectarse en serie o en paralelo, suponiendo que la actuación de cada uno de ellos no influye en los demás. Para un sistema formado por n subsistemas, de tal manera que designemos por $P(A_i)$ la fiabilidad del sistema i, calcular la fiabilidad del sistema:

a) Cuando los subsistemas se conectan en serie (aplicación para n=10 y $P(A_i)$=0'99)

b) Cuando los subsistemas se conectan en paralelo (n=2 y $P(A_i)$=0'90)

c) ¿Puede en algún caso la fiabilidad del sistema ser mayor que la de cada una de las partes?

a) Subsistemas en serie



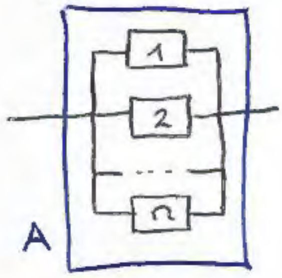
$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \underset{\text{ind}}{=}$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ej numérico:

$$P(A) = 0'99^{10} = 0'9044$$

b) Subsistemas en paralelo



$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cdots \cup \overline{A_n}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \dots \cdot P(A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n))$$

ej numérico

$$P(A) = 1 - (1 - 0'90)(1 - 0'90) = 0'99$$

c) Sí, en el caso de los subsistemas en paralelo.

1.3 El de la bolsa con cuadros blancos y negros del tablero de ajedrez

Se tiene en una bolsa un número determinado de cuadros blancos y negros en la misma proporción. Se pide la probabilidad de que se forme un tablero de ajedrez sacando al azar 64 cuadros blancos y negros de la bolsa:

a) Si el número de cuadros en la bolsa es enormemente grande
b) Si en la bolsa sólo hay 32 cuadros blancos y 32 cuadros negros

3 . Se tiene en una bolsa un número muy grande de cuadro blancos y negros en la misma proporción:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sacando a ciegas 64 cuadros y colocándolos en el orden en que salen se forme un tablero de ajedrez?

b) ¿Cuál es la probabilidad cuando en la bolsa sólo existen 32 cuadros blancos y 32 cuadros negros?.

P (formar un tablero) = P (ir alternando colores 64 veces, da igual por cual empezar) =

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P\big((B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap N_{64}) \cup (N_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{64})\big) = P(B_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{64}) + P(N_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{64}) -$$

$$- P\big(\cancel{(B_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{64}) \cap (N_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{64})}\big)$$

nº muy grande de cuadros ⇒ independientes

a) $P(\text{formar un tablero}) = P(B_1)\cdot P(N_2)\cdot\ldots P(N_{64}) + P(N_1)\cdot P(B_2)\ldots P(B_{64}) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{64}} + \frac{1}{2^{64}} = \frac{2}{2^{64}} = \frac{1}{2^{63}} \approx 1'08\cdot 10^{-19}$$

sólo 32 cuadros de cada color ⇒ extracciones dependientes

b) $P(\text{formar un tablero}) = P(B_1)\cdot P(N_2/B_1)\cdot P(B_3/(B_1 \cap N_2))\ldots \cdot P(N_{64}/(B_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap B_{63}))$

$$+ P(N_1)\cdot P(B_2/N_1)\cdot P(N_3/(N_1 \cap B_2))\cdot \ldots\ldots P(B_{64}/(N_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap N_{63})) =$$

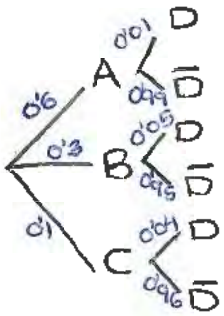
$$= \frac{32}{64}\cdot\frac{32}{63}\cdot\frac{31}{62}\cdot\frac{31}{61}\cdot\ldots\frac{1}{1} + \frac{32}{64}\cdot\frac{32}{63}\cdot\frac{31}{62}\cdots\frac{1}{1} = \frac{32!\,32!}{64!} + \frac{32!\,32!}{64!} =$$

$$= \frac{2\,(32!)^2}{64!} \approx 1'09\cdot 10^{-18} > 1'08\cdot 10^{-19}$$ ⇒ es más fácil formar un tablero con 64 fichas

NOTA: Es más sencillo formar el tablero cuando existe un nº limitado de fichas

Un centro de cálculo dispone de tres impresores A, B y C, con diferentes velocidades de impresión. Un listado puede enviarse a una de las tres con probabilidades 0'6, 0'3 y 0'1, respectivamente. Ocasionalmente, cualquiera de las impresoras se puede atascar y destruir el listado con probabilidades 0'01, 0'05 y 0'04, respectivamente. Se pide:

a) Probabilidad de que un listado se destruya
b) Supuesto que un listado se destruye, determinar la impresora que con mayor probabilidad ha sido la causante de su destrucción



a) $$P(D) \overset{T^a \text{ de la probabilidad total}}{=} P(\underbrace{(A\cap B)}\cup\underbrace{(B\cap D)}\cup\underbrace{(C\cap D)}) \overset{\text{incompatible}}{=}$$

$$= P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D) =$$

$$= P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C) =$$

$$= 0'6 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0'05 + 0'1 \cdot 0'04 = 0{,}025$$

entre 0,1 y 0,6

b)

$$P(A/D) = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}01}{0{,}025} = 0'24$$

$$\left[P(B/D) = \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(D)} = \frac{0'3\cdot 0{,}05}{0'025} = 0'60 \right]$$

$$P(C/D) = \frac{P(C)\cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0'1\cdot 0'04}{0'025} = \frac{0'16}{\Sigma = 1}$$

Se tienen ocho dados normales y dos trucados. En éstos, la probabilidad de sacar uno es el triple que del resto (que entre sí son equiprobables). Se elige un dado al azar y se obtiene uno, ¿cuál es la probabilidad de que el dado no esté trucado?

Después de uno sencillo de Th. prob. total y Th. Bayes

5. Se tienen ocho dados normales y dos trucados. En éstos, la probabilidad de as es el triple que del resto (que entre sí son equiprobables). Se elige un dado al azar y se obtiene as. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado no esté trucado?

Sucesos:
- DN: "seleccionar un dado normal"
- DT: "seleccionar un dado trucado"
- A: "sale as en el dado"
- $\bar{A}$: "NO sale as en el dado"

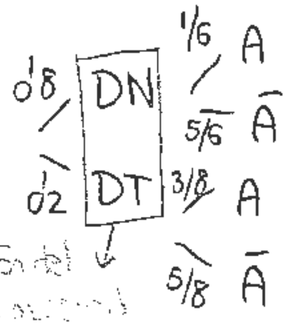
Datos:
- $P(DN) = \frac{8}{10} = 0'8 \longrightarrow P(DT) = 0'2$
- En el dado trucado: $P(As) + P(Q) + P(J) + \ldots + P(\text{puntos negros}) = 1$

$$3x + x + x + x + x + x = 1$$

$$8x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{8} \rightarrow P(A) = 3/8$$

$$P(\bar{A}) = 5/8$$

Árbol de probabilidades:



$$P(DN/A) \underset{\text{Th. Bayes}}{=} \frac{P(DN)\cdot P(A/DN)}{P(A)} \underset{\text{Th. probabilidad total}}{=} \frac{P(DN)\cdot P(A/DN)}{P(DN)\cdot P(A/DN) + P(DT)\cdot P(A/DT)} =$$

$$= \frac{0'8 \cdot \frac{1}{6}}{0'8 \cdot \frac{1}{6} + 0'2 \cdot \frac{3}{8}} = 0'64 \quad < P(DN) = 0'8$$

1.6 El del receptor de radio que lo pasa mal con el ruido

Tenemos un receptor de radio del que sabemos que el 5% de las veces en que recibe una señal útil, ésta se traduce como si fuera un ruido; es decir, no la considera. Por otra parte, el 2% de las veces que se recibe ruido, lo traduce como si fuera una señal útil. Si las señales recibidas tienen un 80% de señales útiles:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el receptor realice una traducción correcta?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una señal que ha sido detectada como útil sea realmente útil?

Último estándar de Th. prob. total y Th. Bayes

6. Tenemos un receptor de radio del que sabemos que el 5% de las veces en que recibe una señal útil, ésta se traduce como si fuera un ruido; es decir, no la considera. Por otra parte, el 2% de las veces que se recibe ruido, lo traduce como si fuera una señal útil. Si las señales recibidas tienen un 80% de señales útiles:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el receptor realice una traducción correcta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una señal que ha sido traduada como útil sea realmente útil?

Sucesos:
- RU: "recibir una señal útil"
- RR: "recibir ruido"
- TU: "traducir como señal útil"
- TR: "traducir como ruido"

Datos:

$$P(TR/RU) = 0'05 \longrightarrow P(TU/RU) = 0'95$$
$$P(TU/RR) = 0'02 \longrightarrow P(TR/RR) = 0'98$$
$$P(RU) = 0'80 \longrightarrow P(RR) = 0'20$$

Árbol de probabilidades:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

a) $P(\text{traducción correcta}) = P((RU \cap TU) \cup (RR \cap TR)) = P(RU \cap TU) + P(RR \cap TR) - P((RU \cap TU) \cap (RR$

$= P(RU) \cdot P(TU/RU) + P(RR) \cdot P(TR/RR) = 0'80 \cdot 0'95 + 0'20 \cdot 0'98 = 0'956$ ← entre 0'95 y 0'98

b) $P(RU/TU) \underset{\text{Th. Bayes}}{=} \dfrac{P(RU) \cdot P(TU/RU)}{P(TU)} = \dfrac{P(RU) \cdot P(TU/RU)}{P(RU) \cdot P(TU/RU) + P(RR) \cdot P(TU/RR)} = \dfrac{0'80 \cdot 0'9}{0'80 \cdot 0'95 + 0'2}$

$P(TU) \xrightarrow{\text{Th. probabilidad total}} P(RU) \cdot P(TU/RU) + P(RR) \cdot P(TU/RR)$

$= 0'9948$ ← > P(R

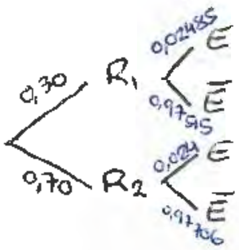
Un e-mail puede viajar a través de dos rutas de servidores. La probabilidad de error de transmisión en cada uno de los servidores y la proporción de mensajes que viajan a través de cada ruta se muestra en la siguiente tabla. Asuma que los servidores son <u>independientes</u> y que para que el e-mail llegue correctamente por una ruta debe atravesar los dos servidores que se encuentran en serie.

	Porcentaje de e-mails	Probabilidad de error			
		Servidor 1	Servidor 2	Servidor 3	Servidor 4
Ruta 1	30%	0'01	0'015		
Ruta 2	70%			0'02	0'003

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un e-mail llegue sin error?

b) Si un e-mail llega con error, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido enviado a través de la ruta 1?

Arbol de probabilidades



En R_1: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{llegue}\\ \text{bien}\end{smallmatrix}\right) = P(S_1 \cap S_2) \overset{\text{ind}}{=} P(S_1)\cdot P(S_2) =$

$= (1-0{,}01)(1-0'015) = \boxed{0'97515}$

En R_2: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{llegue}\\ \text{bien}\end{smallmatrix}\right) = P(S_3 \cap S_4) \overset{\text{ind}}{=} P(S_3)\cdot P(S_4)$

$= (1-0{,}02)(1-0{,}003) = \boxed{0{,}97706}$

a) $P(\bar{E}) \underset{\uparrow}{=} 0{,}30 \cdot 0{,}97515 + 0{,}70 \quad 0{,}97706 = 0{,}9765$

$T^{\underline{ma}}$ prob. total

b) $P(R_1 / E) \underset{\uparrow}{=} \dfrac{P(R_1)\cdot P(E/R_1)}{P(E)} = \dfrac{0'30 \cdot 0{,}02485}{1-0{,}9765} = 0{,}317$

$T^{\underline{ma}}$ Bayes

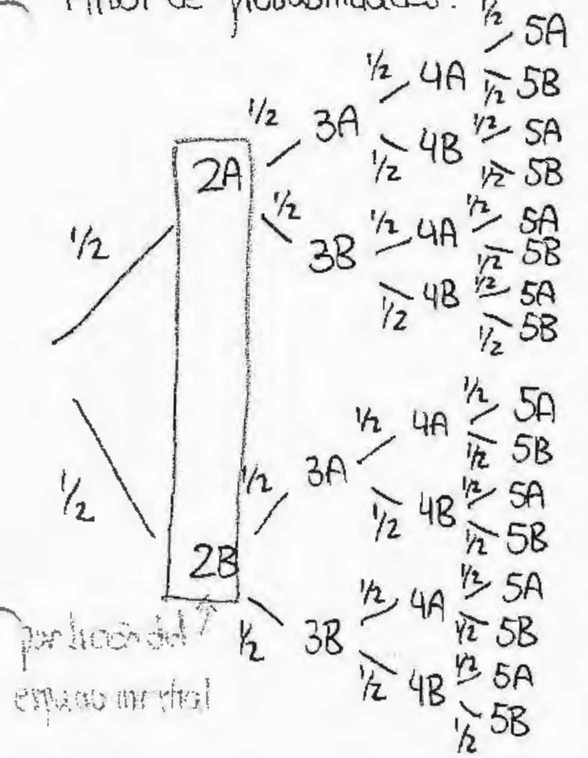
Dos jugadores A y B juegan a cara y cruz la cantidad de 1000 euros. Ganará aquel que en primer lugar gane tres partidas (seguidas o no). El jugador A gana la primera partida y se interrumpe el juego. Dividir los 1000 euros entre ellos proporcionalmente a la probabilidad de ganar cada uno si hubiese seguido el juego

8. Dos jugadores *A* y *B* juegan a cara y cruz la cantidad de 1000 euros. Ganará aquel que en primer lugar gane tres partidas (seguidas o no). El jugador *A* gana la primera partida y se interrumpe el juego. Dividir los 1000 euros entre ellos proporcionalmente a la probabilidad de ganar cada uno si hubiese seguido el juego

Sucesos:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} 2A: \text{"A gana la segunda partida"} \\ 2B: \text{"B gana la segunda partida"} \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} 4A: \text{"A gana la cuarta partida"} \\ 4B: \text{"B gana la cuarta partida"} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3A: \text{"A gana la tercera partida"} \\ 3B: \text{"B gana la tercera partida"} \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} 5A: \text{"A gana la quinta partida"} \\ 5B: \text{"B gana la quinta partida"} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Árbol de probabilidades:



$$P(\text{ganar A el juego}) = P\big((2A\cap 3A)\cup(2A\cap 3B\cap 4A)\cup(2A\cap 3B\cap 4B\cap 5A)\cup(2B\cap 3A\cap 4A)\cup(2B\cap 3A\cap 4B\cap 5\ldots$$

$$\cup(2B\cap 3B\cap 4A\cap 5A)\big) \overset{\text{sucesos incompatibles } P(S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_n)=P(S_1)+P(S_2)+\ldots+P(S_n)}{=} P(2A\cap 3A)+P(2A\cap 3B\cap 4A)+P(2A\cap 3B\cap 4B\cap 5A)+P(2B\cap 3A\cap 4A)+P(2B\cap 3A\cap 4B\cap 5\ldots$$

$$+P(2B\cap 3B\cap 4A\cap 5A) \overset{\text{sucesos independientes}}{=} P(2A)\cdot P(3A)+P(2A)\cdot P(3B)\cdot P(4A)+P(2A)\cdot P(3B)\cdot P(4B)\cdot P(5A)+P(2B)\cdot P(3A)\cdot P(4\ldots$$

$$+P(2B)\cdot P(3A)\cdot P(4B)\cdot P(5A)+P(2B)\cdot P(3B)\cdot P(4A)\cdot P(5A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0'6875$$

$$P(\text{ganar B el juego}) = P((2A \cap 3B \cap 4B \cap 5B) \cup (2B \cap 3B \cap 4B) \cup (2B \cap 3A \cap 4B \cap 5B) \cup (2B \cap 3B \cap 4A \cap 5B))$$

sucesos incompatibles: $P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_n)$

$$= P(2A \cap 3B \cap 4B \cap 5B) + P(2B \cap 3B \cap 4B) + P(2B \cap 3A \cap 4B \cap 5B) + P(2B \cap 3B \cap 4A \cap 5B) =$$

sucesos independientes

$$= P(2A) \cdot P(3B) \cdot P(4B) \cdot P(5B) + P(2B) \cdot P(3B) \cdot P(4B) + P(2B) \cdot P(3A) \cdot P(4B) \cdot P(5B) + P(2B) \cdot P(3B) \cdot P(4A) \cdot P(5B$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'3125$$

A se quedaría con $0'6875 \cdot 1000$ € $= 687'50$ €

B se quedaría con $0'3125 \cdot 1000$ € $= 312'50$ €

1000 €

variaciones → SI ORDEN

combinaciones → NO ORDEN

1.9 El de combinatoria (variaciones y combinaciones sin y con repetición)

Resolver los siguientes aparados utilizando técnicas combinatorias (variaciones o combinaciones, sin o con repetición):

a) Obtener la probabilidad de que un profesor nuevo acierte en el momento de la presentación del primer día de clase el podio de notas de sus 30 alumnos en el examen
b) Obtener la probabilidad de que un cocinero impostor acierte los 15 ingredientes necesarios (entre un total de 100 ingredientes) para preparar el plato de la final de MasterChef
c) Obtener el número de helados diferentes de tres bolas que se pueden pedir en una heladería que dispone de sólo 10 sabores diferentes
d) ¿Cuántos helados diferentes se pueden conseguir en el apartado anterior si no se quiere repetir sabor?
e) ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 20 alumnos en una clase con las sillas justas?
f) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?
g) ¿Cuál es la probabilidad de acertar una quiniela (15 partidos, tres posibles resultados cada partido)?
h) Un total de 20 profesores y profesoras de una academia universitaria sin gran vida social (incluido el jefe) deciden quedar después de clase para intercambiar conocimientos sobre una de las asignaturas más complicadas: "Fluidos". Lo harán en grupos de 6 elegidos al azar, pues grupos más grandes empiezan a ser confusos y poco prácticos.

   h1) ¿Cuál es la probabilidad de que el jefe de la academia participe en el primer encuentro?

   h2) Después del primer encuentro se decide vetar al jefe, ¿cuántos grupos diferentes pueden formarse?

   h3) El jefe se entera de que se le ha vetado e impone su participación en todos los encuentros de ahora en adelante, ¿cuántos grupos diferentes pueden formarse en la orgí… perdón, encuentro académico?

	ORDEN	REPETICION	TIPO	RESULTADO
a)	SI	NO	$V_{30,3}$	$\frac{1}{V_{30,3}} = \frac{1}{30\cdot 29\cdot 28} = 4{,}1\cdot 10^{-5}$
b)	NO	NO	$C_{100,15}$	$\frac{1}{C_{100,15}} = \frac{1}{\binom{100}{15}} = 3{,}9\cdot 10^{-18}$
c)	NO	SI	$CR_{10,3}$	$C_{R10,3} = \binom{10+3-1}{3} = 220$
d)	NO	NO	$C_{10,3}$	$C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$
e)	SI	NO	$V_{20,20}$	$V_{20,20} = 20! = 2{,}4\cdot 10^{18}$
f)	SI	SI	$VR_{10,3} - VR_{10,2}$	$VR_{10,3} - VR_{10,2} = 10^3 - 10^2 = 900$
g)	SI	SI	$VR_{3,15}$	$\frac{1}{VR_{3,15}} = \frac{1}{3^{15}} = 7\cdot 10^{-8}$
h_1)	NO	NO	$C_{20,6}$	$\frac{C_{19,5}}{C_{20,6}} = \frac{\binom{19}{5}}{\binom{20}{6}} = 0{,}3$
h_2)	NO	NO	$C_{19,5}$	$C_{19,6} = \binom{19}{6} = 27{,}132$
h_3)	NO	NO	$C_{19,5}$	$C_{19,5} = \binom{19}{5} = 11628$

1.10 El del concurso de las tres puertas (problema de Monty Hall)

Supón que estás en un concurso y te ofrecen escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche y detrás de las otras dos, cabras. Escoges una puerta y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, que contiene una cabra. El presentador ahora te pregunta: ¿Quieres cambiar de puerta?
Razona tu decisión en términos probabilísticos, suponiendo que prefieres los coches a las cabras.

Si no nos cambiamos, nos llevamos el premio $\frac{1}{3}$

Si sí nos cambiamos, $\frac{2}{3}$

Un ingeniero de Teleco y uno de Caminos discuten sobre si es muy probable o poco probable que en un grupo de 70 amigos, dos de ellos cumplan años el mismo día. El ingeniero de Teleco dice que es muy probable y el de Caminos que muy poco probable, pues hay 365 días diferentes y sólo 70 amigos.

a) ¿Quién tiene razón?
b) ¿Cuál debería ser el tamaño máximo del grupo para que la probabilidad de que dos amigos cumplan años el mismo día sea menor del 50%?

a) $P\left(\begin{smallmatrix}\text{coincidir}\\ \text{cumpleaños}\end{smallmatrix}\right) = 1 - P\left(\begin{smallmatrix}\text{NO COINCIDIR}\\ \text{CUMPLE}\end{smallmatrix}\right) = 1 - \dfrac{365!}{365^n(365-n)!}$

2 personas: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{NO}\\ \text{COINCIDA}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{364}{365}$

3 personas: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{NO}\\ \text{COINCIDA}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365}$

4 personas: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{NO}\\ \text{COINCIDA}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365} \cdot \dfrac{362}{365}$

$\vdots$

n personas: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{NO}\\ \text{COINCIDA}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{365^{n-1}} \cdot \dfrac{364!}{(364-(n-1))!} = \dfrac{365!}{365^n(365-n)!}$

a) $n=70$:

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{coincidir}\\ \text{cumple}\end{smallmatrix}\right) = 1 - \frac{365!}{365^{70}(365-70)!} = 1 - 0'0008 = 0'9992$$
$$= 99{,}92\ \%$$

b) Probando con diferente n:

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{coincida el}\\ \text{cumple con } n=22\end{smallmatrix}\right) = 1 - 0'5243 = 0'4757 = 47{,}57\ \%$$

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{coincida el}\\ \text{cumple con } n=23\end{smallmatrix}\right) = 1 - 0'4927 = 0'5073 = 50{,}73\ \%$$

2.1 El de la exponencial con valor absoluto

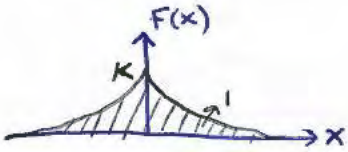
Sea la función $f(x) = k \cdot e^{-|x|}, \forall x \in \Re$. Se pide calcular:

a) El valor de k para que la función $f(x)$ sea una función de densidad

b) La función de distribución de la v.a. X

c) $P(X \geq 3), P(|X| \leq 2), P(|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0), P(|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1)$

$$f(x) = K \cdot e^{-|x|} = \begin{cases} K \cdot e^{-(-x)} = K \cdot e^{x}, & \text{si } x < 0 \\ K \cdot e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



a)

f(x) = función de densidad si $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \xrightarrow[\text{simetría}]{} 2\int_0^{\infty} K \cdot e^{-x}\,dx = 1 \longrightarrow 2K\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1 \end{cases}$

$$\longrightarrow -2K(0-1) = 1 \longrightarrow \boxed{K = 1/2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

b)

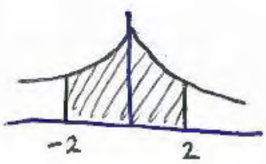
$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-\infty}\right) = \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}\,dt}_{F(0) = 0'5} + \int_0^{x} \frac{1}{2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{-x} - 1\right] = & \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x \geq 0$$

c)

$$P(x \geq 3) \begin{cases} \int_3^{\infty} f(x)\,dx = \int_{+3}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \ldots = 0'02489 \\ 1 - F(3) = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}e^{-3}\right] = \ldots = 0'02489 \end{cases}$$

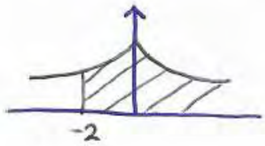
$$P(|x| \leq 2) \begin{cases} \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_0^{2} f(x)\,dx = \int_0^{2} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \ldots = 0'8647 \\ F(2) - F(-2) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \frac{1}{2}e^{2} = \ldots = 0{,}8647 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{\infty} F(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \dots = 0{,}9323$$

$P(|x| \leq 2 \text{ ó } x > 0)$

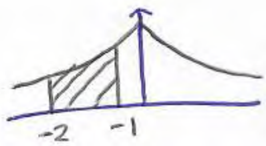
$$1 - P(-2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} = \dots = 0{,}9323$$



$$\int_{-2}^{-1} F(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} e^{x}\,dx = \dots = 0'1163$$

$P(|x| \leq 2 \text{ y } x \leq -1)$

$$F(-1) - F(-2) = \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} = \dots = 0{,}1163$$



Sea la función $f(x) = k \cdot (b^x - a^x), \forall x \in \mathbb{N}, 0 < a < b < 1$

a) Calcular k para que $f(x)$ sea una función de densidad bien definida

b) Calcular $f(1)$ y $f(2)$

Ej v.a. discreta (∞ numerable)

2. Sea la función $f(x) = k \cdot (b^x - a^x)$, $\forall x \in N, 0 < a < b < 1$

   a) Calcular k para que $f(x)$ sea una función de densidad bien definida

   b) Calcular $f(1)$ y $f(2)$

a) $f(x) = k \cdot (b^x - a^x)$ $(\forall x \in \mathbb{N})$ v.a discreta

Para que f(x) sea función de densidad $\Rightarrow \sum_i p_i = 1 \rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} k(b^x - a^x) = 1$

$$\rightarrow k\Big(\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} b^x}_{\substack{\text{serie en}\\ \text{progr. geom.}\\ \text{de razón } b<1}} - \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} a^x}_{\substack{\text{serie en}\\ \text{progr. geom.}\\ \text{de razón } a<1}}\Big) = 1 \rightarrow k\left(\frac{b^{\infty}\cdot b - b^0}{b-1} - \frac{a^{\infty}\cdot a - a^0}{a-1}\right) = 1 \rightarrow k\left(\frac{-1}{b-1} - \frac{(-1)}{a-1}\right)$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

$$\rightarrow k\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1}\right) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{k} = \frac{1}{\frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1}} = \frac{(a-1)(b-1)}{b-1-(a-1)} = \boxed{\frac{(a-1)(b-1)}{b-a}}$$

b) $$f(1) = \frac{(a-1)(b-1)}{b-a} \cdot (b^1 - a^1) = (a-1)(b-1) = P(X=1)$$

$$f(2) = \frac{(a-1)(b-1)}{b-a}(b^2-a^2) = \frac{(a-1)(b-1)}{\cancel{b-a}}(b+a)\cancel{(b-a)} = (a-1)(b-1)(b+a) = P(X=$$

Recordatorio de fórmulas de suma de series en progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Dado $a > 0$, considere la función $f(x) = \frac{a}{x^2}$ definida en el intervalo $(0, \infty)$

a) Calcule a para que la función $f(x)$ sea una función de densidad bien definida

b) Para $a = 2$ calcule la función de distribución asociada y dibújela

Ej. v.a. continua

3. Dado $a > 0$, considere la función $f(x) = \frac{a}{x^2}$ definida en el intervalo (a, ∞)

a) Calcule a para que la función $f(x)$ sea una función de densidad bien definida

b) Para $a = 2$ calcule la función de distribución asociada y dibújela

$f(x) = \dfrac{a}{x^2}$, $x > a$ v.a. continua

a) $f(x)$ es función de densidad si $\begin{cases} \rightarrow f(x) \geq 0 \\ \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \rightarrow \int_a^{\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = 1 \rightarrow a\int_a^{\infty} x^{-2}\,dx = \end{cases}$

$\rightarrow a\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_a^{\infty} = 1 \rightarrow -a\left[\frac{1}{x}\right]_a^{\infty} = 1 \rightarrow -a\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a}\right) = 1 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow \boxed{\forall a \in \mathbb{R}}$

b) $F(x) = \begin{cases} \bullet\ 0 \quad \text{si} \quad x < 2 \\ \bullet\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_2^x \frac{2}{t^2}\,dt = 2\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^x = -2\left[\frac{1}{t}\right]_2^x = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \quad x \geq 2 \end{cases}$

comprobar: si la v.a. es continua, $F(x)$ es continua

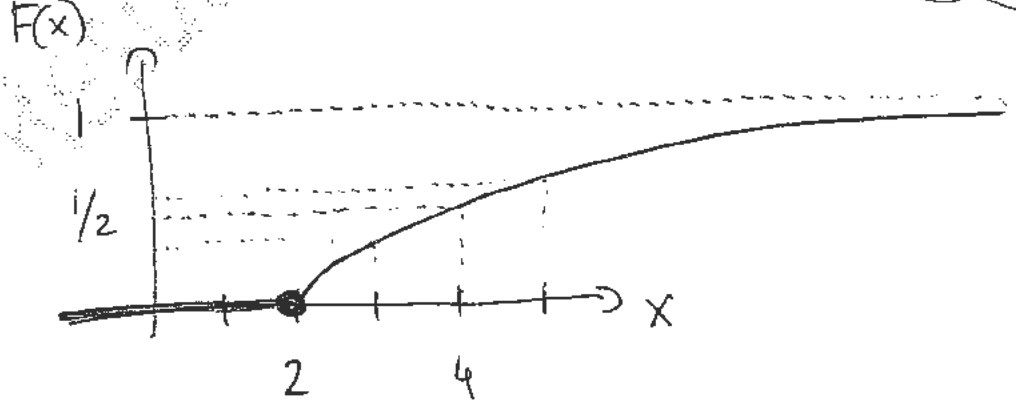
$F(2^-) = 0$

$F(2^+) = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$

Además, se puede comprobar q

$F(-\infty) = 0$

$F(\infty) = -2\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{2}\right) = 1$



Un juego de azar utiliza dos dados. La apuesta cuesta a euros por jugada. Las ganancias son de $\frac{a}{2}$ euros si el resultado es par, $2a$ euros si es 7 y $6a$ euros si es 11. Diremos que el juego es justo si lo cobrado es en media igual a lo apostado a.

a) ¿Es el juego justo?
b) Definiendo beneficio como lo cobrado menos lo apostado en una jugada. ¿Cuál es la probabilidad de tener beneficio positivo en una jugada? ¿Cuál es el valor medio del beneficio por jugada para un jugador afortunado (aquel cuyo beneficio es siempre mayor o igual que cero)?

V.a X = "dinero cobrado (€)"
↳ v.a discreta

a)

$$f(x) = \begin{cases} P(X=0) = 1 - \text{resto} = 1 - \frac{26}{36} = \frac{10}{36} \\ P(X=a/2) = P(\text{"par"}) = \frac{18}{36} \\ P(X=2a) = P(\text{"7"}) = \frac{6}{36} \\ P(X=6a) = P(\text{"11"}) = \frac{2}{36} \end{cases} \qquad \Sigma = 1$$

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{10}{36} + \frac{a}{2} \cdot \frac{18}{36} + 2a \cdot \frac{6}{36} + 6a \cdot \frac{2}{36} = \frac{11}{12} a < a$$

Por lo tanto, el juego NO es justo

b)

$$\boxed{P(\text{beneficio positivo}) = P(X=2a) + P(X=6a) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}}$$

V.a B = "beneficio (€)" $= X - a$

$$f(b) = \begin{cases} P(B=-a) = \frac{10}{36} \\ P(B=-a/2) = \frac{18}{36} \\ P(B=a) = \frac{6}{36} \\ P(B=5a) = \frac{2}{36} \end{cases} \qquad \Sigma = 1$$

$$\mu_{B/B\geq 0} = E(B/B\geq 0) = \sum b_i P_i/_{B\geq 0} =$$

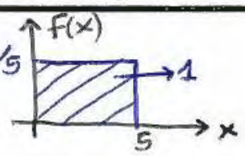
$$= -a \cdot \cancelto{0}{P(B=-a/B\geq 0)} + \frac{a}{2} \cdot \cancelto{0}{P(B=\tfrac{-a}{2}/B\geq 0)} + a \cdot P(B=a/B\geq 0) + 5a \cdot P(B=5a/B\geq 0) =$$

$$= a \cdot \frac{P(B=a \cap B\geq 0)}{P(B\geq 0)} + 5a \cdot \frac{P(B=5a \cap B\geq 0)}{P(B\geq 0)} = a \cdot \frac{P(B=a)}{P(B\geq 0)} + 5a \frac{P(B=5a)}{P(B\geq 0)}$$

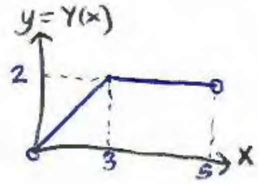
$$\boxed{= a \cdot \frac{6/36}{6/36 + 2/36} + 5a \cdot \frac{2/36}{6/36 + 2/36} = 2a}$$

Sea la v.a. X con probabilidad uniformemente distribuida en el intervalo $[0,5]$. Caracterizar la v.a. Y que queda determinada por la siguiente transformación: $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}X\ , 0<X<3\\ 2\quad ,3\le X<5\end{cases}$

$V.a\ X \sim U(0,5)$, $f_X(x)=\frac{1}{5}$, $0<x<5$



Transformación $Y=g(x)=\begin{cases}2/3 X\ , 0<X<3 & \to \text{continua}\\ 2\ ,\ 3\le X<5 & \to \text{discreta}\end{cases}$



Transformación de v.a continua (X) en v.a mixta (Y)

- PARTE DISCRETA : $P(Y=2)=P(3\le X<5)=\int_3^5 f_X(x)\,dx=\int_3^5 \frac{1}{5}dx=\ldots=\frac{2}{5}$
- PARTE CONTINUA: $0<X<3$

1) $Y(x)=\frac{2}{3}X$ es continua estrictamente creciente en $R_X=(0,3)$

2) Existe inversa $g^{-1}(y) \Rightarrow y=\frac{2}{3}x \to x=\frac{3}{2}y=g^{-1}(y)$

3) $g^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_Y=(0,2)$

Finalmente se cumple que podemos aplicar la formula:

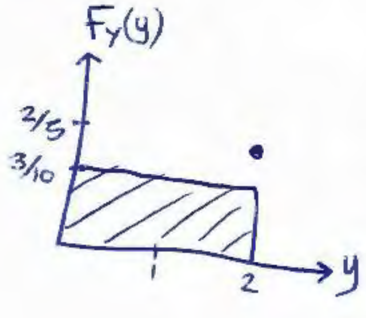
$$\left[(g^{-1})'(x)=\frac{3}{2}\right]$$

$$f_Y(y)=f_X(x=g^{-1}(y))\cdot|(g^{-1})'(y)|$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{10}\quad ,\ 0<y<2$$

Agrupando la parte discreta y la parte continua:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{10}\ ,\ 0<y<2\\ P(Y=2)=\frac{2}{5}\end{cases}$$



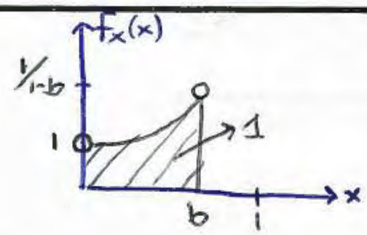
2.6 El de la transformación con logaritmos

Sea X una v.a. con fdp: $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $0<x<b$, siendo b una constante positiva. Se pide:

a) El valor de b y la media de X → es creciento, x el nº por de putadas

b) Se define la v.a.: $Y=c\cdot\ln\left(\dfrac{a}{1-X}\right)$, siendo a y b constantes positivas. Caracterice probabilísticamente la v.a. Y

v.a X : $f_X(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $0<x<b$



a) $f_X(x)$ es func. de densidad $\begin{cases} f_X(x)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = -\int_0^b \frac{-1}{1-x}\,dx \longrightarrow \left[-Ln(1-x)\right]_0^b = 1 \longrightarrow \left(Ln(1-b) - \cancel{Ln 1}\right) = 1 \longrightarrow$$

$$-Ln(1-b) = 1 \longrightarrow Ln(1-b) = -1 \longrightarrow 1-b = e^{-1} \longrightarrow \boxed{b = 1-e^{-1}}$$

$$\mu_X = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{1-e^{-1}} x\cdot\frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^{1-e^{-1}} \frac{x}{1-x}\,dx = \quad \begin{array}{r|l} x & 1-x \\ +x-1 & -1 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

$$= \int_0^{1-e^{-1}} \left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = \left[-x - Ln(1-x)\right]_0^{1-e^{-1}} = \left(-(\;-e^{-1}) - Ln(1-(1-e^{-1}))\right) - \left(-0 - \cancel{Ln 1}^{\,0}\right) =$$

$$= -1 + e^{-1} - Ln(e^{-1}) = -1 + e^{-1} + 1 = e^{-1}$$

b) <u>Transformación de v.a continua (X) en v.a continua (Y)</u>

1) $g(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (0, 1-e^{-1})$

2) Existe inversa $g^{-1}(y)$: $y = c\,Ln\left(\frac{a}{1-x}\right) \longrightarrow \frac{y}{c} = Ln\left(\frac{a}{1-x}\right) \to e^{y/c} = \frac{a}{1-x}$

$$\longrightarrow 1-x = a\cdot e^{-y/c} \longrightarrow \boxed{x = 1 - a e^{-y/c} = g^{-1}(y)}$$

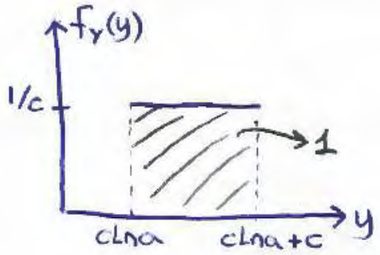
3) $g^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_Y = (c\,Ln a,\; c(Ln a + 1))$

$$R_Y : \begin{cases} x=0 \longrightarrow y = c\,Ln\left(\frac{a}{1-0}\right) = c\cdot Ln a \\ x = 1-e^{-1} \longrightarrow y = c\cdot Ln\left(\frac{a}{1-(1-e^{-1})}\right) = c\cdot Ln(a\cdot e) = c\left[Ln a + Ln e\right] = c\cdot(Ln a + 1) \end{cases}$$

Se cumplen las 3 condiciones:

$$f_Y(y) = f_X(x=g^{-1}(y)) \cdot \left|(g^{-1})'(y)\right| = \frac{1}{1-(1-ae^{-y/c})} \cdot \left|\frac{a}{c}\cdot e^{-y/c}\right| =$$

$$= \frac{\cancel{e^{y/c}}}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c}\cancel{e^{-y/c}} = \frac{1}{c}\ , \quad c\ln a < y < c\ln(a+1)$$



"PLAN B"

$$\left[f_Y(y) = f_X(x)\cdot\frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cancel{1-x}}\cdot\frac{1}{\frac{c}{\cancel{1-x}}} = \frac{1}{c}\right]$$

$$g(x) = c\ln\left(\frac{a}{1-x}\right) = c\ln a - c\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$g'(x) = -c\cdot\frac{(-1)}{1-x} = \frac{c}{1-x}$$

2.7 El de la transformación con exponencial de valor absoluto, que empieza con F(x)

Sea X una v.a. con FD $F(x)$ y la función $y = g(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} x + 0'5 & , \ -0'5 \le x < 0 \\ 0 & , \ x < -0'5 \\ 1 & , \ x \ge 0 \end{cases} \qquad y = g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & ; |x| \ge 0'25 \\ 2 & ; |x| < 0'25 \end{cases}$$

a) Compruebe que $F(x)$ cumple las propiedades de una FD y calcule la fdp de X

b) Calcule el rango de la v.a. Y y $P(Y = 2)$

c) Obtenga y dibuje la fdp de la v.a. Y. Calcule su media y su varianza

d) Compruebe que la fdp de la v.a. Y tiene área unidad muy completo

7. * (D05) Sea X una v.a. con FD $F(x)$ y la función $y = g(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} x + 0'5 \ ; -0'5 \le x < 0 \\ 0 \quad ; x < -0'5 \\ 1 \quad ; x \ge 0 \end{cases} \qquad y = g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} \ ; & |x| \ge 0'25 \\ 2 \ ; & |x| < 0'25 \end{cases}$$

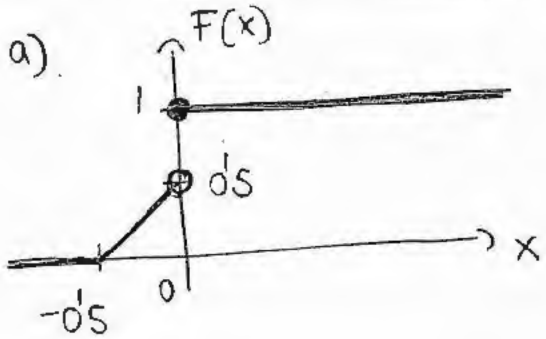
a) Compruebe que $F(x)$ cumple las propiedades de una FD y calcule la fdp de X

b) Calcule el rango de la v.a. Y y $P(Y = 2)$

c) Obtenga y dibuje la fdp de la v.a. Y. Calcule su media y su varianza

d) Compruebe que la fdp de la v.a. Y tiene área unidad

a)



Propiedades de $F(x)$:

1) $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(\infty) = 1$

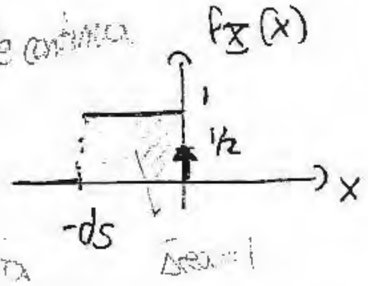
2) $F_X(x)$ NO es decreciente

3) $F_X(x)$ es continua por la derecha

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{si } -0'5 < x < 0 \\ 0'5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

→ Parte continua

Parte discreta



b) Transformación $Y = g(X) = \begin{cases} e^{-|X|} & , |X| \geq 0'25 \\ 2 & , |X| < 0'25 \end{cases}$ 0'5

$$Y = g(x) = \begin{cases} e^{-(-x)} = e^{x} & \text{si } -0'5 < x \leq -0'25 \\ 2 & \text{si } -0'25 < x \leq 0 \end{cases}$$

→ $e^{-0'5} < y \leq e^{-0'25}$ (parte continua)

→ $y = 2$ (parte discreta)

Rango de Y = $\boxed{R_Y = [e^{-0'5}, e^{-0'25}], \{2\}}$

$\boxed{P(Y=2)} = P(-0'25 < X \leq 0) = \int_{-0'25}^{0} 1 \, dx + P(X = 0) = [x]_{-0'25}^{0} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

V.a mixta

↓

V.a. mixta

c) · Transformación de una v.a. continua (X) en v.a. mixta (Y)

– Parte discreta $P(Y=2) = 3/4$

– Parte continua: 1) $g(x) = e^x$ es continua estrictamente creciente en $(-0'5, -0'25) = R_X$

2) Existe inversa $g^{-1}(y)$: $y = e^x \rightarrow x = \ln|y| = g^{-1}(y)$

3) $g^{-1}(y)$ es continua y derivable en $(e^{-0'5}, e^{-0'25}) = R_Y$

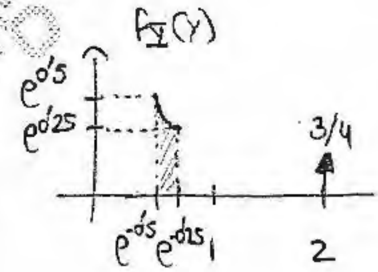
$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|(g^{-1})'(y)| = 1 \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y}, \quad e^{-0'5} < y < e^{-0'25}$$

Finalmente, agrupando,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } e^{-0'5} < y < e^{-0'25} \\ 3/4 & \text{si } y = 2 \end{cases}$$



$$\boxed{\mu_Y} = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} y \cdot \frac{1}{y}\,dy + 2 \cdot P(Y=2) = [y]_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{1'67}$$

$$\boxed{\sigma_Y^2} = V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3'239 - 1'67^2 = \boxed{0'45}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} y^2 \cdot \frac{1}{y}\,dy + 2^2 \cdot P(Y=2) = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} + 4 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0'5} - e^{-1}\right) + 3 = 3'239$$

d) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy} = \int_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} \frac{1}{y}\,dy + P(Y=2) = [\ln y]_{e^{-0'5}}^{e^{-0'25}} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{1}$$

2.8 El de la primera transformación por zonas mezcladas

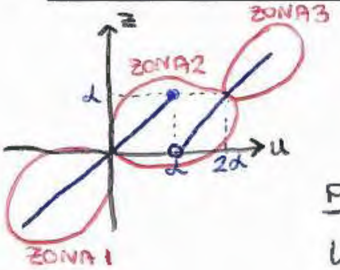
Sea U una v.a. continua con fdp $f_U(u)$ y FD $F_U(u)$. Se define la transformación

$$z = g(u) = \begin{cases} u & , \ si\ u \le a \\ u-a & , \ si\ u > a \end{cases}, \ siendo\ a > 0$$

Se pide:

a) Caracterizar la v.a. $Z = g(U)$

b) Suponiendo que U es una normal estándar, calcular $E(ZU)$



Transformación de v.a continua (U) en v.a continua (Z)

Como $g(u)$ esta definida a trozos, por cada trozo:

PARTE 1

$u \le \alpha$

1) $g_1(u)$ es continua estrictamente creciente en $R_U = (-\infty, \alpha)$

2) Existe inversa $g_1^{-1}(z)$: $z = u \rightarrow \boxed{u = z = g_1^{-1}(z)}$

3) $g_1^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = (-\infty, \alpha)$

$$\boxed{(g_1^{-1})'(z) = 1}$$

PARTE 2

$u > \alpha$

1) $g_2(u)$ es continua estrictamente creciente en $R_U = (\alpha, \infty)$

2) Existe inversa $g_2^{-1}(z)$: $z = u - \alpha \longrightarrow \boxed{u = z + \alpha = g_2^{-1}(z)}$

3) $g_2^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = (0, \infty)$

$$\boxed{(g_2^{-1})'(z) = 1}$$

Se cumplen las 3 cond. formula de la transformación:

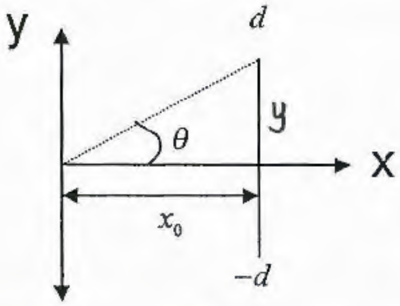
$$f_Z(z) = f_U(u = g_1^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| + f_U(u = g_2^{-1}(z)) \cdot |(g_2^{-1})'(z)| =$$

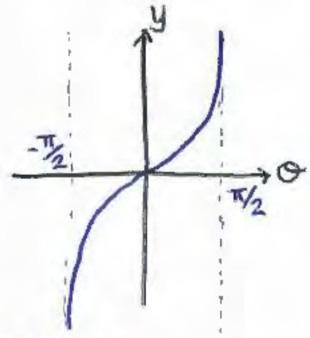
$$= \begin{cases} \text{ZONA 1} \\ z<0 : \ f_U(u = g_1^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| = f_U(z) \cdot |1| = f_U(z) \\ \text{ZONA 2} \\ 0<z<\alpha : \ f_U(u = g_1^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| + f_U(u = g_2^{-1}(z)) \cdot |(g_2^{-1})'(z)| \\ \qquad = f_U(z) \cdot |1| + f_U(z+\alpha) + |1| \\ \text{ZONA 3} \\ z>\alpha : \ f_U(u = g_2^{-1}(z)) \cdot |(g_2^{-1})'(z)| = f_U(z+\alpha) \cdot |1| \end{cases}$$

Considere una fuente radioactiva situada en el origen de coordenadas que emite partículas con ángulos de salida θ aleatorios y uniformemente distribuidos entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Se sitúa una pantalla perfectamente absorbente a distancia x_0 de la fuente

a) Determine la función de densidad de probabilidad de la v.a. Y: coordenada y de una partícula a su paso por $x = x_0$

b) Calcule la semianchura de la pantalla d para que ésta elimine el 50% de las partículas que sobrepasarían la recta $x = x_0$ en ausencia de apantallamiento





Θ mayus

$$tg\Theta = \frac{y}{x_0} \longrightarrow y = x_0 \cdot tg\Theta \qquad \text{Transformación: } Y = x_0 \cdot tg\Theta \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$$

Transformación de v.a continua (Θ) en v.a continua (Y)

1) $g(\theta)$ es continua estrictamente creciente en $R_\Theta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2) Existe inversa $g^{-1}(y)$: $y = x_0 \cdot tg\theta$ $\left[\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right) = g^{-1}(y)\right]$

3) $g^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_Y = (-\infty, \infty)$

$$\left[(g^{-1})'(y) = \frac{1/x_0}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2} = \frac{x_0}{x_0^2+y^2}\right]$$

Se cumplen las 3 condiciones:

comprobar $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$

$$\left[f_Y(y) = f_\Theta(\theta = g^{-1}(y)) \cdot \left|(g^{-1})'(y)\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \left|\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\right| = \frac{1}{\pi}\,\frac{x_0}{x_0^2+y^2}, \quad -\infty < y < \infty\right]$$

b) $P(-d < Y < d) = 0'50$

$$\longrightarrow \int_{-d}^{d} f_Y(y)\,dy = 0'50 \longrightarrow \int_{-d}^{d} \frac{1}{\pi}\,\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\,dy = 0'50 \longrightarrow \int_{-d}^{d} \frac{1/x_0}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2}\,dy = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right)\right]_{-d}^{d} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-d}{x_0}\right) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$$

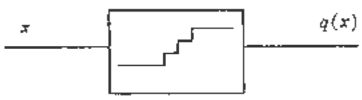
$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{d}{x_0} = \underbrace{tg\frac{\pi}{4}}_{1} \rightarrow \left[d = x_0\right]$$

2.10 El del cuantificador de 2 bits (que transforma señales analógicas en digitales)

Se dispone de un circuito cuantificador de 4 niveles (2 bits), cuya característica de transferencia es la mostrada en la figura 1. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una v.a. X con fdp tal como muestra la figura 2.

a) Determine la función de distribución de la v.a. $Y = q(X)$

b) Calcule los valores de los niveles de cuantificación b_1 y b_2 que hacen que la varianza de la v.a. $Y - X$ (error de cuantificación) sea mínima



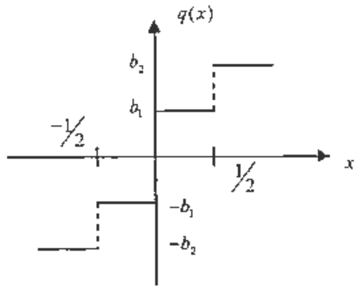


Figura 1

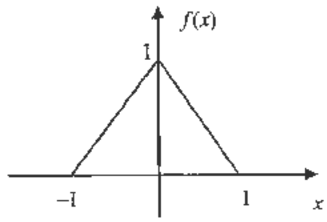


Figura 2

Un dispositivo tiene una capacidad C que depende de la tensión aplicada V según la ley:

$$c = g(v) = \begin{cases} c_0 \ , \ v \le v_0 \\ c_0\sqrt{\dfrac{v_0}{v}} \ , \ v > v_0 \end{cases}, \text{ siendo } c_0 \text{ y } v_0 \text{ constantes positivas.}$$

Suponiendo que la tensión es una v.a. V, uniforme en $(0{,}2\,v_0)$, determine:

a) La fdp de C = g(V). Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(c)dc = 1$

b) E(C) y E(CV)

c) Si el dispositivo se incluye en un circuito resonante cuya pulsación de resonancia es $W = \dfrac{1}{\sqrt{l_0 c}}$, siendo l_0 una constante positiva, calcule la pulsación media

11.* Un dispositivo tiene una capacidad c que depende de la tensión aplicada v según la ley: $c = g(v) = \begin{cases} c_0 & v \le v_0 \\ c_0\sqrt{\frac{v_0}{v}} & v > v_0 \end{cases}$, siendo c_0 y v_0 constantes positivas.

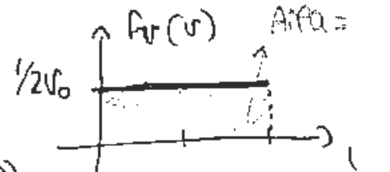
Suponiendo que la tensión es una v.a. V uniforme en $(0, 2v_0)$, determine:

a) La fdp de $C = g(V)$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(c)dc = 1$

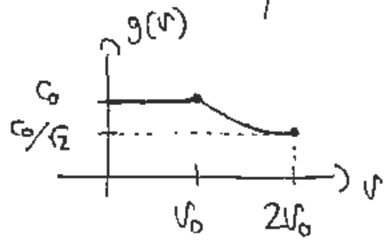
b) $E(C)$ y $E(CV)$

c) Si el dispositivo se incluye en un circuito resonante cuya pulsación de resonancia es $W = \frac{1}{\sqrt{l_0 C}}$, siendo l_0 una constante positiva, calcule la pulsación media

a) · V.a. $V \sim U(0, 2V_0)$, $f_V(v) = \dfrac{1}{2V_0}$, $0 < v < 2V_0$



Transformación $C = g(v) = \begin{cases} C_0 & , v \le V_0 \\ C_0\sqrt{\dfrac{V_0}{v}} & , v > V_0 \end{cases}$



· Transformación de una v.a. continua (V) en v.a. mixta (C)

- Parte discreta: $P(C = C_0) = P(V \le V_0) = 1/2$

- Parte continua: 1) $g(v)$ es continua estrictamente decreciente en $(V_0, 2V_0) = R_V$

V.a. continua ↓ V.a. mixta

2) Existe inversa $g^{-1}(c)$: $c = C_0\sqrt{\dfrac{V_0}{v}} \rightarrow c^2 = C_0^2 \cdot \dfrac{V_0}{v} \rightarrow v = \dfrac{C_0^2 V_0}{c^2}$

3) $g^{-1}(c)$ es continua y derivable en $\left(\dfrac{C_0}{\sqrt{2}}, C_0\right) = R_C$

$$(g^{-1})'(c) = C_0^2 V_0 \cdot (-2) \cdot c^{-3} = \frac{-2C_0^2 V_0}{c^3}$$

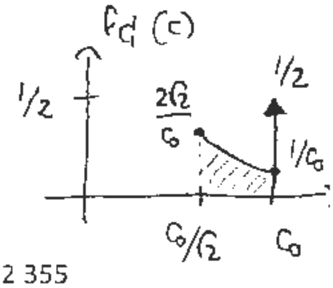
Resuelto por IGNACIO TAGARR

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$$f_C(c) = f_V(g^{-1}(c))\,|(g^{-1})'(c)| = \frac{1}{2V_0} \cdot \left|\frac{-2C_0^2 V_0}{c^3}\right| = \frac{C_0^2}{c^3} \quad , \quad \frac{C_0}{\sqrt{2}} < c < C_0$$

Finalmente, agrupando,

$$f_C(c) = \begin{cases} \dfrac{C_0^2}{c^3} & , \dfrac{C_0}{\sqrt{2}} < c < C_0 \\ 1/2 & , \text{si } c = C_0 \end{cases}$$



$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{c'}(c)dc = 1 \rightarrow \int_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} \frac{c_0^2}{c^3}dc + P(c'=c_0) = 1 \rightarrow c_0^2\left[\frac{c^{-2}}{-2}\right]_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{c_0^2}{2}\left[\frac{1}{c^2}\right]_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} = \frac{1}{2} \rightarrow -c_0^2\left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{2}{c_0^2}\right] = 1 \rightarrow -c_0^2 \cdot \frac{(-1)}{c_0^2} = 1 \rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

b) $$\boxed{\mu_{c'}} = E(c') = \int_{-\infty}^{\infty} c f_{c'}(c)dc = \int_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} c \cdot \frac{c_0^2}{c^3}dc + c_0 \cdot P(c'=c_0) = c_0^2\left[\frac{c^{-1}}{-1}\right]_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} + c_0 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -c_0^2\left[\frac{1}{c}\right]_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} + \frac{1}{2}c_0 = -c_0^2\left[\frac{1}{c_0} - \frac{\sqrt{2}}{c_0}\right] + \frac{1}{2}c_0 = (\sqrt{2}-1)c_0 + \frac{1}{2}c_0 = \boxed{\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)c_0}$$

$$\boxed{E(c'v)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\cdot v \cdot f_v(v)\,dv = \int_0^{v_0} c_0 v \cdot \frac{1}{2v_0}dv + \int_{v_0}^{2v_0} c_0\sqrt{\frac{v_0}{v}} \cdot v \cdot \frac{1}{2v_0}dv = \frac{c_0}{2v_0}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{v_0} +$$

$$+ \frac{c_0}{2\sqrt{v_0}} \cdot \left[\frac{v^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{v_0}^{2v_0} = \frac{c_0 v_0}{4} + \frac{c_0}{\sqrt{v_0}}\left((2^{3/2}-1)v_0^{3/2}\right) = \frac{c_0 v_0}{4} + c_0 v_0 \frac{1}{3}(2^{3/2}-1) =$$

$$= c_0 v_0 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}(2^{3/2}-1)\right) = \boxed{0'8595\, c_0 v_0}$$

c) $$\boxed{\mu_w = E(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot f_w(w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} i(v)\, f_v(v)\,dv = \ldots$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

$$\left.\begin{array}{l} w = h(c) = \dfrac{1}{\sqrt{6c}} \\[2ex] c = g(v) = \begin{cases} c_0 & , v \le v_0 \\ c_0\sqrt{\dfrac{v_0}{v}} & , v > v_0 \end{cases} \end{array}\right\} w = i(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{6c_0}} & , v \le v_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6c_0}}\left(\dfrac{v}{v_0}\right)^{1/4} & , v > v_0 \end{cases}$$

$$= \int_0^{v_0} \frac{1}{\sqrt{6c_0}} \cdot \frac{1}{2v_0}dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{1}{\sqrt{6c_0}} \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{2v_0}dv = \frac{1}{\sqrt{6c_0}} \cdot \frac{1}{2v_0}\left[v\right]_0^{v_0} + \frac{1}{\sqrt{6c_0}} \cdot \frac{1}{2v_0^{5/4}}\left[\frac{v^{5/4}}{\frac{5}{4}}\right.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6c_0}} + \frac{1}{\sqrt{6c_0}} \cdot \frac{2}{5} \cdot (2^{5/4}-1) = \boxed{\frac{1'0514}{\sqrt{6c_0}}}$$

Se dispone de 2 generadores A y B de números aleatorios de 36 bits. Los números que genera A son todos equiprobables, y lo mismo ocurre con los generados por B. Si se generan sendos números aleatorios en A y B, la probabilidad de que uno cualquiera de los dos sea igual a un número prefijado m es 2^{-35}. Se pide:

a) ¿Son los generadores A y B independientes entre sí?

b) Se obtienen 10^{11} números aleatorios independientes con el generador A; calcule la probabilidad de que al menos uno sea igual a m

c) Si se generan 10^{14} números independientes en A, calcule la probabilidad de que más de 1500 de ellos sean iguales a m

Sucesos: A: "seleccionar el generador A el nº "n"" ; B: "seleccionar el generador B el nº "n""

Datos: $P(A) = 1/2^{36} = 2^{-36}$; $P(B) = 1/2^{36} = 2^{-36}$; $P(A \cup B) = 2^{-35}$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$2^{-35} = 2^{-36} + 2^{-36} - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0$

A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

¿$0 = 2^{-36} + 2^{-36}$? NO $\longrightarrow$ A y B son dependientes

b)

V.a $X = B(n = 10^{11}, p = 2^{-36})$

EXITO: el generador A saque el numero "n"

FRACASO: No lo saque

= "nº veces que el generador A saca el número "n""

"nº exito"

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X = 10^{11})$

$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10^{11}}{0} (2^{-36})^0 \cdot (1-2^{-36})^{10^{11}-0}$

$\approx 0'767$

10 $\boxed{nCr}$ 0

c) V.a $Y = B(n = 10^{14}, p = 2^{-36})$

EXITO: el generador A saque "n"

FRACASO: No lo saque

(igual que antes)

$P(Y > 1500) \overset{EXACTO}{=} P(Y = 1501) + \dots + P(Y = 10^{14})$

*

$\xrightarrow[TCL]{aprox} N(\mu = np = 10^{14} \cdot 2^{-36} = 1455,19,$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10^{14} \cdot 2^{-36} \cdot (1-2^{-36})} = 3\ \ 147)$

$= N(1455,19, 38'147)$

$P(Y>1500) \xrightarrow[\text{+ TCL + tipificar}]{\text{aprox}} P\left(\underset{\downarrow \atop N(0,1)}{Z} > \frac{1500-1455'19}{38'147}\right) = P(Z>1'17) =$

$= 1 - G(1'17) = 1 - \underset{\downarrow \atop \text{en la tabla}}{0'8790} = 0'1210$

$$\text{GAUSSIANA ó } N(\eta,\sigma): f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right];\quad E(X)=\eta;\quad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.3133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

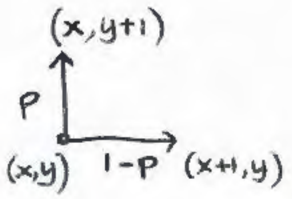
$N(0,1)$

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Un móvil se desplaza en el plano; en cada instante hay una probabilidad p de ir de un punto (x,y) a otro $(x,y+1)$ y una probabilidad q de ir de un punto (x,y) a otro $(x+1,y)$. Se pide:

a) La probabilidad de ir con desplazamientos independientes desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (a,b)

b) La probabilidad de alcanzar el segmento MN (alguno de sus puntos), definido por $M=(a,b)$, $N=(a,b+1)$ desde el punto $(0,0)$



a) $P\begin{pmatrix}\text{ir desde } (0,0)\\ \text{hasta } (a,b)\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\text{desplazarnos}\\ b \text{ veces verticalm.}\end{pmatrix} =$

V.a $X = B(n=a+b,\ p)$ ⟨ ÉXITO: desplazamiento vert. / FRACASO: despl. horizontal

= "nº desplazamientos verticales"

"nº éxitos"

$$= P(X=b) = \boxed{\binom{a+b}{b} p^b \cdot (1-p)^{a+\cancel{b}-\cancel{b}}}$$

b)

$P(\text{alcanzar segmento } MN) = P(\text{alcanzar } M \text{ o alcanzar } N) = P(M \cup N) =$

$= P(\underset{(a,b)}{M}) + P(\underset{(a,b+1)}{N}) - P(M\cap N) = \underbrace{\binom{a+b}{b} p^b (1-p)^a}_{a)} + \underbrace{\binom{a+b+1}{b+1} p^{b+1} \cdot (1-p)^a}_{\text{como a) pero con } b+1 \text{ en vez de } b} \dots$

$\dots - \underbrace{P(M)}_{a)} \cdot \underbrace{P(N/M)}_{p} = \binom{a+b}{b} p^b (1-p)^a + \binom{a+b+1}{b+1} p^{b+1} (1-p)^a -$

$\binom{a+b}{a} p^b (1-p)^a \cdot p$

La profundidad de penetración de un neutrón en un metal puede modelarse como una v.a. con distribución exponencial de parámetro 1 mm^{-1}

a) Calcular la probabilidad de que un neutrón atraviese una lámina de 1 mm de espesor

b) Si a continuación de dicha lámina se coloca otra del mismo grosor, ¿cuál es la probabilidad de que un neutrón que ha atravesado la primera lámina atraviese también la segunda?

c) Un cuerpo radioactivo emite 1000 neutrones, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos atraviese una lámina de 7 mm de espesor?

d) Si se conoce de seguridad que al menos un neutrón ha atravesado la lámina del apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que la hayan atravesado más de 2?

$$V.a\ X = Exp(\lambda=1),\quad f_X(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda x} = e^{-x},\quad x\geq 0$$

= "profundidad de penetración" (mm)

a)

$$P(X>1) = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_1^{\infty} = -(e^{-\infty}-e^{-1}) = e^{-1}$$

b)

$$P(X>2/X>1) = \frac{P(X>2\cap X>1)}{P(X>1)} = \frac{P(X>2)}{P(X>1)} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}$$

PROPIEDAD EXPONENCIAL : NO TIENE MEMORIA , ej $P(X>7/X>2) = P(X>5)$

c) $V.a\ Y = B(n=1000,\ p=e^{-7})$

ÉXITO : pasan lámina 7mm

FRACASO : NO "

= "nº neutrones que pasan lámina de 7mm"

"nº éxito"

$P(\text{éxito}) = P(X>7) = \dots = e^{-7}$

$$P(Y\geq 1) = P(Y=1) + \dots + P(Y=1000) =$$

$$= 1-P(Y=0) = 1-\binom{1000}{0}\cdot(e^{-7})^{0}\cdot(1-e^{-7})^{1000-0} = 0'5984$$

d) $$\left[P(Y>2/Y\geq 1) = \frac{P(Y>2 \cap Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{P(Y>2)}{P(Y\geq 1)} = \right.$$

$$= \frac{1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)}{0'5984} =$$

$$= \frac{1-\binom{1000}{0}(e^{-7})^{0}(1-e^{-7})^{1000-0}-\binom{1000}{1}(e^{-7})^{1}(1-e^{-7})^{1000-1}-\binom{1000}{2}(e^{-7})^{2}(1-e^{-7})^{1000-2}}{0'5984}$$

$$\left. = 0'1083 \right]$$

Un ordenador tiene una memoria de N posiciones. Durante el montaje de la misma se instalaron por error algunos circuitos defectuosos, de forma que se sabe que m posiciones no pueden ser leídas, y el ordenador se bloqueará cuando lo intente. El acceso a las posiciones de memoria puede ser de dos tipos: 1) aleatorio (en cada acceso las N posiciones tienen la misma probabilidad de ser leídas, 2) secuencial (el ordenador lee las posiciones sucesivamente a partir de la primera).

a) Caracterice probabilísticamente la v.a. X_1: número de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo aleatorio

b) Caracterice probabilísticamente la v.a. X_2: número de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo secuencial

c) Si $m = 1$, calcule el número medio de accesos hasta que el ordenador se bloquee para cada tipo de acceso

d) Si $m = 1$, calcule la probabilidad de que el número de accesos sea menor o igual que N para cada tipo de acceso y su límite cuando $N \to \infty$

Geométrica

15 * Un ordenador tiene una memoria de N posiciones. Durante el montaje de la misma se instalaron por error algunos circuitos defectuosos, de forma que se sabe que m posiciones no pueden ser leídas, y el ordenador se bloqueará cuando lo intente. El acceso a las posiciones de memoria puede ser de dos tipos: 1) aleatorio (en cada acceso las N posiciones tienen la misma probabilidad de ser leídas, 2) secuencial (el ordenador lee las posiciones sucesivamente a partir de la primera).

a) Caracterice probabilísticamente la v.a. X_1: número de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo aleatorio
b) Caracterice probabilísticamente la v.a. X_2: número de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo secuencial
c) Si $m = 1$, calcule el número medio de accesos hasta que el ordenador se bloquee para cada tipo de acceso
d) $m = 1$, calcule la probabilidad de que el número de accesos sea menor o igual que N para cada tipo de acceso y su límite cuando $N \to \infty$

a) V.a. X_1: "nº accesos a memoria hasta que el PC se bloquee cuando los accesos son todos de tipo aleatorio" ⇒ Accesos a memoria independiente

$\sim Geo\left(\frac{m}{N}\right)$ ∘∘ $\frac{m}{n} = p$ es la probabilidad de que el PC se bloquee en un acceso

fdp. $f_{X_1}(x_1) = P(X_1 = k) = \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{k-1} \cdot \frac{m}{N}$, $k = 1, 2, \ldots \infty$

b) V.a. X_2: "nº accesos a memoria hasta que el PC se bloquee cuando los accesos son todos de tipo secuencial" ⇒ Accesos a memoria dependientes

fdp: $f_{X_2}(x_2) = P(X_2 = k) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_{k-1}/(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{k-2})) \cdot P(\overline{A_k}/\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i) =$

$= \frac{N-m}{N} \cdot \frac{N-m-1}{N-1} \cdots \frac{N-m-(k-2)}{N-(k-2)} \cdot \frac{m}{N-(k-1)} = \frac{m}{N-(k-1)} \prod_{i=0}^{k-2} \frac{N-m-i}{N-i}$,

$k = 1, 2 \ldots N-m+1$

Sucesos:
- A_1 "primer acceso a memoria correcto"
- A_2: "segundo " "
- A_k: "k-ésimo " "
- $\overline{A_k}$: " " " incorrecto"

c) $\boxed{\mu_{X_1}} = E(X_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\cdot P(X_1=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \underbrace{\left(1-\frac{m}{N}\right)}_{q}^{k-1}\cdot \underbrace{\frac{m}{N}}_{p} = p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dq}q^k\right) =$

$= p\frac{d}{dq}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)}_{\text{serie en pr. geom. de razón } q} = p\frac{d}{dq}\left(\frac{-q}{q-1}\right) = -p\cdot\frac{1\cdot(q-1)-q\cdot 1}{(q-1)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{N}{m} \overset{m=1}{=} \boxed{N}$

$S_n = \frac{a_n\cdot r - a_1}{r-1}$

$X_1 \sim Geo(p)$

o, de otra manera, $\boxed{E(X_1) = 1/p = \frac{N}{m} \overset{m=1}{=} N}$

$\text{Suma} = \frac{N+1}{2}\cdot N$

$\boxed{\mu_{X_2}} = E(X_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\cdot P(X_2=k) = \sum_{k=1}^{N} k\cdot\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{\cancel{N}}\cdot\frac{N+1}{2}\cdot\cancel{N} = \boxed{\frac{N+1}{2}}$

$m=1$

$P(X_2=k) = \frac{N-m}{N}\cdot\frac{N-m-1}{N-1}\cdots\frac{N-m-(k-2)}{N-(k-2)}\cdot\frac{m}{N-(k-1)} = \frac{\cancel{N-1}}{N}\cdot\frac{\cancel{N-2}}{\cancel{N-1}}\cdots\frac{\cancel{N-k+1}}{\cancel{N-k+2}}\cdot\frac{1}{\cancel{N-k+1}} = \frac{1}{N}$

d) • $P(X_1 \le N) = \sum_{k=-\infty}^{N} P(X_1=k) = \sum_{k=1}^{N} q^{k-1}\cdot p = p\sum_{k=1}^{N} q^{k-1} = p\,\frac{q^{N-1}\cdot q - 1}{q-1} =$

$= 1 - q^N \overset{m=1}{=} 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$

$\lim_{N\to\infty} P(X_1\le N) = \lim_{N\to\infty} 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N = 1-e^{-1}$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

• $P(X_2 \le N) = 1$ ← siempre, puesto que en alguno de los accesos se bloqueará, al haber una posición que NO puede ser leída

En una distribución normal:

a) Calcular las siguientes probabilidades en una distribución normal estándar:

$$P(Z \leq 1'45)\ ,\ P(Z \leq -1'45)\ ,\ P(1'25 < Z \leq 2'57)$$

$$P(-2'57 < Z \leq -1'25)\ ,\ P(-0'53 < Z < 2'46)$$

b) Se ha aplicado un test de inteligencia a un grupo de alumnos y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:

b1) ¿Qué proporción de alumnos tendrán una puntuación en dicho test entre 20 y 35?

b2) ¿Qué puntuación mínima tienen los alumnos que se encuentran entre el 20 por ciento más inteligente del grupo?

c) Calcular la probabilidad $P(|X-\mu| < \sigma)$ en una distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Tema 2. Variables aleatorias unidimensionales. Distribuciones de probabilidad

Normal

16 En una distribución normal:

a) Calcular las siguientes probabilidades en una distribución normal estándar:

$$P(Z \leq 1'45), \qquad P(Z \leq -1'45), \qquad P(1'25 < Z \leq 2'57)$$
$$P(-2'57 < Z \leq -1'25), \qquad P(-0'53 < Z \leq 2'46)$$

b) Se ha aplicado un test de inteligencia a un grupo de alumnos y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:

b1) ¿Qué proporción de alumnos tendrán una puntuación en dicho test entre 20 y 35?

b2) ¿Qué puntuación mínima tienen los alumnos que se encuentran entre el 20 por ciento más inteligente del grupo?

c) Calcular la probabilidad $P(|X-\mu| < \sigma)$ en una distribución normal $N(\mu, \sigma)$

a) $Z \sim N(0,1)$

- $P(Z \leq 1'45) = G(1'45) = 0'9265$

- $P(Z \leq -1'45) = 1 - P(Z \leq 1'45) = 1 - G(1'45) = 1 - 0'9265 = 0'0735$

- $P(1'25 \leq Z \leq 2'57) = P(Z \leq 2'57) - P(Z \leq 1'25) = G(2'57) - G(1'25) = 0'9949 - 0'8$

$= 0'1005$

- $P(-2'57 \leq Z \leq -1'25) = P(1'25 \leq Z \leq 2'57) = \ldots = 0'1005$

pregunta anterior

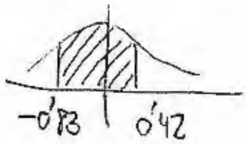
- $P(-0'53 \leq Z \leq 2'46) = P(Z \leq 2'46) - P(Z \leq -0'53) = G(2'46) - [1 - G(0'53)] = 0'99$

$-(1-$

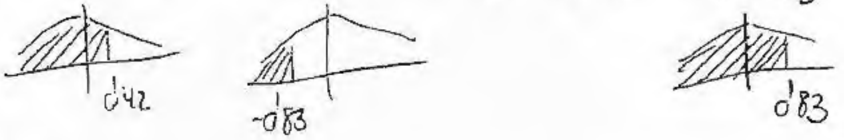
$= 0'$

b) v.a. $X \sim N(30, 12)$

b1) $P(20 \le X \le 35) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=} P\left(\frac{20-30}{12} \le Z \le \frac{35-30}{12}\right) = P(-0'83 \le Z \le 0'42) =$

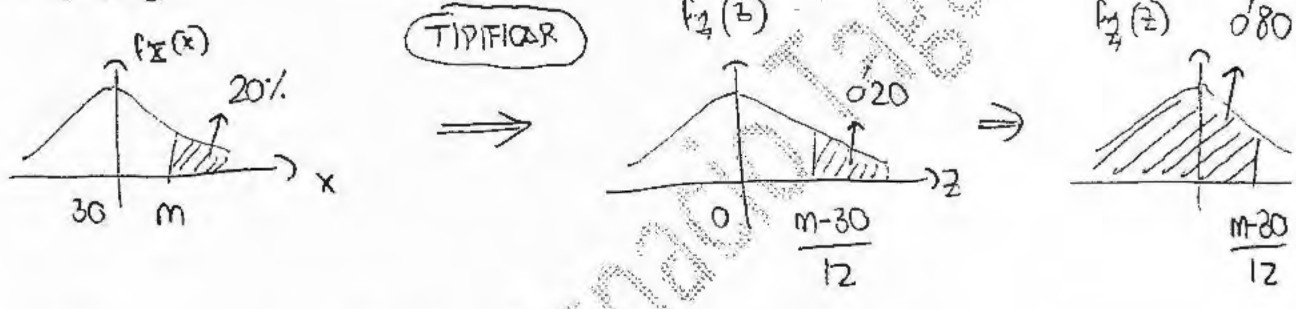


$= P(Z \le 0'42) - P(Z \le -0'83) = G(0'42) - [1 - G(0'83)] = 0'6628 - (1 - 0'7967) =$



$= 0'4595$

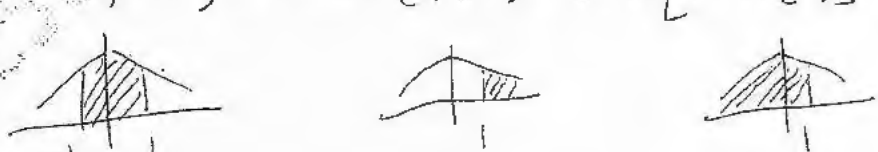
b2)



$G\left(\frac{m-30}{12}\right) = 0'80 \Rightarrow \frac{m-30}{12} \simeq 0'84 \Rightarrow \boxed{m = 40'08}$

c) $P(|X - \mu| < \sigma) = P(-\sigma < X - \mu < \sigma) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=} P\left(\frac{-\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\sigma}{\sigma}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = 1 - 2P(Z \ge 1) = 1 - 2[1 - G(1)] = 1 - 2[1 - 0'841$



$= 0'6826$

Se define la v.a. Y como el número de veces que se debe lanzar una jabalina hasta conseguir sobrepasar una marca de b metros (lanzamientos independientes). Si se llama p a la probabilidad de que un lanzamiento sea superior a b, se pide:

a) $P(Y=k)$ y demuestre que $\sum P(Y=k)=1$

b) El número medio de lanzamientos necesarios para superar la marca de b metros

c) Si la distancia alcanzada en un único lanzamiento X, está distribuida según una v.a. Rayleigh con fdp $f(x)=\frac{x}{a^2}\cdot e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\cdot u(x)$, con $a=25\ m$, calcule el número medio de ensayos necesarios para batir el récord del mundo situado a 88 m

V.a Y = "nº veces que debemos lanzar la jabalina para superar los "b" metros"

$= Geo(p)$

a) $\left[f_Y(y) = p(Y=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p \quad , \quad k=1,2\ldots \right]$

$$\left[\sum P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{q}{}^{k-1}\cdot p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot q^{-1} = \right.$$

$$= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{p}{q}\cdot\frac{\cancel{q^{\infty}}\,q - q}{q-1} = \frac{p\cdot(-q)}{q\cdot(q-1)} =$$

serie en prog geom.

$S_n = \frac{a_n\cdot r - a_1}{r-1}$

$$\left. = \frac{-pq}{q\cdot(-p)} = 1 \right]$$

b) $$\left[\mu_Y = E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \underbrace{(1-p)}_{q}{}^{k-1}\cdot p = \right.$$

$$p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}(q^k) = p\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = p\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{-q}{q-1}\right) =$$

$$\left. = p\cdot\frac{(-1)\cdot(q-1)-1\cdot(-q)}{(q-1)^2} = p\,\frac{1-\cancel{q}+\cancel{q}}{(-p)^2} = \frac{1}{p} \right]$$

c)

V.a X = "distancia alanzada en un lanzamiento" (m)

$$f_X(x) = \frac{x}{25^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 25^2}} \quad , \quad x \geq 0$$

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{batir record}\\ \text{del mundo}\end{smallmatrix}\right) = P(X > 88) = \int_{88}^{\infty} \frac{x}{25^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 25^2}}\, dx =$$

$$= -\left[e^{-\frac{x^2}{2\cdot 25^2}}\right]_{88}^{\infty} = -\left(e^{-\infty} - e^{-\frac{88^2}{2\cdot 25^2}}\right) = 2'04 \cdot 10^{-3}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2'04 \cdot 10^{-3}} = 490'4 \longrightarrow \left[\begin{matrix}491\\ \text{lanzamientos}\end{matrix}\right]$$

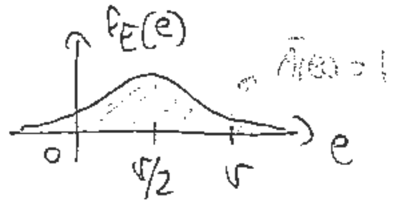
2.18 El del instrumento con una normal que se corta

La tensión de entrada a un determinado instrumento de medida es una v.a. $E = N\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$. El valor medido por dicho instrumento, X, coincide con el valor de la tensión de entrada si éste se encuentra en el margen $(0, v)$; si dicho valor está por debajo de 0 voltios, el instrumento siempre registra 0; y si está por encima de v, la medida es siempre igual a v. Obtenga la fdp, la FD y la media de X

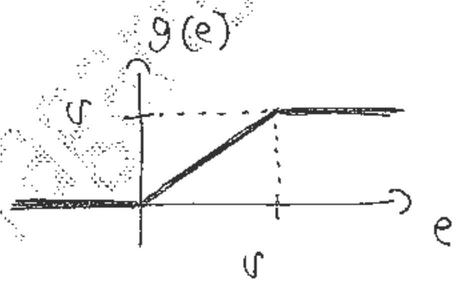
Distribución normal

18. * La tensión de entrada a un determinado instrumento de medida es una v.a. $E = N\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$. El valor medido por dicho instrumento, X, coincide con el valor de la tensión de entrada si éste se encuentra en el margen $(0, v)$; si dicho valor está por debajo de 0 voltios, el instrumento siempre registra 0, y si está por encima de v, la medida es siempre igual a v. Obtenga la fdp, la FD y la media de X

· V.a. $E \sim N\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$



· Transformación $x = g(e) = \begin{cases} 0 & , \text{si } e<0 \\ e & , \text{si } 0 \le e \le v \\ v & , \text{si } e > v \end{cases}$



· Transformación de v.a. continua (E) en v.a. mixta (X)

– Parte discreta: $P(X=0) = P(E \le 0) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=} P\left(Z \le \frac{0 - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) = P(Z \le -0'71) =$

V.a. continua
↓
V.a. mixta

$= 1 - G(0'71) = 1 - 0'7611 \approx 0'24$

$P(X = v) = P(E \ge v) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=} P\left(Z \ge \frac{v - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) = P(Z \ge 0'71) = 1 - G(0'71)$

$= 1 - 0'7611 \approx 0'24$

– Parte continua: 1) $g(e) = e$ es continua estrictamente creciente en $(0,v) = R_E$

2) Existe inversa $g^{-1}(x)$: $x = e \Rightarrow e = x = g^{-1}(x)$

3) $g^{-1}(x)$ es continua y derivable en $(0,v) = R_X$, $(g^{-1})'(x) = 1$

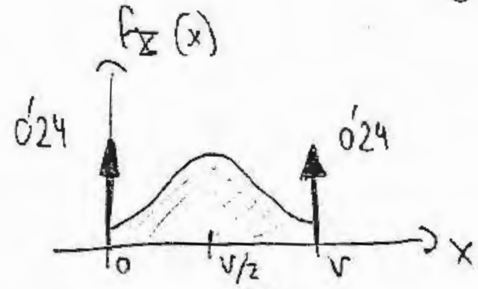
Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$f_X(x) = f_E(g^{-1}(x)) \cdot |(g^{-1})'(x)| = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - v/2)^2}{2\frac{v^2}{2}}} \cdot |1| = \frac{1}{v\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x - v/2}{v}\right)^2}$, $0<$

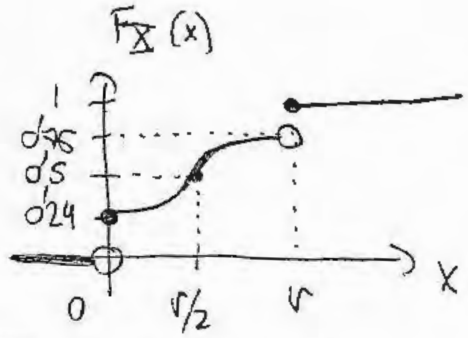
En una v.a. normal, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$

Finalmente, agrupando:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x-v/2}{v}\right)^2} & , \ 0 < x < v \\ 0'24 & , \ \text{si } x = 0, v \end{cases}$$



Función de distribución $F_X(x) = \begin{cases} \bullet\ 0 & , \text{ si } x<0 \\ \bullet\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X=0) + \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_E(e)\,de = G\left(\frac{x-v/2}{v/\sqrt{2}}\right) & , \ 0 \leq x < \\ \bullet\ 1 & , \text{ si } x \geq v \end{cases}$



simetría de $f_X(x)$

$$\boxed{\mu_X = E(X) = v/2}$$

Vemos que $F_X(x)$ da saltos en los puntos $(0, v)$ que la $f_X(x)$ tiene parte discreta (de

2.19 El de la red de cajeros

Una red de cajeros automáticos está constituida por un ordenador central, al que están conectados una serie de terminales. Cuando un usuario, previa la introducción de su tarjeta, desea realizar una operación, el cajero intenta conectarse a través de una línea con el ordenador central, el cual tarda en responderle un tiempo T, que depende de factores impredecibles.
Si el cajero está situado en la misma población que el ordenador, T es aproximadamente una v.a. $N(\eta,\sigma)$; si están en distinta población, T tiene una fdp $f_T(t)=\frac{a}{2}e^{-a|t-\mu|}$.

El modo de funcionamiento es tal que si al cabo de t_0 segundos el ordenador no ha dado respuesta alguna, se interrumpe la operación iniciada

a) Si se sabe que la media y la varianza de T no dependen de la ubicación del cajero, determine los parámetros μ y a en función de los parámetros η y σ

b) Si t_0 se diseñó de forma que la probabilidad de que una operación se interrumpa dentro de la población sea 0'01, calcule dicha probabilidad para un cajero situado fuera

c) Si la red está formada por 2000 cajeros dentro de la población y 1000 fuera, y se opera con 100 cajeros escogidos al azar, determine la probabilidad de que al menos uno no pueda realizar la operación requerida

Normal, Binomial, Th. prob. total

19 * Una red de cajeros automáticos está constituida por un ordenador central, al que están conectados una serie de terminales. Cuando un usuario, previa la introducción de su tarjeta, desea realizar una operación, el cajero intenta conectarse a través de una línea con el ordenador central, el cual tarda un tiempo en responderle T, que depende de factores impredecibles. Si el cajero está situado en la misma población que el ordenador, T es aproximadamente una v.a. $N(\eta, \sigma)$; si están en distinta población, T tiene una fdp $f(t) = \frac{a}{2} \cdot e^{-a|t-\mu|}$. El modo de funcionamiento es, tal que, si al cabo de t_0 segundos el ordenador no ha dado respuesta alguna, se interrumpe la operación iniciada

a) Si se sabe que la media y varianza de T no dependen de la ubicación del cajero, determine los parámetros μ y a en función de los η y σ

b) Si t_0 se diseñó de forma que la probabilidad de que una operación se interrumpa dentro de la población sea 0'01, calcule dicha probabilidad para un cajero situado fuera

c) Si la red está formada por 2000 cajeros dentro de la población y 1000 fuera, y se opera con 100 cajeros escogidos al azar, determine la probabilidad de que al menos uno no pueda realizar la operación requerida

V.a. T = "tiempo que tarda el cajero en responder"

$\nearrow N(\eta, \sigma)$, si el cajero está situado en la misma población

$\searrow$ fdp: $f_T(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t-\mu|}$, si el cajero está situado en otra población

a) $E(T_{\text{MISMA POBLACIÓN}}) = E(T_{\text{OTRA POBLACIÓN}}) \to \boxed{\eta = \mu}$

$V(T_{\text{MISMA POBLACIÓN}}) = V(T_{\text{OTRA POBLACIÓN}}) \to \sigma^2 = \frac{2}{a^2} \nearrow \boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$

CV $t-\mu = x$, $dt = dx$

$E(T_{\text{OTRA POBLACIÓN}}) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\mu} t \cdot \frac{a}{2} e^{-a(-(t-\mu))} dt + \int_{\mu}^{\infty} t \cdot \frac{a}{2} e^{-a(t-\mu)} dt =$

$= \int_{-\infty}^{0} (x+\mu)\frac{a}{2} e^{ax} dx + \int_{0}^{\infty} (x+\mu) \frac{a}{2} e^{-ax} dx = \frac{a}{2}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} x e^{ax} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-ax} dx}_{\text{contrarias} \to 0}\Big] + \frac{\mu}{2}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} a e^{ax} dx + \int_{0}^{\infty} a e^{-ax} dx}_{\text{iguales: } 1+1=2}\Big] = \mu$

$V(T_{\text{OTRA POBLACIÓN}}) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 \frac{a}{2} e^{-a|t-\mu|} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{a}{2} e^{-a|x|} dx = \frac{a}{2} \cdot 2 \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax} dx =$

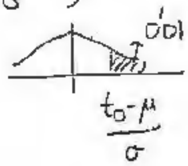
CV $t-\mu = x$, $dt = dx$

$= \dots = a \cdot \left[e^{-ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)\right]_0^{\infty} = a \cdot \frac{2}{a^3} = \frac{2}{a^2}$

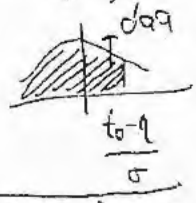
POR PARTES

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

b) $P\left(\begin{matrix}\text{interrumpa dentro de la}\\ \text{misma población}\end{matrix}\right) = 0'01 \Rightarrow P(\underset{\substack{\downarrow \\ N(\eta,\sigma)}}{T_{\text{MISMA POBLACIÓN}}} > t_0) = 0'01 \overset{\text{TIPIFICAR}}{\Rightarrow} P\left(Z > \dfrac{t_0-\eta}{\sigma}\right) = 0'01$



$\Rightarrow P\left(Z < \dfrac{t_0-\eta}{\sigma}\right) = 0'99 \Rightarrow \dfrac{t_0-\eta}{\sigma} \approx 2'33 \Rightarrow \boxed{t_0 = 2'33\sigma + \eta}$



$\boxed{P\left(\begin{matrix}\text{interrumpa fuera}\\ \text{de la población}\end{matrix}\right)} = P(T_{\text{OTRA POBLACIÓN}} > t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \dfrac{a}{2} e^{-a|t-\mu|}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{t_0}^{\infty} \dfrac{a}{2} e^{-a(t-\mu)} =$

$t_0 = 2'33\sigma + \eta$ y $\eta = \mu$
$\Rightarrow t_0 > \mu$

$= \dfrac{-1}{2}\left[e^{-a(t-\mu)}\right]_{t_0}^{\infty} = \dfrac{-1}{2}\left(0 - e^{-a(t_0-\mu)}\right) =$

$= \dfrac{1}{2} e^{-a(t_0-\mu)} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\cdot 2'33\sigma} = \boxed{0'0185}$

- $t_0 = 2'33\sigma + \eta$
- $\eta = \mu$
- $a = \sqrt{2}/\sigma$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

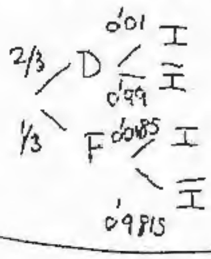
c) V.a. $X = B(100, 0'0128)$ — ÉXITO: un cajero NO puede realizar la operación; FRACASO: un cajero SÍ puede realizar la operación

$=$ "nº cajeros que NO pueden realizar la operación"

$P(\text{al menos uno NO pueda realizar la operación}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{100}{0} 0'0128^0 \cdot 0'9872^{100}$
$= 0'724$

$P\left(\begin{matrix}\text{un cajero NO puede}\\ \text{realizar la operación}\end{matrix}\right) \overset{\text{Th. probabilidad total}}{=} P\left(\begin{matrix}\text{interrupción de}\\ \text{un cajero}\end{matrix}\right) = P(D)\cdot P(I/D) + P(F)\cdot P(I/F) =$

$= \dfrac{2000}{3000}\cdot 0'01 + \dfrac{1000}{3000}\cdot 0'0185 = 0'0128$



2.20 El del control del acceso por voz

Un sistema de control de accesos de clientes a un determinado recinto compara la palabra de paso pronunciada por un locutor con una referencia interna y obtiene una medida del "parecido" entre ambas que se modela como una v.a. X con distribución $N(3,1)$ si el locutor es "cliente" y $N(0,2)$ si el locutor es "impostor". El acceso se permite o deniega según dos posibles criterios: 1) El locutor pronuncia la palabra de paso obligatoriamente n veces y si el "parecido" supera, al menos, m veces un umbral λ_1 se permite el acceso; caso contrario, se deniega. 2) El locutor pronuncia la palabra de paso y el "parecido" se compara con dos umbrales, λ_0 y λ_1 ($\lambda_0 < \lambda_1$); si es menor que λ_0 se deniega el acceso, si es mayor que λ_1 se permite y, sólo en caso contrario, se solicita una nueva identificación, repitiéndose el proceso anterior hasta un máximo de L veces: en la $L-$ésima repetición (caso de alcanzarse), si el "parecido" es inferior a λ_1 se rechaza el acceso y si lo supera se acepta (Suponga, para ambos criterios, independencia entre ensayos).

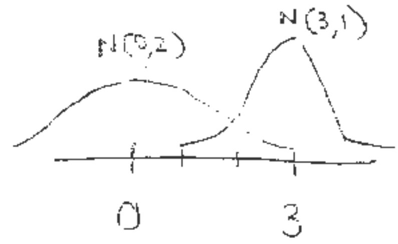
a) Calcule, para el criterio 1, la probabilidad de aceptar un cliente y rechazar un impostor para $n=3, m=2, \lambda_1=2$

b) Calcule, para el criterio 2, el umbral λ_0 de modo que un impostor se rechace exactamente en el $L-$ésimo ensayo con probabilidad 10^{-3} si $L=4, \lambda_1=2$

c) Para el criterio 2, con $L=4, \lambda_1=2$ y el umbral λ_0 del apartado anterior, determine la probabilidad de aceptar un cliente exactamente en la repetición $k-$ésima, en función de k (no olvide determinar el rango)

20 V.al. $X = N(3,1)$ si el locutor es cliente

$= N(0,2)$ " " impostor



a) Criterio 1 : • si el parecido supera d_1 al menos "n" de "m" veces que el locutor dice la palabra ⇒ ACCESO PERMITIDO

• en caso contrario ⇒ ACCESO DENEGADO

Cada vez que el locutor dice la palabra es INDEPENDIENTE de la anterior y, en cada una de ellas: • $P(\text{superar } d_1 \text{ siendo cliente}) = P(\underset{N(3,1)}{X} > d_1) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=}$

$\underset{(d_1=2)}{=} P\left(Z > \frac{2-3}{1}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = G(1) = 0'8413$

$\xi_1 = B(3, 0'8413)$ / ÉXITO: un cliente supera el umbral de parecido cuando dice la palabra una vez
\ FRACASO: " NO "

= "nº veces que el cliente supera el umbral de parecido"

$P\binom{\text{aceptar}}{\text{un cliente}} = P(\xi_1 \geq 2) = P(\xi_1 = 2) + P(\xi_1 = 3) = \binom{3}{2} 0'8413^2 \, 0'1587^1 + \binom{3}{3} 0'8413^3 \cdot 0'1587^0$

$= 0'932$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

• $P(\text{superar } d_1 \text{ siendo impostor}) = P(\underset{N(0,2)}{X} \geq d_1) \underset{(d_1=2)}{\overset{\text{TIPIFICAR}}{=}} P\left(Z > \frac{2-0}{2}\right) = P(Z > 1)$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - G(1) = 0'1587$

$\xi_2 = B(3, 0'1587)$ / ÉXITO: un impostor supera el umbral de parecido cuando dice la palabra una vez
\ FRACASO: " NO "

= "nº veces que el impostor supera el umbral de parecido"

$P\binom{\text{rechazar}}{\text{un impostor}} = P(\xi_2 < 2) = P(\xi_2 = 0) + P(\xi_2 = 1) = \binom{3}{0} 0'1587^0 \cdot 0'8413^3 + \binom{3}{1} 0'1587$

$= 0'932$

b) Criterio 2:

Pedir pronunciación X

- si $X < \lambda_0 \Rightarrow$ ACCESO DENEGADO
- si $\lambda_0 \leq X \leq \lambda_1 \Rightarrow$ Volver a pedir pronunciación hasta un máximo de L veces (en la vez L sólo se compara con
- si $X > \lambda_1 \Rightarrow$ ACCESO PERMITIDO

Nos dicen que P((impostor se rechace en el cuarto y último ensayo, con $\lambda_1 = 2$)) $= 10^{-3}$

= "NO aceptar NI rechazar tres veces" y "rechazar la última" =

$= \left[\text{"} \lambda_0 \leq \underset{N(0,2)}{X} \leq \lambda_1 \text{" 3 veces} \right] \text{ Y } \left[\text{"} \underset{N(0,2)}{X} \leq \lambda_1 \text{"} \right] =$

$$\left[P(\lambda_0 \leq \underset{N(0,2)}{X} \leq 2)\right]^3 \cdot P(\underset{N(0,2)}{X} \leq 2) = 10^{-3} \overset{\text{TIPIFICAR}}{\Rightarrow} \left[P\left(\frac{\lambda_0 - 0}{2} \leq Z \leq \frac{2-0}{2}\right)\right]^3 \cdot P\left(Z \leq \frac{2-0}{2}\right) = 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \left[P\left(\frac{\lambda_0}{2} \leq Z \leq 1\right)\right]^3 \cdot P(Z \leq 1) = 10^{-3} \Rightarrow \left(G(1) - G\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)\right)^3 \cdot G(1) = 1$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

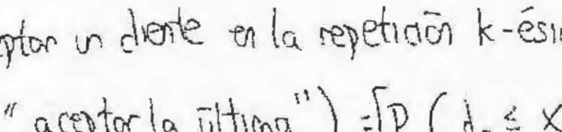
$$\Rightarrow \left(0'8413 - G\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)\right)^3 \cdot 0'8413 = 10^{-3} \Rightarrow G\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = 0'7354 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{2} \approx 0'63 \Rightarrow \lambda_0 \approx$$

c) P (aceptar un cliente en la repetición k-ésima) = P("No aceptar ni rechazar k-1 vece

y "aceptar la última") $= \left[P(\lambda_0 \leq \underset{N(3,1)}{X} \leq \lambda_1)\right]^{k-1} \cdot P(\underset{N(3,1)}{X} > \lambda_1) \overset{\text{TIPIFICAR}}{=}$

$$= \left[P\left(\frac{1'26 - 3}{1} \leq Z \leq \frac{2-3}{1}\right)\right]^{k-1} \cdot P\left(Z > \frac{2-3}{1}\right) =$$

$$= \left[P(-1'74 \leq Z \leq -1)\right]^{k-1} \cdot P(Z > -1) = \left(G(1'74) - G(1)\right)^{k-1} \cdot G(1)$$



$$= 0'1178^{k-1} \cdot 0'8413 \qquad 1 \leq k \leq 4$$

Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X=x_i,Y=y_j)=k\cdot(x_i-y_j)^2 \;;\; \begin{Bmatrix} x_i=-1,0,1 \\ y_j=-1,0,1 \end{Bmatrix}$$ V.a discreta

a) Calcule el valor de la constante k
b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y
c) Calcule la distribución condicional de Y dado X. ¿Son X e Y independientes?
d) Calcule $P(3X<2Y)$ y la covarianza de X e Y

OPCION "PACHANGERA"

X \ Y	−1	0	1	
−1	0	K	4K	5K
0	K	0	K	2K
1	4K	K	0	5K
	5K	2K	5K	Σ=12K

$$\sum P_{ij}=1 \longrightarrow 12K=1 \longrightarrow K=\frac{1}{12}$$

OPCION FORMAL

a)

$$\sum\sum P_{ij}=1 \longrightarrow P(-1,-1)+P(-1,0)+P(-1,1)+P(0,-1)+P(0,0)+$$
$$+P(0,1)+P(1,-1)+P(1,0)+P(1,1)=1 \longrightarrow K(-1-(-1))^2+K(-1-0)^2+$$
$$+\dots+K\cdot(1-1)^2=1 \longrightarrow 12K=1 \longrightarrow \boxed{K=\frac{1}{12}}$$

b) Distribución marginal de X:

$$P(X=x_i)=\sum_{y_j}P_{ij}=K\cdot(x_i-(-1))^2+K(x_i-0)^2+K\cdot(x_i-1)^2=$$
$$=\dots=K(3x_i^2+2)=\frac{1}{12}(3x_i^2+2)\;,\quad x_i=-1,0,1$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{x_i}P_{ij}=K\cdot(-1-y_j)^2+K(0-y_j)^2+K(1-y_j)^2=$$
$$=\dots=K(3y_j^2+2)=\frac{1}{12}(3y_j^2+2)\;,\quad y_j=-1,0,1$$

c) $$\left[P(Y=y_j / X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{\cancel{\frac{1}{12}}(x_i-y_j)^2}{\cancel{\frac{1}{12}}(3x_i^2+2)} = \right.$$

$$\left. = \frac{(x_i-y_j)^2}{3x_i^2+2} \quad , \quad \begin{matrix} x_i = -1,0,1 \\ y_j = -1,0,1 \end{matrix} \right]$$

X e Y son independientes $\Leftrightarrow P_{ij} = P_i \cdot P_j$

$$¿\ \frac{1}{12}(x_i-y_j)^2 = \frac{1}{12}(3x_i^2+2) \cdot \frac{1}{12}(3y_j^2+2)\ ?$$

[NO! $\longrightarrow$ no son independientes]

d) $$\left[P(3X < 2Y) = P(-1,-1) + P(-1,0) + P(-1,1) + P(0,1) = \right.$$

$$= \frac{1}{12}(-1-(-1))^2 + \frac{1}{12}(-1-0)^2 + \frac{1}{12}(-1-1)^2 + \frac{1}{12}(0-1)^2 =$$

$$\left. = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \right]$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{2}{3} - 0 \cdot 0 = -\frac{2}{3} < 0 \rightarrow$$ Relación lineal inversa (<0)

$$E(X) = \sum x_i P_i = (-1) \cdot \frac{1}{12}(3(-1)^2+2) + 0 \cdot \frac{1}{12}(3 \cdot 0^2+2) + 1 \cdot \frac{1}{12}(3 \cdot 1^2+2) = 0$$

$$E(Y) = \sum y_j P_j = \quad '' \quad '' \quad '' \quad = 0$$

$$E(XY) = \sum\sum x_i y_j P_{ij} = (-1)(-1)P(-1,-1) + \cancel{(-1) \cdot 0\, P(-1,0)} + (-1) \cdot 1\, P(-1,1) +$$

$$+ \cancel{0 \cdot (-1) \cdot P(0,-1)} + \cancel{0 \cdot 0\, P(0,0)} + \cancel{0 \cdot 1 \cdot P(0,1)} + 1(-1) \cdot P(1,-1) +$$

$$\cancel{1 \cdot 0 \cdot P(1,0)} + 1 \cdot 1 \cdot P(1,1) = (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{12}(-1-1)^2 + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{12}(1-(-1))^2 =$$

$$= -\frac{8}{12} = \frac{-2}{3}$$

Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X = x_i , Y = y_j) = k \cdot (x_i + 2y_j) \;\; ; \;\; \begin{Bmatrix} x_i = 1,2 \\ y_j = 1,2 \end{Bmatrix}$$

a) Calcule el valor de la constante k

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X e Y

2. Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$P(X = x_i, Y = y_j) = k \cdot (x_i + 2y_j) \quad ; x_i = 1,2; \; y_j = 1,2$

a) Calcule el valor de la constante k

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X e Y

a) X, Y son v.a. discretas $\Rightarrow \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \rightarrow k(1+2\cdot1)+k\cdot(1+2\cdot2)+k(2+2\cdot1)+k(2+2\cdot2)=$

$\Rightarrow 18k = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1/18}$

b) Distribución marginal de X: $\boxed{P(X=x_i)} = \sum_j p_{ij} = \frac{1}{18}(x_i+2\cdot1)+\frac{1}{18}(x_i+2\cdot2)=$

$= \frac{1}{18}(x_i+2+x_i+4) = \boxed{\frac{1}{18}(2x_i+6) \;,\; x_i = 1,2}$

Distribución marginal de Y: $\boxed{P(Y=y_j)} = \sum_i p_{ij} = \frac{1}{18}(1+2y_j)+\frac{1}{18}(2+2y_j) =$

$= \frac{1}{18}(1+2y_j+2+2y_j) = \boxed{\frac{1}{18}(3+4y_j) \;,\; y_j=1,2}$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

c) $\left.\begin{array}{l} p_{ij} = \frac{1}{18}(x_i+2y_j) \\ p_i \cdot p_j = \frac{1}{18}(2x_i+6)\cdot\frac{1}{18}(3+4y_j) \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$ X e Y son dependientes

d) $C_{XY} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{45}{18} - \frac{28}{18}\cdot\frac{29}{18} = -1/162 \Rightarrow$ Relación inversa entre las v.a. X e

$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = 1\cdot1\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(1+2\cdot1)}_{P(1,1)} + 1\cdot2\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(1+2\cdot2)}_{P(1,2)} + 2\cdot1\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(2+2\cdot1)}_{P(2,1)} +$

$+ 2\cdot2\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(2+2\cdot2)}_{P(2,2)} = 45/18$

$E(X) = \sum_i x_i p_i = 1\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(2\cdot1+6)}_{P(1)} + 2\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(2\cdot2+6)}_{P(2)} = 28/18$

$E(Y) = \sum_j y_j p_j = 1\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(3+4\cdot1)}_{P(1)} + 2\cdot\underbrace{\frac{1}{18}(3+4\cdot2)}_{P(2)} = 29/18$

OTRA MANERA de PLANTEAR EL EJERCICIO

X \ Y	1	2	
1	3k	5k	8k
2	4k	6k	10k
	7k	11k	$\Sigma = 1$

Como $\Sigma p_{ij} = 1 \Rightarrow 18k = 1 \Rightarrow k = 1/18$

· Las filas y columnas NO son proporcionales $\Rightarrow$ X e Y son dependientes

Distribución marginal de X

$$\begin{cases} P(X=1) = 8/18 \\ P(X=2) = 10/18 \end{cases}$$

Distribución marginal de Y

$$\begin{cases} P(Y=1) = 7/18 \\ P(Y=2) = 11/18 \end{cases}$$

$$E(X) = \Sigma x_i p_i = 1 \cdot \frac{8}{18} + 2 \cdot \frac{10}{18} = \frac{28}{18}$$

$$E(Y) = \Sigma y_j p_j = 1 \cdot \frac{7}{18} + 2 \cdot \frac{11}{18} = \frac{29}{18}$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = k\cdot(x_i^2\cdot y_j) \;\; ; \;\; \begin{Bmatrix} x_i = 1,2 \\ y_j = 1,2,3 \end{Bmatrix}$$

a) Calcule el valor de la constante k

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X e Y

3. (D07) Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$P(X = x_i, Y = y_j) = k \cdot (x_i^2 \cdot y_j) \quad ; x_i = 1,2; \; y_j = 1,2,3$

a) Calcule el valor de la constante k

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X e Y

a) X, Y son v.a. discretas $\Rightarrow \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \Rightarrow k\cdot(1^2\cdot 1)+k\cdot(1^2\cdot 2)+k(1^2\cdot 3)+$
$+k(2^2\cdot 1)+k(2^2\cdot 2)+k\cdot(2^2\cdot 3)=1 \Rightarrow 30k=1 \Rightarrow \boxed{k=1/30}$

b) Distribución marginal de X: $\boxed{P(X=x_i) = \sum_j p_{ij} = \frac{1}{30}\cdot x_i^2\cdot 1+\frac{1}{30}x_i^2\cdot 2+\frac{1}{30}x_i^2\cdot 3 = \frac{1}{30}\cdot x_i^2\cdot 6 \; , \; x_i=1,2}$

Distribución marginal de Y: $\boxed{P(Y=y_j) = \sum_i p_{ij} = \frac{1}{30}\cdot 1^2\cdot y_j + \frac{1}{30}\cdot 2^2\cdot y_j = \frac{1}{30}\cdot 5\cdot y_j \; , \; y_j = 1}$

c) $\left.\begin{array}{l} p_{ij} = \frac{1}{30}x_i^2 y_j \\ p_i\cdot p_j = \frac{1}{30}\cdot x_i^2\cdot 6\cdot\frac{1}{30}\cdot 5y_j = \frac{1}{30}x_i^2 y_j \end{array}\right\} = \Rightarrow$ X e Y son independientes

d) si X e Y son independientes $\Rightarrow$ X e Y son incorreladas $\boxed{C_{XY}=0}$

NOTA: lo contrario no tiene por qué cumplirse

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

OTRA MANERA de PLANTEAR EL EJERCICIO

X \ Y	1	2	3	
1	k	2k	3k	6k
2	4k	8k	12k	24k
	5k	10k	15k	$\Sigma=1$

Como $\sum p_{ij}=1 \Rightarrow 30k=1 \Rightarrow k=1/30$

· Las filas y columnas son proporcionales entre sí $\Rightarrow$ X e Y son independientes

Distribución marginal de X

$\left\{\begin{array}{l} P(X=1) = 6/30 = 1/5 \\ P(X=2) = 24/30 = 4/5 \end{array}\right\}$

Distribución marginal de Y

$\left\{\begin{array}{l} P(Y=1) = 5/30 = 1/6 \\ P(Y=2) = 10/30 = 1/3 \\ P(Y=3) = 15/30 = 1/2 \end{array}\right\}$

$E(X) = \sum x_i p_i = 1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ $\qquad E(Y) = \sum y_i p_i = 1\cdot\frac{1}{6}+2\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{6}$

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = 1\cdot 1\cdot \underbrace{P(1,1)}_{1/30} + 1\cdot 2\cdot \underbrace{P(1,2)}_{2/30} + 1\cdot 3\cdot \underbrace{P(1,3)}_{3/30} + 2\cdot 1\cdot \underbrace{P(2,1)}_{4/30} + 2\cdot 2\cdot \underbrace{P(2,2)}_{8/30} + 2\cdot 3\cdot \underbrace{P(2,3)}_{12/30} =$$

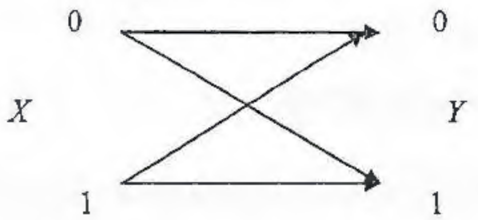
$$= 126/30$$

$$C_{XY} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{126}{30} - \frac{9}{5}\cdot\frac{14}{6} = 0$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

3.4 El del canal de comunicaciones que de vez en cuando se lía

Considera el canal de comunicaciones siguiente:



Dada la v.a. de entrada $P(X=0)=0'5$ y se conoce $\begin{cases} P(Y=1/X=0)=0'1 \\ P(Y=0/X=1)=0'2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \to P(Y=0/X=0)=0'9 \\ \to P(Y=1/X=1)=0'8 \end{matrix}$

a) Calcular la fdp conjunta (X,Y)
b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y
c) ¿Son X e Y independientes?
d) Calcule la covarianza de X e Y

a) Distribución conjunta de X, Y

$$\begin{cases} P(X=0,Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0/X=0)= 0'5\cdot 0'9 = 0'45 \\ P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1/X=0)= 0'5\cdot 0'1 = 0'05 \\ P(X=1,Y=0)=P(X=1)\cdot P(Y=0/X=1)= 0'5\cdot 0'2 = 0'10 \\ P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1/X=1)= 0'5\cdot 0'8 = \underline{0'40} \end{cases}$$

$\Sigma=1$

b) Distribución marginal de X

$$\begin{bmatrix} P(X=0)=0'5 \\ P(X=1)=0,5 \end{bmatrix}$$

$\Sigma=1$

Distribución marginal de Y

$$\begin{bmatrix} P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)= \\ =0'45+0'10=0'55 \\ P=(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)= \\ =0'0,5+0'40=0'45 \end{bmatrix}$$

c) ej: $P(X=0,Y=0)=0'45$

$P(X=0)\cdot P(Y=0)=0'5\cdot 0'55=0'275$

$\neq$ NO SON INDEPENDIENTES

d) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) =$

$E(X) = \sum x_i P_i = 0 \cdot 0'5 + 1 \cdot 0'5 = 0{,}5$

$E(Y) = \sum y_j P_j = 0 \cdot 0'55 + 1 \cdot 0'45 = 0'45$

$E(XY) = \sum\sum x_i y_j P_{ij} = 0 \cdot 0 \cdot P(0,0) + 0 \cdot 1 \cdot P(0,1) +$

$+ 1 \cdot 0 \cdot P(1,0) + 1 \cdot 1 + P(1,1) = 0'40$

3.5 El de calcular la $F(x,y)$

Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} x+y & si\ 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & resto \end{cases}$. Demostrar que es una fdp y calcular su función de distribución asociada

5. Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} x+y & si\ \ 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & resto \end{cases}$. Demostrar que es una fdp y calcular su función de distribución asociada

a) $f_{XY}(X,Y)$ es función de densidad si $\nearrow f_{XY}(X,Y)\geq 0$

$\searrow \int_Y\int_X f_{XY}(X,Y)=1 \to \int_{Y=0}^{Y=1}\left[\int_{X=0}^{X=1}(X+Y)\,dX\right]dY=1$

$\to \int_{Y=0}^{Y=1}\left[\frac{X^2}{2}+YX\right]_{X=0}^{X=1}dY=1 \to \int_{Y=0}^{Y=1}\left(\frac{1}{2}+Y\right)dY=1 \to \left[\frac{1}{2}Y+\frac{Y^2}{2}\right]_{Y=0}^{Y=1}=1 \to 1=1$ ✓

b) Función de distribución $F_{XY}(X,Y)$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO

- Si $X<0$ ó $Y<0 \Rightarrow F_{XY}(X,Y)=0$
- Si $0\leq X<1$ y $0\leq Y<1 \Rightarrow F_{XY}(X,Y)=\int_{Y=-\infty}^{Y}\int_{X=-\infty}^{X}f_{XY}(X,Y)\,dX\,dY=$

$=\int_{Y=0}^{Y}\int_{X=0}^{X}(X+Y)\,dX\,dY=\int_{Y=0}^{Y}\left[\frac{X^2}{2}+YX\right]_{X=0}^{X}dY=\int_{Y=0}^{Y}\left(\frac{X^2}{2}+YX\right)dY=\left[\frac{X^2}{2}Y+X\frac{Y^2}{2}\right.$

$=\frac{X^2}{2}Y+X\frac{Y^2}{2}$

- Si $0\leq X<1$ y $Y\geq 1$ (se acumuló toda la Y) $\Rightarrow F_{XY}(X,Y)=\int_{Y=0}^{Y=1}\int_{X=0}^{X}(X+Y)\,dX\,dY=$

$=\int_{Y=0}^{Y=1}\left[\frac{X^2}{2}+YX\right]_{X=0}^{X}dY=\int_{Y=0}^{Y=1}\left(\frac{X^2}{2}+YX\right)dY=\left[\frac{X^2}{2}Y+X\frac{Y^2}{2}\right]_{Y=0}^{Y=1}=\frac{X^2}{2}+\frac{X}{2}=F_X$

- Si $X\geq 1$ y $0\leq Y<1$ (se acumuló toda la X) $\Rightarrow F_{XY}(X,Y)=\int_{Y=0}^{Y}\int_{X=0}^{X=1}(X+Y)\,dX\,dY=$

$=\int_{Y=0}^{Y}\left[\frac{X^2}{2}+YX\right]_{X=0}^{X=1}dY=\int_{Y=0}^{Y}\left(\frac{1}{2}+Y\right)dY=\left[\frac{1}{2}Y+\frac{Y^2}{2}\right]_{Y=0}^{Y}=\frac{1}{2}Y+\frac{Y^2}{2}=F_Y(Y)$

- Si $X\geq 1$ y $Y\geq 1 \Rightarrow F_{XY}(X,Y)=1$
(se acumuló todo de las dos v.a. X e Y)

Calcular las fdp marginales de las siguientes v.a. definidas mediante su fdp:

a) $f(x,y)=\begin{cases} 10x^2y & si\ 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} 1/7 & si\ (x,y)\in\{(1,3),(-1,3),(2,3),(1,0),(1,-2)\} \\ 2/7 & si\ (x,y)=(-1,-2) \end{cases}$

6. Calcular las fdp marginales de las siguientes v.a. definidas mediante su fdp:

a) $f(x,y) = \begin{cases} 10x^2y & si\ 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & si\ (x,y) \in \{(1,3),(-1,3),(2,3),(1,0),(1,-2)\} \\ \frac{2}{7} & si\ (x,y) = (-1,-2) \end{cases}$

a) Función de densidad marginal de X

¡¡ comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\boxed{f_X(x)} = \int_{y=0}^{y=x} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=x} 10x^2y\,dy = 10x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = 5x^4,\ 0 < x <$$

Función de densidad marginal de Y

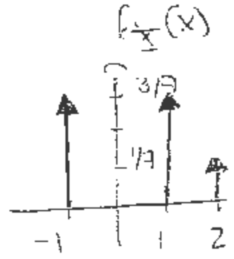
¡¡ comprobar que $\int f_Y(y)\,dy = 1$!!

$$\boxed{f_Y(y)} = \int_{x=y}^{x=1} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=y}^{x=1} 10x^2y\,dx = 10y\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y}^{x=1} = \frac{10}{3}y\left[1-y^3\right],\ 0 <$$

b) Función de densidad marginal de X

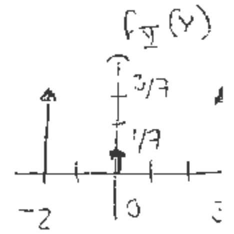
$$\begin{cases} P(X=-1) = P(-1,3) + P(-1,-2) = 1/7 + 2/7 = 3/7 \\ P(X=1) = P(1,3) + P(1,0) + P(1,-2) = 1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7 \\ P(X=2) = P(2,3) = 1/7 \end{cases}$$

$$f_X(x) = 3/7\,\delta(x+1) + 3/7\,\delta(x-1) + 1/7\,\delta(x-2)$$



Función de densidad marginal de Y

$$\begin{cases} P(Y=-2) = P(1,-2) + P(-1,-2) = 1/7 + 2/7 = 3/7 \\ P(Y=0) = P(1,0) = 1/7 \\ P(Y=3) = P(1,3) + P(-1,3) + P(2,3) = 1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = 3/7\,\delta(y+2) + 1/7\,\delta(y) + 3/7\,\delta(y-3)$$

La distribución conjunta de las v.a. X e Y viene dada por la siguiente fdp:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & si\ 0\le x\le 1; 0\le y\le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) $P(X+Y\le 1)$

b) $P(1/3 \le X+Y\le 2/3)$

c) $P(X\ge 2Y)$

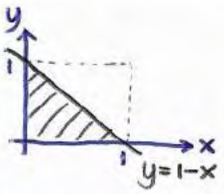
d) $P(Y\le X^2)$

e) $P(1/3\le X+Y< 3/2)$

NOTA: Si $f_{XY} = cte \Longrightarrow f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{Area\,(R_{XY})}$

$\Longrightarrow$ Probabilidad $= \dfrac{\text{Area sombreada}}{\text{Area total}}$

a) $P(X+Y\le 1)$



OPCION 1

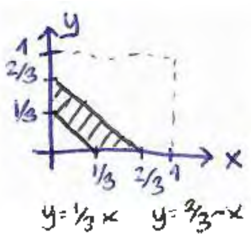
$$\left[\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} 1\,dy\,dx = \right.$$

$$\left. = \int_{x=0}^{x=1}\left[y\right]_{y=0}^{y=1-x} = \int_{x=0}^{x=1}(1-x-0)\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\right]$$

OPCION 2

$= \dfrac{1/2}{1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) $P(1/3\le X+Y\le 2/3)$



OPCION 1

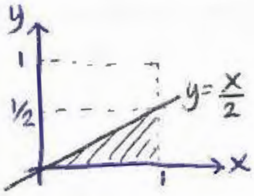
$$\int_{x=0}^{x=1/3}\int_{y=\frac{1}{3}-x}^{y=\frac{2}{3}-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx + \int_{x=1/3}^{x=2/3}\int_{y=0}^{y=\frac{2}{3}-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= 1/6$$

OPCION 2

$= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

c) $P(X \geq 2Y)$

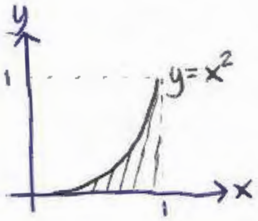


OPCION 1 $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x/2} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \dots = 1/4$

OPCION 2

$= \frac{1/4}{1} = 1/4$

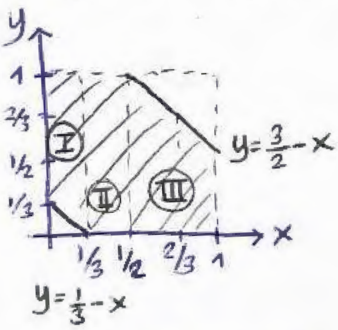
d) $P(Y \leq X^2)$



OPCION 1 $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x^2} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \dots = 1/3$

OPCION 2 NO

e) $P(1/3 \leq X+Y < 3/2)$

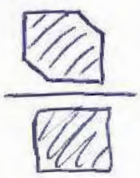


OPCION 1

$$\int_{x=0}^{x=1/3}\int_{y=1/3-x}^{y=1} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx + \int_{x=1/3}^{x=1/2}\int_{y=0}^{y=1} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx +$$

$$+ \int_{x=1/2}^{x=1}\int_{y=0}^{y=3/2-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \dots = \frac{59}{72}$$

OPCION 2



$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{59}{72}$$

Sea el vector aleatorio (X,Y) con función de distribución conjunta

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & si\, x<0,\, y<0\\ xy\cdot(x+y-xy^2) & si\, 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\\ y\cdot(1+y-y^2) & si\, x\ge 1,\, 0\le y\le 1\\ x & si\, 0\le x\le 1,\, y\ge 1\\ 1 & si\, x\ge 1,\, y\ge 1\end{cases}$$

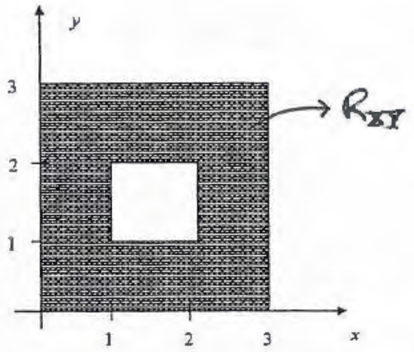
Se pide:

a) Función de densidad condicional de Y dada $X=x_0$

b) Función de densidad condicional de X dada $Y=y_0$

c) Calcular $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$ y $P\left(X>\frac{1}{2}/Y>\frac{1}{3}\right)$

Sean dos v.a. X e Y, uniformemente distribuidas en el recinto de la figura:



Se pide:

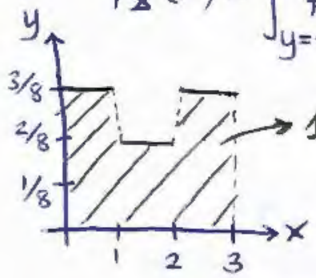
a) Calcule la fdp conjunta, las marginales y la media y la varianza de X e Y

b) Determine la independencia, incorrelación y ortogonalidad de X e Y

$$X, Y \text{ uniformes} \Rightarrow f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\text{Area}(R_{XY})} = \frac{1}{8}, \quad (x,y) \in R_{XY}$$

Función de densidad marginal de X:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \begin{matrix} 0<x<1 \\ 2<x<3 \end{matrix} : \int_{y=0}^{y=3} 1/8\,dy = 3/8 \\ 1<x<2 : \int_{y=0}^{y=1} 1/8\,dy + \int_{y=2}^{y=3} 1/8\,dy = 2/8 \end{cases}$$



$$\left[\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot \frac{3}{8}\,dx + \int_{x=1}^{x=2} x \cdot \frac{2}{8}\,dx + \int_{x=2}^{x=3} x \cdot \frac{3}{8}\,dx = \cdots = 1'5\right]$$

$$\left[\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)^2] = \frac{37}{12} - 1{,}5^2 = 5/6\right]$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot \frac{3}{8}\,dx + \int_{x=1}^{x=2} x^2 \cdot \frac{2}{8}\,dx + \int_{x=2}^{x=3} x^2 \cdot \frac{3}{8}\,dx = \cdots = \frac{37}{12}$$

Como X e Y son intercambiables en el ejercicio

$$f_Y(y) = \begin{cases} \begin{matrix} 0<y<1 \\ 2<y<3 \end{matrix} : 3/8 \\ 1<y<2 : 2/8 \end{cases}$$

$\mu_Y = 1'5$ $\quad \sigma_Y^2 = 5/6$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{8} \quad \text{si } (x,y) \in R_{XY}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3/8, & 0<x<1 \\ & 2<x<3 \\ 1/4 & 1<x<2 \end{cases} \quad , \quad E(x) = \frac{3}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/8 & 0<y<1 \\ & 2<y<3 \\ 1/4 & 1<y<2 \end{cases}$$

b) ¿X, Y independientes?

OPCION 1 "A ojo"

Como R_{XY} no es un rectangulo $\longrightarrow$ XY NO son independientes

OPCION 2

$$\left.\begin{array}{l} f_{XY}(x,y) = \frac{1}{8}, \quad \text{si } (x,y) \in R_{XY} \\ f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}, \ \text{si } 0<x<1 \text{ y } 0<y<1 \right\} \end{array}\right\} \neq \longrightarrow X \text{ e } Y \text{ NO son independientes}$$

¿X, Y ortogonales?

$$E(XY) = \iint_{R_{XY}} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \iint xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy - \iint xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=3} xy \frac{1}{8}\, dy\, dx - \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=2} xy \frac{1}{8}\, dy\, dx = \ldots = \frac{9}{4} \neq 0 \longrightarrow XY \text{ no son ortogonales}$$

¿X, Y incorreladas?

$$C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow XY \text{ son incorreladas}$$

independencia $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ incorrelación

Dada la v.a. bidimensional (X,Y) con fdp: $f(x,y)=k\cdot(x^2+y^2), x^2<y<1$

a) ¿Las v.a. X e Y son independientes?

b) ¿Están incorreladas?

c) Calcule $P(Y\le 0'5/X=0)$

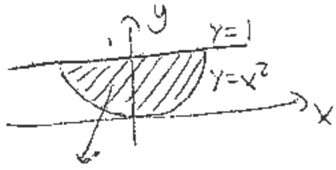
10 . * (F96) Dada la v.a. bidimensional (X,Y)con fdp: $f(x,y) = k\cdot(x^2+y^2)$, $x^2 < y < 1$

a) ¿Las v.a. X e Y son independientes?

b) ¿Están incorreladas?

c) Calcule $P(Y \leq 0'5 \ / \ X = 0)$

$f_{XY}(x,y) = k(x^2+y^2)$, $x^2<y<1$



R_{XY}

a) TRUCO: Como R_{XY} NO es un rectángulo

$\Rightarrow X$ e Y son dependientes

De manera más formal:

Funciones de densidad marginales

$$\boxed{f_X(x)} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=x^2}^{y=1} k\cdot(x^2+y^2)\,dy = k\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=1} =$$

$$= k\left[\left(x^2+\frac{1}{3}\right)-\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)\right] = \boxed{k\left(-\frac{x^6}{3}-x^4+x^2+\frac{1}{3}\right) \ , \ -1<x<1}$$

$$\boxed{f_Y(y)} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} k(x^2+y^2)\,dx = k\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} =$$

$$= k\left[\left(\frac{y^{3/2}}{3}+y^{5/2}\right)-\left(-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right)\right] = k\left(\frac{2}{3}y^{3/2}+2\cdot y^{5/2}\right) = 2k\left(\frac{\sqrt{y^3}}{3}+\sqrt{y^5}\right), 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{XY}(x,y) = k(x^2+y^2) \\ f_X(x)\cdot f_Y(y) = k\cdot\left(-\frac{x^6}{3}-x^4+x^2+\frac{1}{3}\right)2k\left(\frac{\sqrt{y^3}}{3}+\sqrt{y^5}\right)\end{array}\right\} \neq \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ son dependientes}$$

b) X e Y están incorreladas $\Leftrightarrow C_{XY}=0$

$C_{XY} = E(XY)-E(X)\cdot E(Y) = 0-0\cdot\_\_ = 0 \Rightarrow X$ e Y están incorrel

$$E(XY) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} xy\cdot k(x^2+y^2)\,dx\,dy = \ldots = 0$$

ó también $E(XY) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy\,f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=1} xy\,k(x^2+y^2)\,dy\,d$

$$E(X) = \int_{x=-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{x=-1}^{1} x \cdot \left(\frac{-x^6}{3} - x^4 + x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \ldots = 0$$

$E(Y)$ no es necesaria

Recordemos que: independencia $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ incorrelación

c) $$\boxed{P(Y \le 0'5 / X = 0)} = \int_{y=-\infty}^{0'5} f_Y(y/x=0)\,dy = \int_{y=0}^{0'5} 3y^2\,dy = \cancel{3}\left[\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_0^{0'5} = 0'5^3 = \boxed{0'125}$$

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\cancel{k}(x^2+y^2)}{\cancel{k}\left(\frac{-x^6}{3} - x^4 + x^2 + \frac{1}{3}\right)} \quad , \; x^2 < y < 1$$

$$\Rightarrow f_Y(y/x=0) = \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 3y^2 \quad , \; 0 < y < 1$$

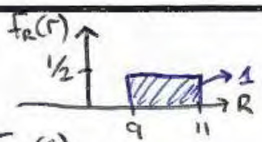
Un circuito formado por una resistencia y un condensador tiene una "constante de tiempo" $T = RC$, donde R y C son v.a. uniformes en $(9,11)$ e independientes. Calcule:

a) La fdp de la v.a. T (no olvide su rango o recorrido)

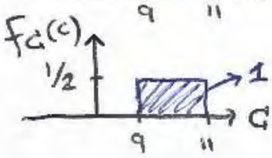
b) La media condicionada $E(T / R = r)$

c) El circuito anterior se emplea en un oscilador cuya frecuencia de oscilación es $F = \frac{1}{RC}$. Calcule el valor medio de dicha frecuencia

V.a $R = U(9,11)$, $f_R(r) = \frac{1}{2}$ si $9<r<11$

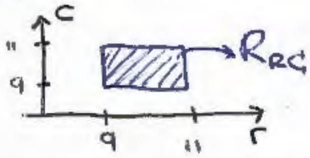


V.a $C = U(9,11)$, $f_C(c) = \frac{1}{2}$ si $9<c<11$



R y C son independientes $\Rightarrow f_{RC}(r,c) = f_R(r)\cdot f_C(c) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, si $\begin{matrix} 9<r<11 \\ 9<c<11 \end{matrix}$



Transformación: $\left\{\begin{matrix} T' = RC \\ W = R \end{matrix}\right\}$ v.a ficticia

v.a ficticia

- Transformación de v.a bidimensional continua (R,C) en v.a bidimensional continua (T', W)

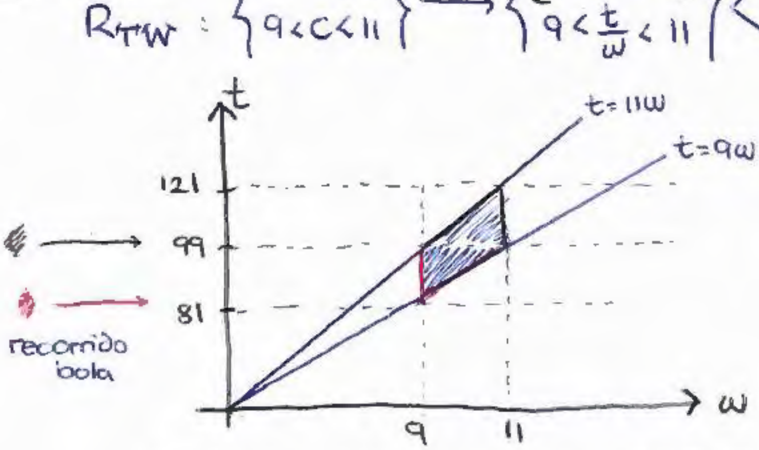
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & r \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r \neq 0 \Rightarrow$$

Podemos aplicar la formula de la transformación

$$f_{T,W}(t,w) = \frac{f_{RC}(r,c)}{|J|}\Bigg|_{\substack{c=\frac{t}{w} \\ r=w}} = \frac{1/4}{|-r|}\Bigg|_{\substack{c=\frac{t}{w} \\ r=w}} = \frac{1}{4r}\Bigg|_{\substack{c=\frac{t}{w} \\ r=w}} = \frac{1}{4w} \ , \ \text{si } (t,w) \in R_{TW}$$

$$\left\{\begin{matrix} t = rc \\ w = r \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} c = \frac{t}{w} \\ r = w \end{matrix}\right.$$

$$R_{TW} : \left\{\begin{matrix} 9<r<11 \\ 9<c<11 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \boxed{9<w<11} \\ 9<\frac{t}{w}<11 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \nearrow 9<\frac{t}{w} \longrightarrow \boxed{t>9w} \\ \searrow \frac{t}{w}<11 \longrightarrow \boxed{t<11w} \end{matrix}$$



$$f_T(t) = \int_{w=-\infty}^{w=\infty} f_{TW}(t,w)\,dw = \begin{cases} \bullet\ \underline{81 < t < 99}: \int_{w=9}^{w=t/9} \frac{1}{4w}\,dw = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t}{81}\right)} \\ \bullet\ \underline{99 < t < 121}: \int_{w=t/11}^{w=11} \frac{1}{4w}\,dw = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{121}{t}\right)} \end{cases}$$

b) $E(\underset{\text{v.a}}{T}/\underset{\text{nº}}{R=r}) = E(RC/R=r) = E(\underset{\text{nº}}{r}\cdot\underset{\text{v.a}}{C}) = r\cdot E(C) = \boxed{r\cdot 10}$

$$\left[E(C) = \int_{c=-\infty}^{c=\infty} c\, f_C(c)\,dc = \int_{c=9}^{c=11} c\cdot\frac{1}{2}\,dc = \dots = 10\right]$$

c) $\left[E\left(\frac{1}{RC}\right) \underset{\text{indep}}{=} E\left(\frac{1}{R}\right)\cdot E\left(\frac{1}{C}\right) = 0'1\cdot 0'1 = 0'01\right]$

$$\left[\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{R}\right) = \int_{r=-\infty}^{r=\infty} \frac{1}{R} f_R(r)\,dr = \int_{r=9}^{r=11} \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}\cdot dr = 0'1 \\ E\left(\frac{1}{C}\right) = \dots \approx 0'1 \end{array}\right]$$

Sean X e Y dos v.a. uniformes en $(-1,3)$ e independientes. A partir de ellas se definen otras dos v.a. U y V, siendo $U = \dfrac{X+Y}{2}$, $V = \dfrac{X-Y}{2}$

a) Determine la fdp conjunta $f(u,v)$ (dibuje el rango o recorrido)

b) Determine las fdp marginales $f(u)$, $f(v)$

c) Determine las FD marginales $F(u)$, $F(v)$

d) ¿Son las v.a. U y V ortogonales? ¿Están incorreladas?

e) Demuestre que $P(UV<0) = P(|X|<|Y|)$ y calcule dicha probabilidad

Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo $(0,T)$ y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre a la derecha del anterior, y se definen las v.a. X = "posición del primer punto" e Y = "distancia del segundo punto al primero"

a) Demuestre que la fdp conjunta es $f(x,y)=\dfrac{1}{T(T-x)},\ \begin{Bmatrix} 0<x<T \\ 0<y<T-x \end{Bmatrix}$

b) ¿Son X e Y incorreladas?

c) Calcule $P(Y<X)$

13. * Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo $(0,T)$ y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre a la derecha del anterior, y se definen las v.a. X: "posición del primer punto" e Y: "distancia del segundo punto al primero".

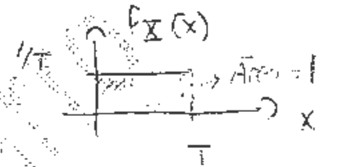
a) Demuestre que la fdp conjunta de las v.a. X e Y es:

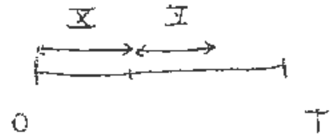
$$f(x,y)=\frac{1}{T(T-x)} \quad \left\{\begin{matrix} 0<x<T \\ 0<y<T-x \end{matrix}\right\}$$

b) ¿Son X e Y incorreladas?

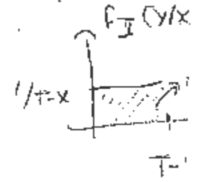
c) Calcule $P(Y<X)$

a) v.a. $X \sim U(0,T)$, fdp: $f_X(x)=\dfrac{1}{T-0}=\dfrac{1}{T} \quad 0<x<T$

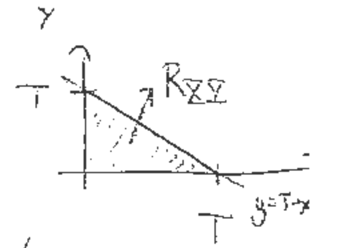




$f_Y(y/x)=\dfrac{1}{T-x}, \quad 0<y<T-x$



$$\Rightarrow \boxed{f_{XY}(x,y)}= f_X(x)\,f_Y(y/x) = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{T-x} \quad \begin{matrix} 0<x<T \\ 0<y<T-x \end{matrix}$$



b) $\boxed{C_{XY}} = E(XY)-E(X)\,E(Y) = \dfrac{T^2}{12} - \dfrac{T}{2}\cdot\dfrac{T}{4} = \dfrac{-T^2}{24} \neq 0 \Rightarrow X$ e Y están correladas

$$f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=0}^{x=T-y} \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{T-x}\,dx = \frac{-1}{T}\Big[\ln|T-x|\Big]_{x=0}^{x=T-y} =$$

$$= \frac{-1}{T}\Big[\ln|T-(T-y)| - \ln T\Big] = \frac{1}{T}\Big[\ln T - \ln y\Big] \quad , \quad 0<y<T$$

$$E(X)=\int_{x=-\infty}^{x=\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=T} x\cdot\frac{1}{T}\,dx = \frac{1}{T}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=T} = \frac{1}{2T}\left(T^2-0\right) = \frac{T}{2}$$

simetría

$$E(Y)=\int_{y=-\infty}^{y=\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=T} y\cdot\frac{1}{T}\Big[\ln T-\ln y\Big] = \frac{1}{T}\left[\ln T\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=T} - \left[\frac{T^2}{2}\ln T - \frac{T^2}{4}\right]\right] = \frac{1}{T}\cdot\frac{T^2}{4} = \frac{T}{4}$$

$$\int_{y=0}^{y=T} y\ln y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{y}\frac{y^2}{2}\,dy = \frac{T^2}{2}\ln T - \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^T = \frac{T^2}{2}\ln T - \frac{T^2}{4}$$

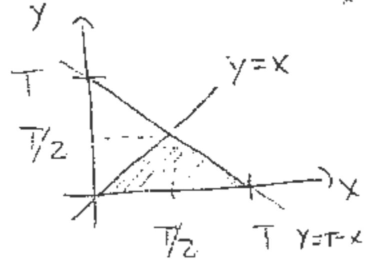
POR PARTES
$u=\ln y \rightarrow du=\frac{1}{y}dy$
$dv=y\,dy \rightarrow v=\frac{y^2}{2}$

$$E(XY)=\int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=T}\int_{y=0}^{y=T-x} xy\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{T-x}$$

$$= \int_{x=0}^{x=T}\frac{1}{T}\cdot\frac{x}{T-x}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=T-x}dx = \int_{x=0}^{x=T}\frac{1}{2T}\,x(T-x)\,dx = \frac{1}{2T}\int$$

$$= \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{6}T^3 = T^2/12$$

c) $P(\underline{Y}<\underline{X}) = \int_{x=0}^{x=T/2}\left[\int_{y=0}^{y=x} f_{\underline{X}\underline{Y}}(x,y)\,dy\right]dx + \int_{x=T/2}^{x=T}\left[\int_{y=0}^{y=T-x} f_{\underline{X}\underline{Y}}(x,y)\,dy\right]dx =$



$$= \int_{x=0}^{x=T/2}\left[\int_{y=0}^{y=x}\frac{1}{T(T-x)}dy\right]dx + \int_{x=T/2}^{x=T}\left[\int_{y=0}^{y=T-x}\frac{1}{T(T-x)}dy\right]dx =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{x=0}^{x=T/2}\frac{1}{T-x}\left[y\right]_{y=0}^{y=x}dx + \frac{1}{T}\int_{x=T/2}^{x=T}\frac{1}{T-x}\left[y\right]_{y=0}^{y=T-x}dx = \frac{1}{T}\left[\int_{x=0}^{x=T/2}\frac{x}{T-x}dx + \int_{x=T/2}^{x=T}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{x=0}^{x=T/2}\left(-1+\frac{T}{-x+T}\right)dx + \left[x\right]_{T/2}^{T}\right] = \frac{1}{T}\left[\left[-x-T\ln|-x+T|\right]_{x=0}^{x=T/2} + T/2\right] =$$

$\begin{array}{r|l} x & -x+T \\ \hline x-T & -1 \\ T & \end{array}$ $\boxed{\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}}$

$$= \frac{1}{T}\left[\left(\frac{-T}{2} - T\ln\frac{T}{2}\right) + T\ln T + T/2\right] = \frac{1}{T}T\cdot\left(-\ln\frac{T}{2} + \ln T\right) =$$

$$= \ln\frac{T}{T/2} = \boxed{\ln 2}$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO
Academia MONTERO ESPINOSA

OTRA OPCIÓN $\boxed{P(\underline{Y}<\underline{X})} = \int_{y=0}^{y=T/2}\left[\int_{x=y}^{x=T-y} f_{\underline{X}\underline{Y}}(x,y)\,dx\right]dy = \int_{y=0}^{y=T/2}\left[\int_{x=y}^{x=T-y}\frac{1}{T(T-x)}dx\right]dy =$

$$= \frac{1}{T}\int_{y=0}^{y=T/2} -\left[\ln|T-x|\right]_{x=y}^{x=T-y}dy = \frac{-1}{T}\int_{y=0}^{y=T/2}\left(\ln y - \ln|T-y|\right)dy = \frac{1}{T}\left[\underbrace{\int_{y=0}^{y=T/2}\ln(T-y)\,dy} - \int_{y=0}^{y=T/2}\ln y\,dy\right] =$$

CV: $T-y=u$, $\begin{cases} y=T/2 \rightarrow u=T/2 \\ y=0 \rightarrow u=T \end{cases}$
$-dy=du$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{u=T}^{u=T/2}-\ln u\,du - \int_{y=0}^{y=T/2}\ln y\,dy\right]$$

$$\frac{1}{T}\left[\left[u(\ln u-1)\right]_{u=T/2}^{u=T} - \left[y(\ln y-1)\right]_{y=0}^{y=T/2}\right] =$$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$

POR PARTES
$u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx$
$dv=dx \rightarrow v=x$

$$= \frac{1}{T}\left[T(\ln T-1) - \frac{T}{2}\left(\ln\frac{T}{2}-1\right) - \frac{T}{2}\left(\ln\frac{T}{2}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[T\ln T - T - T\left(\ln\frac{T}{2}-1\right)\right] = \frac{1}{T}T\left(\ln T - \ln\frac{T}{2}\right) = \ln\left(\frac{T}{T/2}\right)$$

$$= \boxed{\ln 2}$$

Sean R y Φ dos v.a. independientes , tales que Φ es uniforme en $(0,2\pi)$ y R es una v.a. con fdp:

$f(r)=\frac{2r}{A^2}$, $r\in(0,A)$, siendo $A>0$ una constante.

Sobre ellas se realiza la siguiente transformación: $\left\{\begin{matrix} x=r\cdot\cos\phi \\ y=r\cdot sen\phi \end{matrix}\right\}$. Calcule:

a) La fdp conjunta de X e Y . Dibuje su rango
b) Las fdp marginales de X e Y . ¿Son independientes?
c) La covarianza entre X e Y . ¿Están incorreladas?
d) $P\left(X^2+Y^2>A^2/4\right)$
e) $P\left(Y>A/\sqrt{2}\ /\ X=A/\sqrt{2}\right)$

14 . * (S03) Sean R y Φ dos v.a. independientes tales que Φ es uniforme en $(0,2\pi)$ y R tiene una fdp: $f(r) = \frac{2r}{A^2}$, $r \in (0, A)$

Siendo $A > 0$ una constante. Sobre ellas se realiza la siguiente transformación:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,sen\phi \end{cases}$$

Calcule:

a) La fdp conjunta de X e Y. Dibuja su rango

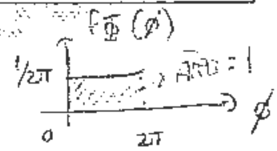
b) Las fdp marginales de X e Y. ¿Son independientes?

c) La covarianza entre X e Y. ¿Están incorreladas?

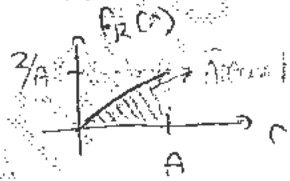
d) $P(X^2 + Y^2 > \frac{A^2}{4})$

e) $P(Y > \frac{A}{\sqrt{2}} \;/\; X = \frac{A}{\sqrt{2}})$

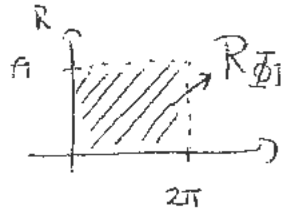
V.a. $\Phi \sim U(0, 2\pi)$, fdp: $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ $0 < \phi < 2\pi$



V.a. R : fdp $f_R(r) = \frac{2r}{A^2}$ $0 < r < A$



Φ y R son v.a. independientes $\Rightarrow f_{\Phi R}(\phi, r) = f_\Phi(\phi) \cdot f_R(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2r}{A^2} = \frac{r}{\pi A^2}$, $\begin{matrix} 0 < \phi < 2\pi \\ 0 < r < A \end{matrix}$



a) Transformación: $\begin{Bmatrix} x = r\cos\phi \\ y = r\,sen\phi \end{Bmatrix}$

Transformación de v.a. bidimensional continua (Φ, R) en v.a. bidimensional continua (X, Y)

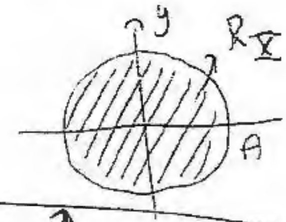
· Comprobamos que el jacobiano de la transformación es distinto de 0 para poder aplicar la fórmula de la transformación:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\,sen\phi & \cos\phi \\ r\cos\phi & sen\phi \end{vmatrix} = -r\,sen^2\phi - r\cos^2\phi$$

$$= -r\,(sen^2\phi + \cos^2\phi) = -r \neq 0$$

$\Rightarrow$ podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$\boxed{f_{XY}(x,y)} = \frac{f_{\Phi R}(\phi,r)}{|J|}\Bigg|_{\substack{r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \phi=\text{arctg}\, y/x}} = \frac{\frac{r}{\pi A^2}}{|-r|}\Bigg|_{\substack{r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \phi=\text{arctg}\, y/x}} = \frac{1}{\pi A^2} \;;\; (x,y)\in R_{XY}$$

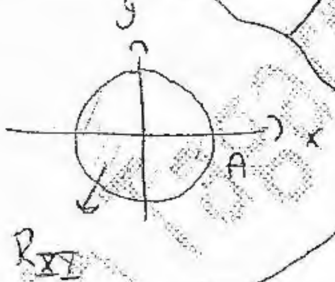


$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\phi \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{dividir}} \frac{x}{y} = \text{cotg}\,\phi \rightarrow \text{tg}\,\phi = \frac{y}{x} \rightarrow \phi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

elevamos al cuadrado y sumamos $\rightarrow x^2+y^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\text{sen}^2\phi \rightarrow x^2+y^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

Para calcular el rango de XY:

- $0<\phi<2\pi \rightarrow 0<\text{arctg}\,\frac{y}{x}<2\pi \rightarrow$ (siempre se cumple)
- $0<r<A \rightarrow 0<\sqrt{x^2+y^2}<A \rightarrow 0<x^2+y^2<A^2$



b) fdp marginal de x: $\boxed{f_X(x)} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=-\sqrt{A^2-x^2}}^{y=\sqrt{A^2-x^2}} \frac{1}{\pi A^2}\,dy = \frac{1}{\pi A^2}\Big[y\Big]_{y=-\sqrt{A^2-x^2}}^{y=\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{1}{\pi A^2}2\sqrt{A^2-x^2} \;;\; -A<x$

fdp marginal de y: $\boxed{f_Y(y)} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=-\sqrt{A^2-y^2}}^{x=\sqrt{A^2-y^2}} \frac{1}{\pi A^2}\,dx = \frac{1}{\pi A^2}\Big[x\Big]_{x=-\sqrt{A^2-y^2}}^{x=\sqrt{A^2-y^2}} = \frac{1}{\pi A^2}\cdot 2\sqrt{A^2-y^2} \;;\; -A<y$

$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y) \Rightarrow X$ e Y son dependientes

NOTA: Como R_{XY} no es un rectángulo $\Rightarrow$ también podríamos asegurar "a ojo" que X e Y no son independientes

c) $\boxed{C_{XY} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = 0 - 0 = 0} \Rightarrow X$ e Y están incorreladas

$\boxed{E(XY)} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=-A}^{y=A}\left[\int_{x=-\sqrt{A^2-y^2}}^{x=\sqrt{A^2-y^2}} xy\cdot\frac{1}{\pi A^2}\,dx\right]dy = \frac{1}{\pi A^2}\int_{y=-A}^{y=A} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{A^2-y^2}}^{x=\sqrt{A^2-y^2}} dy =$

$= \frac{1}{2\pi A^2}\int_{y=-A}^{y=A} y\left(\cancel{(A^2-y^2)-(A^2-y^2)}^{\,0}\right)dy = \boxed{0}$

$\boxed{E(X)} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{x=-A}^{x=A} x\cdot\frac{1}{\pi A^2}2\sqrt{A^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{\pi A^2}\left[\frac{(A^2-x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=-A}^{x=A} = \frac{2}{3\pi A^2}\left[\cancel{\sqrt{(A^2-A^2)^3}} - \sqrt{\ldots}\right.$

$= \boxed{0}$; $\boxed{E(Y) = 0}$ (por analogía con x)

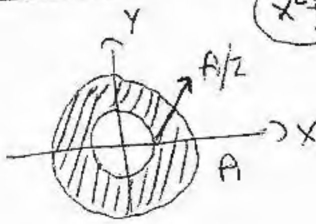
continuació
S03
3.14

$E(\mathbb{X}\mathbb{Y})=0 \Rightarrow \mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son ortogonales

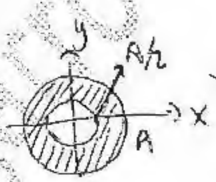
– Recordad que: independencia $\rightarrow$ incorrelación ($\not\leftarrow$)

d) $\boxed{P\left(\mathbb{X}^2+\mathbb{Y}^2 > \frac{A^2}{4}\right)} = P\left(R^2 > \frac{A^2}{4}\right) = P\left(R > \frac{A}{2}\right) = \int_{r=A/2}^{r=\infty} f_R(r)\,dr = \int_{r=A/2}^{r=A} \frac{2r}{A^2}\,dr =$

$x^2+y^2=r^2$



$= \frac{2}{A^2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=A/2}^{r=A} = \frac{1}{A^2}\left[A^2-\frac{A^2}{4}\right] = \frac{3}{4} = \boxed{0'75}$

OTRA OPCIÓN: Como $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ es v.a. bidimensional uniforme $\Rightarrow P\Big($  $\Big) =$

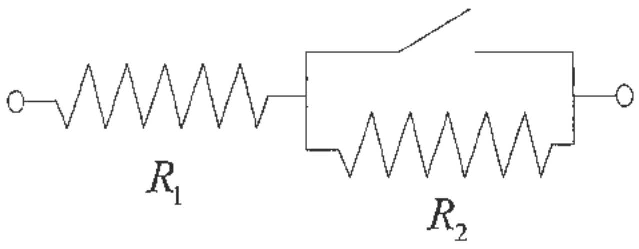
$= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área total}} = \frac{\pi A^2 - \pi\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\pi A^2} = \frac{\pi\frac{3}{4}A^2}{\pi A^2} = \frac{3}{4} = \boxed{0'75}$

e) $\boxed{P\left(\mathbb{Y} > \frac{A}{\sqrt{2}} \Big/ \mathbb{X} = \frac{A}{\sqrt{2}}\right)} = \int_{y=A/\sqrt{2}}^{y=\infty} f_{\mathbb{Y}}\left(y/x=\frac{A}{\sqrt{2}}\right)dy = \boxed{0}$, porque la distribución de $\mathbb{Y}$ condicionada a $\mathbb{X}=A/\sqrt{2}$ sólo puede tomar valores entre $-A/\sqrt{2} < y < A/\sqrt{2}$

$f_{\mathbb{Y}}(y/x) = \frac{f_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(x,y)}{f_{\mathbb{X}}(x)} = \frac{\frac{1}{\pi A^2}}{\frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}} = \frac{1}{2\sqrt{A^2-x^2}}$, con $0 < x^2+y^2 < A^2$

$\Rightarrow f_{\mathbb{Y}}\left(y/x=\frac{A}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{A^2-\frac{A^2}{2}}} = \frac{1}{2\frac{A}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2A}$, con $\frac{-A}{\sqrt{2}} < y < \frac{A}{\sqrt{2}}$ si $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0<x^2+y^2<A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-A}{\sqrt{2}} <$

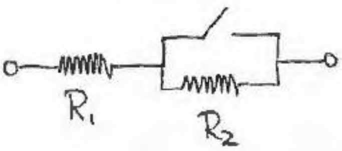
En el circuito de la figura se desconoce el estado del interruptor, de modo que la resistencia total entre extremos es $R = R_1 + X \cdot R_2$, con R_1, R_2 v.a. uniformes en $(9,11)$ y X v.a. de Bernouilli, con $P(X=1) = p$. Suponga R_1, R_2, X independientes entre sí



a) Calcule la fdp de la v.a. R. Represéntala de forma aproximada para $p = \frac{1}{2}$

b) La media de R

15. * (F00) En el circuito de la figura se desconoce el estado del interruptor, de modo que la resistencia total entre extremos es $R = R_1 + X \cdot R_2$, con R_1 y R_2 v.a. uniformes en $(9,11)$ y X v.a. de Bernouilli, con $P(X=1)=p$. Suponga R_1, R_2 y X independientes

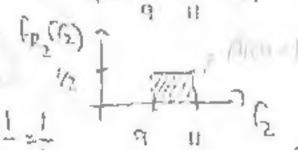


a) Calcule la fdp de la v.a. R. Represéntala de forma aproximada para $p=\frac{1}{2}$

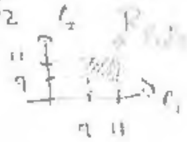
b) La media de R

V.a. $R_1 \sim U(9,11)$ fdp. $f_{R_1}(r_1)=\frac{1}{2}$ $\quad 9<r_1<11$

V.a. $R_2 \sim U(9,11)$ fdp. $f_{R_2}(r_2)=\frac{1}{2}$ $\quad 9<r_2<11$



R_1 y R_2 son v.a. independientes $\Rightarrow f_{R_1R_2}(r_1,r_2)=f_{R_1}(r_1)\,f_{R_2}(r_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\quad 9<r_1<11$, $9<r_2<11$



a) V.a. $R=R_1+XR_2$

• Si $X=0 \Rightarrow R=R_1 \Rightarrow f_R^{(1)}(r)=f_{R_1}(r_1)=\frac{1}{2}$, $\quad 9<r<11$

• Si $X=1 \Rightarrow R=R_1+R_2$

Transformación, utilizando la v.a. ficticia W $\left\{\begin{array}{l} R=R_1+R_2 \\ W=R_1 \end{array}\right\}$

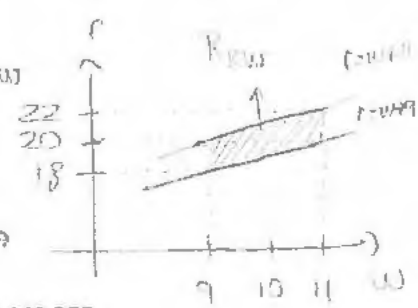
Transformación de una v.a. bidimensional continua (R_1,R_2) en v.a. bidimensional continua (R,W)

• Comprobamos que el jacobiano de la transformación es distinto de 0 para poder aplicar la fórmula de la transformación. $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_1} & \frac{\partial r}{\partial r_2} \\ \frac{\partial w}{\partial r_1} & \frac{\partial w}{\partial r_2}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$f_{R,W}(r,w)=\frac{f_{R_1R_2}(r_1,r_2)}{|J|}\Bigg|_{\substack{r_1=w\\ r_2=r-w}} = \frac{\frac{1}{4}}{|-1|}=\frac{1}{4}, \quad (r,w)\in R_{RW}$$

$\left\{\begin{array}{l} r=r_1+r_2 \\ w=r_1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_2=r-w \\ r_1=w \end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l} 9<r_1<11 \rightarrow 9<w<11 \\ 9<r_2<11 \rightarrow 9<r-w<11 \end{array}\right. \begin{array}{l} \rightarrow r>w+9 \\ \rightarrow r<w+11 \end{array}$



$$f_R^{(2)}(r) = \int_{w=-\infty}^{w=\infty} f_{R,W}(r,w)\,dw =$$

$$= \begin{cases} \cdot\ 18<r<20 \Rightarrow \int_{w=9}^{w=r-9} \frac{1}{4}\,dw = \frac{1}{4}\left[w\right]_9^{r-9} = \frac{1}{4}(r-18) \\ \cdot\ 20<r<22 \Rightarrow \int_{w=r-11}^{w=11} \frac{1}{4}\,dw = \frac{1}{4}\left[w\right]_{r-11}^{11} = \frac{1}{4}(22-r) \end{cases}$$

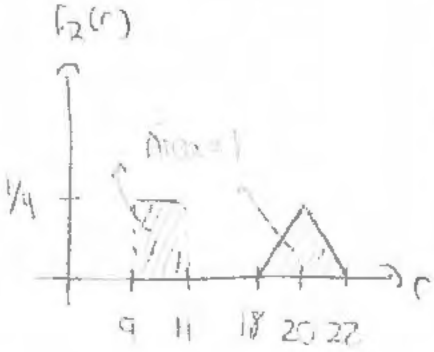
Th. probabilidad total

Finalmente, agrupando todo: $\boxed{f_R(r)} = P(X=0)\,\underbrace{f_R(r/X=0)}_{f_R^{(1)}(r)} + P(X=1)\,\underbrace{f_R(r/X=1)}_{f_R^{(2)}(r)} =$

$$= \boxed{\begin{cases} (1-p)\cdot\frac{1}{2} & ,\ 9<r<11 \\ p\cdot\frac{1}{4}(r-18) & ,\ 18<r<20 \\ p\cdot\frac{1}{4}(22-r) & ,\ 20<r<22 \end{cases}}$$

¡¡ comprobar $\int_{-\infty}^{\infty} f_R(r)\,dr = 1$!!

$$\text{Si } p = \tfrac{1}{2} \Rightarrow f_R(r) = \begin{cases} 1/4 & ,\ 9<r<11 \\ \frac{1}{8}(r-18) & ,\ 18<r<20 \\ \frac{1}{8}(22-r) & ,\ 20<r<22 \end{cases}$$



X y R_2 son v.a. indep

b) $\boxed{E(R)} = E(R_1 + X R_2) = E(R_1) + E(X R_2) = E(R_1) + E(X)\,E(R_2) = 10 + p\,10 = \boxed{10(1+p)}$

$E(R_1) = E(R_2) = \frac{9+11}{2} = 10$

v.a. uniforme

$E(X) = np = 1\cdot p = p$

v.a. Binomial

Sean X e Y v.a. uniformes en (0,1) e independientes. Se forman las v.a.

$$U = \begin{Bmatrix} 1 \text{ , } si\, X+Y \leq 1 \\ 0 \text{ , } si\, X+Y > 1 \end{Bmatrix} \text{ , } V = \begin{Bmatrix} 1 \text{ , } si\, X^2+Y^2 \leq 1 \\ 0 \text{ , } si\, X^2+Y^2 > 1 \end{Bmatrix}$$

Calcule:

a) Las medias y varianzas de U y V

b) Las probabilidades condicionadas $P(U=1/V=1)\, y\, P(V=1/U=1)$

Se definen ahora las v.a. $Z = \sqrt{XY}$, $W = \sqrt{X/Y}$. Calcule:

c) La covarianza de Z y W

d) Las fdp marginales de Z y W

e) Las medias condicionadas $E(W/X=x)\ y\ E(W/Z=z)$

Dadas las va.'s X_1 y X_2 independientes entre sí y ambas con distribución $N(0,1)$ se forma el proceso $Y[n]=1+nX_1+n^2X_2$. Se pide:

a) La media y autocorrelación de $Y[n]$. ¿es dicho proceso estacionario en sentido amplio?

b) La fdp de primer orden de $Y[n]$, ¿es estacionario de primer orden?

c) Se forma el proceso $Z[n]=Y[n]-2Y[n-1]+Y[n-2]$. Obtenga $P(Z[n]\geq 0'1)$

cuando esta entre corchetes → tiempo discreto

a) $Y[n]$: P.E en tiempo discreto formado por v.a's continuas X_1 y X_2

$$E(Y[n]) = E(1+nX_1+n^2X_2) = E(1)+nE(X_1)+n^2E(X_2) = 1+n\cdot 0+n^2\cdot 0 = 1$$

NO ES INDEPENDIENTE no se puede dividir

$$R_Y[n,n+m] = E(Y[n]\,Y[n+m]) = E\left((1+nX_1+n^2X_2)(1+(n+m)X_1+(n+m)^2X_2)\right) =$$

$$= E(1+(n+m)X_1+(n+m)^2X_2+nX_1+n(n+m)X_1^2+n(n+m)^2X_1X_2+n^2X_2+$$

$$+n^2(n+m)X_2X_1+n^2(n+m)^2X_2^2) \overset{X_1,\,X_2 \text{ indep}}{=} E(1)+(n+m)\cancel{E(X_1)}_{0}+(n+m)^2\cancel{E(X_2)}_{0}+n\cancel{E(X_1)}_{0}+$$

$$+n(n+m)E(X_1^2)+n(n+m)^2\cancel{E(X_1)}_{0}E(X_2)+n^2\cancel{E(X_2)}_{0}+n^2(n+m)\cancel{E(X_2)}_{0}E(X_1)+$$

$$+n^2(n+m)^2E(X_2^2) = 1+n(n+m)\cdot 1+n^2(n+m)^2\cdot 1 = \boxed{1+n(n+m)+n^2(n+m)^2}$$

$$V(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2$$
$$1^2 = E(X_1^2)-0^2$$
$$E(X_1^2)=1^2+0^2=1$$
$$E(X_2^2)=E(X_1^2)=1$$

$Y[n]$ es E.S.A si $\begin{cases} E(Y[n]) \text{ no depende de } n \ ✓ \\ R_Y[n,n+m] \text{ no depende de } n \text{ solo de } m \ ✗ \end{cases}$

$Y[n]$ NO ES E.S.A

b) $$Y[n] = 1+nX_1+n^2X_2 = 1+n\cdot N(0,1)+n^2N(0,1) =$$
$$= 1+N(0,n)+N(0,n^2) \underset{X_1\,X_2 \text{ indep}}{=} N\left(1+0+0,\sqrt{0+n^2+n^4}\right) =$$
$$= N(1, n\sqrt{1+n^2})$$

$$f_Y(y,n) = \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-1)^2}{2\cdot n^2(1+n^2)}}, \quad -\infty<y<\infty$$

$Y[n]$ es estacionario de primer orden si $f_Y(y,n)$ NO depende de n ✗ $\Longrightarrow$ $Y[n]$ NO es estacionario de orden 1

c) $Z[n] = Y[n] - 2Y[n-1] + Y[n-2] = 1 + nX_1 + n^2X_2 - 2\left(1+(n-1)X_1+(n-1)^2X_2\right) +$
$+ 1 + (n-2)X_2 + (n-2)^2X_2 = \ldots = 2X_2 = 2N(0,1) = N(0,2)$

$$\left[P(Z[n] \geq 0'1) = P(N(0,2) \geq 0'1) \overset{\text{tipificar}}{=} P\left(N(0,1) \geq \frac{0'1-0}{2}\right) = P(N(0,1) \geq 0'05) = \right.$$

$$\left. = 1 - G(0'05) = 1 - 0'5199 = 0'4801 \right]$$

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de primer orden normal estándar. Sobre $X[n]$ se aplica una transformación lineal e invariante (LTI) de $h[n] = a\delta[n] - b\delta[n-1]$, obteniéndose como resultado el proceso $Y[n]$. Calcular:

a) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de $Y[n]$

b) La fdp de primer orden de $Y[n]$

$X[n]$: ruido blanco estricto

: $N(0,1)$

$$X[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow Y[n]$$

$h[n] = a\delta[n] - b\delta[n-1]$

b)

$$Y[n] = X[n] * h[n] = X[n] * (a\delta[n] - b\delta[n-1]) =$$

$$= aX[n] - bX[n-1] = a \cdot N(0,1) - b \cdot N(0,1) =$$

$$= N(0,a) - N(0,b) = N(0-0, \sqrt{a^2+b^2}) = N(0, \sqrt{a^2+b^2})$$

- $X[n] * \delta[n-n_0] = X[n-n_0]$
- $X[n] \cdot \delta[n-n_0] = X[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$

X_1, X_2 indep por ser ruido blanco estricto

$$\left[f_Y(y,n) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-0)^2}{2\cdot(a^2+b^2)}}, \quad -\infty < y < \infty \right]$$

$Y[n]$ es estacionaria de 1er orden si $f_Y(y,n)$ no depende de n $\Rightarrow$ $Y[n]$ es estacionario de 1er orden

a)

$$\left[R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m] = \right.$$

$$R_X[m] = E(X[n]X[n+m]) = \begin{cases} \text{si } m \neq 0: E(X[n])E(X[n+m]) = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{(indep)} \\ \text{si } m = 0: E(X^2[n]) = 1 \end{cases}$$

$V(X[n]) = E(X^2[n]) - [E(X[n])]^2 = \Rightarrow 1^2 = E(X^2[n]) - 0^2$

$E(X^2[n]) = 1$

$$R_X[m] = 1 \cdot \delta[m]$$

$\delta[m]$ es par

$$= \delta[m] * [a\delta[m] - b\delta[m-1]] * [a\delta[-m] - b\delta[-m-1]] =$$

$$= \cancel{\delta[m]} * [a\delta[m] - b\delta[m-1]] * [a\delta[-m] - b\delta[m+1]] =$$

$$= a^2\delta[m] - ab\,\delta[m+1] - ba\,\delta[m-1] + b^2\delta[m] = (a^2+b^2)\delta[m] - ab\,\delta[m+1] - ab\,\delta[m-1]$$

$$S_Y(\Omega) = TF\{R_Y[m]\} = TF\{(a^2+b^2)\delta[m] - ab\,\delta[m+1] - ab\,\delta[m-1]\}$$

$$= (a^2+b^2)\cdot 1 - \underbrace{ab\cdot e^{j\Omega} - ab\cdot e^{-j\Omega}} =$$

$$= \boxed{a^2+b^2 - ab\cdot 2\cdot \cos\Omega}$$

periódica de período 2π
$(-\pi < \Omega < \pi)$

$t, \tau \rightarrow \omega$
$n, m \rightarrow \Omega$

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

Sea $X[n] = A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)$ un PE discreto en el tiempo, siendo Ω_0 una constante y A y Φ v.a.'s independientes. A tiene de media y varianza η_A y σ_A^2, y Φ es una v.a. uniforme en $(0,\pi)$.

a) Determine la media y la autocorrelación del proceso $X[n]$

b) Determine la densidad espectral de potencia de $X[n]$

c) Calcule la autocorrelación del proceso $Y[n] = X[n] - X[n-1]$

$X[n]$: PE en tiempo discreto, formado por $\left\{\begin{array}{l} \text{v.a } A: \eta_A, \sigma_A^2 \\ \text{v.a } \Phi: U(0,\pi) \to \text{continua} \end{array}\right\}$ indep

$\hookrightarrow f_\Phi(\phi) = \frac{1}{\pi}, \quad 0 < \Phi < \pi$

a)

$$E(X[n]) = E(A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)) \overset{\text{ind}}{=} E(A)\, E(\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)) = \eta_A \cdot \frac{1}{2}$$

$$E(\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)) = \int_{\phi=-\infty}^{\phi=\infty} \cos^2(\Omega_0 n + \Phi) f_\Phi(\phi)\, d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \cos^2(\Omega_0 n + \phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{1+\cos(2\Omega_0 n + 2\phi)}{2}\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{\phi}_{1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(2\Omega_0 n + 2\phi)}_{2}\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{(\pi - 0)}_{1} + \underbrace{0}_{2}\Big] = \frac{1}{2}$$

$$R_X[n,n+m] = E(X[n]X[n+m]) = E(A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)\, A\cos^2(\Omega_0(n+m) + \Phi)) \overset{A,\Phi \text{ indep}}{=}$$

$$= E(A^2)\, E(\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)\cos^2(\Omega_0(n+m) + \Phi)) = \begin{bmatrix} V(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 \\ \sigma_A^2 = \qquad - \eta_A^2 \\ E(A^2) = \sigma_A^2 + \eta_A^2 \end{bmatrix} = (*)$$

$$E(\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)\cos^2(\Omega_0(n+m) + \Phi)) = E\left(\frac{1+\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\underbrace{E(1)} + \underbrace{E(\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi))}_{0} + \underbrace{E(\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi))}_{0} + \underbrace{E(\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi))}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + E\left(\frac{1}{2}(\cos(4\Omega_0 n + 2\Omega_0 m + 4\Phi) + \cos(2\Omega_0 m))\right)\right] = \frac{1}{4}\Big[1 + \frac{1}{2}\big[\underbrace{E(\cos(4\Omega_0 n + 2\Omega_0 m + 4\Phi))}_{0} +$$

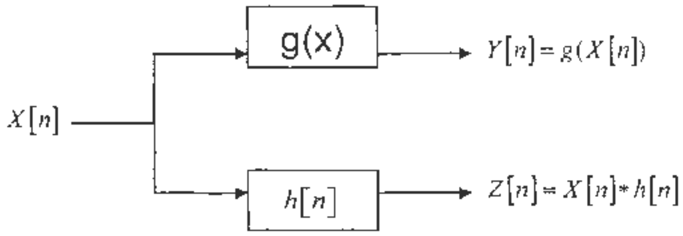
$$+ E(\cos(2\Omega_0 m))\big]\Big] = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 m)\right]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$(*) = (\sigma_A^2 + \eta_A^2) \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\cos(2\Omega_0 m)}{2}\right)$$

4.4 El del ruido blanco estricto normal que pasa un valor absoluto o un tren de deltas

En el esquema de la figura, $X[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden N(0,1); se tiene, además: $g(x) = |x|$ y $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$



Calcule:

a) La autocorrelación de $Y[n]$

b) La correlación cruzada de $X[n]$ e $Y[n]$

c) La fdp de primer orden de $Y[n]$

d) La fdp de primer orden de $Z[n]$

e) La densidad espectral de potencia de $Z[n]$. Represéntala gráficamente de forma aproximada

Sea el proceso discreto en el tiempo $X[n]$, de media nula y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $R_x[m]=a^{|m|}, 0<|a|<1$. Se hace pasar $X[n]$ por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-b\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso $Y[n]$

a) Calcule la autocorrelación de $Y[n]$, $R_Y[m]$

b) Calcule el valor de b que minimiza la varianza de $Y[n]$

c) Para el valor de b del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $Y[n]$, $S_Y(\Omega)$

Sean X(t) e Y(t) dos procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio, de medias nulas, autocorrelaciones $R_X(\tau)$ y $R_Y(\tau)$ y densidades espectrales de potencia $S_X(\omega)$ y $S_Y(\omega)$, respectivamente. Su correlación cruzada es $R_{XY}(\tau)$ y el espectro cruzado $S_{XY}(\omega)$. Se define el nuevo proceso $U(t) = X(t)\cos(\omega_o t) + Y(t)sen(\omega_o t)$, siendo $\omega_0 > 0$.

a) Determine las condiciones que deben verificar los estadísticos de X(t) e Y(t) definidos anteriormente para que U(t) sea estacionario en sentido amplio

b) Para las condiciones del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de U(t). Particularice las expresiones de la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de U(t) para el caso en que X(t) e Y(t) sean incorrelados

4.7 El del escalón unidad que depende de una distribución normal

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de primer orden normal estándar. Se define el nuevo proceso $Y[n]=U(X[n]-A)$ donde $U(\cdot)$ es la función escalón unidad y A es una v.a. de Bernouilli, independiente de $X[n]$ y con $P(A=1)=p$. Calcule:

a) La media y la varianza de $Y[n]$

b) La autocorrelación y autocovarianza de $Y[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

c) La correlación cruzada $R_{XY}[n_1,n_2], \forall n_1,n_2$. ¿Son $X[n]$ e $Y[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?

Sea p(t) una señal periódica de período T. Se forma el PE $X(t) = p(t+E)$, donde E es una v.a. uniformemente distribuida en (0,T)

a) Demuestre que X(t) es un PE estacionario en sentido amplio. Calcule para ello su media y autocorrelación

b) Aplique el resultado anterior para $p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$

c) Se forma el proceso $Y(t+t_0) = aX(t)$, donde a es una constante. Determine a para que $Z(t) = X(t+t_0) - Y(t+t_0)$ tenga un valor cuadrático medio mínimo

4.9 El de las uniformes y el ruido blanco

Sea el proceso $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)$, con $\omega_0 > 0$, A una v.a. uniforme en (-1,1), Θ una v.a. uniforme en $(\pi, 2\pi)$ y $N(t)$ un PE de media nula y autocorrelación $R(\tau) = \sigma^2\delta(t)$. Suponga A, Θ y $N(t)$ independientes.

a) Calcule la media condicionada $E(X(t)/A = a)$, la media y la autocorrelación de X(t). ¿Es estacionario en sentido amplio?

Se hace pasar ahora X(t) por un sistema lineal e invariante de respuesta en frencuencia $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega}$, obteniéndose a su salida un nuevo proceso Y(t). Calcule:

b) La densidad espectral de potencia de Y(t)

c) La media y la autocorrelación de Y(t)

4.10 El de la familia de cosenos

Sea la familia de sucesos estocásticos $X_n(t) = \cos(n(t+\Theta))$, siendo Θ una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ y n un número natural mayor que 0

a) Encontrar la media y la autocorrelación de $X_n(t)$. ¿Son procesos estacionarios en sentido amplio?
b) Calcular la correlación cruzada entre $X_n(t)$ y $X_m(t)$, con $n \neq m$, ¿son sucesos incorrelados?, ¿son sucesos ortogonales?
c) Sea $Z(t) = X_n(t) + X_m(t)$, con $n \neq m$. ¿Son Z(t) y $X_n(t)$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?
d) Calcular los espectros de potencia de Z(t) y $X_n(t)$

a) Sea $X[n]$ un proceso estocástico de autocorrelación $R_X[m]$. Se hace pasar dicho proceso por un sistema lineal de respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$. Calcule la autocorrelación del proceso de salida $Y[n]$

b) Sea el proceso $X[n]=A[n]cos(\Omega_0 n+\Phi)+W[n]$, con Ω_0 una constante positiva, $A[n]$ un PE de media η_A y autocorrelación $R_A[m]$, Φ una v.a. uniforme en $(0,\pi)$ y $W[n]$ un PE de media nula y autocorrelación $R_W[m]=\sigma_W^2\cdot\delta[m]$. Suponga $A[n]$, Φ y $W[n]$ independientes. Calcule la meda y la autocorrelación del proceso $X[n]$. ¿Bajo qué condiciones es estacionario en sentido amplio?

c) Para el proceso definido en el apartado b), calcule el espectro de $X[n]$ y dibújelo suponiendo que el espectro de $A[n]$ en el intervalo $(-\pi,\pi)$ es: $S_A\{\Omega\}=\begin{cases} A_0, & |\Omega|\le\Omega_A \\ 0, & |\Omega|>\Omega_A \end{cases}$, donde A_0 y Ω_A sean constantes positivas y se cumple que $\Omega_A<\Omega_0<\pi-\Omega_A$

d) Suponga ahora que el proceso $X[n]$ definido en el apartado b) se hace pasar por el sistema lineal definido en el apartado a). Calcule el valor cuadrático medio del proceso de salida $Y[n]$

e) Sobre el proceso definido en el apartado b) se aplica la transformación $z=g(x)=x^2$. Calcule la media del proceso transformado $Z[n]$

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de primer orden : $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$. A dicho proceso se le aplican las transformaciones: $y = q(x) = \begin{Bmatrix} y_1, \ x \leq a \\ y_2, \ x > a \end{Bmatrix}$, $z = g(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$, siendo y_1, y_2, a constantes positivas. Se obtienen los nuevos procesos $Y[n] = q(X[n])$ y $Z[n] = g(X[n])$. Calcule:

a) El valor de a de manera que el proceso $Y[n]$ tome el valor y_1 con probabilidad 0'4

b) La fdp de primer orden de $Y[n]$, para el valor de a obtenido previamente. ¿Es $Y[n]$ estacionario de orden 1?

c) La autocovarianza de $Y[n]$, para el valor de a obtenido previamente. ¿Es $Y[n]$ estacionario en sentido amplio?

d) La fdp de primer orden de $Z[n]$. ¿Es $Z[n]$ estacionario de orden 1?

e) La media y la varianza de $Z[n]$

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto con fdp exponencial : $f(x) = c \cdot e^{-cx} u(x)$. A dicho proceso se le aplica la transformación: $y = g(x) = y_0(1 - e^{-cx})$, siendo $y_0 > 0$ una constante. Se obtiene el nuevo proceso $Y[n] = g(X[n])$. Calcule:

a) $P(Y[n] > \frac{3y_0}{4})$

b) La media de $Y[n]$

c) La fdp de primer orden de $Y[n]$. ¿Es $Y[n]$ estacionario de orden 1?

d) La autocovarianza de $Y[n]$. ¿Es $Y[n]$ estacionario en sentido amplio?

e) Se define el proceso $S[n] = Y[n] - \lambda X[n]$, donde λ una constante. Determine el valor de ésta para que la correlación cruzada $R_{XS}[n_1, n_2]$ sea nula para todo $n_1 \neq n_2$

4.14 El que es muy facilón

Sea el proceso $Z[n]=X[n]\cdot Y[n]$, siendo $X[n]$ e $Y[n]$ dos PE discretos en el tiempo independientes y estacionarios en sentido amplio, de medias η_x y η_Y, y autocorrelación $R_X[m]$ y $R_Y[m]$, respectivamente. Calcule:

a) La media y la autocorrelación de $Z[n]$. ¿Es $Z[n]$ estacionario en sentido amplio?

b) La correlación cruzada $R_{XZ}[n_1,n_2]$. ¿Son $X[n]$ y $Z[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?

c) La media condicionada $E\left[Z[n]/X[n]=x\right]$

d) La densidad espectral de potencia de $Z[n]$, suponiendo que $R_Y[m]=a^{|m|}$ ($|a|<1$) y $R_X[m]=\delta[m]$

e) La distribución de primer orden de $Z[n]$, suponiendo que para cada n, $X[n]$ e $Y[n]$ son v.a. discretas, con $P\{X[n]=-1\}=P\{Y[n]=-1\}=p$ y $P\{X[n]=1\}=P\{Y[n]=1\}=1-p$, con $0<p<1$

4.15 El de unas cuantas normales

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden Gaussiana (de media nula y varianza σ_X^2). Se forman los procesos $Y[n]=X[n]-aX[n-1]$, $Z[n]=|Y[n]|$. Siendo a una constante:

a) Demostrar que $Y[n]$ es e.s.a.

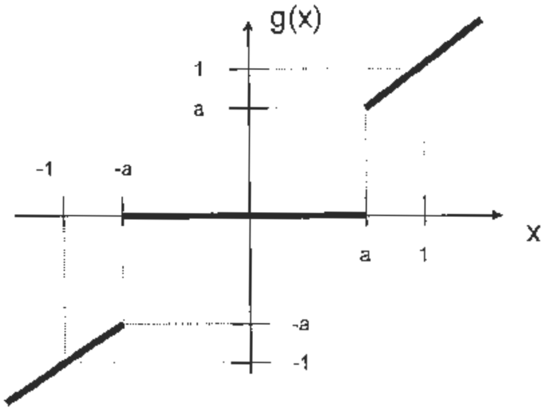
b) Fdp de primer orden de $Y[n]$

c) Espectro de $Y[n]$

d) Media y varianza de $Z[n]$

e) Fdp de primer orden de $Z[n]$. ¿Es estacionario de primer orden?

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden uniforme en (-1,1) Sobre $X[n]$ se aplica la transformación:



(siendo $0 < a < 1$), obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Y[n] = g(X[n])$. Calcule:

a) La autocorrelación de $Y[n]$

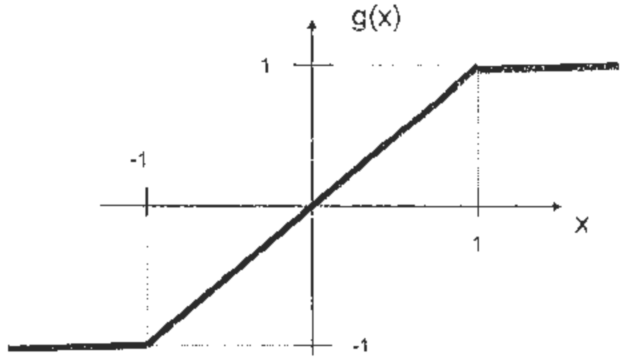
b) La correlación cruzada de $X[n]$ e $Y[n]$

c) La fdp de primer orden de $Y[n]$

d) La media condicional $E(Y[n+m] / X[n] = x)$

e) Se hace pasar $X[n]$ por un sistema lineal e invariante, con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Z[n] = X[n] * h[n]$. Calcule la autocorrelación de $Z[n]$

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden normal estándar. Sobre $X[n]$ se aplica la transformación:



obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Y[n] = g(X[n])$. Calcule:

a) La autocorrelación de $Y[n]$

b) La correlación cruzada de $X[n]$ e $Y[n]$

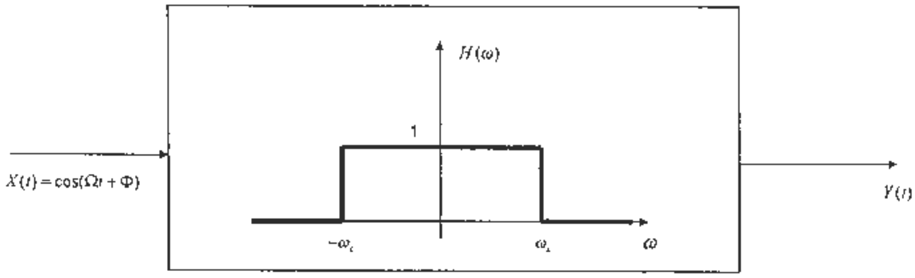
Se hace pasar $X[n]$ por un sistema lineal e invariante, con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Z[n] = X[n] * h[n]$. Calcule:

c) La autocorrelación de $Z[n]$

d) La fdp de primer orden de $Z[n]$

e) La densidad espectral de potencia de $Z[n]$

En el esquema adjunto, $X(t)=\cos(\Omega t+\Phi)$ representa una señal aleatoria, donde Ω es una v.a. con distribución uniforme en (w_1, w_2), (siendo $0<w_1<w_2$) e independiente de Φ; ésta, a su vez, es una v.a. discreta que puede tomar los valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ con igual probabilidad. El proceso estocástico $X(t)$ pasa por un filtro paso bajo ideal de ancho de banda $w_c<w_1$, dando como resultado un nuevo proceso $Y(t)$



Se pide:

a) La media condicionada $E(X(t)/\Omega=w)$
b) La media del proceso $X(t)$
c) La autocorrelación del proceso $X(t)$ comprobando que es estacionario en sentido amplio
d) La densidad espectral de potencia del proceso $X(t)$
e) La autocorrelación del proceso a la salida del filtro $Y(t)$

NOTA: $x(t)=\frac{\sin(at)}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega)=TF(x(t))=\begin{Bmatrix} 1, |w|<a \\ 0, |w|\geq a \end{Bmatrix} \; (a>0)$

4.19 El de la autocorrelación en un montón de escenarios

A partir de dos procesos estocásticos $X[n]$ e $Y[n]$ discretos en el tiempo, se define:

$$Z[n] = X[n] + Y[n]$$

a) Obtenga la expresión general de la autocorrelación del proceso $Z[n]$: $R_Z[n_1, n_2]$ en función de las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de los procesos $X[n]$ e $Y[n]$

b) Particularice la expresión de $R_Z[n_1, n_2]$, obtenida en el apartado anterior y obtenga la densidad espectral de potencia de $Z[n]$, en función de las densidades espectrales de potencia y el espectro cruzado de $X[n]$ e $Y[n]$, para los dos casos siguientes:

   a. $X[n]$ e $Y[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio

   b. $X[n]$ e $Y[n]$ estacionarios en sentido amplio y ortogonales

c) Suponga que $X[n] = A$, siendo A una v.a. de media cero y varianza σ_A^2, e $Y[n]$ es un ruido blanco estacionario en sentido amplio de media cero y varianza σ_Y^2 e independiente de A. Calcule la media y autocorrelación del proceso $Z[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

d) A partir del resultado del apartado anterior obtenga la densidad espectral de potencia del proceso $Z[n]$

e) Considere ahora que $Z[n] = nA + B$, siendo A y B independientes con fdp normal estándar. Calcule $P(Z[n] > k)$ y particularice para n=2, k=5

Señales Aleatorias (SALT)

Exámenes de Grado

Carpeta Academia Montero Espinosa Roberto Martín 2018

10 enero 2018 **Señales Aleatorias** **Publicación notas: 19/1/2018**
Revisión examen: 24/1/2018

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio; en caso de hacerlo, ello supondrá la renuncia a la nota que tuvieran en el primer parcial.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Considere **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en (0, 1) e independientes. Calcule:

a) La FD $F_U(u)$ y la fdp $f_U(u)$ de la v.a. $\mathbf{U}=\max(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. No olvide indicar el rango.

b) La probabilidad condicional $P(\mathbf{X}>1/2\,|\,\mathbf{Y}>\mathbf{X})$.

c) La fdp $f_S(s)$ de la v.a. $\mathbf{S}=-\ln(\mathbf{X})$.

Se forma la v.a. $\mathbf{V}=g(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, siendo $g(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1-y\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

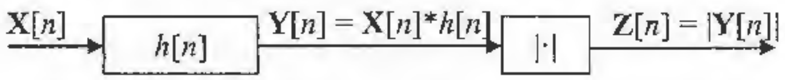
d) Calcule la función de distribución $F_V(v)$ e indique si **X** y **V** son incorreladas.

Considere ahora las transformaciones:

$$\mathbf{Z}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}$$
$$\mathbf{W}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$$

e) Calcule la fdp conjunta de **Z** y **W**, dibujando su rango.

2.- En el esquema de la figura, $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto binario, con $P(\mathbf{X}[n]=-1)=P(\mathbf{X}[n]=1)=1/2$, y $h[n]=½(\delta[n]-\delta[n-1])$.



Se pide:

a) Las funciones de distribución de primer orden de $\mathbf{Y}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$. Represéntelas gráficamente de forma aproximada.

b) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$. Represéntelas gráficamente de forma aproximada.

c) La covarianza cruzada de $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$.

Suponga ahora que $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto con fdp de primer orden $N(\eta,\sigma)$. Calcule:

d) Las funciones densidad de primer orden de $\mathbf{Y}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$. Represéntelas gráficamente de forma aproximada.

e) $P(\mathbf{Z}[n]<\sigma)$.

NOTA: $\mathbf{X}$ es $N(\eta,\sigma)\Rightarrow f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right],\quad E(\mathbf{X})=\eta,\quad \mathrm{Var}(\mathbf{X})=\sigma^2$

Considere X e Y dos v.a.'s uniformes en $(0,1)$ e independientes. Calcule:

a) la FD $F_U(u)$ y la fdp $f_U(u)$ de la v.a. $U = \max(X, Y)$. No olvide el rango

b) la probabilidad condicional $P(X > 1/2 / Y > X)$

c) la fdp $f_S(s)$ de la v.a. $S = -\ln(X)$

Se forma la v.a. $V = g(X, Y)$, siendo $g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1-y \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

d) Calcule la función de distribución $F_V(v)$ e indique si X y V son incorreladas

Considere ahora la transformaciones: $Z = X - Y$

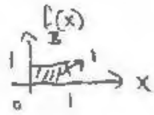
$W = X + Y$

e) Calcule la fdp conjunta de Z y W, dibujando su rango

SALT
Examen
10enero 2018
Ejercicio 1

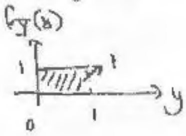
1/

a) V.a. $X = U(0,1)$, $f_X(x) = 1$, $0 < x < 1$



$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} (t)dt = \int_0^x 1 \cdot dt = [t]_0^x = x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

V.a. $Y = U(0,1)$, $f_Y(y) = 1$, $0 < y < 1$



$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ y, & \text{si } 0 \le y < 1 \\ 1, & \text{si } y \ge 1 \end{cases}$

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(\max(X,Y) \le u) = P((X \le u) \cap (Y \le u)) = P(X \le u) \cdot P(Y \le u) =$$

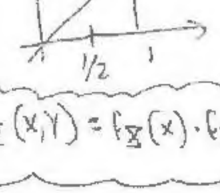
X, Y independientes

$$= F_X(u) \cdot F_Y(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u < 0 \\ u^2, & \text{si } 0 \le u < 1 \\ 1, & \text{si } u \ge 1 \end{cases}$$

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = 2u, \quad 0 < u < 1$$

b) $$P(X > 1/2 / Y > X) = \frac{P((X > 1/2) \cap (Y > X))}{P(Y > X)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$P((X > 1/2) \cap (Y > X)) = \int_{x=1/2}^{x=1} \left[\int_{y=x}^{y=1} f_{XY}(x,y)\, dy\right] dx = \int_{x=1/2}^{x=1} \left[\int_{y=x}^{y=1} 1\, dy\right] dx = \int_{x=1/2}^{x=1} [y]_x^1\, dx =$$

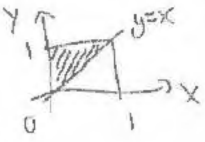


$$= \int_{x=1/2}^{x=1} (1-x)\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} =$$

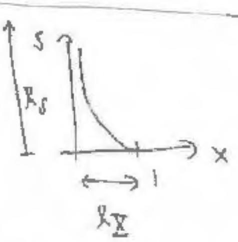
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1 \cdot 1 = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$$P(Y>X) = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x}^{y=1} f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x}^{y=1} 1\cdot dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}[y]_x^1\,dx = \int_{x=0}^{x=1}(1-x)\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



c) Transformación: $S = g(x) = -\ln x$



Transformación de v.a. continua (X) en v.a. continua (S)

1/ $g(x)$ es continua estrictamente decreciente en $R_X = (0,1)$

2/ Existe inversa $g^{-1}(s)$: $s = -\ln x \rightarrow x = e^{-s} = g^{-1}(s)$

3/ $g^{-1}(s)$ es continua y derivable en $R_S = (0,\infty)$

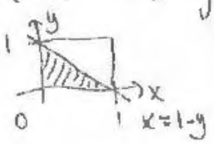
$(g^{-1})'(s) = -e^{-s}$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$$\boxed{f_S(s) = f_X(x=g^{-1}(s))\cdot\left|(g^{-1})'(s)\right| = 1\cdot\left|-e^{-s}\right| = e^{-s}\ ,\quad 0<s<\infty}$$

d) Transformación: $V = g(X,Y) = \begin{cases} 1\ , & 0<X<1-Y \\ 0\ , & \text{resto}\end{cases} \Rightarrow V$ es una v.a. discreta

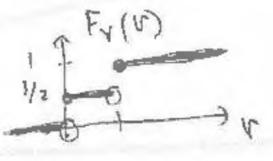
$$P(V=1) = P(0<X<1-Y) = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x} f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x} 1\cdot dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}[y]_{y=0}^{y=1-x}\,dx = \int_{x=0}^{x=1}(1-x)\,dx =$$



$$= \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$P(V=0) = 1-P(V=1) = 1-\tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F_V(v) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } v<0 \\ 1/2\ , & \text{si } 0\le v<1 \\ 1\ , & \text{si } v\ge 1\end{cases}$$



$$F_V(v) = \frac{1}{2}u(v) + \frac{1}{2}u(v-1)$$

$$\mathrm{Cov}(XV) = E(XV) - E(X)E(V) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -1/12 \neq 0 \Rightarrow X, V \text{ no incorreladas}$$

$$E(XV) = E(X\cdot g(X,Y)) = \iint_{R_{XY}} x\cdot g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x} x\cdot 1\cdot 1\cdot dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1} x\,[y]_0^{1-x}\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x(1-x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1}(x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x\cdot 1\cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(V) = \sum v_i p_i = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1/2$$

SALT
Examen
10 enero 2018
Ejercicio 1

2/

e) Transformación: $\begin{cases} Z = X - Y \\ W = X + Y \end{cases}$

Transformación de v.a. bidimensional continua (X,Y) en v.a. bidimensional continua (Z,W)

$$J = \begin{vmatrix} \partial z/\partial x & \partial z/\partial y \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=\frac{1}{2}(z+w) \\ y=\frac{1}{2}(w-z)}} = \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}, \text{ si } (z,w) \in R_{Z,W}}$$

$\begin{cases} z = x - y \\ w = x + y \end{cases}$ $\oplus$ $z + w = 2x \to x = \frac{1}{2}(z+w)$; $\ominus$ $z - w = -2y \to y = \frac{1}{2}(w-z)$

$R_{ZW}: \begin{cases} 0<x<1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(z+w) < 1 \nearrow w > -z, \searrow w < -z+2 \\ 0<y<1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(w-z) < 1 \nearrow w > z, \searrow w < z+2 \end{cases}$

R_{ZW}

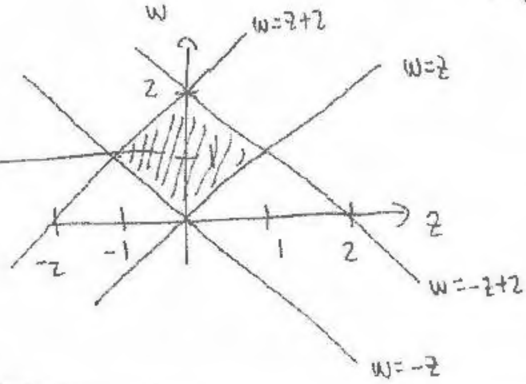


TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

20 noviembre 2017 **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Sean **X** e **Y** dos v.a.'s de Bernoulli de parámetro p=0,5 independientes (pueden tomar los valores 0 y 1 con idéntica probabilidad). Se forman las v.a.'s **Z**=**X**−2**Y**+a y **W**=g(**Z**), siendo a una constante y g:

$$g(z)=\begin{cases} z & z\geq 0 \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

a) Calcule la media de **Z** y compruebe que es nula para a=0,5. Dibujar para ese valor la función de distribución de **W**: $F_W(w)$.
b) Hallar para el valor de a=0,5, las probabilidades condicionales $P(\mathbf{W}=w_i \mid \mathbf{X}=1)\ \forall w_i \in \Omega_W$.
c) Hallar la covarianza entre **X** y **Z** para el valor de a=0,5.
Suponga ahora que **X** es una v.a. normal $N(1,8)$ e **Y** una v.a. normal $N(-1,3)$ independientes:
d) Hallar la fdp de **Z**, $f_Z(z)$, en función de a.
e) Hallar el valor de a para que $P(\mathbf{W}=0)=0,5$.
X es v.a. normal $N(\eta,\sigma) \Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}$, $E(\mathbf{X})=\eta$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X})=\sigma^2$

SOLUCIÓN:

V.a X = Ber(p=0'5) (discreta) $\longrightarrow \begin{Bmatrix} P(x=0)=1-p=0'5 \\ P(x=1)=p=0'5 \end{Bmatrix}$

V.a Y = Ber (p=0'5) (discreta) $\longrightarrow \begin{Bmatrix} P(Y=0)=0'5 \\ P(Y=1)=0'5 \end{Bmatrix}$

$f_{XY}(x,y) \underset{\text{indep}}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} P(X=0,Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0)=0'5\cdot 0'5=0'25 \\ P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)=0'5\cdot 0'5=0'25 \\ P(X=1,Y=0)=P(X=1)\cdot P(Y=0)=0'5\cdot 0'5=0'25 \\ P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=0'5\cdot 0'5=0'25 \end{Bmatrix}$

V.a $Z = X-2Y+a$ (discreta)

V.a $W = g(Z) = \begin{Bmatrix} Z, & Z\geq 0 \\ 0, & Z<0 \end{Bmatrix}$ (discreta)

a) $\Big[\mu_Z = E(Z) = E(X-2Y+a) = E(X)-2E(Y)+a =$

$E(X)=\sum x_i p_i = 0\cdot 0'5+1\cdot 0'5=0'5$
$E(Y)=\ldots=0'5$

$= 0'5-2\cdot 0'5+a = -0'5+a\Big]$

Nos piden la $F_W(w)$. Vamos a empezar primero averiguando cosas de Z

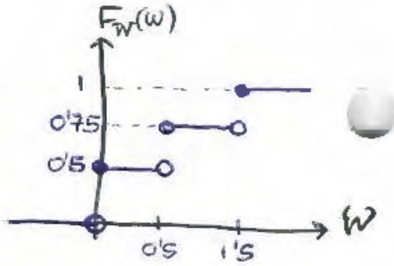
$\Big[$Comprobación: si $a=0'5 \rightarrow E(Z)=-0'5+0'5=0\Big]$

Z es v.a discreta y puede tomar 4 valores diferentes $\begin{pmatrix} X\rightarrow 2\text{ val} \\ Y\rightarrow 2\text{ val}\end{pmatrix}$

- $X=0,\ Y=0 \longrightarrow Z=0-2\cdot 0+0'5=0'5$
- $X=0,\ Y=1 \longrightarrow Z=0-2\cdot 1+0'5=-1'5$
- $X=1,\ Y=0 \longrightarrow Z=1-2\cdot 0+0'5=1'5$
- $X=1,\ Y=1 \longrightarrow Z=1-2\cdot 1+0'5=-0'5$

la probabilidad de las 4 $P()=0'25$

Por lo tanto, $f_Z(z) = \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} P(Z=-1'5)=0'25 \\ P(Z=-0'5)=0'25 \end{matrix}} & 1 \\ P(Z=0'5)=0'25 & 2 \\ P(Z=1'5)=0'25 & 3 \end{cases}$



vamos ahora con W

$$W = \begin{cases} Z, & Z \geq 0 & 2,3 \\ 0, & Z < 0 & 1 \end{cases} \Rightarrow f_W(w) = \begin{cases} P(W=0) = 0'5 & 1 \\ P(W=0'5) = 0'25 & 2 \\ P(W=1'5) = 0'25 & 3 \end{cases}$$

b) si $X=1$:

- $Y=0 \longrightarrow Z = 1 - 2\cdot 0 + 0'5 = 1'5$
- $Y=1 \longrightarrow Z = 1 - 2\cdot 1 + 0'5 = -0'5$

$\Big\}\ P() = 0'5 \Rightarrow f_Z(z/X=1) = \begin{cases} P(Z=-0'5/X=1) = 0'5 \\ P(Z=1'5/X=1) = 0'5 \end{cases}$

vamos ahora con W

$$W = \begin{cases} Z, & Z \geq 0 \\ 0, & Z < 0 \end{cases} \Rightarrow f_W(w/X=1) = \begin{cases} P(W=1'5/X=1) = 0'5 \\ P(W=0/X=1) = 0'5 \end{cases}$$

c) $\left[C_{XZ} = E(XZ) - E(X)E(Z) = 0'25 - 0'5\cdot 0 = 0'25 \right]$

$$E(XZ) = E(X\cdot(X-2Y+0'5)) = E(X^2) - 2E(XY) + 0'5E(X) \overset{X \text{ e } Y \text{ indep}}{=} E(X^2) - 2E(X)E(Y) + 0'5E(X) =$$

$$\overset{*}{=} 0'5 - 2\cdot 0'5\cdot 0'5 + 0'5 = 0'25$$

$* \ E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 0^2\cdot 0'5 + 1^2\cdot 0'5 = 0'5$

d)

V.a $X = N(\underset{\text{media}}{1}, \underset{\text{desv. tipica}}{8})$

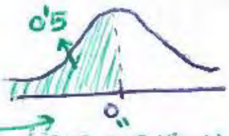
V.a $Y = N(-1,3)$

$$Z = X - 2Y + a = N(1,8) - 2N(-1,3) + a =$$
$$= N(1,8) - N(-2,+6) + a \overset{X\,Y \text{ indep}}{=}$$
$$= N\left(1-(-2)+a, \sqrt{8^2+6^2+0}\right) = N(\underset{\mu}{3+a}, \underset{\sigma}{10})$$

$$\left[f_Z(z) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-(3+a))^2}{2\cdot 10^2}}, \quad -\infty < z < \infty \right]$$

e) $P(W=0) = 0'5 \longrightarrow P(Z<0) = 0'5 \longrightarrow P(N(3+a,10)<0) = 0'5 \xrightarrow{\text{tipificar}}$

$$\longrightarrow P\left(N(0,1) < \boxed{\frac{0-(3+a)}{10}}\right) = 0'5$$



tiene que ser el punto medio

igualando:

$$0 = \frac{0-(3+a)}{10} \longrightarrow \left[a = -3 \right]$$

29 junio 2017 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 6/7/2017
Revisión examen:10/7/2017

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- La calificación de este examen final extraordinario será la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sean **X** e **Y** dos variables aleatorias independientes con función densidad de probabilidad exponencial de parámetro $\lambda=1$. Se forman las variables aleatorias **Z**=**X** + **Y** y **W**=**X** /(**X** + **Y**). Determine:

a) La $P(\mathbf{X} < \mathbf{Y})$. Demuestre que esta probabilidad es igual a la función de distribución de la variable aleatoria **W** en el punto w=0,5, es decir: $F_W(w)|_{w=0,5}$.
b) La correlación de **Z** y **W**.
c) La función densidad de probabilidad condicional $f_Z(z|\ \mathbf{X}=1)$.
d) La función densidad de probabilidad marginal de **Z**.
e) La función densidad de probabilidad conjunta $f_{ZW}(z,w)$ (no olvide indicar su rango) e indique si **Z** y **W** son independientes.

2.- Sea el proceso estocástico $\mathbf{Z}[n] = \mathbf{X}\cos\Omega_0 n + \mathbf{Y}\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 n$ siendo Ω_0 una constante en el intervalo $[0,2\pi)$. **X** e **Y** son dos variables aleatorias ortogonales, con idénticas medias y varianzas: $E(\mathbf{X})=E(\mathbf{Y})=\eta$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X})=\mathrm{Var}(\mathbf{Y})=\sigma^2$.

a) Determinar las condiciones que deben verificar los estadísticos de **X** e **Y** para que el proceso $\mathbf{Z}[n]$ tenga una media que no dependa de n.
b) Determinar, para las condiciones del apartado anterior, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Z}[n]$.
c) Se forma el proceso $\mathbf{W}[n] = \mathbf{Z}[n]*h[n]$ siendo $h[n]=a_0\,\delta[n]+a_1\,\delta[n-1]$. Calcule la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{W}[n]$.
d) Determinar la correlación cruzada de los procesos $\mathbf{Z}[n]$ y $\mathbf{W}[n]$.

Se sabe que **X** e **Y** son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta:

$$P(\mathbf{X}=1,\mathbf{Y}=0)=1/4,\quad P(\mathbf{X}=0,\mathbf{Y}=1)=1/4,\quad P(\mathbf{X}=-1,\mathbf{Y}=0)=1/4,\quad P(\mathbf{X}=0,\mathbf{Y}=-1)=1/4$$

e) Hallar la función densidad de probabilidad de primer orden del proceso $\mathbf{Z}[n]$.

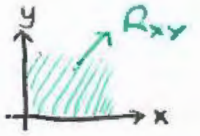
$$X \text{ v.a. exponencial}: f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad x\geq 0;\quad E(X)=\frac{1}{\lambda};\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

① v.a X: $f_X(x) = e^{-x}, \; x \geq 0$

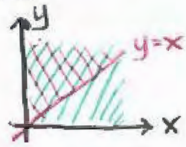
v.a Y: $f_Y(y) = e^{-y}, \; y \geq 0$

$$f_{XY}(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)}, \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$



a) $$\left[P(X<Y) = \int_{x=0}^{x=\infty} \int_{y=x}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=\infty} \int_{y=}^{y=\infty} e^{-x} e^{-y}\, dy\, dx = \int_{x=0} e^{-x} \left[e^{-y} \right]_{y=x}^{y=\infty} dx = \right.$$

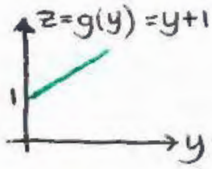
$$\left. = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x} \cdot e^{-x}\, dx = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2} \right]$$



$$\left[F_W(0{,}5) = P(W \leq 0'5) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leq 0'5 \right) = P(X \leq 0'5(X+Y)) = P(0'5X \leq 0'5Y) = P(X<Y) \right]$$

c) $\left\{ \begin{matrix} Z = X+Y \\ W = \dfrac{X}{X+Y} \end{matrix} \right\}$ si $X=1 \rightarrow Z = Y+1 \rightarrow$

$z = g(y) = y+1$



Transformación de v.a continua (Y) en v.a continua (Z)

1) $g(y)$ es continua estrictamente creciente en $R_Y = [0, \infty)$

2) Existe inversa $g^{-1}(z)$: $z = y+1 \rightarrow \left[y = z-1 = g^{-1}(z) \right]$

3) $g^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = [1, \infty) \longrightarrow \left[(g^{-1})'(z) = 1 \right]$

Podemos aplicar la formula de la transformación

$$f_Z(z) = f_Y(y = g^{-1}(z)) \cdot |(g^{-1})'(z)| = e^{-(z-1)} \cdot 1 = e^{-(z-1)}, \quad z \geq 1$$

$$\left[f_Z(z/X=1) = e^{-(z-1)}, \quad z \geq 1 \right]$$ °o comprobar

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x} = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

d) e) Transformación $\left\{ \begin{matrix} Z = X+Y \\ W = \dfrac{X}{X+Y} \end{matrix} \right\}$

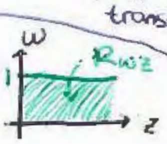
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y/(x+y)^2 & -x/(x+y)^2 \end{vmatrix} = \frac{-x-y}{(x+y)^2} = \frac{-1}{x+y} \neq 0$$

podemos aplicar form transfor.

$$\left[f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x,y)}{|J|} = \frac{e^{-(x+y)}}{\left| \frac{-1}{x+y} \right|} = \frac{e^{-z}}{\frac{1}{z}} = z e^{-z}, \; (z,w) \in R_{ZW} \right] \text{e)}$$

$\left\{ \begin{matrix} z = x+y \\ w = \dfrac{x}{x+y} \end{matrix} \right\} \rightarrow z = \dfrac{x}{w} \rightarrow x = zw$, $\; y = z - zw$

$R_{XY}: \left\{ \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} zw \geq 0 \\ z - zw \geq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow z(1-w) \geq 0 \xrightarrow[z \geq 0]{z = x+y} \begin{matrix} z \geq 0 \\ w \geq 0 \\ 1-w \geq 0 \\ \downarrow \\ w \leq 1 \end{matrix}$



$$\left[f_Z(z) = \int_{w=-\infty}^{w=\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw = \int_{w=0}^{w=1} z \cdot e^{-z}\, dw = z \cdot e^{-z} [w]_{w=0}^{w=1} = z \cdot e^{-z}, \; z \geq 0 \right] \text{d)}$$

(Foto)

$$\left. \begin{matrix} f_{ZW}(z,w) = z \cdot e^{-z} \\ f_Z(z) \cdot f_W(w) = z \cdot e^{-z} \cdot 1 \end{matrix} \right\} = Z \text{ y } W \text{ son independientes}$$

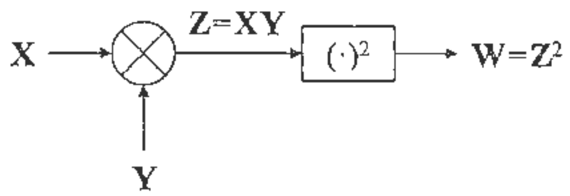
[Z y W son incorreladas (no hay correlación entre ellos)] b)

9 enero 2017 **Señales Aleatorias** **Publicación notas: 23/1/2017**
Revisión examen: 26/1/2017

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio; en caso de hacerlo, ello supondrá la renuncia a la nota que tuvieran en el primer parcial.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Considere el esquema de la figura, donde **X** es una v.a. $N(0,\sigma)$ e **Y** es una v.a. independiente de **X**, de rango o recorrido $\Omega_Y=\{-1,1\}$, siendo $P(\mathbf{Y}=1)=p$, $P(\mathbf{Y}=-1)=1-p\equiv q$.



Calcule:

a) Las fdp's condicionales: $f_Z(z\,|\,\mathbf{Y}=-1)$, $f_Z(z\,|\,\mathbf{Y}=1)$ y la fdp marginal de **Z**: $f_Z(z)$. Represente gráficamente $f_Z(z)$ de forma aproximada.

b) La covarianza de **X** y **Z**. ¿Para qué valor de p son **X** y **Z** incorreladas?

c) La fdp de **W** (no olvide el rango o recorrido).

Suponga ahora que **Y** es una v.a. $N(0,\sigma)$ independiente de **X**. Se forman las v.a.'s:

$$\mathbf{U}=\mathbf{X}\cos\theta-\mathbf{Y}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}\,\mathrm{sen}\,\theta+\mathbf{Y}\cos\theta$$

siendo θ una constante ($0\le\theta<2\pi$). Calcule:

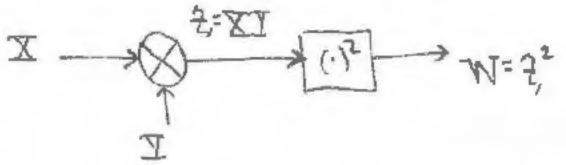
d) El coeficiente de correlación de **U** y **V**.

e) Las fdp's marginales de **U** y V: $f_U(u)$ y $f_V(v)$.

$$\text{NOTA : } \mathbf{X} \text{ v.a. gaussiana ó } N(\eta,\sigma): f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right];\quad E(\mathbf{X})=\eta;\quad \mathrm{Var}(\mathbf{X})=\sigma^2$$

EXAMEN SALT
9 enero 2017
Ejercicio 1

Considere el esquema de la figura, donde X es una v.a. $N(0,\sigma)$ e Y es una v.a. independiente de X, de rango o recorrido $\Omega_Y = \{-1,1\}$, siendo $\begin{Bmatrix} P(Y=1)=p \\ P(Y=-1)=1-p=q \end{Bmatrix}$



Calcule:

a) las fdp's condicionales $f_Z(z/Y=-1)$, $f_Z(z/Y=1)$ y la fdp marginal de Z: $f_Z(z)$

Represente gráficamente $f_Z(z)$ de forma aproximada

b) la covarianza de X y Z. ¿Para qué valores de p son X y Z incorreladas?

c) la fdp de W (no olvide el rango o recorrido)

Suponga ahora que Y es una v.a. $N(0,\sigma)$ independiente de X. Se forman las v.a.'s:

$$\begin{Bmatrix} U = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta \\ V = X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta \end{Bmatrix}$$, siendo θ una constante $(0 \le \theta < 2\pi)$. Calcule:

d) El coeficiente de correlación entre U y V

e) las fdp's marginales de U y V: $f_U(u)$ y $f_V(v)$

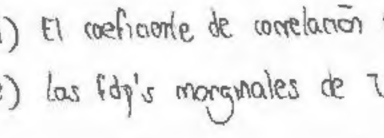
NOTA: X v.a. gaussiana $N(\eta,\sigma)$: $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]$

a) Y es una v.a. discreta, que funciona como un interruptor:

- si $Y=-1$: $Z = -X = -N(0,\sigma) = N(0,\sigma) \rightsquigarrow \boxed{f_Z(z/Y=-1) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < z < \infty}$
- si $Y=1$: $Z = X = N(0,\sigma) \rightsquigarrow \boxed{f_Z(z/Y=1) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < z < \infty}$

Finalmente, $\underbrace{f_Z(z)}_{\text{Th. Probabilidad Total}} = P(Y=-1)\cdot f_Z(z/Y=-1) + P(Y=1)\cdot f_Z(z/Y=1) =$

$$= (1-p)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} + p\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < z < \infty}$$



NOTA: Este resultado es totalmente lógico pues, pase lo que pase con Y, Z es una $N(0,\sigma)$

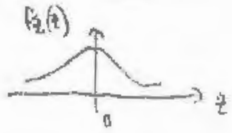
b) $\operatorname{cov}(XZ) = E(XZ) - E(X)E(Z) = E(XXY) - E(X)E(XY) \overset{X,Y \text{ v.a. indep}}{=} E(X^2)E(Y) - [E(X)]^2 E(Y) =$

$$= \sigma^2(2p-1) - 0^2\cdot(2p-1) = \sigma^2(2p-1)$$

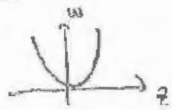
$E(Y) = \sum y_i p_i = -1\cdot(1-p) + 1\cdot p = 2p-1$; $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$

$\mathbb{X}$ y $\mathbb{Z}$, son incorreladas $\Leftrightarrow cov(\mathbb{X},\mathbb{Z})=0 \Leftrightarrow \sigma^2(2p-1)=0 \Leftrightarrow p=1/2$

c) V.a. $\mathbb{Z}=N(0,\sigma)$; $f_{\mathbb{Z}}(z)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<z<\infty$



Transformación: $w=g(z)=z^2$



Transformación de v.a. continua ($\mathbb{Z}$) en v.a. continua ($\mathbb{W}$)

$g(z)$ tiene parte creciente y parte decreciente en $R_{\mathbb{Z}}=(-\infty,\infty)$

PARTE 1 : 1) $g_1(z)=z^2$ es continua estrictamente decreciente en $R_{\mathbb{Z}_1}=(-\infty,0)$

$z<0$ 2) Existe inversa $g_1^{-1}(w)$: $w=z^2 \Rightarrow z=-\sqrt{w}=g_1^{-1}(w)$

3) $g_1^{-1}(w)$ es continua y derivable en $R_{\mathbb{W}}=(0,\infty)$. $(g_1^{-1})'(w)=\dfrac{-1}{2\sqrt{w}}$

PARTE 2: 1) $g_2(z)=z^2$ es continua estrictamente creciente en $R_{\mathbb{Z}_2}=[0,\infty)$

$z\geq 0$ 2) Existe inversa $g_2^{-1}(w)$: $w=z^2 \Rightarrow z=\sqrt{w}=g_2^{-1}(w)$

3) $g_2^{-1}(w)$ es continua y derivable en $R_{\mathbb{W}}=[0,\infty)$. $(g_2^{-1})'(w)=\dfrac{1}{2\sqrt{w}}$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$$f_{\mathbb{W}}(w)=f_{\mathbb{Z}}(z=g_1^{-1}(w))\,|(g_1^{-1})'(w)|+f_{\mathbb{Z}}(z=g_2^{-1}(w))\cdot|(g_2^{-1})'(w)|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w}{2\sigma^2}}\cdot\left|\frac{-1}{2\sqrt{w}}\right|+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w}{2\sigma^2}}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi w}}e^{-\frac{w}{2\sigma^2}},\quad 0\leq w<\infty$$

d) $$\rho_{UV}=\frac{cov(U,V)}{\sigma_U\cdot\sigma_V}=\frac{0}{\sqcup\,\sqcup}=0$$

NOTA: σ_U,σ_V son $\neq 0$, pues U y V no son constantes

$cov(UV)=E(UV)-E(U)E(V)=0-0\cdot 0=0$

$\mathbb{X},\mathbb{Y}$ v.a. indep

$E(UV)=E[(\mathbb{X}\cos\theta-\mathbb{Y}\operatorname{sen}\theta)(\mathbb{X}\operatorname{sen}\theta+\mathbb{Y}\cos\theta)]=E(\mathbb{X}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\mathbb{X}\mathbb{Y}\cos^2\theta-\mathbb{X}\mathbb{Y}\operatorname{sen}^2\theta-\mathbb{Y}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)=$

$=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,E(\mathbb{X}^2)+\cos^2\theta\,\underbrace{E(\mathbb{X})}_{0}E(\mathbb{Y})-\operatorname{sen}^2\theta\,\underbrace{E(\mathbb{X})}_{0}E(\mathbb{Y})-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,E(\mathbb{Y}^2)=0$

$E(\mathbb{X}^2)=E(\mathbb{Y}^2)$, pues $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ siguen la misma distribución

$E(U)=E(\mathbb{X}\cos\theta-\mathbb{Y}\operatorname{sen}\theta)=\cos\theta\,\underbrace{E(\mathbb{X})}_{0}-\operatorname{sen}\theta\,\underbrace{E(\mathbb{Y})}_{0}=0$

$E(V)=E(\mathbb{X}\operatorname{sen}\theta+\mathbb{Y}\cos\theta)=\operatorname{sen}\theta\,\underbrace{E(\mathbb{X})}_{0}+\cos\theta\,\underbrace{E(\mathbb{Y})}_{0}=0$

e) $U=\mathbb{X}\cos\theta-\mathbb{Y}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta\,N(0,\sigma)-\operatorname{sen}\theta\,N(0,\sigma)=N(0,\cos\theta\,\sigma)-N(0,\operatorname{sen}\theta\,\sigma)\overset{\text{v.a. indep}}{=}$

$=N\left(0-0,\sqrt{\cos^2\theta\,\sigma^2+\operatorname{sen}^2\theta\,\sigma^2}\right)=N(0,\sigma)\rightsquigarrow f_U(u)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<u<\infty$

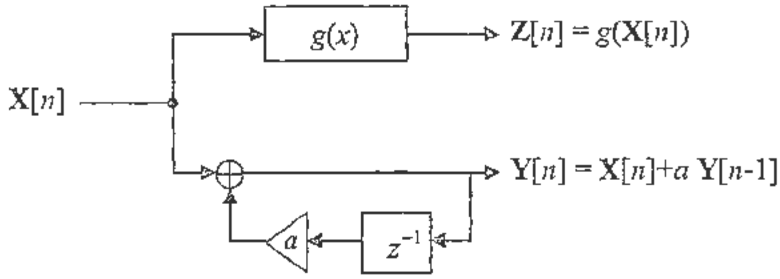
$V=\mathbb{X}\operatorname{sen}\theta+\mathbb{Y}\cos\theta=\operatorname{sen}\theta\,N(0,\sigma)+\cos\theta\,N(0,\sigma)=N(0,\operatorname{sen}\theta\,\sigma)+N(0,\cos\theta\,\sigma)\overset{\text{v.a. indep}}{=}$

$=N\left(0+0,\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\,\sigma^2+\cos^2\theta\,\sigma^2}\right)=N(0,\sigma)\rightsquigarrow f_V(v)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<v<\infty$

2.- En el esquema de la figura, $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo, estacionario en sentido amplio y con fdp de primer orden uniforme en (-3,3). Se tiene, además:

$$z = g(x) = \begin{cases} |x|; |x| \leq 1 \\ 1; |x| > 1 \end{cases}$$

y a una constante que verifica la condición $0<a<1$.



Calcule:

a) La fdp de primer orden de $\mathbf{Z}[n]$. Represéntela gráficamente.

b) Media y varianza de $\mathbf{Z}[n]$.

c) Correlación cruzada de $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$.

d) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$. Dibújela de forma aproximada.

e) Media de $\mathbf{Y}[n]$.

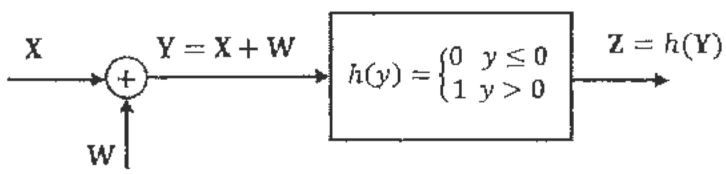
$$\text{NOTA : } \mathbf{X} \text{ v.a. uniforme en } (x_1, x_2): \quad E(\mathbf{X}) = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad \text{Var}(\mathbf{X}) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

30 junio 2016 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 11/7/2016
Revisión examen: 13/7/2016

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- La calificación de este examen final extraordinario será la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Considere el esquema de la figura, donde **X** y **W** son variables aleatorias independientes.



Suponga que **X** es un v.a. de Bernoulli (con p=q=0,5) y **W** una v.a. normal de media −1 y varianza unidad. Calcule:

a) E(**Y**) y Cov(**X**,**Y**) . Indique razonadamente si **X**, **Y** son v.a.'s incorreladas u ortogonales.
b) La probabilidad condicional P(**Z**=1|**X**=0).
c) Las fdp's condicionales $f_Z(z\,|\,\mathbf{X}=0)$, $f_Z(z\,|\,\mathbf{X}=1)$ y la fdp marginal $f_Z(z)$.

Suponga ahora que tanto **X** como **W** tienen distribución uniforme U(0,1). Calcule:

d) La fdp condicional $f_Y(y\,|\,x)$ y dibuje el rango de (**X**,**Y**).
e) La fdp de la v.a. **Y**, $f_Y(y)$ (no olvide el rango).

2.- Sea **X**[n] un ruido blanco de media nula y varianza σ_X^2. Se forma el proceso **Y**[n]=**X**[n]*h[n], siendo $h[n] = a_0\,\delta[n] + a_k\,\delta[n-k]$ y k una constante entera distinta de cero. Calcule:

a) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de **Y**[n] = **X**[n]*h[n].
b) La correlación cruzada de los p.e.'s **Y**[n] y **X**[n].

Se forma ahora el proceso estocástico:

$$\mathbf{Z}[n] = \mathbf{A} + \mathbf{B}\,\mathbf{X}[n-k]$$

Siendo **A** y **B** dos variables aleatorias con igual media $\eta_A = \eta_B$ y varianza $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, e independientes entre sí y con **X**[n]. Calcule:

c) La media y varianza del proceso estocástico **Z**[n].
d) La correlación cruzada y densidad espectral cruzada de los p.e.'s **Z**[n] y **X**[n].
e) La autocorrelación de **Z**[n]. Indique si es conjuntamente estacionario con **X**[n].

$$\mathbf{X}\ \textit{v.a. uniforme}\ \text{en}\ (x_1,x_2):\quad E[\mathbf{X}] = \frac{x_1+x_2}{2};\qquad Var[\mathbf{X}] = \frac{(x_2-x_1)^2}{12}$$

$$\text{GAUSSIANA ó } N(\eta,\sigma): f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right];\quad E(\mathbf{X}) = \eta;\quad Var(\mathbf{X}) = \sigma^2$$

a) r.a $X = Ber(p=0'5)$

r.a $W = N(-1,\sqrt{1}) = N(\underbrace{-1}_{\text{media}},\underbrace{1}_{\text{desv típica}})$

indep

$$\left[E(Y) = E(X+W) = E(X) + E(W) = 0'5 + (-1) = -0'5\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X=0) = 1-p = 0'5 \\ P(X=1) = p = 0'5 \\ E(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot 0'5 + 1\cdot 0'5 = 0,5 \end{array}}$$

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0'5\cdot(-0'5) = 0'25$$

$\neq 0 \rightarrow X, Y$ NO SON INCORRELADAS

$$\boxed{\begin{array}{l} E(XY) = E(X(X+W)) = E(X^2) + E(XW) \overset{X,W \text{ ind}}{=} \\ = E(X^2) + E(X)E(W) = 0'5 + 0'5(-1) = 0 \\ E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 0\cdot 0'5 + 1^2\cdot 0'5 = 0,5 \end{array}}$$

X, Y son ortogonales

b) $$\left[P(Z=1/X=0) = P(W>0) = P(N(-1,1)>0) \underset{\text{tipificar}}{=} P\left(N(0,1) > \frac{0-(-1)}{1}\right) = P(N(0,1)>1)\right.$$

$$= P(N(0,1)>1) = 1 - P(N(0,1)<1) \approx 1 - G(1) = 1 - 0'8413 = \left.0'1587\right]$$

xk la tabla es hacia la izq

c)

si $X=0$:
$$\left\{\begin{array}{l} P(Z=0/X=0) = 1-0'1587 = 0'8413 \\ P(Z=1/X=0) = 0'1587 \end{array}\right.$$

$$\left[f_Z(z/X=0) = \left\{\begin{array}{l} P(Z=0/X=0) = 0'8413 \\ P(Z=1/X=0) = 0'1587 \end{array}\right\} = \left(0'8413\,\delta(z) + 0'1587\,\delta(z-1)\right)\right]$$

si $X=1$: $Y = 1+W = 1+N(-1,1) = N(1-1,\sqrt{0+1^2}) = N(0,\sqrt{1}) = N(0,1)$

$$\left\{\begin{array}{l} P(Z=0/X=1) = P(\underbrace{N(0,1)}_{Y} \leq 0) = 0'5 \\ P(Z=1/X=1) = P(N(0,1)>0) = 1-0'5 = 0'5 \end{array}\right.$$

$$\left[f_Z(z/X=1) = \left\{\begin{array}{l} P(Z=0/X=1) = 0'5 \\ P(Z=1/X=1) = 0'5 \end{array}\right\} = 0'5\,\delta(z) + 0'5\,\delta(z-1)\right]$$

$$f_Z(z) = \left(\begin{array}{l} P(X=0)\cdot f_Z(z/X=0) \\ +P(X=1)\cdot f_Z(z/X=1) \end{array}\right) = 0'5\cdot\left(0'8413\,\delta(z) + 0'1587\,\delta(z-1)\right) + 0'5\left(0'5\,\delta(z) + 0'5\,\delta(z-1)\right) = 0'67\,\delta(z) + 0'33\,\delta(z-1)$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

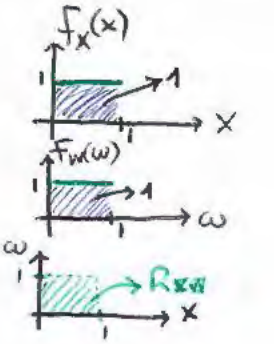
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

d) V.a $X = U(0,1)$, $f_X(x) = 1$, $0<x<1$

V.a $W = U(0,1)$, $f_W(\omega) = 1$, $0<\omega<1$

$f_{XW}(x,\omega) = f_X(x) \cdot f_W(\omega) = 1 \cdot 1 = 1$

indep



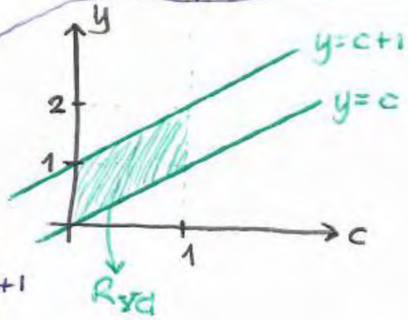
Transformación $\left\{ \begin{array}{l} Y = X + W \\ C = X \end{array} \right\}$ ⟶ v.a ficticia

$$J = \begin{vmatrix} \partial y/\partial x & \partial y/\partial \omega \\ \partial c/\partial x & \partial c/\partial \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \longrightarrow$$ Podemos aplicar la form de la transf.

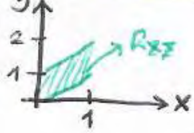
$$f_{YC}(y,c) = \frac{f_{XW}(x,\omega)}{|J|} = \frac{1}{|-1|} = 1 \ , \quad \text{si } (y,c) \in R_{YC}$$

$$\begin{cases} y = x+\omega \\ c = x \end{cases} \longrightarrow x = c \ , \quad \omega = y-c$$

$$R_{YC} : \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\omega<1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ 0<y-c<1 \end{cases} \begin{array}{l} \to y>c \\ \to y<c+1 \end{array}$$



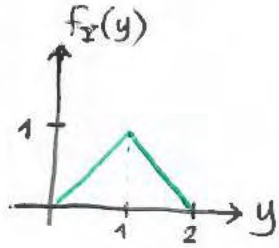
$$\left[f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1} = 1 \ , \quad \text{si } (x,y) \in R_{XY} \right]$$



e)

$$\left[f_Y(y) = \int_{c=-\infty}^{c=\infty} f_{YC}(y,c)\, dc = \right.$$

$$= \begin{cases} \underline{0<y<1} : \displaystyle\int_{c=0}^{c=y} 1\, dc = \boxed{y} \\ \underline{1<y<2} : \displaystyle\int_{c=y-1}^{c=1} 1\, dc = \boxed{2-y} \end{cases}$$



8 enero 2016 **Señales Aleatorias** **Publicación notas: 22/1/2016**
Revisión examen: 27/1/2016

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio; en caso de hacerlo, ello supondrá la renuncia a la nota que tuvieran en el primer parcial.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- La va bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una fdp conjunta dada por la expresión:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} ke^{-x} & 0<y<x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

siendo k una constante positiva. Calcule:

a) La constante k y dibuje el rango o recorrido Ω_{XY}.
b) Las fdp marginales de **X** y **Y** (indique sus rangos). ¿Son **X** y **Y** independientes?
c) La media condicionada $E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x)$.

Se forman ahora las va's $\mathbf{Z}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}$, $\mathbf{W}=\mathbf{Y}$. Calcule:

d) La fdp conjunta de **Z** y **W** y dibuje su rango.
e) $P(\mathbf{W}>1)$.

2.- En el esquema de la figura, $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden uniforme en (0,1). Se tiene además que $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$.

$$\mathbf{X}[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \mathbf{Y}[n]=\mathbf{X}[n]*h[n]$$

Calcule:

a) Media y varianza de $\mathbf{Y}[n]$.
b) Correlación cruzada de los pe's $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.
c) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$.
d) La fdp de primer orden de $\mathbf{Y}[n]$. Dibújela de forma aproximada.
e) La fdp de segundo orden de $\mathbf{X}[n]$ $f_X(x_1,x_2;n_1,n_2)$ para $n_1\neq n_2$.

$$X\ v.a.\ uniforme\ \text{en } (x_1,x_2):\quad E[X]=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad Var[X]=\frac{(x_2-x_1)^2}{12}$$

a) $Y[n] = X[n] * (\delta[n] + \delta[n-1]) = X[n] + X[n-1]$

$$E(X[n]) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$E(X[n-1]) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E(Y[n]) = E(X[n] + X[n-1]) = E(X[n]) + E(X[n-1]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$$

$$V(Y[n]) = V(X[n] + X[n-1]) \overset{\text{ruido blanco}}{=} V(X[n]) + V(X[n-1]) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$V(X[n]) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$
$$V(X[n-1]) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

b) $R_{XY}[n, n+m] = E(X[n]\,Y[n+m]) = E(X[n](X[n+m] + X[n+m-1])) =$

$= E(X[n]X[n+m]) + E(X[n]X[n+m-1]) = R_X[m] + R_X[m-1] =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\delta[m] + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\delta[m-1]$

$R_X[n, n+m] = E(X[n]X[n+m]) =$ • si $m \neq 0$ (ruido blanco) : $E(X[n])E(X[n+m]) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

• si $m=0$: $E(X^2[n]) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\begin{array}{l} V(X[n]) = E(X^2[n]) - (E(X[n]))^2 \\ \frac{1}{12} \quad = \qquad\qquad\quad - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}}$$

$\Rightarrow R_X[m] = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\delta[m] = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\delta[m]$

c) $S_Y(\Omega) = S_X(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2 = \left(\frac{\pi}{2}\delta(\Omega) + \frac{1}{12}\right)\cdot 2(1+\cos\Omega) = \frac{\pi}{2}\cdot\delta(\Omega)\cdot 2(1+\cos 0) + \frac{1}{6}(1+\cos\Omega) =$

$= 2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{6}(1+\cos\Omega)$

periodo 2π

$-\pi < \Omega < \pi$

$S_X(\Omega) = TF\{R_X[m]\} = TF\{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\delta[m]\} = \frac{1}{4}2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{12}$

$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n] + \delta[n-1]\} = 1 + e^{-j\Omega} =$

$= 1 + \cos(-\Omega) + j\,\text{sen}(-\Omega) = 1 + \cos\Omega - j\,\text{sen}\,\Omega$

$|H(\Omega)|^2 = (1+\cos\Omega)^2 + (-\text{sen}\,\Omega)^2 = 1 + 2\cos\Omega + \cos^2\Omega + \text{sen}^2\Omega = 2(1+\cos\Omega)$

d)

TRANSFORMACION : $\begin{cases} Y[n] = X[n] + X[n-1] \\ X[n] = X \longrightarrow \text{ficticio} \end{cases}$

TRANSFORMACION DE PE BIDIMENSIONAL CONTINUO $(X[n], X[n-1])$ en PE BIDIMENSIONAL CONTINUO $(Y[n], X[n])$

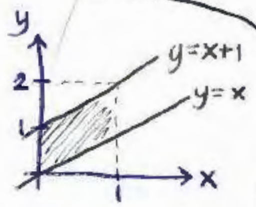
$$J = \begin{vmatrix} \partial Y[n]/\partial X[n] & \partial Y[n]/\partial X[n-1] \\ \partial X[n]/\partial X[n] & \partial X[n]/\partial X[n-1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Podemos aplicar la formula}$$

$$f_{Y[n]X[n]}(y,x,n) = \frac{f_{X[n]X[n-1]}(x,n)}{|J|} = \frac{1}{|-1|} = 1, \quad (x,y) \in R_{Y[n]X[n]}$$

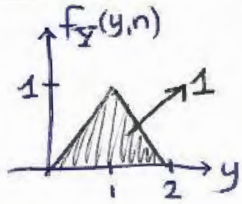
$$\boxed{f_{X[n]X[n-1]}(x,n) = f_{X[n]}(x,n) \cdot f_{X[n-1]}(x,n) = 1 \cdot 1 = 1, \quad \begin{matrix} 0 < X[n] < 1 \\ 0 < X[n-1] < 1 \end{matrix}}$$

$$R_{Y[n]X[n]}: \begin{cases} 0 < X[n] < 1 \\ 0 < X[n-1] < 1 \longrightarrow 0 < Y[n] - X[n] < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow Y[n] > X[n] \\ \searrow Y[n] < X[n] + 1 \end{matrix}$$

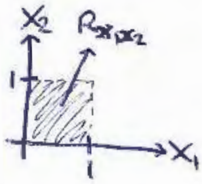
$$X[n-1] = Y[n] - X[n]$$



$$f_{Y[n]}(y,n) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{Y[n]X[n]}(x,y,n)\,dx = \begin{cases} \boxed{\int_{x=0}^{x=y} 1 \cdot dx = y, \quad 0<y<1} \\ \boxed{\int_{x=y-1}^{x=1} 1 \cdot dx = 2-y, \quad 1<y<2} \end{cases}$$



e) $$\boxed{f_{X_1X_2}(x_1,x_2,n_1,n_2) \overset{\substack{x[n] \text{ ruido blanco } n_1 \neq n_2 \\ \downarrow}}{=} f_{X_1}(x_1,n_1) \cdot f_{X_2}(x_2,n_2) = 1 \cdot 1 = 1, \quad \begin{matrix} 0 < x_1 < 1 \\ 0 < x_2 < 1 \end{matrix}}$$



La v.a. bidimensional (X, Y) tiene una fdp conjunta dada por la expresión:

$$f_{XY}(x,y) = k \cdot e^{-x}, \quad 0<y<x, \quad \text{siendo } k \text{ una constante positiva. Calcule:}$$

a) La constante k. Dibuje el rango o recorrido Ω_{XY}.

b) Las fdp marginales de X e Y (indique sus rangos). ¿Son X e Y independientes?

c) La media condicionada $E(Y/X=x)$

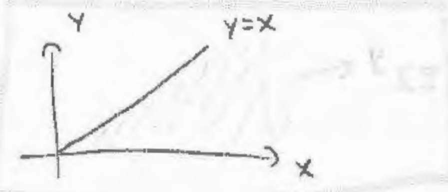
Se forman ahora las v.a. $Z = X - Y$, $W = Y$. Calcule:

d) La fdp conjunta de Z y W y dibuje su rango

e) $P(W>1)$

SALT
8 enero 2016
Ej 1

a)



$f_{XY}(x,y)$ es función de densidad si $\begin{cases} f_{XY}(x,y) \geq 0 \\ \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = 1 \end{cases}$

integral por partes

OPCIÓN 1 $\Longrightarrow \int_{x=0}^{x=\infty} \left[\int_{y=0}^{y=x} k \cdot e^{-x}\,dy \right] dx = 1 \rightarrow \int_{x=0}^{x=\infty} k \cdot e^{-x} [y]_{y=0}^{y=x} dx = 1 \rightarrow k \int_{x=0}^{x=\infty} x e^{-x}\,dx = 1 \ldots$

OPCIÓN 2 $\Longrightarrow \int_{y=0}^{y=\infty} \left[\int_{x=y}^{x=\infty} k \cdot e^{-x}\,dx \right] dy = 1 \rightarrow \int_{y=0}^{y=\infty} -k \left[e^{-x}\right]_{x=y}^{x=\infty} dy = 1 \rightarrow k \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-y}\,dy = 1 \rightarrow$

$\rightarrow -k \left[e^{-y}\right]_{y=0}^{y=\infty} = 1 \rightarrow -k(0-1) = 1 \rightarrow \boxed{k=1}$

b) $\boxed{f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=x} e^{-x}\,dy = e^{-x}[y]_{y=0}^{y=x} = x \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0}$

$\boxed{f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=y}^{x=\infty} e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_{x=y}^{x=\infty} = -(0-e^{-y}) = e^{-y}, \quad y \geq 0}$

¡comprobar $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$!

$f_{XY}(x,y) = e^{-x} \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = x \cdot e^{-x} e^{-y} \Rightarrow$ $\boxed{X \text{ e } Y \text{ NO son independientes}}$

c) $\boxed{E(Y/X=x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y \cdot f_Y(y/x)\,dy = \int_{y=0}^{y=x} y \cdot \frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{2x} \cdot x^2 = \frac{1}{2}x, \quad x \geq 0}$

$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}}{x \cdot e^{-x}} = \frac{1}{x}, \quad 0<y<x$

d) <u>Transformación de v.a. bidimensional continua (X,Y) en v.a. bidimensional continua (Z,W)</u>

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \partial z/\partial x & \partial z/\partial y \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ $\Rightarrow$ Podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=z+w \\ y=w}} = \left.\frac{e^{-x}}{|1|}\right|_{\substack{x=z+w \\ y=w}} = e^{-(z+w)} \;,\; \begin{matrix} z \geq 0 \\ w \geq 0 \end{matrix}}$$

$$\begin{Bmatrix} z = x-y \\ w = y \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = z+w \\ y = w \end{Bmatrix}$$

R_{ZW} : $0<y<x \rightarrow 0<w<z+w \rightarrow \begin{matrix} w>0 \\ z>0 \end{matrix}$

e) $\boxed{P(W>1)} = P(Y>1) = \int_{y=1}^{y=\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{y=1}^{y=\infty} e^{-y}\,dy = -\left[e^{-y}\right]_1^{\infty} = -(0-e^{-1}) = e^{-1} =$

$= \boxed{0'368}$

23 noviembre 2015 **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Sean X e Y dos v.a.'s uniformes en el intervalo $(-1, 1)$ e independientes. Se forman las v.a.'s $Z = g(X)$ y $W = u(Y)$, siendo:

$$g(x) = e^{-|x|}$$

$$u(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Calcule:

a) La fdp de la v.a. Z. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz = 1$.

b) $P(Z > 1/2)$.

c) Media y varianza de Z.

d) $E(ZW)$.

e) $P(ZW > 1/2)$.

23 noviembre 2015 . **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Sean X e Y dos v.a.'s uniformes en el intervalo $(-1,1)$ e independientes. Se forman las v.a.'s $Z = g(X)$ y $W = u(Y)$, siendo:

$$g(x) = e^{-|x|}$$

$$u(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Calcule:

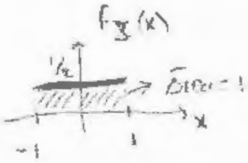
a) La fdp de la v.a. Z. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1$.

b) $P(Z > 1/2)$.

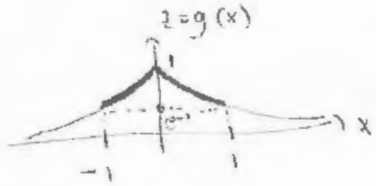
c) Media y varianza de Z.

d) $E(ZW)$.

e) $P(ZW > 1/2)$.



a) V.a. $X = U(-1,1)$; $f_X(x) = \frac{1}{2}$, $-1 < x < 1$



Transformación. $z = g(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-(-x)} = e^{x} & , x < 0 \\ e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$

Transformación de v.a. continua (X) en v.a. continua (Z)

$g(x)$ tiene parte creciente y parte decreciente en $R_X = (-1,1)$

PARTE 1 : $-1 < x < 0$

1) $g_1(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (-1,0)$

2) Existe inversa $g_1^{-1}(z)$: $z = e^{x} \rightarrow x = \ln z = g_1^{-1}(z)$

3) $g_1^{-1}(z)$ es continua y derivable en el $R_{Z_1} = (e^{-1}, 1)$

$(g_1^{-1})'(z) = \frac{1}{z}$

PARTE 2 : $0 \leq x < 1$

1) $g_2(x)$ es continua estrictamente decreciente en $R_X = [0,1)$

2) Existe inversa $g_2^{-1}(z)$: $z = e^{-x} \rightarrow x = -\ln z = g_2^{-1}(z)$

3) $g_2^{-1}(z)$ es continua y derivable en el $R_Z = (e^{-1}, 1)$

$(g_2^{-1})'(z) = \frac{-1}{z}$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$f_Z(z) = f_X(x = g_1^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| + f_X(x = g_2^{-1}(z)) \cdot |(g_2^{-1})'(z)| =$$

$$= \frac{1}{2} \left|\frac{1}{z}\right| + \frac{1}{2} \left|\frac{-1}{z}\right| = \frac{1}{z} \; , \; e^{-1} < z < 1$$

29 junio 2015 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 8/7/2015
Revisión examen: 10/7/2015

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- La calificación del examen final es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea un punto $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ del plano, cuya abscisa $\mathbf{X}$ se escoge aleatoriamente con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y, a continuación, la ordenada $\mathbf{Y}$ se escoge también aleatoriamente, pero en el intervalo $(0,\sqrt{\mathbf{X}})$, de modo que se tiene la siguiente fdp condicionada:

$$f_Y(y\,|\,\mathbf{X}=x)=\begin{cases}1/\sqrt{x} & 0<y<\sqrt{x}\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Se pide:

a) Dibuje el rango de la va bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ y calcule la fdp marginal de la v.a. $\mathbf{Y}$. Represéntela gráficamente y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy=1$.

b) La covarianza de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. ¿Son v.a.'s incorreladas?

c) La media condicionada $E(\mathbf{X}|\mathbf{Y}=y)$.

Se define la v.a. $\mathbf{Z}=\sqrt{\mathbf{X}}$. Calcule:

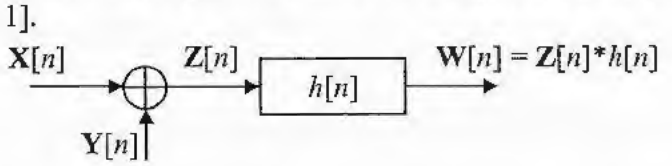
d) La fdp de $\mathbf{Z}$. Represéntela gráficamente y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz=1$.

e) $E(\mathbf{YZ})$.

2.- En el esquema de la figura, se tiene que $\mathbf{X}[n]$ es un p.e. gaussiano, estacionario en sentido amplio, de media nula y autocorrelación

$$R_X[m]=\begin{cases}2 & m=0\\ 1 & m=1 \text{ ó } m=-1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

$\mathbf{Y}[n]$ es un ruido blanco estricto, independiente de $\mathbf{X}[n]$, con fdp de primer orden $N(0,1)$, y $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$.



Calcule:

a) Autocorrelación y densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]=\mathbf{X}[n]+\mathbf{Y}[n]$.

b) Fdp de primer orden de $\mathbf{Z}[n]$.

c) Covarianza cruzada de $\mathbf{Z}[n]$ y $\mathbf{W}[n]$.

d) Correlación cruzada de $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{W}[n]$.

e) Densidad espectral de potencia de $\mathbf{W}[n]$.

a)

$$\boxed{R_Z[n,n+m] = E(Z[n]\,Z[n+m]) = E((X[n]+Y[n])(X[n+m]+Y[n+m])) =}$$

$$= E(X[n]X[n+m]) + E(X[n]Y[n+m]) + E(X[n+m]Y[n]) + E(Y[n]Y[n+m]) =$$

X[n]
Y[n]
indep

$$= R_X[m] + \underbrace{\cancel{E(X[n])}}_{0} E(Y[n+m]) + \underbrace{\cancel{E(X[n+m])}}_{0} E(Y[n]) + R_Y[m]$$

$$= \delta[m+1] + 2\,\delta[m] + \delta[m-1] + \delta[m] = \boxed{\delta[m+1] + 3\delta[m] + \delta[m-1]}$$

Y[n] ruido blanco de media nula : $R_Y[m] = \sigma_Y^2 \cdot \delta[m] = 1^2\delta[m] = \delta[m]$

$$\boxed{S_Z(\Omega) = TF\{R_Z[m]\} = TF\{\ \} = e^{+j\Omega} + 3 + e^{-j\Omega} = 3 + 2\cos\Omega} \quad -\pi < \Omega < \pi$$

periodo 2π

$$\cos x = \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2}$$

b)

$$Z[n] = X[n] + Y[n] = N(0,\sqrt{2}) + N(0,1) \overset{\text{ind}}{=} N\left(0+0, \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}\right) = N(0,\sqrt{3})$$

$$V(X[n]) = E(X^2[n]) - [E(X[n])]^2$$
$$= E(X[n]X[n]) - 0^2 =$$
$$= R_X[0] = 2$$

$$\boxed{f_Z(z,n) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{(\sqrt{3})^2}}, \quad -\infty < z < \infty}$$

c)

$$Cov_{ZW}[n,n+m] = E(Z[n]\,W[n+m]) - \underbrace{\cancel{E(Z[n])}}_{0} E(W[n+m]) =$$

- $E(Z[n]) = E(X[n] + Y[n]) = E(X[n]) + E(Y[n]) = 0 + 0 = 0$
- $W[n] = Z[n] * h[n] = Z[n] * (\delta[n] + \delta[n-1]) = Z[n] + Z[n-1]$

$$= E(Z[n] \cdot (Z[n+m] + Z[n+m-1])) =$$

$$= E(Z[n]Z[n+m]) + E(Z[n]Z[n+m-1]) = R_Z[m] + R_Z[m-1] =$$

$$= \underbrace{\delta[m+1] + 3\delta[m] + \delta[m-1]} + \underbrace{\delta[m] + 3\delta[m-1] + \delta[m-2]} =$$

$$= \delta[m+1] + 4\delta[m] + 4\delta[m-1] + \delta[m-2]$$

d) $R_{XW}[n,n+m] = E(X[n]\,W[n+m]) = E(X[n](Z[n+m] + Z[n+m-1])) =$

$= E(X[n](X[n+m] + Y[n+m] + X[n+m-1] + Y[n+m-1])) =$

$= E(\underbrace{X[n]\,X[n+m]}) + E(\underbrace{X[n]\,Y[n+m]}) + E(\underbrace{X[n]\,Y[n+m-1]}) + E(\underbrace{X[n]\,Y[n+m-1]})$

$X[n]$
$Y[n]$
ind

$= R_X[m] + \underbrace{E(\cancel{X[n]})}_{0} E(Y[n+m]) + R_X[m-1] + \underbrace{E(\cancel{X[n]})}_{0} E(Y[n+m-1])$

$= \delta[m+1] + 2\delta[m] + \delta[m-1] + \delta[m] + 2\delta[m-1] + \delta[m-2] =$

$= \delta[m+1] + 3\delta[m] + 3\delta[m-1] + \delta[m-2]$

e) $\boxed{S_W(\Omega) = S_Z(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2 = (3+2\cos\Omega)\,2(1+\cos\Omega)}$ periodo 2π $-\pi<\Omega<\pi$

$\uparrow$

$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n] + \delta[n-1]\} = 1 + e^{-j\Omega} =$

$= 1 + \cos(-\Omega) + j\,\mathrm{sen}(-\Omega) = 1 + \cos\Omega - j\,\mathrm{sen}\,\Omega$

$|H(\Omega)|^2 = (1+\cos(+\Omega))^2 + (-\mathrm{sen}\,\Omega)^2 = 1 + 2\cos\Omega + \cos^2\Omega + \mathrm{sen}^2\Omega$

$= 2(1+\cos\Omega)$

Sea un punto $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ del plano, cuya abcisa $\mathbb{X}$ se escoge aleatoriamente con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y, a continuación, la ordenada $\mathbb{Y}$ se escoge también aleatoriamente, pero en el intervalo $(0,\sqrt{\mathbb{X}})$, de modo que se tiene la siguiente fdp condicionada:

$$f_{\mathbb{Y}}(y/\mathbb{X}=x) = 1/\sqrt{x} \quad , 0<y<\sqrt{x}$$

SAIT 29 junio 15 Ej 1

Se pide:

a) Dibuje el rango de la v.a bidimensional $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ y calcule la fdp marginal de la v.a. $\mathbb{Y}$. Represéntela gráficamente y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{Y}}(y)dy=1$

b) la covarianza de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. ¿Son v.a.'s incorreladas?

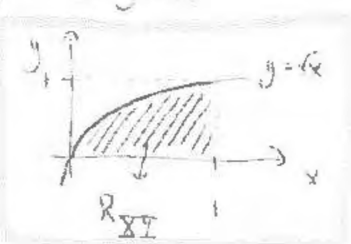
c) la media condicionada $E(\mathbb{X}/\mathbb{Y}=y)$

Se define la v.a. $\mathbb{Z}=\sqrt{\mathbb{X}}$. Calcule:

d) la fdp de $\mathbb{Z}$. Represéntela gráficamente y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{Z}}(z)dz=1$

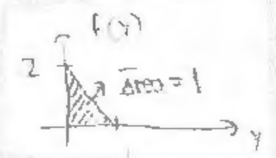
e) $E(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$

a) $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} \rightarrow f(x,y) = f(x)\cdot f(y/x) = 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $0\le x\le 1$, $0<y<\sqrt{x}$



$$f_{\mathbb{Y}}(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)dx = \int_{x=y^2}^{x=1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{x=y^2}^{x=1} x^{-1/2}dx = \left[\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_{x=y^2}^{x=1} =$$

$$= 2\left[\sqrt{x}\right]_{x=y^2}^{x=1} = 2(1-y) \quad , 0<y<1$$



comprobación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{Y}}(y)dy = \int_{y=0}^{y=1} 2(1-y)dy = 2\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1 \checkmark$$

b) $C_{\mathbb{X}\mathbb{Y}} = E(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - E(\mathbb{X})E(\mathbb{Y}) = 1/5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{30} \neq 0 \Rightarrow$ no son incorreladas

$$E(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} xyf(x,y)dydx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} xy\frac{1}{\sqrt{x}}dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1} x^{1/2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} x^{3/2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 1/5$$

$$E(\mathbb{X}) = 1/2 \quad , \quad E(\mathbb{Y}) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} yf(y)dy = \int_{y=0}^{y=1} y2(1-y)dy = 2\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1/3$$

c) $E(X/Y=y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x\, f_X(x/y)\,dx = \int_{x=y^2}^{x=1} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}\,dx = \frac{1}{2(1-y)}\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=y^2}^{x=1} = \frac{1-y^3}{3(1-y)}, \quad 0<y<1$

$f_X(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2(1-y)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}, \quad 0<x<1, \quad 0<y<\sqrt{x}$

d) Transformación $Z = \sqrt{X} = g(x)$

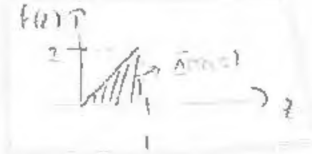
Transformación de una continua (X) en una continua (Z)

1) $g(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (0,1)$
2) Existe inversa $g^{-1}(z)$: $z=\sqrt{x} \to x = z^2 = g^{-1}(z)$
3) $g^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = (0,1)$

$(g^{-1})'(z) = 2z$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$f_Z(z) = f_X(x=g^{-1}(z))\cdot|(g^{-1})'(z)| = 1\cdot 2z = 2z, \quad 0<z<1$



Comprobación: $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int_{z=0}^{z=1} 2z\,dz = 2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} = 1$ ✓

e) $E(YZ) = E(Y\cdot g(X)) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} y\, g(x) f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_{x=0}^{x=1}\frac{x}{2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

9 enero 2015 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 23/1/2015
Revisión examen: 29/1/2015

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio; en caso de hacerlo, ello supondrá la renuncia a la nota que tuvieran en el primer parcial.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sean **X** e **Y** dos va's con fdpc:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c & x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcule:

a) La constante c y las fdps marginales. Dibuje el rango de la va bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ y decida justificadamente si **X** e **Y** son independientes.

b) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Son incorreladas?

c) La media de la variable aleatoria **X** cuando **Y** toma el valor 0,5.

Si **Z**=**X**+**Y**, calcule:

d) La covarianza de **X** y **Z**.

e) La función de distribución de **Z**. Obtenga también a partir de ella la fdp de **Z**.

2.- Sean $\mathbf{X}_1[n]$, $\mathbf{X}_2[n]$,..., $\mathbf{X}_M[n]$ M secuencias aleatorias de ruido blanco estricto, independientes entre sí, y con función de probabilidad de primer orden Bernoulli (procesos de Bernoulli independientes) con $P\{\mathbf{X}_k[n]=0\} = P\{\mathbf{X}_k[n]=1\} = 1/2$ (k=1,2,...,M).

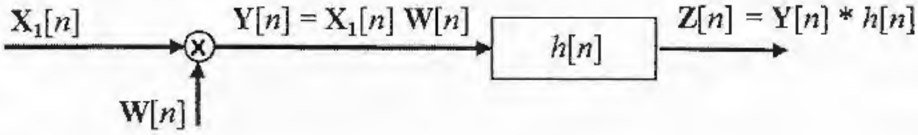
Se define el proceso discreto en el tiempo:

$$\mathbf{X}[n]=\sum_{k=1}^{M}\mathbf{X}_k[n]$$

a) Obtenga la fdp de 1^er^ orden del proceso $\mathbf{X}[n]$ y la $P\{\mathbf{X}[n]>1\}$ en función de M. ¿Es $\mathbf{X}[n]$ estacionario de primer orden?

b) Suponga M=2 y calcule la media y autocorrelación de $\mathbf{X}[n]$. ¿Es $\mathbf{X}[n]$ estacionario en sentido amplio?

Considere ahora el esquema de la figura, donde $\mathbf{X}_1[n]$ es una de las secuencias de ruido blanco estricto de Bernoulli anteriores, $\mathbf{W}[n]$ es un ruido blanco estricto con fdp de 1^er^ orden normal estándar e independiente de $\mathbf{X}_1[n]$, y $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$.



Calcule:

c) La media condicionada $E\{\mathbf{Y}[n]|\mathbf{W}[n]=w\}$ y la $P\{\mathbf{Y}[n]>1\}$.

d) La correlación cruzada y el espectro cruzado de $\mathbf{W}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.

e) La autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$.

②

$$X[n] = \sum_{i=1}^{M} X_i[n] = X_1[n] + X_2[n] + \dots + X_M[n]$$

$Ber(p=\frac{1}{2}) = B(n=1, p=\frac{1}{2})$

a) $\left[X[n] = Ber(p=\frac{1}{2}) + \dots + Ber(p=\frac{1}{2}) = \underbrace{B(1,\frac{1}{2}) + \dots + B(1,\frac{1}{2})}_{M \text{ veces}} \overset{X_i[n] \text{ ind}}{=} B(M, \frac{1}{2})\right]$

$$\left[P(X[n]=k) = \binom{M}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{M-k}, \quad k = 0,1,2,\dots,M\right]$$

$X[n]$ es estacionario de orden 1 si $f_X(x,n)$ ó $P(X[n]=k)$ NO depende de n ✓ $\Rightarrow$ $X[n]$ es estacionario de orden 1.

$$\left[P(X[n]>1) = P(X[n]=2) + P(X[n]=3) + \dots + P(X[n]=M) =\right.$$
$$= 1 - P(X[n]=0) - P(X[n]=1) = 1 - \underbrace{\binom{M}{0}}_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^M - \underbrace{\binom{M}{1}}_{M}\left(\frac{1}{2}\right)^M = \left.1-(M+1)\left(\frac{1}{2}\right)^M\right]$$

b) $X[n] = X_1[n] + X_2[n]$

$$\left[E(X[n]) = E(X_1[n] + X_2[n]) = E(X_1[n]) + E(X_2[n]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right]$$

$$\left[R_X[n,n+m]\right. = E(X[n]X[n+m]) = E((X_1[n]+X_2[n])(X_1[n+m]+X_2[n+m])) =$$
$$= E(X_1[n]X_1[n+m]) + E(X_1[n]X_2[n+m]) + E(X_2[n]X_1[n+m]) + E(X_2[n]X_2[n+m]) \overset{ind}{=}$$
$$= \underline{R_{X_1}[m]} + E(X_1[n])E(X_2[n+m]) + E(X_2[n])E(X_1[n+m]) + \underline{R_{X_2}[m]}$$
$$= \underline{2R_{X_1}[m]} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\delta[m]\right) + \frac{1}{2} = \left.1 + \frac{1}{2}\delta[m]\right]$$

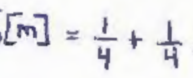
$\left[R_{X_1}[m] = E(X_1[n]X_1[n+m])\right.$

- si $m \neq 0$: $E(X_1[n])E(X_1[n+m]) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (ind)
- si $m=0$: $E(X_1^2[n]) = \sum x_i^2 p_i = 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\left.= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\delta[m] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta[m]\right]$

c) $\left[E(Y[n]/\underbrace{W[n]}_{PE}=\underbrace{\omega}_{n}) = E(X_1[n]W[n]/W[n]=\omega)\right.$
$= E(X_1[n]\omega) = \omega E(X_1[n]) = \left.\omega\cdot\frac{1}{2}\right]$

$$\left[P(Y[n]>1)\right. = P(X_1[n]=0)\cdot P(Y[n]>1/X_1[n]=0) + P(X_1[n]=1)\cdot P(Y[n]>1/X_1[n]=1) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{P(Y[n]=0>1)}_{0} + \frac{1}{2}P(N(0,1)>1) =$$

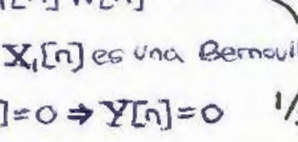


$$= 0 + \frac{1}{2}(1-G(1)) = \frac{1}{2}(1-0'8413)$$
$$\left.= 0'079\right]$$

$Y[n] = X_1[n]W[n]$

Como $X_1[n]$ es una Bernouilli:

- $X_1[n]=0 \Rightarrow Y[n]=0$ $\quad 1/2$
- $X_1[n]=1 \Rightarrow Y[n]=W[n]=N(0,1)$ $\quad 1/2$



SALT
9 enero 2015
Ej 1

Sean dos v.a. X e Y, con fdpc: $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c, & x\geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

Calcule:

a) La constante c y las fdps marginales. Dibuje el rango de la v.a. bidimensional (X,Y) y decida justificadamente si X e Y son independientes

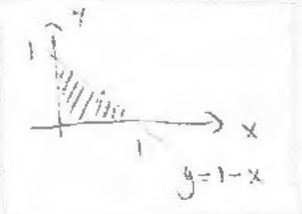
b) La covarianza de X e Y. ¿Son incorreladas?

c) La media de la v.a. X cuando Y toma el valor 0'5

Si $Z_1 = X + Y$, calcule:

d) La covarianza de X y Z_1

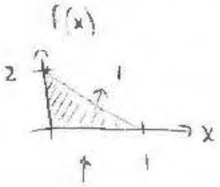
e) La función de distribución de Z_1. Obtenga también, a partir de ella, la fdp de Z_1

a) 

Como $f_{XY}(x,y) = cte \Rightarrow (X,Y)$ v.a. bidimensional uniforme $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Área}_{R_{XY}} \cdot cte = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\text{Área}_{R_{XY}}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = 2, \quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1}$$



X e Y NO son independientes, pues el R_{XY} NO es un rectángulo

Fdps marginales: $\boxed{f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{y=0}^{y=1-x} 2dy = 2[y]_0^{1-x} = 2(1-x), \quad 0\leq x\leq 1}$

$\boxed{f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{x=0}^{x=1-y} 2dx = 2[x]_0^{1-y} = 2(1-y), \quad 0\leq y\leq 1}$

X e Y intercambiables en el ejercicio

$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow \boxed{X \text{ e } Y \text{ no son independientes}}$

b) $\boxed{C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -1/36 \neq 0} \Rightarrow$ NO son incorreladas

$$E(XY) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy f(x,y)dydx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} xy\, 2\, dydx = 2\int_{x=0}^{x=1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_{x=0}^{x=1} x(1-x)^2 dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x(1-2x+x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 1/12$$

$$E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} xf(x)dx = \int_{x=0}^{x=1} x\,2(1-x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}, \quad E(Y) = \frac{1}{3} \text{ (igual que } X)$$

c) $E(X/Y=0'5) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f_X(x/y=0'5)\,dx = \int_{x=0}^{x=0'5} x \cdot 2\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0'5} = 0'25$

$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}$, $\begin{matrix} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\le 1 \end{matrix}$ $\Rightarrow f(x/y=0'5) = \frac{1}{1-0'5} = 2$, $0\le x\le 0'5$

d) $C_{XZ} = E(XZ) - E(X)E(Z) = E(X(X+Y)) - E(X)E(X+Y) = E(X^2+XY) - E(X)E(X+Y) =$

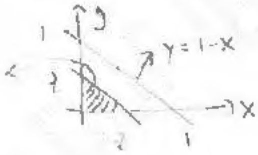
$= E(X^2) + E(XY) - E(X)\cdot(E(X)+E(Y)) = E(X^2) + \underline{E(XY)} - [E(X)]^2 \underline{- E(X)E(Y)} =$

$= 1/6 \underline{-1/36} - (1/3)^2 = 1/18 \neq 0$ X y Z no son incorrelados ¡estar espabila@!

$E(X^2) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot 2(1-x)\,dx = 2\int_{x=0}^{1}(x^2-x^3)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 1/6$

$\underline{E(XY) - E(X)E(Y)} = C_{XY} = -1/36$ (apartado b)), $E(X) = E(Y) = 1/3$ (apartado b))

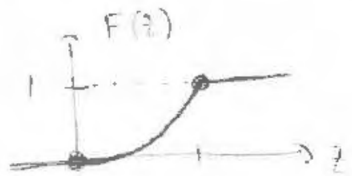
e) $F_Z(z) = P(Z\le z) = P(X+Y\le z) = \int_{x=0}^{x=z}\int_{y=0}^{y=z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=z}\left[\int_{y=0}^{y=z-x} 2\,dy\right]dx =$



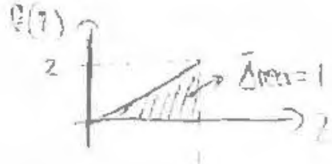
$= 2\int_{x=0}^{x=z} [y]_0^{z-x}\,dx = 2\int_{x=0}^{x=z}(z-x)\,dx = 2\left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=z} =$

$= 2\left(z^2 - \frac{z^2}{2}\right) = z^2$, $0\le z\le 1$

$\Rightarrow \boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ z^2 & , 0\le z<1 \\ 1 & , z\ge 1 \end{cases}}$



$\boxed{f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(z^2) = 2z, \quad 0\le z<1}$



NOTA: Tb es posible hacer una transformación de v.a. bidim. cont → v.a. bidim. cont. utilizando una v.a. ficticia. El proceso es más largo, no obstante

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$X_1[n], W[n]$ ind

d) $R_{WY}[n,n+m] = E(W[n]Y[n+m]) = E(W[n]X_1[n+m]W[n+m]) =$

$= E(X_1[n+m])\underbrace{E(W[n]W[n+m])}_{R_W[m]} = \boxed{\frac{1}{2}\delta[m]}$

$R_W[m] = \sigma_W^2\,\delta[m] = 1^2\cdot\delta[m] = \delta[m]$

W[n] ruido blanco media nula

$$\boxed{S_{WY}(\Omega) = TF\{R_{WY}[m]\} = TF\{\tfrac{1}{2}\delta[m]\} = \tfrac{1}{2}}$$

periodo 2π

$-\pi < \Omega < \pi$

e) $R_Z[m] = R_Y[m] * h[m] * h[-m] =$

$R_Y[m] = E(Y[n]Y[n+m]) = E(X_1[n]W[n]X_1[n+m]W[n+m]) =$

ind $= \underbrace{E(X_1[n]X_1[n+m])}_{R_{X_1}[m]}\,\underbrace{E(W[n]W[n+m])}_{R_W[m]} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\delta[m]\right)\cdot\delta[m] =$

$= \frac{1}{4}\delta[m] + \frac{1}{4}\delta[m] = \frac{1}{2}\delta[m]$

$$= \frac{1}{2}\,\delta[m] * (\delta[m]-\delta[m-1]) * (\delta[-m]-\delta[\underbrace{-m-1}_{-(m+1)}]) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\cancel{\delta[m]} * (\delta[m]-\delta[m-1]) * (\delta[m]-\delta[m+1]) = \frac{1}{2}\left[\delta[m]-\delta[m+1]-\delta[m-1]+\delta[m]\right] =$$

$$\boxed{= \frac{-1}{2}\,\delta[m-1]+\delta[m]-\frac{1}{2}\,\delta[m+1]}$$

$$\boxed{S_{Z}(\Omega) = TF\{R_Z[m]\} = \frac{-1}{2}\cdot e^{-j\Omega} + 1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega} = 1-\cos\Omega}$$ periodo 2π

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

21 noviembre 2016 **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Considere una v.a. bidimensional **(X,Y)** de la que se conoce:

La fdp marginal de **X** : $f_X(x) = 3x^2 \quad 0 < x < 1$

La fdp conjunta de **(X,Y)** : $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ky & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Se pide:

a) Dibuje el rango o recorrido de **(X,Y)** y obtenga el valor de la constante k y la $P(\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}/2)$

b) La fdp marginal de **Y**. Indique su rango y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$. ¿Son independientes **X** e **Y**?

c) La fdp condicional $f_Y(y\,|\,x)$ y la media condicional $E(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X}=x)$

d) La fdp de la v.a. $\mathbf{Z}=g(\mathbf{X})$, siendo $g(x) = x^2$. Indique su rango y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = 1$.

e) $E(\mathbf{X}\mathbf{Z})$ e indique si **X** y **Z** son o no ortogonales.

SOLUCIÓN:

Considere una v.a. bidimensional (X,Y) de la que se conoce:

- La fdp marginal de X: $f_X(x)=3x^2$, $0<x<1$
- La fdp conjunta de (X,Y): $f_{XY}(x,y)=ky$, $0<y<x<1$

Se pide:

a) Dibuje el rango o recorrido de (X,Y) y obtenga el valor de la constante k y la $P(Y\le X/2)$

b) La fdp marginal de Y. Indique su rango y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy=1$. ¿Son independientes?

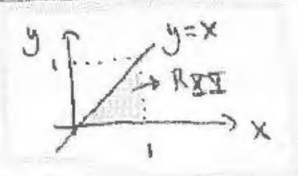
c) La fdp condicional $f_Y(y/x)$ y la media condicional $E(Y/X=x)$

d) La fdp de la v.a. $Z=g(X)$, siendo $g(x)=x^2$. Indique su rango y compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz=1$

e) $E(XZ)$ e indique si X y Z son o no ortogonales

EXAMEN SALT
21 nov 2016
Parcial

a) $f_{XY}(x,y)=ky$, $0<y<x<1$

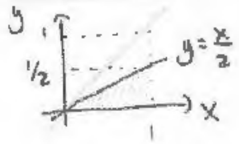


$f_{XY}(x,y)$ es función de densidad si $\nearrow f_{XY}(x,y)\ge 0$

$$\searrow \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\left[\int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx=1 \rightarrow \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=x} ky\,dy\right]dx=1$$

$$\rightarrow \int_{x=0}^{x=1} k\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}dx=1 \rightarrow \frac{k}{2}\int_{x=0}^{x=1}(x^2-0)\,dx=1 \rightarrow \frac{k}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=1 \Rightarrow \frac{k}{6}=1 \Rightarrow \boxed{k=6}$$

$$\boxed{P\left(Y\le \frac{X}{2}\right)} = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} 6y\,dy\right]dx = 6\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}}dx =$$



$$= 3\int_{x=0}^{x=1}\frac{x^2}{4}\,dx = \frac{\cancel{3}}{4}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) $$\boxed{f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=y}^{x=1} 6y\,dx = 6y\,[x]_{x=y}^{x=1} = 6y(1-y), \quad 0<y<1}$$

<u>comprobación</u>: $$\int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=1} 6y(1-y)\,dy = 6\int_{y=0}^{y=1}(y-y^2)\,dy = 6\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1 \checkmark$$

$\boxed{X \text{ e } Y \text{ NO son independientes, pues } f_{XY}(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)}$

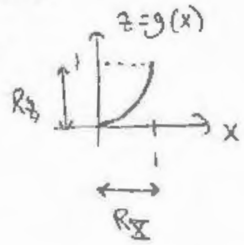
<u>NOTA</u>: Como R_{XY} <u>NO</u> es un rectángulo $\Rightarrow$ X, Y <u>NO</u> son independientes

c) $\boxed{f_Y(y/x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{6y}{3x^2} = \dfrac{2y}{x^2}, \quad \begin{matrix} 0<y<x \\ 0<x<1 \end{matrix}}$

$$\boxed{E(Y/X) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y\, f_Y(y/x)\, dy = \int_{y=0}^{y=x} y \cdot \frac{2y}{x^2}\, dy = \frac{2}{x^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{2}{3x^2}x^3 = \frac{2}{3}x, \quad 0<x<1}$$

d) V.a. X: $f_X(x) = 3x^2, \quad 0<x<1$

Transformación: $Z = g(x) = x^2$



<u>Transformación de v.a. continua (X) en v.a. continua (Z_1)</u>

1) $g(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (0,1)$

2) Existe $g^{-1}(z)$: $z = x^2 \rightarrow x = +\sqrt{z} = g^{-1}(z)$

3) $g^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_{Z_1} = (0,1)$

$$(g^{-1})'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$$\boxed{f_{Z_1}(z) = f_X(x = g^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| = 3z \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{z}}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{z}, \quad 0<z<1}$$

<u>comprobación</u>: $\boxed{\int_{z=-\infty}^{z=\infty} f_{Z_1}(z)\,dz = \int_{z=0}^{z=1} \frac{3}{2}\sqrt{z}\, dz = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\left[\frac{z^{3/2}}{\cancel{3}/\cancel{2}}\right]_{z=0}^{z=1} = 1 \checkmark}$

e) $\boxed{E(XZ_1) = E(X g(X))} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot x^2 \cdot 3x^2\, dx = 3\int_{x=0}^{x=1} x^5\, dx = 3\left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} =$

$= \boxed{\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow \boxed{X, Z_1 \text{ \underline{NO} ortogonales}}$

30 junio 2014 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 9/7/2014
Revisión examen: 11/7/2014

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- La calificación del examen final es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sean **X** e **Y** dos va's independientes. **X** es uniforme en (0,1) e **Y** es una v.a. de Laplace con fdp:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{y-1} & ,y<1\\ \frac{1}{2}e^{-(y-1)} & ,y\geq 1\end{cases}$$

Se realizan las transformaciones $\mathbf{Z}=|\mathbf{Y}-1|$, $\mathbf{U}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$, $\mathbf{V}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}$.

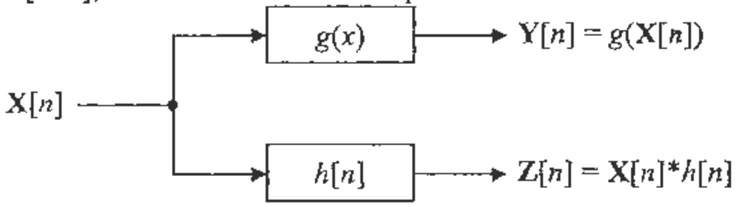
Calcule:

a) La función de distribución de la va **Y**. Dibújela de forma aproximada.
b) $P(1\leq \mathbf{Y}\leq 2)$.
c) La fdp de la va **Z**. Dibújela de forma aproximada.
d) La covarianza de **U** y **V**.
e) $P(\mathbf{V}<0)=P(\mathbf{X}<\mathbf{Y})$.

2.- En el esquema de la figura, $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden $N(0,1)$. Se tiene, además:

$$y=g(x)=\begin{cases}x & \text{si}\ |x|\geq 0.5\\ 0 & \text{si}\ |x|<0.5\end{cases}$$

y $h[n]=\delta[n]-a\,\delta[n-1]$, siendo a una constante que verifica la condición $0<a<1$.



Calcule:

a) Media y autocovarianza de $\mathbf{Y}[n]$.
b) Fdp de primer orden de $\mathbf{Y}[n]$. Dibújela de forma aproximada.
c) Covarianza cruzada de los pe's $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$. ¿Están incorrelados?
d) La fdp de primer orden de $\mathbf{Z}[n]$.
e) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

a) $\left[E(Y[n]) = E(g(X[n])) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x,n)\,dx = 0\right]$

IMPORTANTE

$$C_Y[n,n+m] = E(Y[n]\,Y[n+m]) - E(Y[n])E(Y[n+m]) = R_Y[n,n+m] = 0'9691\cdot\delta[m]$$

$$R_Y[n,n+m] = E(Y[n]Y[n+m]) = E(g(X[n])\,g(X[n+m])) =$$

- si $m \neq 0$: $E(g(X[n]))E(g(X[n+m])) = 0\cdot 0 = 0$
  (ruido blanco)
- si $m = 0$: $E(g^2(X[n])) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g^2(x)}_{PAR}\,\underbrace{f_X(x,n)}_{PAR}\,dx = 2\int_0^{\infty} g^2(x) f_X(x,n)\,dx =$

$$= 2\left[\cancel{\int_0^{0,5} 0^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx} + \int_{0,5}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right] = \qquad \left(\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

$$= 2\left[\left[-x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0'5}^{\infty} + \int_{0'5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right] = 2\left[\underbrace{\left(0-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}}\right)\right)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8}}} + (1-\underbrace{G(0'5)}_{0'6915})\right] = 0'9691$$

0 | 0'5

c) $C_{XY}[n,n+m] = E(X[n]\cdot Y[n+m]) - \underbrace{E(X[n])}_{0}\underbrace{E(Y[n+m])}_{0} = R_{XY}[n,n+m] = 0'9691\cdot\delta[m]$

$$R_{XY}[n,n+m] = E(X[n]Y[n+m]) = E(X[n]\,g(X[n+m])) =$$

- si $m \neq 0$: $E(X[n])E(g[X[n+m]]) = 0$ (ruido blanco)
- si $m = 0$: $E(X[n]\,g(X[n])) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{I}\cdot\underbrace{g(x)}_{I}\cdot\underbrace{f_X(x,n)}_{P}\,dx = 2\cdot\int_0^{\infty} x\cdot g(x)\cdot f_X(x,n)\,dx =$
  (IMPAR, IMPAR, PAR)

$$= 2\left[\int_0^{0'5} x\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_{0'5}^{\infty} x\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx\right] = \ldots = 0'9691$$

b) <u>Transformación de "PE continuo" $X[n]$ en PE mixto" $(Y[n])$</u>

- <u>PARTE DISCRETA</u>: $\left[P(Y[n]=0) = P(-0'5 < X[n] < 0'5) = 1 - 2P(X[n] > 0'5) =\right.$

  $-0'5 < x < 0'5$ $-0'5 \;\; 0 \;\; 0'5$ $0 \;\; 0'5$

  $\left.= 1 - 2[1-G(0'5)] = 1 - 2(1-0'6915) = 0'383\right]$

  $0'5$

- <u>PARTE CONTINUA</u>: $\left[f_Y(y,n) = f_X(y,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\right]$, $y<-0'5$, $y>0'5$

  $x<-0'5$
  $x>0'5$
  $(y=x)$

Resumiendo:

$$f_Y(y,n) = \begin{cases} P(Y[n]=0) = 0'383 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y<-0'5,\; y>0'5 \end{cases}$$

$$\mathbf{X}\text{ es v.a. } uniforme \text{ en } (x_1, x_2) \Rightarrow \quad E(\mathbf{X}) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

$$\mathbf{X}\text{ es v.a. } Laplace \Rightarrow f_X(x) = \frac{b}{2} e^{-b|x-a|}, \quad E(\mathbf{X}) = a, \quad \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \frac{2}{b^2}$$

$$\mathbf{X}\text{ es v.a. } N(\mu,\sigma) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\ F_X(x) = \mathrm{G}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ E(\mathbf{X}) = \mu,\ \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$$

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

$$\int x^2 e^{-x^2/2} dx = -x e^{-x^2/2} + \int e^{-x^2/2} dx$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

d) $z[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (\delta[n] - a\delta[n-1]) = x[n] - a x[n-1] =$

$= N(0,1) - aN(0,1) = N(0,1) - N(0,a) = N(0-0, \sqrt{1^2+a^2}) = N(0, \sqrt{1+a^2})$

$$\left[f_z(z,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+a^2}} e^{-\frac{z^2}{2(1+a^2)}} \quad , \quad -\infty < z < \infty \right]$$

periodo 2π

e) $\left[S_z(\Omega) = S_x(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2 = 1 \cdot (1+a^2 - 2a\cos\Omega) = 1 + a^2 - 2a\cos\Omega \right]$ $-\pi < \Omega < \pi$

$S_x(\Omega) = TF\{R_x[m]\} = TF\{\delta[m]\} = 1$

$x[n]$ ruido blanco media nula : $R_x[m] = \sigma_x^2\,\delta[m] = 1^2\delta[m] = \delta[m]$

$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n] - a\delta[n-1]\} = 1 - a\cdot e^{-j\Omega} = 1 - a(\cos(-\Omega) + j\,\text{sen}(-\Omega)) =$

$= 1 - a\cos\Omega + ja\,\text{sen}\,\Omega$

$|H(\Omega)|^2 = (1 - a\cos\Omega)^2 + (a\,\text{sen}\,\Omega)^2 = 1 - 2a\cos\Omega + \underbrace{a^2\cos^2\Omega + a^2\text{sen}^2\Omega}_{a^2} = 1 + a^2 - 2a\cos\Omega$

Sean X e Y dos v.a.'s independientes. X es uniforme en $(0,1)$ e Y es una v.a. de Laplace con fdp:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{y-1}, & y<1 \\ \frac{1}{2}e^{-(y-1)}, & y\geq 1 \end{cases}$$

Se realizan las transformaciones $Z=|Y-1|$, $U=X+Y$, $V=X-Y$. Calcule:

a) La función de distribución de la v.a. Y. Dibújela de forma aproximada

b) $P(1\leq Y\leq 2)$

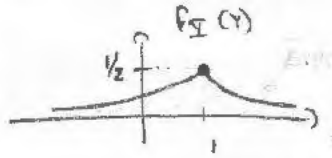
c) La fdp de la v.a. Z. Dibújela de forma aproximada

d) La covarianza de U y V

e) $P(V<0)=P(X<Y)$

SALT
30 junio 2014
Ej 1

a)

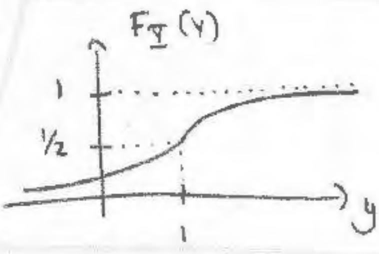


$$F_Y(y) = \begin{cases} \cdot \text{ si } y<1: \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2}e^{y-1}dy = \frac{1}{2}\left[e^{y-1}\right]_{-\infty}^{y} = \frac{1}{2}\left[e^{y-1}-e^{-\infty}\right] = \frac{1}{2}e^{y-1} \\ \cdot \text{ si } y\geq 1: \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{1}\frac{1}{2}e^{y-1}dy + \int_{1}^{y}\frac{1}{2}e^{-(y-1)}dy = \frac{1}{2}\left[e^{y-1}\right]_{-\infty}^{1} - \frac{1}{2}\left[e^{-(y-1)}\right]_{1}^{y} = \\ = \frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{-\infty}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-(y-1)}-e^{0}\right) = 1-\frac{1}{2}e^{-(y-1)} \end{cases}$$

¿comprobar: Y v.a. continua $\Rightarrow F_Y(y)$ continua?

$F(-\infty) = \frac{1}{2}e^{-\infty} = 0$ ✓ $\quad \left\{ \begin{array}{l} F(1^-) = \frac{1}{2}e^{1-1} = \frac{1}{2} \\ F(1^+) = 1-\frac{1}{2}e^{-(1-1)} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ ✓

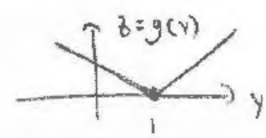
$F(\infty) = 1-\frac{1}{2}e^{-\infty} = 1$ ✓



b) $P(1\leq Y\leq 2) \overset{\text{OPCIÓN 1}}{=\!=} F_Y(2)-F_Y(1) = \left(1-\frac{1}{2}e^{-(2-1)}\right) - \left(1-\frac{1}{2}e^{-(1-1)}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1} = 0'316$

$\overset{\text{OPCIÓN 2}}{=\!=} \int_{1}^{2} f_Y(y)dy = \int_{1}^{2}\frac{1}{2}e^{-(y-1)}dy = -\frac{1}{2}\left[e^{-(y-1)}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^{0}\right) = 0'316$

c) Transformación: $z = g(y) = |y-1| = \begin{cases} -(y-1) = -y+1, & y<1 \\ y-1, & y\geq 1 \end{cases}$



Transformación de v.a. continua (Y) en v.a. continua (Z)

$z=g(y)$ tiene parte decreciente y parte creciente en $R_Y=(-\infty,\infty)$

PARTE 1: $y<1$

1) $g_1(y)=-y+1$ es continua estrictamente decreciente en $R_Y=(-\infty,1)$

2) Existe inversa $g_1^{-1}(z)$: $z=-y+1 \Rightarrow y=1-z=g_1^{-1}(z)$

3) $g_1^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z=(0,\infty)$

$(g_1^{-1})'(z)=-1$

PARTE 2 : 1) $g_2(y) = y-1$ es continua estrictamente creciente en $R_Y = [1,\infty)$

$y \geq 1$

2) Existe inversa $g_2^{-1}(z)$: $z = y-1 \Rightarrow y = z+1 = g_2^{-1}(z)$

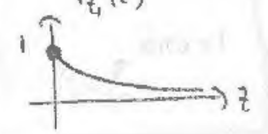
3) $g_2^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = [0,\infty)$

$(g_2^{-1})'(z) = 1$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$$\boxed{\begin{aligned} f_Z(z) &= f_Y(y = g_1^{-1}(z)) \cdot |(g_1^{-1})'(z)| + f_Y(y = g_2^{-1}(z)) \cdot |(g_2^{-1})'(z)| \\ &= \frac{1}{2} e^{1-z-1} \cdot |-1| + \frac{1}{2} e^{-(z+1-1)} \cdot |1| = e^{-z}, \quad z \geq 0 \end{aligned}}$$

$f_Z(z)$



¡comprobar: $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = \int_0^{\infty} e^{-z}\,dz = -\left[e^{-z}\right]_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1$ ✓ !

d) $\boxed{C(UV) = E(UV) - E(U)\cdot E(V) = \frac{-8}{3} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-23}{12}}$ $\Rightarrow$ Relación lineal inversa (<0) entre U y V

$E(UV) = E((X+Y)(X-Y)) = E(X^2) - E(Y^2) = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $V(X) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \rightarrow E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2 = 2 + 1^2 = 3$

$E(Y) = 1$, $V(Y) = \frac{2}{1^2} = 2$

$E(U) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$E(V) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$

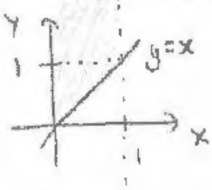
NOTA: En este apartado se ha utilizado la información que venía anexa al ejercicio:

X es v.a. uniforme en $(x_1, x_2) \Rightarrow E(X) = \frac{x_1+x_2}{2}$, $Var(X) = \frac{(x_2-x_1)^2}{12}$

X es v.a. laplace $\Rightarrow f_X(x) = \frac{b}{2} e^{-b|x-a|}$, $E(X) = a$, $Var(X) = \frac{2}{b^2}$

e) $f_{XY}(x,y) \underset{X,Y \text{ indep.}}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1\cdot\frac{1}{2}e^{y-1} = \frac{1}{2}e^{y-1}, & 0<x<1,\ y<1 \\ 1\cdot\frac{1}{2}e^{-(y-1)} = \frac{1}{2}e^{-(y-1)}, & 0<x<1,\ y\geq 1 \end{cases}$

$P(V<0) = P(X<Y) = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x}^{y=1}\frac{1}{2}e^{y-1}\,dy\right]dx + \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=1}^{y=\infty}\frac{1}{2}e^{-(y-1)}\,dy\right]dx =$



$= \int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{2}\left[e^{y-1}\right]_{y=x}^{y=1}dx + \int_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{2}\left[e^{-(y-1)}\right]_{y=1}^{y=\infty}dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(1-e^{x-1})\,dx + \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}dx =$

$= \frac{1}{2}\left[x - e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\left[x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left[(1-e^0)-(0-e^{-1})\right] + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}(e^{-1}+1) = 0'684$

14 enero 2014 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 28/1/2014
Revisión examen: 3/2/2014

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio; en caso de hacerlo, ello supondrá la renuncia a la nota que tuvieran en el primer parcial.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sean **X** y **Z** dos variables aleatorias independientes. **X** es una v.a. $N(0,1)$ y **Z** es una v.a. de Bernouilli, con $P(\mathbf{Z}=0)=P(\mathbf{Z}=1)=1/2$. Se forma la v.a. $\mathbf{U}=\mathbf{Z}-\mathbf{X}$. Calcule:

a) La media de **U**, la varianza de **U** y la covarianza de **Z** y **U**.

b) La función densidad de probabilidad $f_U(u)$ de la v.a. **U**. Dibújela.

c) $P(\mathbf{U}>1\,|\,\mathbf{Z}=1)$ y $P(\mathbf{U}>1)$.

Considere ahora otra v.a. **Y** $N(0,1)$, independiente de la v.a. **X** anterior. Calcule:

d) La función densidad de probabilidad $f_W(w)$ de la v.a. $\mathbf{W}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$.

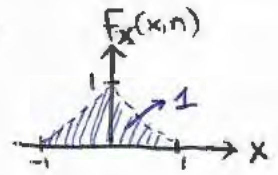
e) La función densidad de probabilidad conjunta $f_{WV}(w,v)$ de las v.a's:

$$\mathbf{W}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}), \quad \mathbf{V}=\mathbf{Y}$$

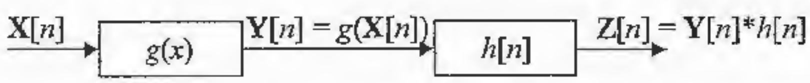
Indique razonadamente si las v.a.'s **W** y **V** son o no independientes.

2.- Sea $\mathbf{X}[n]$ ($n\in\mathbb{Z}$) un ruido blanco estricto, con fdp de 1[er] orden:

$$f_X(x;n)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$



Se hace pasar el proceso $\mathbf{X}[n]$ por los bloques de la figura, donde $g(x)=|x|$ y $h[n]=\delta[n]+a\,\delta[n-N]$ (siendo a una constante real y N un número entero mayor que 0).



Calcule:

a) La función densidad de probabilidad de 1[er] orden del proceso $\mathbf{Y}[n]$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y;n)dy=1$. ¿Es $\mathbf{Y}[n]$ estacionario de primer orden?

b) La autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es $\mathbf{Y}[n]$ estacionario en sentido amplio?

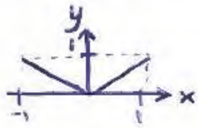
c) $E\{\mathbf{X}[n]\mathbf{Z}[n]\}$.

d) El valor de la constante a que hace que $\mathbf{Z}[n]$ sea de media nula.

e) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$, para el valor de a del apartado anterior. Represéntela gráficamente, suponiendo $N=1$.

a) Transformación $Y[n] = g[X[n])$

$$y = g(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x<0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



- Transformación de "PE continua $(X[n])$" en "PE continua $(Y[n])$"

$g(x)$ tiene decreciente y parte creciente en $R_X = (-1,1)$

PARTE 1:

$-1<x<0$

1) $g_1(x) = -x$ es continua estrictamente decreciente en $R_X = (-1,0)$
2) Existe inversa $g_1^{-1}(y)$: $y=-x \longrightarrow \boxed{x = -y = g_1^{-1}(y)}$
3) $(g_1^{-1})(y)$ es continua y derivable en $R_Y = (0,1)$

$$\boxed{(g_1^{-1})'(y) = -1}$$

PARTE 2:

$0<x<1$

1) $g_2(x) = x$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (0,1)$
2) Existe inversa $g_2^{-1}(y)$: $y=x \longrightarrow \boxed{x = y = g_2^{-1}(y)}$
3) $(g_2^{-1})(y)$ es continua y derivable en $R_Y = (0,1)$

$$\boxed{(g_2^{-1})'(y) = 1}$$

Se cumple, aplicar la fórmula de la transformación:

$$\boxed{\begin{aligned} f_Y(y,n) &= f_X(x=g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)| + f_X(x=g_2^{-1}(y)) \cdot |(g_2^{-1})'(y)| \\ &= (1-y)\cdot|-1| + (1-y)\cdot|1| = 2\cdot(1-y), \quad 0<y< \end{aligned}}$$

$Y[n]$ es estacionario de orden 1 si $f_Y(y,n)$ <u>NO</u> depende de n ✓

$Y[n]$ sí es estacionario de orden 1

¡comprobar! $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y,n)\,dy = \int_0^1 2(1-y)\,dy = 1$

b) $\Big[R_Y[n,n+m] = E\big(Y[n]Y[n+m]\big) = E\big(g(X[n])g(X[n+m])\big)$

$\begin{cases} \bullet \text{ si } m \neq 0 \text{ (ruido blanco)}: E\big(g(X[n])\big)E\big(g(X[n+m])\big) = \\ \quad E\big(g(X[n])\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{|x|}_{PAR} \cdot \underbrace{f_X(x)}_{PAR}}_{PAR} dx = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = \ldots = \frac{1}{3} \\ \bullet \text{ si } m = 0: E\big(g^2(X[n])\big) = \\ \quad E\big(g^2(X[n])\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{|x|^2}_{PAR} \underbrace{f_X(x)}_{PAR}}_{PAR} dx = 2\int_0^1 x^2(1-x) = \ldots = \frac{1}{6} \end{cases}$

$= \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)\delta[m] = \boxed{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\delta[m]}$

$Y[n]$ es ESA si $\begin{cases} \bullet\ E(Y[n]) \text{ \underline{NO} depende de } n \checkmark \\ \bullet\ R_Y[n,n+m] \text{ \underline{NO} depende de } n \checkmark \text{ (solo de } m) \end{cases}$

$\Rightarrow Y[n]$ sí es ESA

c) $E\big(X[n]Z[n]\big) = E\big(X[n]\cdot(g(X[n]) + a g(X[n-N]))\big) =$

$\boxed{Z[n] = Y[n] * h[n] = Y[n] * (\delta[n] + a\delta[n-N]) = Y[n] + aY[n-N] = g(X[n]) + ag(X[n-N])}$

$= E\big(X[n]g(X[n])\big) + aE\big(X[n]g(X[n-N])\big) \overset{\text{ruido blanco}}{=} E\big(X[n]g(X[n])\big) + aE(X[n])E\big(g(X[n-N])\big) =$

$= 0 + a\cdot 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$

$E\big(X[n]g(X[n])\big) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{IMPAR}\underbrace{g(x)}_{PAR}\underbrace{f_X(x)}_{PAR}}_{IMPAR} dx = 0$

$E(X[n]) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{I}\underbrace{f_X(x)}_{P}}_{I} dx = 0$

d) $E(Z[n]) = E\big(g(X[n]) + ag(X[n-N])\big) = E\big(g(X[n])\big) + aE\big(g(X[n-N])\big) =$

$= \frac{1}{3} + a\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1+a)$ $\qquad E(Z[n]) = 0$ si $\frac{1}{3}(1+a) = 0 \rightarrow \boxed{a = -1}$

e) $S_Z(\Omega) = S_Y(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2 = \left(\frac{2\pi}{9}\delta(\Omega) + \frac{1}{18}\right)2\big(1 - \cos(\Omega N)\big) =$

$S_Y(\Omega) = TF\{R_Y[m]\} = TF\{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\delta[m]\} = \frac{1}{9}2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{18}$

$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n] + a\delta[n-N]\} = 1 + ae^{-j\Omega N} =$

$= 1 + a[\cos(-\Omega N) + j\,\text{sen}(-\Omega N)] = 1 + a\cos(\Omega N) - ja\,\text{sen}(\Omega N)$

$|H(\Omega)|^2 = (1 + a\cos(-\Omega N))^2 + (-a\,\text{sen}(\Omega N))^2 = 1 + 2a\cos(\Omega N) + a^2\cos^2(\Omega N)$

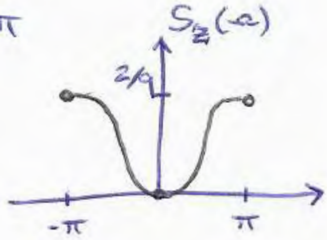
$+ a^2\text{sen}^2(\Omega N) = 1 + a^2 + 2a\cos(\Omega N) \underset{a=-1}{=} 2\big(1 - \cos(\Omega N)\big)$

$$= 2\left[\frac{2\pi}{9}\left(1-\underbrace{\cos(0\cdot N)}_{\to 0}\right)\delta(\Omega) + \frac{1}{18}\left(1-\cos(\Omega N)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-\cos(\Omega N)\right) \qquad -\pi < \Omega < \pi$$

periodo 2π

si $N=1$: $S_Z(\Omega) = \frac{1}{9}(1-\cos\Omega)$



Sean X y Z dos v.a. independientes. X es una v.a. $N(0,1)$ y Z es una v.a. de Bernoulli con $P(Z=0)=P(Z=1)=1/2$. Se forma la v.a. $U=Z-X$. Calcule:

a) la media de U, la varianza de U y la covarianza de Z y U

b) la función densidad de probabilidad $f_U(u)$ de la v.a. U. Dibújela

c) $P(U>1/Z=1)$ y $P(U>1)$

Considere ahora otra v.a. $Y=N(0,1)$ independiente de la v.a. X anterior. Calcule:

d) la función densidad de probabilidad $f_W(w)$ de la v.a. $W=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$

e) la función densidad de probabilidad conjunta $f_{WV}(w,v)$ de las v.a.'s:

$$W=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \quad , \quad V=Y$$

Indique razonadamente si las v.a.'s W y V son o no independientes

SAIT
14 enero 2011
Problema 1

Bernoulli
como
interruptor

a) $E(U)=E(Z-X)=E(Z)-E(X)=\frac{1}{2}-0=1/2$

$\left(E(Z)=\sum z_i\, P(Z=z_i)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$

$V(U)=V(Z-X)\underset{\uparrow}{=}V(Z)+V(X)=\frac{1}{4}+1^2=5/4$

(X, Z indep)

$$\boxed{\begin{array}{l} V(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \\ \left(E(Z^2)=\sum z_i^2\, P(Z=z_i)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)\end{array}}$$

$C_{ZU}=E(ZU)-E(Z)E(U)=E(Z(Z-X))-E(Z)E(U)=E(Z^2)-E(ZX)-E(Z)E(U)=$

$=\frac{1}{2}-E(Z)E(X)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(Z y X indep)

b)

$U=Z-X$

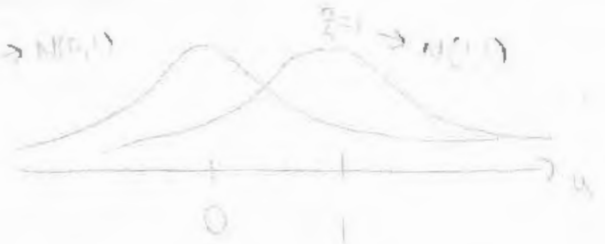
$\xrightarrow[p=1/2]{Z=0} U=-X=-N(0,1)=N(0,1)\ ,\ f_U(u/Z=0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$

$\xrightarrow[p=1/2]{Z=1} U=1-X=1-N(0,1)=N(1,1)\ ,\ f_U(u/Z=1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-1)^2}{2}}$

$$f_U(u) = P(Z=0)\, f_U(u/Z=0) + P(Z=1)\cdot f_U(u/Z=1) = \frac{1}{2} N(0,1) + \frac{1}{2} N(1,1) =$$

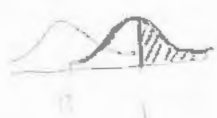
$\boxed{\text{Th. probabilidad total}}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-1)^2}{2}}, \quad -\infty < u < \infty$$



c) $P(U>1 / Z=1) = 1/2$

$$P(U>1) = P(Z=0)\, P(U>1/Z=0) + P(Z=1)\, P(U>1/Z=1) = \frac{1}{2} P(N(0,1)>1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$



$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - P(N(0,1)\le 1)\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(1 - G(1)) + \frac{1}{4} \approx 0.33$$

d) $W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{N(0,1)}_{X} + \underbrace{N(0,1)}_{Y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} N\left(0, \sqrt{1^2+1^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} N(0,\sqrt{2}) = N(0,1)$

X, Y indep

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}, \quad -\infty < w < \infty$$

e) $f_{XY}(x,y) \overset{X,Y \text{ indep}}{=} f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{matrix}$

Transformación: $\left\{\begin{matrix} W = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ V = Y \end{matrix}\right.$

Transformación de v.a. bidimensional continua (X,Y) a v.a. bidimensional continua (W,V)

$$J = \begin{vmatrix} \partial w/\partial x & \partial w/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la fórmula de la transformación.

$$f_{WV}(w,v) = \frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\Bigg|_{\substack{x=\sqrt{2}w-v \\ y=v}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}}{|1/\sqrt{2}|} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\Bigg|_{\substack{x=\sqrt{2}w-v \\ y=v}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left((\sqrt{2}w-v)^2+v^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-(w^2+v^2-\sqrt{2}wv)}, \quad \begin{matrix} -\infty<w<\infty \\ -\infty<v<\infty \end{matrix}$$

$\left\{\begin{matrix} w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ v = y \end{matrix}\right. \Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+v) \Rightarrow x = \sqrt{2}w - v, \quad y = v$

$$f_W(w)\cdot f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \neq f_{WV}(w,v) \Rightarrow W, V \text{ \underline{NO} son independ.}$$

25 noviembre 2013	**Primer Parcial Señales Aleatorias**	Duración: 1 hora Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Se tiene una variable aleatoria **X** uniforme en el intervalo $(-1,1)$, a la que se le aplica la transformación indicada por la siguiente función:

$$y = g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 0 \\ 1 + 2x, x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule la fdp de la v.a. **Y**=g(**X**) e indique el rango de la v.a. **Y**.

b) Calcule $P(\mathbf{Y} > 0)$

c) Calcule la media de la v.a. **Y**.

d) Decida justificadamente sobre la ortogonalidad, incorrelación e independencia de las v.a.'s **X** e **Y**.

e) Se tiene una v.a. **Z** con la siguiente función densidad de probabilidad condicionada:

$$f_Z(z \mid \mathbf{X} = x) = \begin{cases} k, & -1 < x < 1, \quad 0 < z < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

calcule la constante k, la función densidad conjunta de **Z** y **X**, y la función densidad de probabilidad marginal de **Z**.

SOLUCIÓN:

26 junio 2013 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 5/7/2013
Revisión examen: 9/7/2013

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en alguno de los dos parciales no precisan entregar el ejercicio correspondiente.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea la fdp conjunta de la v.a. bidimensional **(X,Y)**

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y) & 0<x\leq\pi/2,\ 0<y\leq\pi/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcule:

a) La constante a.
b) Las fdps marginales de **X** e **Y**. ¿son independientes **X** e **Y**?
c) La media de la variable aleatoria **X**.
d) Se realiza la transformación: **U=X+Y** , **V=Y**. Calcule la fdp conjunta de **U** y **V** (no olvide indicar el rango o recorrido de la v.a. bidimensional).
e) La fdp de la v.a. **U**.

2.- Sea **X**(t) un proceso estocástico continuo en el tiempo

$$X(t)=\cos(t+\Phi)$$

siendo Φ una v.a. discreta que cumple:

$$P(\Phi=0) = P(\Phi=\pi/2) = P(\Phi=\pi) = P(\Phi=3\pi/2) = 1/4$$

Calcule:

a) La media de **X**(t).
b) La autocorrelación de **X**(t). ¿Es el proceso estacionario en sentido amplio?
c) La fdp de primer orden de **X**(t) y dibujarla para t = 0. ¿Es el proceso estacionario de primer orden?
d) La densidad espectral de potencia del proceso **X**(t).
e) Se hace pasar **X**(t) por un sistema lineal e invariante, con respuesta en frecuencia $H(\omega)=1/(1+j\,\omega)$, obteniéndose un nuevo p.e. **Y**(t)=**X**(t)*h(t). Calcule la densidad espectral de potencia y la autocorrelación de **Y**(t).

Fórmulas de interés:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x+\cos x$$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x+\sin x$$

$$X(t) = \cos(t+\Phi) \quad \text{v.a discreta} \begin{cases} P(\Phi=0) = 1/4 \\ P(\Phi=\pi/2) = 1/4 \\ P(\Phi=\pi) = 1/4 \\ P(\Phi=3\pi/2) = 1/4 \end{cases}$$

a) PE en tiempo continuo, formado por una v.a discreta Φ

$$E(X(t)) = E(\cos(t+\Phi)) = \sum \cos(t+\phi_i)\cdot P(\Phi=\phi_i) =$$

$$= \cos(t+0)\cdot P(\Phi=0) + \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot P\left(\Phi=\frac{\pi}{2}\right) + \cos(t+\pi)\cdot P(\Phi=\pi) +$$

$$+ \cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right) P\left(\Phi=\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}(-\operatorname{sen} t) + \frac{1}{4}(-\cos t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t = 0$$

b) $$R_X(t,t+\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = E(\cos(t+\Phi)\cos(t+\tau+\Phi)) =$$

$$= \sum \cos(t+\phi_i)\cos(t+\tau+\phi_i)\, P(\Phi=\phi_i) = \cos(t+0)\cos(t+\tau+0)\cdot P(\Phi=0) +$$

$$+ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\tau+\frac{\pi}{2}\right)\cdot P\left(\Phi=\frac{\pi}{2}\right) + \cos(t+\pi)\cos(t+\tau+\pi)\cdot P(\Phi=\pi) +$$

$$+ \cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(t+\tau+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot P\left(\Phi=\frac{3\pi}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{4}\cos t\cdot\cos(t+\tau)} + \underbrace{\frac{1}{4}(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen}(t+\tau))}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4}\cdot(-\cos(t))(-\cos(t+\tau))} + \underbrace{\frac{1}{4}\operatorname{sen} t\cdot\operatorname{sen}(t+\tau)} = \frac{1}{2}\left[\cos t\cdot\cos(t+\tau) + \operatorname{sen} t\cdot\operatorname{sen}(t+\tau)\right] = \frac{1}{2}\cos\tau$$

$X(t)$ es ESA si $\begin{cases} E(X(t)) \text{ no depende de } t \ ✓ \\ R_X(t,t+\tau) \text{ no depende de } t\ ✓ \text{ (solo de } \tau) \end{cases} \Rightarrow X(t)$ es esa

c)
$$\begin{cases} P(x(t)=\cos t) = 1/4 \\ P\left(x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1/4 \\ P(x(t)=\cos(t+\pi)) = 1/4 \\ P\left(x(t)=\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 1/4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P(x(t)=\cos t) = 1/4 \\ P(x(t)=-\operatorname{sen} t) = 1/4 \\ P(x(t)=-\cos t) = 1/4 \\ P(x(t)=\operatorname{sen} t) = 1/4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{f_X(x,t) = \frac{1}{4}\delta(x+\cos t) + \frac{1}{4}\cdot\delta(x+\operatorname{sen} t) + \frac{1}{4}\delta(x-\cos t) + \frac{1}{4}\delta(x-\operatorname{sen} t)}$$

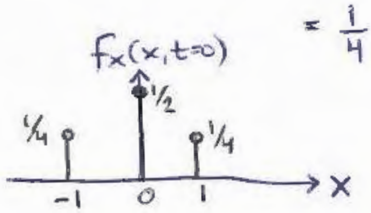
$X(t)$ es estacionario de orden 1 si $f_X(x,t)$ no depende de t ×

↳ NO ES ESTACIONARIO

si $t=0$:

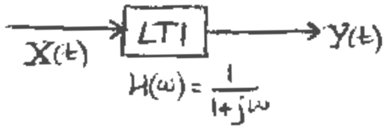
$$f_X(x,t=0) = \frac{1}{4}\delta(x+\underbrace{\cos 0}_{1}) + \frac{1}{4}\delta(x+\underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0}) + \frac{1}{4}\delta(x-\underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0}) + \frac{1}{4}\delta(x-\underbrace{\cos 0}_{1})$$

$$= \frac{1}{4}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$$



d) $$\boxed{S_X(\omega) = TF\{R_X(\tau)\} = TF\{\tfrac{1}{2}\cos\tau\} = \tfrac{1}{2}\pi\left(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right)}$$

e)



$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)\cdot|H(\omega)|^2 = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right]\cdot\frac{1}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{1+(-1)^2}\delta(\omega+1) + \frac{1}{1+1^2}\delta(\omega-1)\right] = \frac{\pi}{4}\left(\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right)$$

$$R_Y(\tau) = TF^{-1}\{S_Y(\omega)\} = TF^{-1}\left\{\frac{\pi}{4}\left(\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\cos\tau$$

Sea la fdp conjunta de la v.a. bidimensional (X, Y)

$$f_{XY}(x,y) = a\,\text{sen}(x+y) \quad , \quad \begin{array}{l} 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 < y \leq \pi/2 \end{array}$$

Fórmulas de interés

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}a\cos b + \cos a\,\text{sen}b$

$\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}x + \cos x$

$\int x\,\text{sen}x\,dx = -x\cos x + \text{sen}x$

Calcule:

a) La constante a

b) Las fdp's marginales de X e Y. ¿Son independientes X e Y?

c) La media de la variable aleatoria X

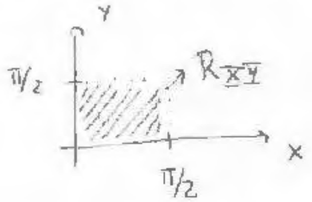
d) Se realiza la transformación $U = X+Y$, $V = Y$. Calcule la fdp conjunta de U y V (no olvide indicar el rango o recorrido de la v.a. bidimensional)

26 junio 2013, 1

e) La fdp de la v.a. U

a) $f_{XY}(x,y)$ es función de densidad si $\nearrow f_{XY} \geq 0$

$\searrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 \rightarrow \int_{x=0}^{x=\pi/2}\left[\int_{y=0}^{y=\pi/2} a\,\text{sen}(x+y)\,dy\right]dx = 1$



$$\rightarrow a\int_{x=0}^{x=\pi/2}\left[-\cos(x+y)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} dx = 1 \rightarrow a\int_{x=0}^{x=\pi/2}\underbrace{\left(-\cos(x+\pi/2)+\cos x\right)}_{\text{sen}x}dx = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow a\left[-\cos x + \text{sen}x\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1 \rightarrow a\left[\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) - (\cos 0 + \text{sen}0)\right] = 1 \rightarrow a\left[(-0+1)-(-1+0)\right] = 1 \rightarrow \boxed{a = 1/2}$$

b) $$\boxed{f_X(x)} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=\pi/2}\frac{1}{2}\text{sen}(x+y)\,dy = \frac{1}{2}\left[-\cos(x+y)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{sen}x} - (-\cos x)\right] =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}(\text{sen}x + \cos x), \quad 0 < x \leq \pi/2}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \dots = \frac{1}{2}(\text{sen}y + \cos y), \quad 0 < y \leq \pi/2}$$

X e Y intercambiables en el ejercicio

• X e Y son v.a. independientes $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

$$¿\frac{1}{2}\text{sen}(x+y) = \frac{1}{2}(\text{sen}x+\cos x)\frac{1}{2}(\text{sen}y+\cos y)? \rightarrow ¿\frac{1}{2}(\text{sen}x\cos y + \cos x\,\text{sen}y) = \frac{1}{4}(\text{sen}x\,\text{sen}y + \text{sen}x\cos y + \cos x\,\text{sen}y + \cos x\cos y)?$$

$$\rightarrow ¿\frac{1}{4}\text{sen}x\cos y + \frac{1}{4}\cos x\,\text{sen}y = \frac{1}{4}\text{sen}x\,\text{sen}y + \frac{1}{4}\cos x\cos y? \quad \underline{\text{NO}} \Rightarrow X \text{ e } Y \ \underline{\text{NO}} \text{ son independientes}$$

__NOTA__: Hay que observar como R_{XY} es un rectángulo pero X e Y no son independientes

(R_{XY} rectángulo $\not\rightleftarrows$ X, Y indep) ...

c) $\boxed{E(X)} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\pi/2} x\, \frac{1}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=\pi/2} (x\operatorname{sen}x + x\cos x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\Big[-x\cos x + \operatorname{sen}x + x\operatorname{sen}x + \cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2}\Big[\Big(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\Big) - \Big(0 + \operatorname{sen}0 + 0 + \cos 0\Big)\Big] =$

$= \frac{1}{2}\Big[\Big(0 + 1 + \frac{\pi}{2} + 0\Big) - \Big(0 + 0 + 0 + 1\Big)\Big] = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

d) Transformación $\left\{\begin{array}{l} u = x + y \\ v = y \end{array}\right\}$

Transformación de v.a. bidimensional continua (X, Y) en v.a. bidimensional continua (U, V)

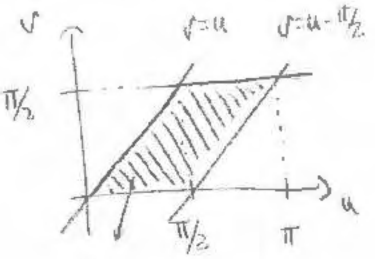
Comprobamos que el jacobiano de la transformación es distinto de cero, para poder aplicar la fórmula de la transformación:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$\boxed{f_{UV}(u,v) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=u-v \\ y=v}} = \left.\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y)}{|1|}\right|_{\substack{x=u-v \\ y=v}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}u \;,\; (u,v) \in R_{UV}}$$

$\left\{\begin{array}{l} u = x + y \\ \boxed{v = y} \end{array}\right\} \to \boxed{x = u - v}$

$\left\{\begin{array}{l} 0 < x \leq \pi/2 \to 0 < u - v \leq \pi/2 \to \left\{\begin{array}{l} v < u \\ v \geq u - \pi/2 \end{array}\right\} \\ 0 < y \leq \pi/2 \to \boxed{0 < v \leq \pi/2} \end{array}\right.$



R_{UV}

e) $\boxed{f_U(u) = \int_{v=-\infty}^{v=\infty} f_{UV}(u,v)\,dv}$

- si $\underline{0 < u \leq \pi/2}$: $\int_{v=0}^{v=u} \frac{1}{2}\operatorname{sen}u\,dv = \frac{1}{2}\operatorname{sen}u\,\Big[v\Big]_{v=0}^{u} = \boxed{\frac{1}{2}u\operatorname{sen}u}$
- si $\underline{\pi/2 < u < \pi}$: $\int_{v=u-\pi/2}^{v=\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen}u\,dv = \frac{1}{2}\operatorname{sen}u\,\Big[v\Big]_{v=u-\pi/2}^{v=\pi/2} = \boxed{\frac{1}{2}(\pi - u)\operatorname{sen}u}$

$f_V(v) = \int_{u=-\infty}^{u=\infty} f_{UV}(u,v)\,du = \int_{u=v}^{u=v+\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen}u\,du = -\frac{1}{2}\Big[\cos u\Big]_{u=v}^{u=v+\pi/2} = -\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cos\Big(v + \frac{\pi}{2}\Big)}_{-\operatorname{sen}v} - \cos v\Big] =$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}v + \cos v) \;,\; 0 < v < \pi/2$ $\quad (V = Y \Rightarrow f_V(v) = f_Y(y))$..

¿comprobar? $\int_u f_U(u)\,du = 1$, $\int_v f_V(v)\,dv = 1$ ..

15 enero 2013 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 29/1/2013
Revisión examen: 4/2/2013

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer parcial no precisan entregar el primer ejercicio.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los 2 ejercicios, siempre que en ambos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea la va bidimensional (**X**, **Y**) con fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = k \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 < y < 1 \end{cases}$$

Se define, además, la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}^2$. Calcule:

a) El valor de la constante *k* y las fdp's marginales de **X** e **Y**. ¿Son independientes?

b) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Son incorreladas?

c) La fdp de **Z**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1$.

d) $E(\mathbf{YZ})$.

e) Las medias condicionadas $E(\mathbf{X}|\mathbf{Y}=y)$ y $E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x)$.

2.- Sea $\mathbf{X}[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de 1[er] orden Normal estándar.
Se forma el proceso:

v.a. discreta N>0

$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{A}(1+\mathbf{X}[n-N])$$

siendo N una constante entera mayor que cero y **A** una v.a. discreta, independiente de $\mathbf{X}[n]$, con $P(\mathbf{A}=1)=1/4, P(\mathbf{A}=-1)=3/4$.

a) Determine la fdp de 1[er] orden del proceso $\mathbf{Y}[n]$ y calcule $P(\mathbf{Y}[n]>1)$. ¿Es $\mathbf{Y}[n]$ estacionario de orden 1?

b) Calcule la media y la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es $\mathbf{Y}[n]$ estacionario en sentido amplio?

c) Calcule la correlación cruzada entre $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$. ¿Son $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ conjuntamente estacionarios?

Suponga ahora que $\mathbf{X}[n]$ no es un ruido blanco, sino una secuencia estacionaria en sentido amplio con autocorrelación $R_X[m] = \cos\left(\frac{\pi}{2}m\right)$. Se hace pasar $\mathbf{X}[n]$ por un Sistema Lineal e Invariante con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] - \delta[n-k]$, siendo *k* una constante entera mayor que cero, obteniéndose a su salida la secuencia $\mathbf{Z}[n]$.

d) Calcule las densidades espectrales de potencia de $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$.

e) Calcule $R_Z[m]$ y determine el valor más pequeño de *k* que hace máximo $R_Z[0]$.

② a) A es v.a "tipo" Bernoulli, que funciona como un interruptor.

• $A=1$: $Y[n]=1\cdot(1+X[n-N]) = 1+N(0,1) = N(1+0,\sqrt{0+1^2}) = N(1,1)$

$$f_Y(y,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}, \quad -\infty<y<\infty$$

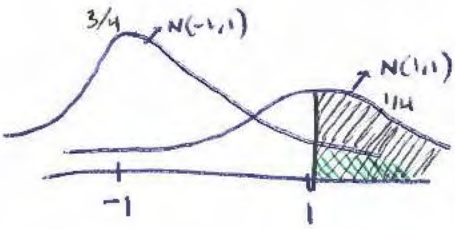
• $A=-1$: $Y[n] = -1\cdot(1+X[n-N]) = -1-N(0,1) = N(-1-0,\sqrt{0^2+1^2}) = N(-1,1)$

$$f_Y(y,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}, \quad -\infty<y<\infty$$

Resumiendo:
$$\boxed{f_Y(y,n) = P(A=1)\cdot f_Y(y,n/A=1) + P(A=-1)\cdot f_Y(y,n/A=-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}}, \quad -\infty<y<\infty$$

$Y[n]$ es estacionario de orden 1 si $f_Y(y,n)$ no depende de n ✓✓

$\Longrightarrow$ $\boxed{Y[n] \text{ estacionario de orden } 1}$



$$\boxed{P(Y[n]>1) = \underbrace{P(A=-1)}_{3/4}\cdot \underbrace{P(Y[n]>1/A=-1)}_{} + \underbrace{P(A=1)}_{1/4}\cdot \underbrace{P(Y[n]>1/A=1)}_{} =}$$

tipificamos

$$= \frac{3}{4}P(N(-1,1)>1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} \overset{!}{=} \frac{3}{4}P\left(N(0,1) > \frac{1-(-1)}{1}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}P(N(0,1)>2) + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{3}{4}(1-G(2)) + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}(1-0'9772) + \frac{1}{8} = \boxed{0'14}$$

b) $E(A) = \Sigma a_i p_i = -1\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = -0'5$

$$\boxed{E(Y[n]) = E(A\cdot(1+X[n-N])) = E(A)[E(1)+E(X[n-N])] = -0'5(1+0) = -0'5}$$

$$\boxed{R_Y[n,n+m] = E(Y[n]Y[n+m]) = E(A\cdot(1+X[n-N])A(1+X[n+m-N])) =}$$

$$= E(A^2)E[1+X[n+m-N]+X[n-N]+X[n-N]X[n+m-N]] = \quad E(A^2) = \Sigma a_i^2 p_i = (-1)^2\cdot\frac{3}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{4} = 1$$

$$= 1\cdot[\underbrace{E(1)}_{1} + \underbrace{\cancel{E(X[n+m-N]) + E(X[n-N])}}_{0} + \underbrace{E(X[n-N]X[n+m-N])}_{R_X[m]}] = 1 + R_X[m] = \boxed{1+\delta[m]}$$

$Y[n]$ es e.s.a si $\begin{cases} E(Y[n]) \text{ no depende de } n \checkmark \\ R_Y[n,n+m] \text{ no depende de } n \text{ (solo de } m) \checkmark \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{Y[n] \text{ es e.s.a}}$

c) $X[n]$, $Y[n]$ conjuntamente e.s.a si $\begin{cases} X[n] \text{ esa } \checkmark \\ Y[n] \text{ esa } \checkmark \\ R_{XY}[n,n+m] \text{ no depende de } m \text{ ¿?} \end{cases}$

$$\boxed{R_{XY}[n,n+m] = E(X[n]Y[n+m]) =}$$

$$= E(X[n]\cdot A(1+X[n+m-N])) \overset{A,X[n] \text{ ind}}{=} E(A)\cdot E(X[n]\cdot(1+X[n+m-N])) =$$

$$= E(A)\cdot[E(X[n]) + \underbrace{E(X[n]X[n+m-N])}_{R_X[m-N]}] = -0'5(0+\delta[m-N]) = \boxed{-0'5\,\delta[m-N]}$$ ✓✓

d) $\left[S_z(\Omega) = S_x(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2 = \pi\left[\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})\right]\cdot 2(1-\cos(K\Omega)) \right.$

$\left[S_x(\Omega) = TF\{R_x[m]\} = TF\{\cos(\frac{\pi}{2}m)\} = \pi\left[\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})\right] \right]$ periodo 2π

$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n]-\delta[n-K]\} = 1 - e^{-jK\Omega} = 1-(\cos(-K\Omega)+j\,sen(-K\Omega)) =$

$= 1-\cos(K\Omega)+j\,sen(K\Omega)$

$|H(\Omega)|^2 = (1-\cos(K\Omega))^2 + (sen(K\Omega))^2 = 1-2\cos(K\Omega)+\cos^2(K\Omega)+sen^2(K\Omega) =$

$= 2\cdot(1-\cos(K\Omega))$

$= 2\pi\left[(1-\cos(K(-\frac{\pi}{2})))\,\delta(\Omega+\frac{\pi}{2}) + (1-\cos(K\frac{\pi}{2}))\,\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})\right] =$

$= \boxed{2\pi(1-\cos(K\frac{\pi}{2}))\left(\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})\right)}$

e) $\left[R_z[m] = TF^{-1}\{S_z(\Omega)\} = 2(1-\cos(K\frac{\pi}{2}))\cdot TF^{-1}\{\pi\,\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})\} \right.$

$= \boxed{2(1-\cos(K\frac{\pi}{2}))\cdot\cos(\frac{\pi}{2}m)}$

$R_z[0] = 2(1-\cos(K\frac{\pi}{2}))$ es maximo si $\cos(K\frac{\pi}{2}) = -1 \rightarrow K\frac{\pi}{2} = \pi$

$\Downarrow$

$[K=2]$

Sea la v.a bidimensional (X,Y) con fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = k \quad \left\{ \begin{matrix} -1<x<1 \\ x^2<y<1 \end{matrix} \right\}$$

Se define, además, la v.a. $Z = X^2$. Calcule:

a) El valor de la constante k y las fdp's marginales de X e Y. ¿Son independientes?

b) la covarianza de X e Y. ¿Son incorreladas?

c) la fdp de Z. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1$

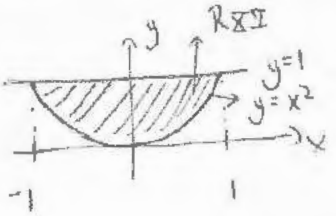
d) $E(YZ)$

e) las medias condicionadas $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$

$\boxed{\text{15 enero 2013, 1}}$

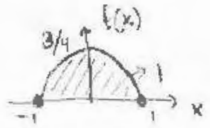
a) $f_{XY}(x,y)$ es función de densidad si $\rightarrow f_{XY}(x,y) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 \rightarrow \int_{x=-1}^{x=1}\left[\int_{y=x^2}^{y=1} k\,dy\right]dx = 1$$



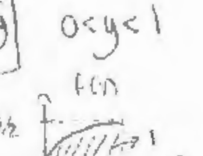
$$\rightarrow k\int_{x=-1}^{x=1}\left[y\right]_{y=x^2}^{y=1}dx = 1 \rightarrow k\int_{x=-1}^{x=1}(1-x^2)\,dx = 1 \rightarrow k\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = 1$$

$$\rightarrow k\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)}{3}\right)\right] = 1 \rightarrow \frac{4}{3}k = 1 \rightarrow \boxed{k = 3/4}$$



- Función de densidad marginal de X. $\boxed{f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=x^2}^{y=1}\frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}\left[y\right]_{y=x^2}^{y=1} = \frac{3}{4}(1-x^2)}$ $\quad -1<x<1$

- Función de densidad marginal de Y. $\boxed{f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\left[x\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} = \frac{3}{2}\sqrt{y}}$ $\quad 0<y<1$



- X e Y son v.a. independientes $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

  ¿ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1-x^2)\frac{3}{2}\sqrt{y}$? NO $\Rightarrow$ X e Y no son independientes

NOTA. Al ver que el R_{XY} NO es un rectángulo, podíamos asegurar que X e Y son Dependientes

¿comprobar? $\left\{ \begin{matrix} \int_x f_X(x)\,dx = 1 \\ \int_y f_Y(y)\,dy = 1 \end{matrix} \right\}$ ooo

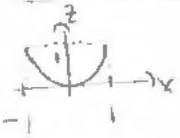
b) $C_{XY} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot \_ = 0 \Rightarrow X$ e Y incorreladas

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}\, dx dy = \int_{x=-1}^{x=1}\left[\int_{y=x^2}^{y=1} xy \frac{3}{4} dy\right]dx = \frac{3}{4}\int_{x=-1}^{x=1} x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \frac{3}{8}\int_{x=-1}^{x=1} x(1-x^4)dx = \frac{3}{8}\int_{x=-1}^{x=1}(x-x^5)dx =$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\right]_{x=-1}^{x=1} = \ldots = 0 \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ son ortogonales}$$

$$E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x f_X(x) dx = \int_{x=-1}^{x=1} x\cdot(1-x^2)dx = \int_{x=-1}^{x=1}(x-x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=1} = \ldots = 0$$

c) Transformación $Z = X^2$



$z = g(x) = x^2$

Transformación de v.a. continua (X) en v.a continua (Z)

1) $g(x)$ tiene una parte creciente y otra parte decreciente en $(-1,1) = R_X$

1ª parte $x \in (-1,0)$
1) $g_1(x) = x^2$ es continua estrictamente decreciente en $(-1,0) = R_X$
2) Existe inversa $g^{-1}(z)$ $z = x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{z} = g_1^{-1}(z)$
3) $g_1^{-1}(z)$ es continua y derivable en $(0,1) = R_Z$,
$(g_1^{-1})'(z) = -\frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{-1}{2\sqrt{z}}$

2ª parte $x \in (0,1)$
1) $g_2(x) = x^2$ es continua estrictamente creciente en $(0,1) = R_X$
2) Existe inversa $g_2^{-1}(z)$ $z = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{z} = g_2^{-1}(z)$
3) $g_2^{-1}(z)$ es continua y derivable en $(0,1) = R_Z$,
$(g_2^{-1})'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$$\boxed{f_Z(z)} = f_X(g_1^{-1}(z))|(g_1^{-1})'(z)| + f_X(g_2^{-1}(z))|(g_2^{-1})'(z)| = \frac{3}{4}(1-z)\cdot\left|\frac{-1}{2\sqrt{z}}\right| + \frac{3}{4}(1-z)\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{z}}\right| =$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\,\frac{1-z}{\sqrt{z}}}, \quad 0<z<1$$

• $\int_{z=-\infty}^{z=\infty} f_Z(z)dz = 1 \Rightarrow \int_{z=0}^{z=1}\frac{3}{4}\frac{1-z}{\sqrt{z}}dz = \frac{3}{4}\int_{z=0}^{z=1}(z^{-1/2} - z^{1/2}) = \frac{3}{4}\left[\frac{z^{1/2}}{1/2} - \frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{3}{4}\left[\left(2-\frac{2}{3}\right) - 0\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$ ✓

d) $$\boxed{E(YZ)} = E(YX^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yx^2 f_{XY}(x,y)dxdy = \int_{x=-1}^{x=1}\left[\int_{y=x^2}^{y=1} yx^2\frac{3}{4}dy\right]dx = \frac{3}{4}\int_{x=-1}^{x=1} x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1}dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int_{x=-1}^{x=1} x^2(1-x^4)dx = \frac{3}{8}\int_{x=-1}^{x=1}(x^2-x^6)dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{3}{8}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{(-1)}{7}\right)\right] = \boxed{1/7}$$

e) $$\boxed{E(X/Y=y)} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x\cdot f_X(x/y)dx = \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} x\cdot\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} x\,\frac{3/4}{\frac{3}{2}\sqrt{y}}dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} = \boxed{0}$$

$$\boxed{E(Y/X=x)} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y f_Y(y/x)dy = \int_{y=x^2}^{y=1} y\,\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}dy = \int_{y=x^2}^{y=1} y\,\frac{3/4}{\frac{3}{4}(1-x^2)}dy = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2} = \boxed{\frac{1}{2}(1+x^2)}$$

$-1<x<1$

26 noviembre 2012 **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora

Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Sean **X** e **Y** dos va's independientes. **X** es uniforme en (0,1) e **Y** es una v.a. exponencial, de parámetro λ. Determine:

a) $P(\mathbf{Y}>\mathbf{X})$.

b) La función de distribución conjunta $F_{XY}(x,y)$. Utilice este resultado para obtener $P(0.5<\mathbf{X}\leq 2, \mathbf{Y}\leq 2)$.

Se realizan ahora las transformaciones **U=Y**, **V= X+Y**. Calcule:

c) La covarianza de **U** y **V**.

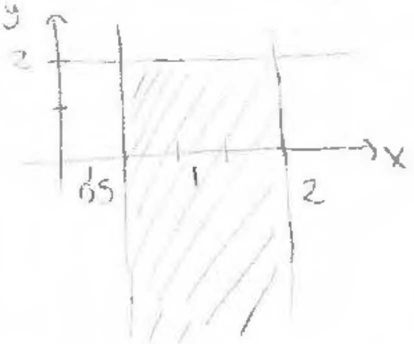
d) La fdp conjunta de (**U**, **V**) y dibuje su rango.

DATOS:

$$X\ v.a.\ uniforme\ \text{en}\,(x_1,x_2):\quad E[X]=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad Var[X]=\frac{(x_2-x_1)^2}{12}$$

$$X\ \text{v.}a.\ \text{exp}onencial: f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}U(x);\quad E(X)=\frac{1}{\lambda};\quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{P(0'5 < X \leq 2,\ Y \leq 2)} = P(X \leq 2, Y \leq 2) - P(X < 0'5, Y \leq 2) =$$



$$= F(2,2) - F(0'5,2) =$$

$$= (1-e^{-2\lambda}) - 0'5(1-e^{-2\lambda}) = \boxed{0'5(1-e^{-2\lambda})}$$

Resuelto por IGNACIO TAGARRO
Academia MONTERO ESPINOSA

c) $$\boxed{\sigma_{UV} = Cov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right) = 1/\lambda^2}$$

$$E(UV) = E(Y(X+Y)) = E(YX+Y^2) = E(YX)+E(Y^2) = E(Y)E(X)+E(Y^2) =$$

$$= 1/\lambda \cdot 1/2 + 2/\lambda^2 = \frac{1}{2\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$$

X, Y indep

$$E(U) = E(Y) = 1/\lambda \quad , \quad E(V) = E(X)+E(Y) = 1/2 + 1/\lambda$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \rightarrow E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

d) Transformación de v.a. bidimensional continua (X,Y) en v.a. bidimensional continua (U,V)

· Veamos si el jacobiano de la transformación es distinto de cero

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la fórmula de la transformación

$$\boxed{f_{UV}(u,v) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=v-u \\ y=u}} = \left.\frac{\lambda e^{-\lambda y}}{|-1|}\right|_{\substack{x=v-u \\ y=u}} = \lambda e^{-\lambda u},\quad (u,v) \in R_{UV}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = y \rightarrow \boxed{y = u} \\ v = x+y \rightarrow \boxed{x = v-u} \end{array}\right.$$

$$R_{XY}: \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1 \rightarrow 0 < v-u < 1 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v > u \\ v < u+1 \end{array}} \\ y \geq 0 \rightarrow \boxed{u \geq 0} \end{array}\right.$$

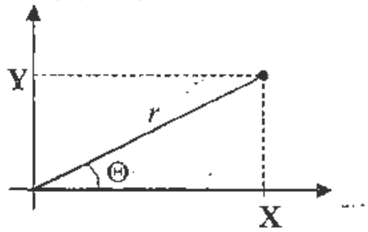
R_{UV}

29 junio 2012 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 9/7/2012
Revisión examen: 12/7/2012

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en alguno de los tres parciales no precisan entregar los ejercicios correspondientes.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los tres ejercicios, siempre que en todos ellos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 3 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea un punto aleatorio en el plano, de coordenadas polares (r,Θ), siendo r una constante positiva y Θ una v.a. uniforme en $(0, \pi/2)$.



Calcule:

a) Las fdps de las coordenadas cartesianas del punto: **X** e **Y**. Represéntelas gráficamente de forma aproximada.

b) $E(\mathbf{XY})$.

c) La fdp del área del triangulo rayado: $\mathbf{A}=\mathbf{XY}/2$ (no olvide el rango o recorrido).

Suponga ahora que la v.a. Θ es discreta y puede tomar los posibles valores $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ con igual probabilidad.

d) Caracterice probabilísticamente las v.a.'s **X** e **Y** y calcule sus medias y varianzas.

2.- Sea la va bidimensional (**X**, **Y**) con fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{k}{x^2y^2} \quad x>1, y>1$$

Calcule:

a) El valor de la constante k.

b) Las fdp's marginales de **X** e **Y**. ¿Son independientes?

c) $P[\max(\mathbf{X},\mathbf{Y})\leq 2]$. , $P(\min(\mathbf{X},\mathbf{Y})\leq 2)$

Se realizan las transformaciones $\mathbf{U}=\mathbf{XY}$, $\mathbf{V}=\mathbf{X}/\mathbf{Y}$. Calcule:

d) La fdp conjunta de $(\mathbf{U},\mathbf{V})$ y dibuje su rango en el plano (u,v).

e) Verifique que la fdp conjunta obtenida cumple las condiciones para serlo.

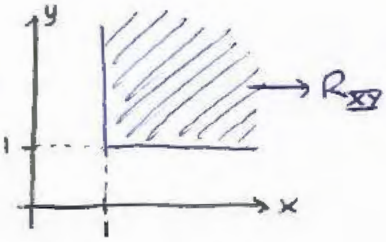
f) Las fdp marginales de U, V. ¿Son independientes?

g) La función de distribución de V.

SIGUE AL DORSO →

② a) $f_{XY}(x,y)$ es función densidad si $\begin{cases} f_{XY}(x,y) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 \end{cases}$

$$\longrightarrow \int_{x=1}^{x=\infty}\left[\int_{y=1}^{y=\infty} \frac{K}{x^2y^2}\,dy\right]dx = 1 \longrightarrow K\int_{x=1}^{x=\infty}\frac{1}{x^2}\underbrace{\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{y=1}^{y=\infty}}_{-1/y}dx = 1 \rightarrow$$



$$\longrightarrow K\int_{x=1}^{x=\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1 \longrightarrow K\underbrace{\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{x=1}^{x=\infty}}_{-1/x} = 1 \longrightarrow \boxed{K=1}$$

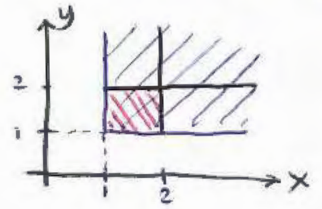
b) $$\left[f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=1}^{y=\infty}\frac{1}{x^2y^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{y=1}^{y=\infty} = \frac{1}{x^2},\ x>1\right]$$

$$\left[f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=1}^{x=\infty}\frac{1}{x^2y^2} = \dots = \frac{1}{y^2},\ y>1\right]$$

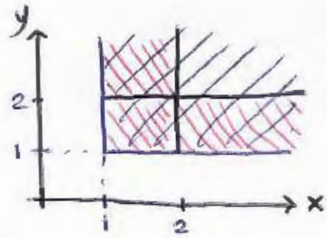
X e Y intercambiables en el ejercicio

$$\left.\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \frac{1}{x^2y^2}, \quad x>1,\ y>1 \\ f_X(x)\cdot f_Y(y) &= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}, \quad x>1,\ y>1 \end{aligned}\right\} = \longrightarrow X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

c)



$$\left[P(\max(X,Y)\leq 2) = \int_{x=1}^{x=2}\int_{y=1}^{y=2} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=1}^{x=2}\int_{y=1}^{y=2}\frac{1}{x^2y^2}\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{4}\right]$$



$$\left[P(\min(X,Y)\leq 2) = 1 - \int_{x=2}^{x=\infty}\int_{y=2}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \dots = \frac{3}{4}\right]$$

d) Transformación $\begin{cases} U = XY \\ V = X/Y \end{cases}$

• Transformación de v.a bidimensional continua (X,Y) a v.a bidimensional continua (U,V)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & x(-1)y^{-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-2x}{y} \neq 0 \Rightarrow$$ Podemos aplicar la formula de la transformación

$$f_{UV}(u,v) = \frac{f_{XY}(x,y)}{|J|} = \frac{\frac{1}{x^2y^2}}{\left|\frac{-2x}{y}\right|} = \frac{1}{2x^3y}\Bigg|_{\substack{x=\sqrt{uv} \\ y=\sqrt{u/v}}} = \frac{1}{2(\sqrt{uv})^3\sqrt{\frac{u}{v}}} = \frac{1}{2u^2v},\ \text{si } (u,v)\in R_{UV}$$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{y} \\ x = vy \end{cases} \quad \frac{u}{y} = vy \rightarrow y = \sqrt{\frac{u}{v}} \rightarrow x = \sqrt{uv}$$

3.- A partir del proceso estocástico X[n], discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, se definen los procesos $X_1[n]=X[n+k]$ y $X_2[n]=X[kn]$, siendo k una constante entera mayor que 1.

a) Indique si $X_1[n]$ y $X_2[n]$ son procesos estacionarios en sentido amplio.

b) Indique si $X[n]$ y $X_1[n]$ ó $X[n]$ y $X_2[n]$ son procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio

Suponga ahora que el p.e. X[n] anterior es un ruido blanco estacionario, de media cero y varianza σ_X^2, y es la entrada del sistema que se representa en la figura

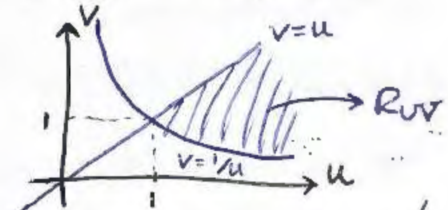
$$X[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{S.L.I.}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow Y[n]$$

donde $h[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & n=-1,0,+1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

c) Obtenga la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso Y[n].

d) Obtenga la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $Z[n]=Y[2n]$.

$$R_{UV}:\ \begin{Bmatrix} x>1 \\ y>1 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{uv}>1 \longrightarrow uv>1 \longrightarrow v>\frac{1}{u} \\ \sqrt{\frac{u}{v}}>1 \longrightarrow \frac{u}{v}>1 \longrightarrow v<u \end{cases}$$



e) Comprobación

$$\iint f_{UV}(u,v)\,du\,dv = \int_{u=1}^{u=\infty}\left[\int_{v=\frac{1}{u}}^{v=u}\frac{1}{2u^2v}\,dv\right]du = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=\infty}\frac{1}{u^2}\Big[Ln\,v\Big]_{v=\frac{1}{u}}^{v=u}du =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_{u=1}^{u=\infty}\frac{1}{u^2}Ln\,(u^{\cancel{2}})\,du = \int_{u=1}^{u=\infty}\frac{1}{u^2}Ln\,u\,du$$

POR PARTES $\int a\,db = ab - \int b\,da$

$a = Ln\,u \longrightarrow da = \frac{1}{u}du$

$db = \frac{1}{u^2}du \longrightarrow b = \int\frac{1}{u^2}du = \frac{-1}{u}$

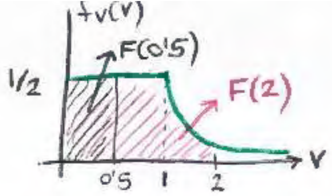
$$= \left[\frac{-1}{u}Ln\,u\right]_1^{\infty} + \int_{u=1}^{u=\infty}\frac{1}{u^2}du = (0-0) + \Bigg[\underbrace{\frac{u^{-1}}{-1}}_{-1/u}\Bigg]_1^{\infty} = 1\ \checkmark\checkmark$$

f) $$\left[f_U(u) = \int_{v=-\infty}^{v=\infty} f_{UV}(u,v)\,dv = \int_{v=\frac{1}{u}}^{v=u}\frac{1}{2u^2v}\,dv = \dots = \frac{Ln\,u}{u^2},\quad u>1\right]$$

$$\left[f_V(v) = \int_{u=-\infty}^{u=\infty} f_{UV}(u,v)\,du = \begin{cases} \cdot\ 0<v<1:\ \int_{u=1/v}^{u=\infty}\frac{1}{2u^2v}du = \dots = \frac{1}{2} \\ \cdot\ v>1:\ \int_{u=v}^{u=\infty}\frac{1}{2u^2v}\,du = \dots = \frac{1}{2v^2}\end{cases}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= \frac{1}{2u^2v} \\ f_U(u)\,f_V(v) &= \frac{Ln\,u}{u^2}\cdot\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2v^2}\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}\neq \Longrightarrow$$ La U y V NO son independientes

g) $f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<v<1 \\ \frac{1}{2v^2}, & v>1 \end{cases}$



$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v<0 \\ \int_0^v f_V(v)\,dv = \int_0^v \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}[v]_0^v = \frac{1}{2}v, & 0 \leq v < 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2}dv + \int_1^v \frac{1}{2v^2}dv = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{v^{-1}}{-1}\right]_1^v = 1 - \frac{1}{2v}, & v>1 \end{cases}$$

③ a) ¿ $X_1[n]$ es esa?

$E(X_1[n]) = E(X[n+k]) \overset{X[n] \text{ e.s.a}}{=} \eta_X$ ✓✓

$R_{X_1}[n, n+m] = E(X_1[n]X_1[n+m]) = E(X[n+k]X[n+m+k]) \overset{X[n] \text{ esa}}{=} R_X[m]$ ✓✓

$\Rightarrow X_1[n]$ e.s.a es.

¿ $X_1[n]$ es e.s.a?

$E(X_2[n]) = E(X[kn]) \overset{X[n] \text{ esa}}{=} \eta_X$

$R_{X_2}[n, n+m] = E(X_2[n]X_2[n+m]) = E(X[nk]X[(n+m)k] = R_X[km]$ ✓✓

$\Rightarrow X_2[n]$ es e.s.a

b) $X[n]$ y $X_1[n]$ son conjuntamente e.s.a si $\begin{cases} ① X[n] \text{ esa } ✓ \\ ② X_1[n] \text{ esa } ✓ \\ ③ R_{XX_1}[n, n+m] \text{ no depende de } n \text{ (solo de } m) \end{cases}$

$R_{XX_1}[n, n+m] =$

$= E(X[n]X_1[n+m]) = E(X[n]X[n+m+k]) = R_X[m+k]$ ✓

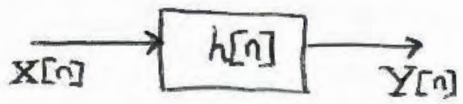
$\Downarrow$ $X[n], X_1[n]$ conjuntamente esa

$X[n]$ y $X_2[n]$ IGUAL CON 2

$R_{XX_2}[n, n+m] = E(X[n]X_2[n+m]) = E(X[n]X[k(n+m)]) = R_X[(k-1)n + km]$ ✗

$\Rightarrow X, X_2$ <u>NO</u> conjuntamente esa

c) $X[n]$ ruido blanco estricto $\left\{ \begin{matrix} \eta_x = 0 \\ \sigma_x^2 \end{matrix} \right\}$



$$h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1])$$

$$R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m] =$$

$X[n]$ ruido blanco de media nula
$R_X[m] = \sigma_x^2 \, \delta[m]$

$\delta[m]$ es par

$$= \sigma_x^2 \delta[m] * \frac{1}{3}(\delta[m+1] + \delta[m] + \delta[m-1]) * \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\delta[-m+1]}_{\substack{=\delta[-(m-1)] \\ =\delta[m-1]}} + \underbrace{\delta[-m]}_{\delta[m]} + \underbrace{\delta[-m-1]}_{\substack{\delta[-(m+1)] \\ =\delta[m+1]}}\Big) =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{9}\big(\delta[m] + \delta[m+1] + \delta[m+2] + \delta[m-1] + \delta[m] + \delta[m+1] + \delta[m-2] + \delta[m-1] + \delta[m]\big) =$$

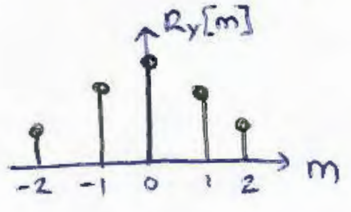
$$= \boxed{\frac{\sigma_x^2}{9}\left[\delta[m+2] + 2\delta[m+1] + 3\delta[m] + 2\delta[m-1] + \delta[m-2]\right]}$$

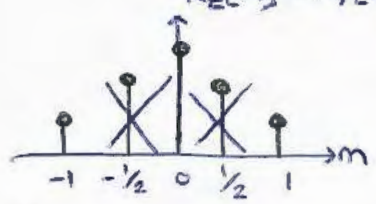
$$S_Y(\Omega) = TF\{R_Y[m]\} = TF\left\{\frac{\sigma_x^2}{9}[\cdots]\right\} = \frac{\sigma_x^2}{9}\left[e^{j\Omega 2} + 2e^{j\Omega} + 3 + 2e^{-j\Omega} + e^{-j\Omega 2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\sigma_x^2}{9}\left[2\cos(2\Omega) + 4\cos\Omega + 3\right]} \quad -\pi < \Omega < \pi \ \text{ periodo } 2\pi$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

d) $Z[n] = Y[2n]$





$$\boxed{R_Z[m] = \frac{\sigma_x^2}{9}\left[\delta[m+1] + 3\delta[m] + \delta[m-1]\right]}$$

$$S_Z(\Omega) = TF\{R_Z[m]\} = TF\{\ \} = \frac{\sigma_x^2}{9}\left[e^{j\Omega} + 3 + e^{-j\Omega}\right] =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{9}\left[2\cos\Omega + 3\right] \quad -\pi < \Omega < \pi \quad \text{periodo } 2\pi$$

Sea un punto aleatorio en el plano, de coordenadas polares (r, Θ), siendo r una constante positiva y Θ una v.a. uniforme en $(0, \pi/2)$. Calcule:

a) Las fdps de las coordenadas cartesianas del punto: X e Y. Represéntelas gráficamente de forma aproximada

b) $E(XY)$

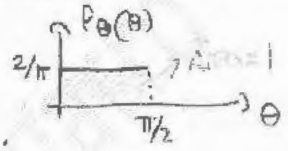
c) La fdp del área del triángulo rayado: $A = XY/2$ (no olvide el rango o recorrido)

Suponga ahora que la v.a. Θ es discreta y puede tomar los posibles valores $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ con igual probabilidad

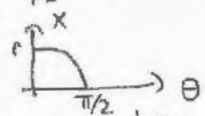
d) Caracterice probabilísticamente las v.a. X e Y y calcule sus medias y varianzas

29 junio 2012, 1

V.a. $\Theta \sim U(0, \pi/2)$, $f_\Theta(\theta) = \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$, $0 < \theta < \pi/2$



Transformación: $X = r\cos\Theta = g(\Theta)$,



Transformación de v.a. continua (Θ) a v.a. continua (X)

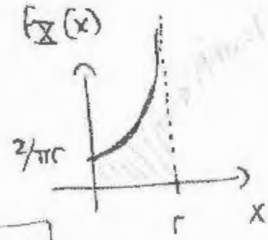
V.a. continua → V.a. continua

1) $g(\theta)$ es continua estrictamente decreciente en $(0, \pi/2) = R_\Theta$

2) Existe inversa $g^{-1}(x)$: $x = r\cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\frac{x}{r} = g^{-1}(x)$

3) $g^{-1}(x)$ es continua y derivable en $(0, r) = R_X$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{-1 \cdot \frac{1}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{r^2-x^2}}$$



Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$$\boxed{f_X(x) = f_\Theta(g^{-1}(x))\,|(g^{-1})'(x)| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{-1}{\sqrt{r^2-x^2}}\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}, \quad 0 < x < r}$$

Transformación: $Y = r\,\mathrm{sen}\,\Theta = h(\theta)$,

V.a. continua → V.a. continua

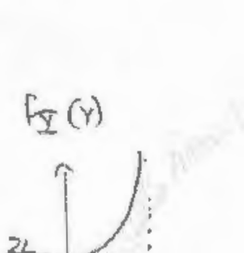
Transformación de una v.a. continua (Θ) en v.a. continua (Y)

1) $h(\theta)$ es continua estrictamente creciente en $(0, \pi/2) = R_\Theta$

2) Existe inversa $h^{-1}(y)$: $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \arcsen\frac{y}{r} = h^{-1}(y)$

3) $h^{-1}(y)$ es continua y derivable en $(0, r) = R_Y$

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1/r}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}$$



Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación

$$\boxed{f_Y(y) = f_\Theta(h^{-1}(y))\,|(h^{-1})'(y)| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2-y^2}}, \quad 0 < y < r}$$

b) $\boxed{E(XY)} = E(r\cos\Theta \cdot r\,\text{sen}\Theta) = \dfrac{r^2}{2} E(\text{sen}2\Theta) = \dfrac{r^2}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}2\theta \cdot f_\Theta(\theta)d\theta = \dfrac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2} \text{sen}2\theta \cdot \dfrac{2}{\pi}d\theta =$

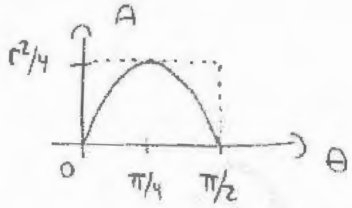
$\text{sen}(2\Theta) = 2\,\text{sen}\Theta\cos\Theta$

$= \dfrac{r^2}{\pi}\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{-r^2}{2\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \dfrac{-r^2}{2\pi}(-1-1) = \boxed{\dfrac{r^2}{\pi}}$

c) Transformación

$A = XY/2 = r\cos\Theta \cdot r\,\text{sen}\Theta/2 = \dfrac{r^2}{4}\text{sen}2\Theta = g(\theta)$

$\text{sen}2\Theta = 2\,\text{sen}\Theta\cos\Theta$



Transformación de v.a. continua (Θ) en v.a. continua (A)

V.a. continua
↓
V.a. continua

1) $g(\theta)$ tiene parte creciente y parte decreciente en $(0,\pi/2) = R_\Theta$

⇓

1ª parte: 1) $g_1(\theta)$ es continua estrictamente creciente en $(0,\pi/4) = R_\Theta$

$\theta \in (0,\pi/4)$ 2) Existe inversa $g_1^{-1}(a)$: $a = \dfrac{r^2}{4}\text{sen}2\theta \rightarrow \theta = \dfrac{1}{2}\arcsen\dfrac{4a}{r^2} = g_1^{-1}(a)$

3) $g_1^{-1}(a)$ es continua y derivable en $(0, r^2/4) = R_A$

$(g_1^{-1})'(a) = \dfrac{1}{2}\dfrac{4/r^2}{\sqrt{1-\left(\frac{4a}{r^2}\right)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{r^4-16a^2}}$

2ª parte 1) $g_2(\theta)$ es continua estrictamente decreciente en $(\pi/4,\pi/2) = R_\Theta$

$\theta \in (\pi/4,\pi/2)$ 2) Existe inversa $g_2^{-1}(a)$: $a = \dfrac{r^2}{4}\text{sen}2\theta \rightarrow \theta = \dfrac{1}{2}\arcsen\dfrac{4a}{r^2} = g_2^{-1}(a)$

3) $g_2^{-1}(a)$ es continua y derivable en $(0, r^2/4) = R_A$.

$(g_2^{-1})'(a) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4/r^2}{\sqrt{1-\left(\frac{4a}{r^2}\right)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{r^4-16a^2}}$

Se cumplen las tres condiciones, entonces podemos aplicar la transformación:

$f_A(a) = f_\Theta(g_1^{-1}(a))\left|(g_1^{-1})'(a)\right| + f_\Theta(g_2^{-1}(a))\left|(g_2^{-1})'(a)\right| = \dfrac{2}{\pi}\left|\dfrac{2}{\sqrt{r^4-16a^2}}\right| + \dfrac{2}{\pi}\left|\dfrac{2}{\sqrt{r^4-16a^2}}\right| =$

$= \boxed{\dfrac{8}{\pi\sqrt{r^4-16a^2}}, \quad 0 < a < r^2/4}$

se podría comprobar que

$\displaystyle\int_{a=-\infty}^{a=\infty} f_A(a)\,da = 1$

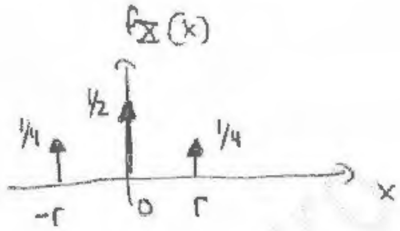
29 junio 2012, 1 (continuación)

d) Transformación de v.a. discreta (Θ) en v.a. discreta (X)

$$\begin{cases} \Theta = 0 \rightarrow X = r\cdot\cos 0 = r \\ \Theta = \pi/2 \rightarrow X = r\cos\pi/2 = 0 \\ \Theta = \pi \rightarrow X = r\cos\pi = -r \\ \Theta = 3\pi/2 \rightarrow X = r\cos 3\pi/2 = 0 \end{cases}$$

V.a. discreta ↓ V.a. discreta

$$\begin{cases} P(X=-r) = P(\Theta=\pi) = 1/4 \\ P(X=0) = P(\Theta=\pi/2) + P(\Theta=3\pi/2) = 1/2 \\ P(X=r) = P(\Theta=0) = 1/4 \end{cases}$$



$f_X(x) = \frac{1}{4}\delta(x+r) + \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{4}\delta(x-r)$

· $\mu_X = E(X) = \Sigma x_i p_i = -r\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + r\cdot\frac{1}{4} = 0$

· $\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{r^2}{2} - 0^2 = r^2/2$

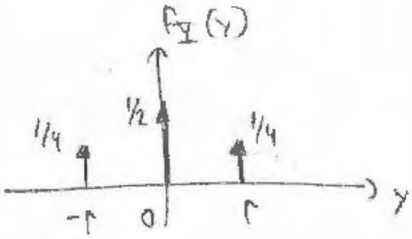
$E(X^2) = \Sigma x_i^2 p_i = (-r)^2\cdot\frac{1}{4} + 0^2\cdot\frac{1}{2} + r^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{r^2}{2}$

V.a. discreta ↓ V.a. discreta

Transformación de v.a. discreta (Θ) en v.a. discreta (Y)

$$\begin{cases} \Theta = 0 \rightarrow Y = r\,\mathrm{sen}\,0 = 0 \\ \Theta = \pi/2 \rightarrow Y = r\,\mathrm{sen}\,\pi/2 = r \\ \Theta = \pi \rightarrow Y = r\,\mathrm{sen}\,\pi = 0 \\ \Theta = 3\pi/2 \rightarrow Y = r\,\mathrm{sen}\,3\pi/2 = -r \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(Y=-r) = P(\Theta=3\pi/2) = 1/4 \\ P(Y=0) = P(\Theta=0) + P(\Theta=\pi) = 1/2 \\ P(Y=r) = P(\Theta=\pi/2) = 1/4 \end{cases}$$



$f_Y(y) = \frac{1}{4}\delta(y+r) + \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{4}\delta(y-r)$

· $\mu_Y = E(Y) = \Sigma y_i p_i = -r\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + r\cdot\frac{1}{4} = 0$

· $\sigma_Y^2 = V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = r^2/2 - 0^2 = r^2/2$

$E(Y^2) = \Sigma y_i^2 p_i = (-r)^2\cdot\frac{1}{4} + 0^2\cdot\frac{1}{2} + r^2\cdot\frac{1}{4} = r^2/2$

18 enero 2012 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 1/2/2012
Revisión examen: 7/2/2012

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer o segundo parcial no precisan entregar los ejercicios correspondientes.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los tres ejercicios, siempre que en todos ellos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 3 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea **X** una v.a. uniforme en (0,1). Se define la v.a. **Y**=g(**X**), siendo:

$$g(x)=\begin{cases} x/a & \text{si } x\le a \\ a/x & \text{si } x>a \end{cases}$$

donde a es una constante que verifica la condición $0<a<1$. Calcule:

a) La fdp de la v.a. **Y**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy=1$.

b) $E(\mathbf{Y}^2)$.

Se define ahora la v.a. $\mathbf{Z}=h(\mathbf{X})$, siendo:

$$h(x)=\begin{cases} 1/4 & \text{si } x\le a \\ 3/4 & \text{si } x>a \end{cases}$$

con a la misma constante de los apartados anteriores. Calcule:

c) $E(\mathbf{YZ})$.

d) El valor de la constante a que minimiza $E[(\mathbf{X}-\mathbf{Z})^2]$.

2.- Sea **X** una v.a. de Bernouilli de parámetro p y sean $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ dos v.a.´s $N(\mu,\sigma)$ y $N(-\mu,\sigma)$, respectivamente. **X**, $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ son independientes. Se forma la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\,\mathbf{Y}_1+(1-\mathbf{X})\,\mathbf{Y}_2$. Calcule:

a) La media y varianza de **Z**.

b) La fdp de **Z**.

c) $P(\mathbf{Z}<-\mu)$.

d) La covarianza de **X** y **Z**.

Datos:

X es v.a. $N(\mu,\sigma) \Rightarrow f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, $F_X(x)=\mathrm{G}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $E(\mathbf{X})=\mu$, $\mathrm{var}(\mathbf{X})=\sigma^2$

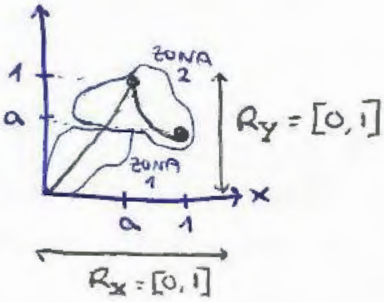
$$\mathrm{G}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

SIGUE AL DORSO →

① V.a $X = U(0,1)$: $f_X(x) = 1$, $0 < x < 1$

Transformación $Y = g(X)$

$y = g(x)$



a) Transformación de v.a continua (X) en v.a continua (Y)

$g(x)$ tiene parte creciente y parte decreciente en $R_X = [0,1]$

PARTE 1

$0 \le x < a$

1) $g_1(x) = \frac{x}{a}$ es continua estrictamente creciente en $R_X = [0,a]$

2) Existe inversa $g_1^{-1}(y)$: $y = \frac{x}{a} \rightarrow \boxed{x = ay = g_1^{-1}(y)}$

3) $g_1^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_Y = [0,1]$

$$\boxed{(g_1^{-1})'(y) = a}$$

PARTE 2

$a < x \le 1$

1) $g_2(x) = \frac{a}{x}$ es continua estrictamente creciente en $R_X = (a,1]$

2) Existe inversa $g_2^{-1}(y)$: $y = \frac{a}{x} \rightarrow \boxed{x = \frac{a}{y} = g_2^{-1}(y)}$

3) $g_2^{-1}(y)$ es continua y derivable en $R_Y = [a,1]$

$$\boxed{(g_2^{-1})'(y) = a \cdot (-1) \cdot y^{-2} = \frac{-a}{y^2}}$$

Se cumplen las 3 condiciones, podemos aplicar la fórmula de la transformación :

$$f_Y(y) = f_X(x = g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)| + f_X(x = g_2^{-1}(y)) \cdot |(g_2^{-1})'(y)|$$

$$= \begin{cases} \underset{\text{ZONA 1}}{\underline{0 < y < a}} : f_X(x = g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)| = 1 \cdot a = a \\ \underset{\text{ZONA 2}}{\underline{a \le y < 1}} : f_X(x = g_2^{-1}(y)) \cdot |(g_2^{-1})'(y)| + f_X(x = g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)| \\ \quad = 1 \cdot |a| + 1 \cdot \left|\frac{-a}{y^2}\right| = a\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \end{cases}$$

(comprobar)

b) $E(Y^2) =$

OPCION 1 $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^a y^2 \cdot a\, dy + \int_a^1 y^2 \cdot a\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \dots = \frac{4}{3}a - a^2$

OPCION 2 $E((g(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot 1\, dx + \int_a^1 \left(\frac{a}{x}\right)^2 \cdot 1\, dx = \dots = \frac{4}{3}a - a^2$

3.- Se define el proceso estocástico discreto en el tiempo $X[n] = A\cos\Omega_0 n$, siendo Ω_0 una constante distinta de cero y A una v.a. discreta con $P(A = +1) = P(A = -1) = ½$.

a) Obtenga la función de probabilidad de primer orden, la media y la autocorrelación del proceso X[n]. ¿Es estacionario de primer orden? ¿Es estacionario en sentido amplio? ¿Es un ruido blanco?

A partir del p.e. X[n] anterior se forma el proceso $Y_1[n] = X[n] + B\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 n$, siendo **B** una v.a. de media η_B y varianza σ_B^2.

b) Obtenga la media y autocorrelación del proceso $Y_1[n]$. ¿Qué condiciones deberían cumplir las v.a.'s **A** y **B** para que fuese estacionario en sentido amplio?

Considere ahora el proceso $Y_2[n] = A + W[n]$, siendo A la v.a. del apartado a) y W[n] un ruido blanco binario con $P\{W[n] = +1\} = P\{W[n] = -1\} = ½$ e independiente de A.

c) Calcule la densidad espectral de potencia de $Y_2[n]$ $S_{Y_2}(e^{j\Omega})$.

d) Se hace pasar $Y_2[n]$ por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso Z[n]. Calcule la densidad espectral de potencia $S_Z(e^{j\Omega})$ de Z[n].

Datos:

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b$

$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \mathrm{sen}\, b$

$\cos a \cos b = 1/2[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b = 1/2[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

c) $Z = h(X)$

$z = h(x)$

$$\left[E(YZ) = E(g(X)\cdot h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot h(x)\cdot f_X(x)\,dx = \right.$$

$$= \int_0^a \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\,dx + \int_a^1 \frac{a}{x}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\,dx =$$

$$= \frac{1}{4a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + \frac{3a}{4}\left[\ln x\right]_a^1 = \frac{a^2}{8a} + \frac{3a}{4}\left[\cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln a\right] =$$

$$\left. = \frac{1}{8}a - \frac{3a\ln 4}{4} \right]$$

d)

$$E((X-Z)^2) = E((X-h(X))^2) = E(X^2 - 2Xh(X) + h^2(X)) =$$

$$= E(X^2) - 2E(Xh(X)) + E(h^2(X)) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{} - 2\cdot\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}a^2\right) + \frac{9}{16} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{7}{48}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot 1\,dx = \frac{1}{3}$$

$$E(Xh(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot h(x)\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^a x\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\,dx + \int_a^1 x\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\,dx = \dots = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}a^2$$

$$E(\cancel{X}h^2(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) f_X(x)\,dx = \int_0^a \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 1\,dx + \int_a^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 1\,dx = \dots = \frac{9}{16} - \frac{1}{2}a$$

Queremos minimizar:

$$E((X-Z)^2): \quad \frac{\partial(E(X-Z)^2)}{\partial a} = 0 \longrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2(E(X-Z)^2)}{\partial a^2} = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$ Mínimo

(2)

v.a $X = Ber(p)$

v.a $Y_1 = N(\mu, \sigma)$ independientes

v.a $Y_2 = N(\underbrace{-\mu}_{\text{media o esperanza}}, \underbrace{\sigma}_{\text{desv típica}})$

v.a $Z_1 = XY_1 + (1-X)Y_2$

a) $\boxed{E(Z_1) = E(XY_1 + (1-X)Y_2) = E(XY_1) + E((1-X)Y_2) =}$ (X, Y_1, Y_2 indep)

$= E(X)E(Y_1) + E(1-X)E(Y_2) =$

$E(X)E(Y_1) + [E(1) - E(X)]E(Y_2) =$

$= p\cdot\mu + (1-p)\cdot(-\mu) = p\mu - \mu + p\mu = \mu(2p-1)$

$P(X=0) = 1-p$

$P(X=1) = p$

$E(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$

$V(Z) = V(XY_1 + (1-X)Y_2)$ no llega a ningún lado

$= E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu(2p-1))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2(2p$

$E(Z^2) = E((XY_1 + (1-X)Y_2)^2) = E(X^2Y_1^2 + 2XY_1(1-X)Y_2 + (1-X)^2Y_2^2)$

$= E(X^2Y_1^2) + E(2X(1-X)Y_1Y_2) + E((1-X)^2Y_2^2) =$

X, Y_1, Y_2 indep

no se puede separar (X no es independiente de $1-X$)

$= E(X^2)E(Y_1^2) + E(2X(1-X))E(Y_1)E(Y_2) + E((1-X)^2)E(Y_2^2) =$

$= E(X^2)E(Y_1^2) + 2(E(X) - E(X^2))E(Y_1)E(Y_2) + [E(1) - 2E(X) + E(X^2)]E(Y_2^2) =$

$= p\cdot(\sigma^2+\mu^2) + \cancel{2(p-p)\mu\cdot(-\mu)} + \underbrace{(1-2p+p)}_{1-p}(\sigma^2+\mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 0^2(1-p) + 1^2\cdot p = p$

$V(Y_1) = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2$

$\sigma^2 = \quad - \mu^2 \longrightarrow E(Y_1^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$V(Y_2) = E(Y_2^2) - [E(Y_2)]^2$

$\sigma^2 = \quad - (-\mu)^2 \longrightarrow E(Y_2^2) = \sigma^2 + \mu^2$

d) $$\boxed{Cov(X,Z) = E(XZ) - E(X)\cdot E(Z) = p\mu - p\cdot\mu(2p-1) = p\mu(1-2p+1) = 2p\mu(1-p)}$$

$$E(XZ) = E(\underbrace{X}\cdot\underbrace{(XY_1 + (1-X)Y_2)}) = E(X^2 Y_1) + E(X(1-X)Y_2) =$$

X, Y_1, Y_2 ind

$$= E(X^2)E(Y_1) + E(X(1-X))E(Y_2) = E(X^2)E(Y_1) + [E(X) - E(X^2)]E(Y_2) =$$

$$= p\cdot\mu + \cancel{(p-p)}(-\mu) = p\mu$$

$$0$$

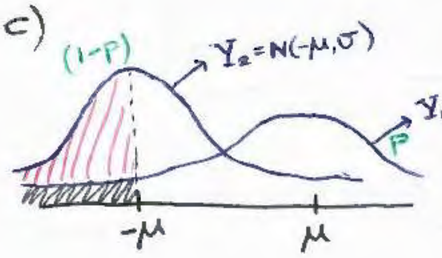
b) X es una v.a Bernulli $\rightarrow$ funciona como un interreptor

- si $X=0 \longrightarrow Z = Y_2 = N(-\mu,\sigma) \rightsquigarrow f_Z(z/X=0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-(-\mu))^2}{2\sigma^2}}$
- si $X=1 \longrightarrow Z = Y_1 = N(\mu,\sigma) \rightsquigarrow f_Z(z/X=1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$f_Z(z) = P(X=0)\cdot f(z/X=0) + P(X=1)\cdot f(z/X=1) =$$

$$= (1-p)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+\mu)^2}{2\sigma^2}} + p\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < z < \infty$$

c)



$$P(Z<-\mu) = P(X=0)\cdot P(Z<-\mu/X=0)$$

$$+ P(X=1)\cdot P(Z<-\mu/X=1) = (1-p)\cdot \underline{P(N(-\mu,\sigma)<-\mu)}$$

$$+ p\cdot \underline{P(N(\mu,\sigma)<-\mu)} \underset{\uparrow\ \text{tipificar}}{=} (1-p)\cdot P\left(N(0,1)<\frac{-\mu-(-\mu)}{\sigma}\right)$$

$$+ p\cdot P\left(N(0,1)<\frac{-\mu-\mu}{\sigma}\right) = (1-p)\,P(N(0,1)<0)$$

$$+ p\cdot P\left(N(0,1)<\frac{-2\mu}{\sigma}\right) = \boxed{(1-p)\cdot 0'5 + p\cdot G\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right)}$$

③ $X[n] = A\cos(\Omega_0 n)$, con v.a discreta $\left\{ \begin{array}{l} P(A=-1) = 1/2 \\ P(A=1) = 1/2 \end{array} \right\}$

a) PE en tiempo discreto, formado por una sola v.a discreta A

- Función de probabilidad de 1^{er} orden : $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P(X[n] = -\cos(\Omega_0 n)) = 1/2 \\ P(X[n] = \cos(\Omega_0 n)) = 1/2 \end{array} \right\}}$

A=-1

A=-1

- $X[n]$ es estacionario de orden 1 si su función de probabilidad de orden 1 NO depende de n ✗ $\Rightarrow$ $\boxed{X[n] \text{ no es estacionario de orden } 1}$

$\boxed{E(X[n]) : E(A\cdot\cos(\Omega_0 n)) = \cos(\Omega_0 n)\cdot E(A) = 0}$ $\quad E(A) = \sum a_i p_i = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0$

$R_X[n,n+m] = E(X[n]X[n+m]) = E(A\cos(\Omega_0 n) A\cos(\Omega_0(n+m))) =$

$= \cos(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m))E(A^2) = \boxed{\cos(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m))}$

$E(A^2) = \sum a_i^2 p_i = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$X[n]$ es ESA si: $\left\{ \begin{array}{l} E(X[n]) \text{ NO depende de } n \ ✓ \\ R_X[n,n+m] \text{ NO depende de } n \ ✗ \\ \text{(solo de } m) \end{array} \right.$ $\Longrightarrow$ $\boxed{X[n] \text{ NO es ESA}}$

$\Downarrow$

$\boxed{X[n] \text{ NO es ruido blanco}}$

b) $Y_1[n] = X[n] + B\,\text{sen}(\Omega_0 n) = A\cos(\Omega_0 n) + B\,\text{sen}(\Omega_0 n)$

$E(Y_1[n]) = E(A\cdot\cos(\Omega_0 n) + B\,\text{sen}(\Omega_0 n)) =$

$= \cancel{\cos(\Omega_0 n)E(A)} + \text{sen}(\Omega_0 n)E(B) = \boxed{\eta_B\cdot\text{sen}(\Omega_0 n)}$

0

$R_{Y_1}[n,n+m] = E(Y_1[n]Y_1[n+m]) = E\Big((A\cos(\Omega_0 n) + B\,\text{sen}(\Omega_0 n))(A\cos(\Omega_0(n+m)) + B\,\text{sen}(\Omega_0(n+m)))\Big)$

$= \cos(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m))E(A^2) + [\cos(\Omega_0 n)\,\text{sen}(\Omega_0(n+m)) + \text{sen}(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m))]\,E(AB)$

$+ \text{sen}(\Omega_0 n)\,\text{sen}(\Omega_0(n+m))\,E(B^2) =$

$\cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\text{sen}\, a\cdot\text{sen}\, b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\cos b + \cos a\,\text{sen}\, b$

$E(A^2) = 1$

$V(B) = E(B^2) - [E(B)]^2$

$\sigma_B^2 = \quad - \eta_B^2$

$E(B^2) = \sigma_B^2 + \eta_B^2$

$= \frac{1}{2}[\cos(\Omega_0 m) + \cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m)] +$

$+ \text{sen}(2\Omega_0 n + \Omega_0 m)\,E(AB) + \frac{1}{2}[\cos(\Omega_0 m) - \cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m)](\eta_B^2 + \sigma_B^2)$

$Y_1[n]$ es ESA si $\begin{cases} E(Y_1[n]) \text{ NO depende de } n & (1) \\ R_{Y_1}[n,n+m] \text{ NO depende de } n \text{ (solo } m) & (2) \end{cases}$

(1) $\eta_B = 0$ (2) $E(AB)=0 \Rightarrow$ A y B ortogonales : $\eta_B^2 + \sigma_B^2 = 1 \longrightarrow \sigma_B^2 = 1$, $\eta_B = 0$

$$\Longrightarrow R_{Y_1}[n,n+m] = \cos(\Omega_0 m)$$

c)

$$Y_2[n] = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{v.a discreta}}}{\underline{A}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ruido blanco}}}{\underline{W[n]}}, \text{ con } \begin{cases} P(W[n]=-1) = 1/2 \\ P(W[n]=1) = 1/2 \end{cases}$$

(A y W[n]: ind)

$$R_{Y_2}[n,n+m] = E(Y_2[n]Y_2[n+m]) = E[(A+W[n])(A+W[n+m])] =$$

$$\overset{\text{ind}}{=} E(A^2) + E(A)\cancel{E(W[n])}^{0} + E(A)\cancel{E(W[n+m])}^{0} + E(W[n]W[n+m]) =$$

$$= 1 + R_W[n,n+m] = 1 + \delta[m]$$

$W[n]$ ruido blanco de media nula $\Rightarrow R_W[m] = \sigma_W^2 \cdot \delta[m] = 1 \cdot \delta[m] = \delta[m]$

$$\boxed{\begin{aligned} &E(W[n]) = (-1)\cdot\tfrac{1}{2} + 1\cdot\tfrac{1}{2} = 0 \\ &V(W[n]) = E(W^2[n]) - E(W[n])^2 = 1 - 0^2 = 1 \\ &\boxed{E(W^2[n]) = (-1)^2\tfrac{1}{2} + 1\cdot\tfrac{1}{2} = 1} \end{aligned}}$$

$$S_{Y_2}(\Omega) = TF\{R_{Y_2}[m]\} =$$

$$= TF\{1+\delta[m]\} = \boxed{2\pi\delta(\Omega) + 1} \quad -\pi < \Omega < \pi \text{ (periodo } 2\pi)$$

d)

$$Y_2[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow Z[n]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(\Omega) = TF\{h[n]\} = TF\{\delta[n] - \delta[n-1]\} = 1 - 1\cdot e^{-j\Omega} =$$

$$= 1 - (\cos(-\Omega) + j\,\text{sen}(-\Omega)) = 1 - \cos\Omega + j\,\text{sen}\,\Omega$$

$$|H(\Omega)|^2 = (1-\cos\Omega)^2 + (\text{sen}\,\Omega)^2 = 1 - 2\cos\Omega + \underbrace{\cos^2\Omega + \text{sen}^2\Omega}_{1} = 2(1-\cos\Omega)$$

$$S_Z(\Omega) = S_{Y_2}(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2 =$$

$X[n]\delta[n] = X[0]\cdot\delta[n]$

$$= (2\pi\delta(\Omega)+1)\cdot 2(1-\cos\Omega) = 4\pi(1-\cos 0)\,\delta(\Omega) + 2(1-\cos\Omega) = 2(1-\cos\Omega)$$

28 noviembre 2011 **Segundo Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

La función de probabilidad conjunta de una v.a. bidimensional **(X,Y)** viene dado por:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = k(x_i^2 + y_j) \quad x_i = 1,2,3 \;\; y_j = 1,2$$

Calcule:

a) El valor de *k*.
b) Las funciones de probabilidad marginales. ¿Son independientes las v.a's **X**, **Y**?
c) La función de probabilidad condicional de **Y** dada **X**:
   $P(Y = y_j \mid X = x_i) \quad x_i = 1,2,3 \;\; y_j = 1,2$
d) La media condicional de **Y** dado $x_i = 2$.
e) Caracterizar la v.a. **U**=max(**X**, **Y**).

SALT
28may2011
Parcial T3

La función de probabilidad conjunta de una v.a. bidimensional (X,Y) viene dada por

$$P(X=x_i,\ Y=y_j) = k\,(x_i^2+y_j) \ ; \ x_i=1,2,3 \ , \ y_j=1,2$$

Calcule:

a) El valor de k

b) las funciones de probabilidad marginales ¿Son independientes las v.a.'s X,Y?

c) la función de probabilidad condicional de Y dada X:

$$P(Y=y_j\,/\,X=x_i) \ ; \ x_i=1,2,3 \ , \ y_j=1,2$$

d) la media condicional de Y dado $x_i=2$

e) Caracterizar la v.a. $U=\max(X,Y)$

a) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1 \rightarrow \sum_i\sum_j k\,(x_i^2+y_j)=1 \rightarrow k\left[(1^2+1)+(1^2+2)+(2^2+1)+(2^2+2)+(3^2+1)+(3^2+2)\right]=1$

$\rightarrow 37k=1 \rightarrow \boxed{k=1/37} \qquad \Rightarrow P(X=x_i,\ Y=y_j)=\frac{1}{37}(x_i^2+y_j) \ ; \ \begin{matrix} x_i=1,2,3 \\ y_j=1,2\end{matrix}$

b) Función de probabilidad marginal de X: $P(X=x_i)=\sum_{y_j} P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{y_j}\frac{1}{37}(x_i^2+y_j)=\frac{1}{37}\left[(x_i^2+1)+(x_i^2+2)\right]=$

$=\frac{1}{37}(2x_i^2+3) \ ; \ x_i=1,2,3$

Función de probabilidad marginal de Y: $P(Y=y_j)=\sum_{x_i}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{x_i}\frac{1}{37}(x_i^2+y_j)=$

$=\frac{1}{37}\left[(1^2+y_j)+(2^2+y_j)+(3^2+y_j)\right]=\frac{1}{37}(3y_j+14) \ ; \ y_j=1,2$

$$\left.\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{1}{37}(x_i^2+y_j) \\ p_i\cdot p_j &= \frac{1}{37}(2x_i^2+3)\cdot\frac{1}{37}\cdot(3y_j+14)\end{aligned}\right\} \neq \ \Rightarrow \ X \text{ e } Y \text{ son v.a.'s dependientes}$$

c) $$P(Y=y_j\,/\,X=x_i)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{\frac{1}{37}(x_i^2+y_j)}{\frac{1}{37}(2x_i^2+3)}=\frac{x_i^2+y_j}{2x_i^2+3} \ , \ \begin{matrix} x_i=1,2,3 \\ y_j=1,2\end{matrix}$$

d) $$E(Y/X=2)=\sum_{y_j} y_j\cdot P(Y=y_j/X=2)=\sum_{y_j} y_j\cdot\frac{4+y_j}{11}=1\cdot\frac{4+1}{11}+2\cdot\frac{4+2}{11}=\frac{17}{11}$$

$$P(Y=y_j/X=2)=\frac{2^2+y_j}{2\cdot 2^2+3}=\frac{4+y_j}{11} \ , \ y_j=1,2$$

e) $U = \max(X, Y)$

Los posibles valores de U son $u_i = 1, 2, 3$ (pues $\begin{matrix} x_i = 1,2,3 \\ y_j = 1,2 \end{matrix}$)

$$\begin{cases} P(U=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{37}(1^2+1) = 2/37 \\ P(U=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) = \\ \qquad = \frac{1}{37}(1^2+2) + \frac{1}{37}(2^2+1) + \frac{1}{37}(2^2+2) = 14/37 \\ P(U=3) = P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) = \frac{1}{37}(3^2+1) + \frac{1}{37}(3^2+2) = 21/37 \end{cases}$$

$\Sigma = 1$

$$\Rightarrow \boxed{P(U=u_i) = \begin{cases} 2/37, & \text{si } u=1 \\ 14/37, & \text{si } u=2 \\ 21/37, & \text{si } u=3 \end{cases}}, \quad \boxed{f_U(u) = \frac{2}{37}\delta(u-1) + \frac{14}{37}\delta(u-2) + \frac{21}{37}\delta(u-3)}$$

31 octubre 2011 **Primer Parcial Señales Aleatorias** Duración: 1 hora

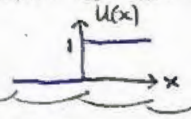
Sin libros ni apuntes

Apellidos:	
Nombre:	

Sea **X** una v.a. con fdp (exponencial):

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x)$$

Función escalón unidad



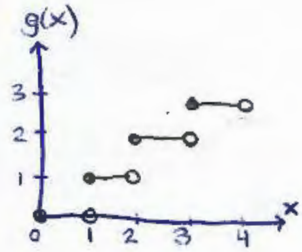
siendo $\lambda > 0$ y $U(\cdot)$ la función escalón unidad. Calcule:

a) La función de probabilidad de la v.a. $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$, siendo $g(\cdot)$ la función "parte entera": $g(x) = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) si y sólo si $k \le x < k+1$. Compruebe que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\mathbf{Y} = k) = 1$.

b) La media de la v.a. **Y**.

c) La fdp de la v.a. $\mathbf{Z} = +\sqrt{|\mathbf{X}|}$ (no olvide su rango o recorrido).

d) $P\left(\mathbf{Z} > 1/\sqrt{\lambda}\right)$.



$$\text{v.a } X : \; f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \; x \ge 0$$

a) Transformación $Y = g(X)$ $\quad y = g(x) = k, \; k \le x < k+1$

Transformación de v.a continua (X) en v.a discreta (Y)

$$\Big[P(Y=k) = P(k \le X < k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx = -\int_k^{k+1} -\lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_k^{k+1} =$$

$$= -\left(e^{-\lambda(k+1)} - e^{-\lambda k}\right) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda k - \lambda} = e^{-\lambda k} \cdot (1 - e^{-\lambda}), \; k = 0, 1, 2, \ldots \Big]$$

$$\Big[\text{Comprobamos: } \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (1 - e^{-\lambda}) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda})^k}_{\substack{\text{serie en} \\ \text{pr. geométrica} \\ r = e^{-\lambda}}} =$$

$$= (1 - e^{-\lambda}) \cdot \frac{0 \cdot e^{-\lambda} - 1}{e^{-\lambda} - 1} = \frac{e^{-\lambda} - 1}{e^{-\lambda} - 1} = 1 \Big]$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

b)

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda k} \cdot (1 - e^{-\lambda}) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda k} = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} (-) \frac{d}{d\lambda}(e^{-\lambda k}) = (e^{-\lambda} - 1) \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda k}) =$$

$$= (e^{-\lambda} - 1) \frac{d}{d\lambda} \frac{(-1)}{e^{-\lambda} - 1} = (1 - e^{-\lambda}) \frac{d}{d\lambda} (e^{-\lambda} - 1)^{-1} = (1 - e^{-\lambda}) \cancel{(-1)} (e^{-\lambda} - 1)^{-2} \cdot e^{-\lambda} \cancel{(-1)}$$

$$= \frac{(1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda}}{(e^{-\lambda} - 1)^2} = \frac{\cancel{(1 - e^{-\lambda})} e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^{\cancel{2}}} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

c) Transformación $Z = +\sqrt{X}$

$$z = h(x) = +\sqrt{x}$$

Transformación de v.a continua (X) en v.a continua (Z)

1) $h(x)$ es continua estrictamente creciente en $R_X = [0, \infty)$

2) Existe inversa $h^{-1}(z)$: $z = +\sqrt{x} \longrightarrow \left[x = z^2 = h^{-1}(z)\right]$

3) $h^{-1}(z)$ es continua y derivable en $R_Z = [0, \infty)$ $\quad \left[(h^{-1})'(z) = 2z\right]$

Se cumplen las 3 condiciones, podemos aplicar la formula de la transf:

$$\left[f_Z(z) = f_X(x=h^{-1}(z)) \cdot |(h^{-1})'(z)| = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot z^2} \cdot 2z = 2\lambda z \cdot e^{-\lambda z^2} \quad , \quad z \geq 0\right]$$

comprobar $\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1$

d)

OPCION 1

$$\left[\int_{1/\sqrt{\lambda}}^{\infty} f_Z(z)\,dz = -\int_{1/\sqrt{\lambda}}^{\infty} -2\lambda z \cdot e^{-\lambda z^2}\,dz = -\left[e^{-\lambda z^2}\right]_{1/\sqrt{\lambda}}^{\infty} = -(\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} - e^{1}) = e^{1}\right]$$

OPCION 2

$$P\left(+\sqrt{X} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(X > \frac{1}{\lambda}\right) = \int_{1/\lambda}^{\infty} f_X(x)\,dx = -\int_{1/\lambda}^{\infty} -\lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_{1/\lambda}^{\infty} =$$

$$= -(\cancel{e^{-\infty}} - e^{-1}) = e^{1}$$