simplyjarod.com

SSIT

Carpeta Montero sólo problemas

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

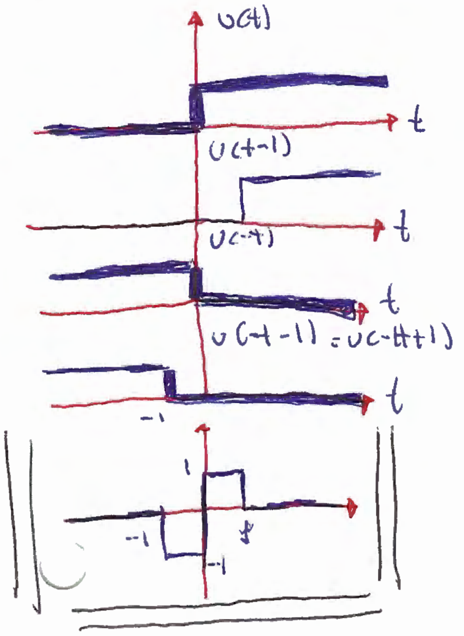
SSIT
Problemas de examen

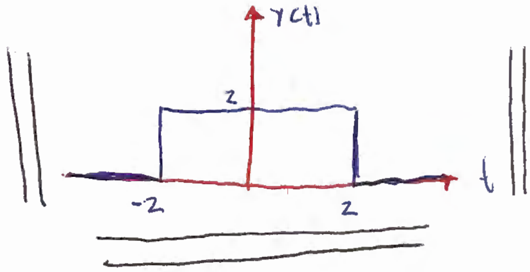
Tema 1

JUNIO 1986

1. Hállese la convolución de las señales

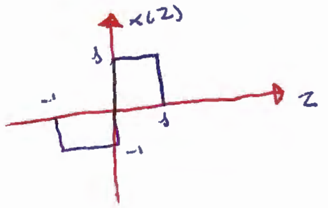
$$x(t) = u(t) - u(t-1) - u(-t) + u(-t-1) \quad \text{y} \quad y(t) = 2[u(t+2) - u(t-2)]$$

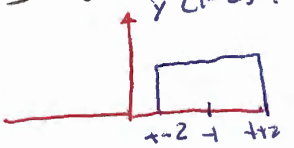




$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)\cdot y(t-z)\, dz$$

$y(t-z) = y(-(z-t))$



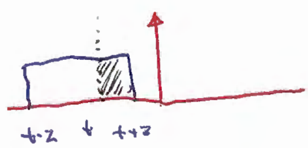


z

- caso $t+2<-1 \to t<-3$

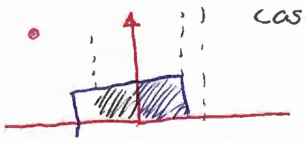
  $z(t)=0$

- caso $-1 < t+2 < 0 \to -3<t<-2$



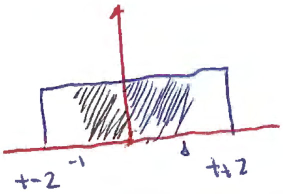
$$z(t) = \int_{-1}^{t+2} -1\cdot 2\, dz = -2\,[z]_{-1}^{t+2} = -2(t+2+1) = -2t-6$$

- caso $0<t+2<1 \to -2<t<-1$



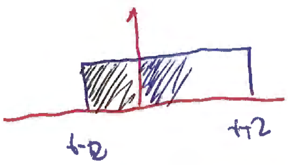
$$z(t) = \int_{-1}^{0} (-1)\cdot 2\, dz + \int_{0}^{t+2} 1\cdot 2\, dz = 2t+2$$

• caso $t-2<-1 \rightarrow t<1$ y $-1<t<1$
$t+2>1 \rightarrow t>-1$



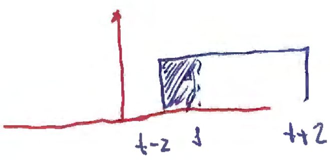
$$Z(t) = \int_{-1}^{0} (-1).2.\,dz + \int_{0}^{1} 1.2\,dz = 0$$

• caso $-1< t-2 <0 \rightarrow 1<t<2$



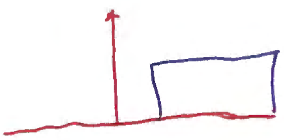
$$Z(t) = \int_{t-2}^{0} (-1).2.\,dz + \int_{0}^{1} 1.2.\,dz = 2t-2$$

• caso $0<t-2<1 \rightarrow 2<t<3$



$$Z(t) = \int_{t-2}^{1} 1.2.\,dz = 6-2t$$

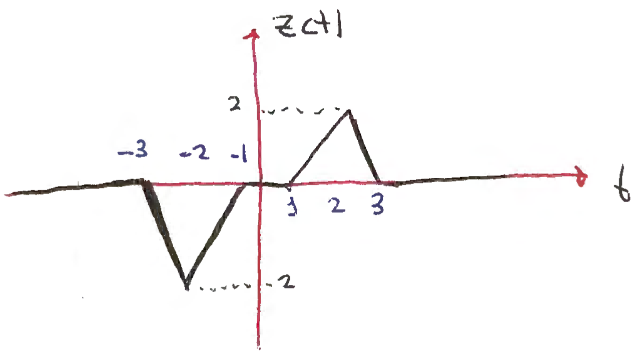
• caso $t>3$ $(t-2>1)$



$Z(t)=0$

En resumen :

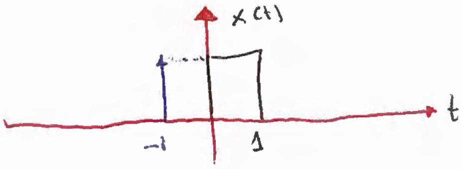
$$Z(t) = \begin{cases} 0 & t<-3 \\ -2t-6 & -3<t<-2 \\ 2t+2 & -2<t<-1 \\ 0 & -1<t<1 \\ 2t-2 & 1<t<2 \\ -2t+6 & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$

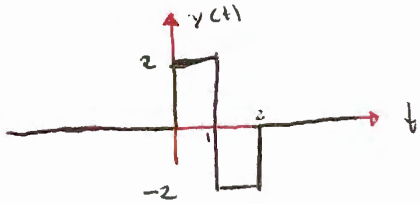


SEPTIEMBRE 1987

1. Calcule gráficamente la convolución $z(t) = x(t) * y(t)$ donde:

$$x(t) = \delta(t+1) + \underbrace{u(t) - u(t-1)}_{x_1(t)} \qquad \text{y} \qquad y(t) = 2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)$$



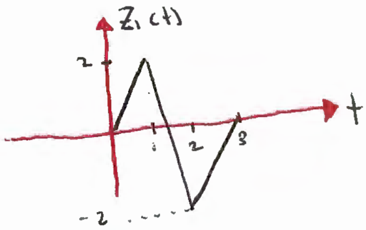


$z(t) = [\delta(t+1) + x_1(t)] * y(t) =$

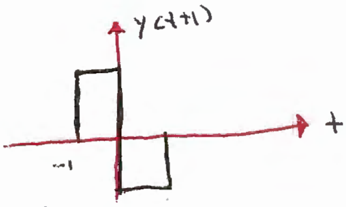
$\delta(t+1) * y(t) + x_1(t) * y(t) =$

$y(t+1) + \underbrace{x_1(t) * y(t)}_{z_1(t)}$

$$z_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0<t<1 \\ 6-4t, & 1<t<2 \\ 2t-6, & 2<t<3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

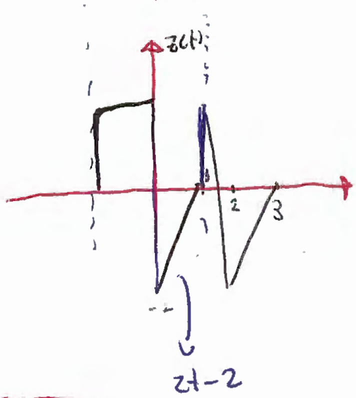


$\oplus$ =



tramo en que se solapa:

$2t + (-2) = 0 \quad 2t-2$ //



$$\boxed{z(t) = \begin{cases} 0, & t<-1 \\ 2, & -1<t<0 \\ 2t-2, & 0<t<1 \\ 6-4t, & 1<t<2 \\ 2t-6, & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}}$$

FEBRERO 1999

1. Para caracterizar un sistema, aplicamos a su entrada las siguientes señales, obteniéndose respectivamente como salida:

$$x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = 0$$
$$x_2[n] = u[n-1] \rightarrow y_2[n] = nu[n]$$
$$x_3[n] = \delta[n-3] \rightarrow y_3[n] = u[n-2]$$
$$x_4[n] = \delta[n] - 3\delta[n-3] \rightarrow y_4[n] = nu[n]$$

Justifique razonadamente que el sistema no cumple las siguientes propiedades:

a) Linealidad
b) Invariabilidad temporal
c) Estabilidad
d) Invertibilidad

a. Linealidad

$X_4[n] = X_1[n] - 3X_2[n] \rightarrow \boxed{} \rightarrow Y_4[n] = Y_1[n] - 3Y_3[n] = 0 - 3u[n-2].$

En realidad sale que $Y_4[n] = n.u[n]$, con lo que no es un sistema lineal.

b. Invariabilidad temporal

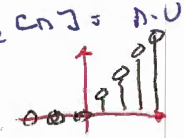
$X_1[n] = \delta[n] \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_1[n] = 0$

$X_3[n] = \delta[n-3] \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_3[n] = u[n-2]$

Si el sistema fuese invariante en el tiempo, $y_3[n] = y_1[n-3] = 0$

c. Estabilidad

$X_2[n] = u[n]-1 \rightarrow \boxed{} \rightarrow Y_2[n] = n.u[n]$



no acotada

d. Invertibilidad

$X_2[n] = u[n-1]$
$X_4[n] = \delta[n] - 3\delta[n-3] \rightarrow \boxed{} \rightarrow Y_2[n] = Y_4[n] = n.u[n]$

Viendo la salida no puedo saber cual de las señales es la que se ha aplicado en la entrada.

SEPTIEMBRE 2001

1. Sea el siguiente sistema definido por su relación entrada-salida:

$$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

con $T>0$, y siendo ω_0 una constante arbitraria.

a) Estudie la linealidad e invarianza temporal del sistema.
b) Calcule $h(t)$, la respuesta del sistema al impulso $\delta(t)$.
c) Calcule $h_{t_0}(t)$, la respuesta del sistema al impulso $\delta(t-t_0)$.
d) Sea $H(j\omega)$ la transformada de Fourier de $h(t)$ y $X(j\omega)$ la transformada de Fourier de una entrada arbitraria $x(t)$. ¿Podría calcular la salida del sistema $y(t)$ como la transformada inversa de Fourier de $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$? Justifique su respuesta.

a. ¿Linealidad?

$x_1(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t)=\int_{t-T}^{t}x_1(t)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz-\int_{t}^{t+T}x_1(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz$

$x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$ ¿ $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$?

Lo que en realidad sale del sistema es $y_3(t)=\int_{t-T}^{T}x_3(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz-\int_{t}^{t+T}x_3(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz$

$x_3(z)=\alpha x_1(z)+\beta x_2(z)$

$\stackrel{\downarrow}{=}\int_{t-T}^{T}[\alpha\cdot x_1(z)+\beta\cdot x_2(z)]\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz-\int_{t}^{t+T}[\alpha x_1(z)+\beta x_2(z)]\cos(\omega_0 z)\cdot dz=$

$\alpha\underbrace{\left[\int_{t-T}^{T}x_1(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz-\int_{t}^{t+T}x_1(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz\right]}_{y_1(t)}+\beta\underbrace{\left[\int_{t-T}^{t}x_2(z)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz-\int_{t}^{t+T}x_2(z)\cos(\omega_0 z)\cdot dz\right]}_{y_2(t)}$

$\boxed{\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)}$

El sistema es lineal.

¿Invarianza temporal?

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

$$¿\; y_2(t) = \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz - \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x_1(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz \;?$$

$$y_2(t) = \int_{t-T}^{T} x_2(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} x_2(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz = \int_{t-T}^{t} x_1(z-t_0)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz -$$

$$\int_{t}^{t+T} x_1(z-t_0)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz = \left[\begin{array}{lll} z-t_0 = s & z = t-T \rightarrow & s = t-T-t_0 \\ z = s+t_0 & z = t \rightarrow & s = t-t_0 \\ dz = ds & z = t+T \rightarrow & s = t+T-t_0 \end{array}\right] =$$

$$\int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(s)\cdot\cos(w_0(s+t_0))\cdot ds - \int_{t-t_0}^{t+T-t_0} x_1(s)\cdot\cos(w_0(s+t_0))\cdot ds = \left[\begin{array}{c} \text{variable muda} \\ s \rightarrow z \end{array}\right] =$$

$$\int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(z)\cdot\cos(w_0(z+t_0))\cdot dz - \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x_1(z)\cdot\cos(w_0(z+t_0))\, dz$$

. No es cierto que sea invariante, ya que $y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$

No se trata de un sistema LTI.

b.

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(t) = \int_{t-T}^{t} x(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} x(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz$$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = \delta(t) \\ x(z) = \delta(z) \end{array}\right] = \int_{t-T}^{t} \delta(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} \delta(z)\cdot\cos(w_0 z)\cdot dz =$$

$$\int_{t-t}^{t} \delta(z)\cdot\cos(0)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} \delta(z)\cdot\cos(0)\cdot dz = \int_{t-T}^{t} \delta(z)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} \delta(z)\cdot dz =$$

$$u(z)\Big|_{t-T}^{t} - u(z)\Big|_{t}^{t+T} = u(t) - u(t-T) - [u(t+T) - u(t)] =$$

$$\boxed{-u(t+T) + 2u(t) - u(t-T) = h(t)}$$

C.

$$x(t) = \delta(t-t_0)$$
$$x(z) = \delta(z-t_0)$$

$$\rightarrow \quad h(t_0) = \int_{t-T}^{t} \delta(z-t_0)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz - \int_{t}^{t+T} \delta(z-t_0)\cdot\cos(\omega_0 z)\cdot dz =$$

$$\int_{t-T}^{t} \delta(z-t_0)\cdot\cos(\omega_0 t_0) - \int_{t}^{t+T} \delta(z-t_0)\cdot\cos(\omega_0 t_0)\cdot dz = \cancel{\cos t}$$

$$\cos(\omega_0 t_0)\left[\int_{t-T}^{t} \delta(z-t_0)\,dz - \int_{t}^{t+T} \delta(z-t_0)\,dz\right] = \cos(\omega_0 t_0)\cdot\left[u(z-t_0)\Big|_{t-T}^{t} - u(z-t_0)\Big|_{t}^{t+T}\right]$$

$$\cos(\omega_0 t_0)\left[u(t-t_0) - u(t-T-t_0) - (u(t+T-t_0) - u(t-t_0))\right] =$$

$$\cos(\omega_0 t_0)\cdot\Big[\underbrace{-u(t-t_0+T) + 2u(t-t_0) - u(t-t_0-T)}_{h(t-t_0)}\Big] = \boxed{\cos(\omega_0 t_0)\cdot h(t-t_0)}$$

SEPTIEMBRE 2000

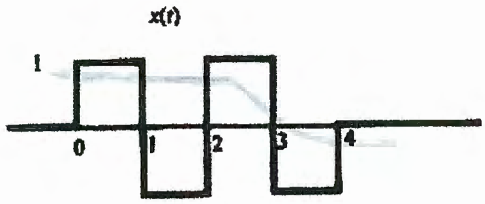
1. Sea un sistema lineal e invariante cuya relación entrada $x(t)$, y salida $y(t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = \int_t^{\infty} x(\tau)e^{t-\tau}d\tau$$

a) Calcule la respuesta al impulso $h(t)$.

b) Calcule la respuesta al escalón unidad $s(t)$.

c) Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ se representa en la figura siguiente. La solución debe darse exclusivamente en función de la respuesta al escalón $s(t)$. (Nota: no es necesario sustituir y se puede hacer aún sin conocer la expresión concreta de $s(t)$).

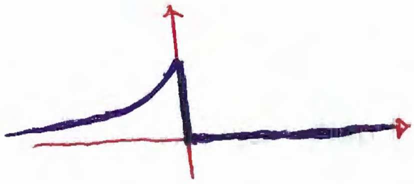


a.

$$h(t) = \int_t^{\infty} \delta(\tau)\cdot e^{t-\tau}\cdot d\tau = \int_t^{\infty} \delta(\tau)\cdot e^{t-0}\cdot d\tau = e^t\cdot\int_t^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau$$

Opción 1: $h(t) = e^t\cdot[u(\tau)]_t^{\infty} = e^t[\cancel{u(\infty)}^{1} - u(t)] = e^t\cdot[1-u(t)] =$

$e^t\cdot(u(-t))$.



no causal o anticipativo

Opción 2: $h(t) = e^t\cdot\int_t^{\infty}\delta(\tau)\cdot d\tau$

$$\int_t^{\infty}\delta(\tau)\cdot d\tau = \begin{cases}1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases} = u(-t)$$

$\rightarrow \boxed{h(t) = e^t\cdot u(-t)}$

$\boxed{\text{Extra}}$ => LTI causal $\iff$ $h(t)=0,\ t<0$ → no es causal

LTI estable $\iff \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\cdot dt < \infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^t\cdot u(-t)\cdot dt = \int_{-\infty}^{0} e^t\cdot dt =$

$e^t\Big|_{-\infty}^{0} = 1 + 0 = 1 < \infty$ es estable

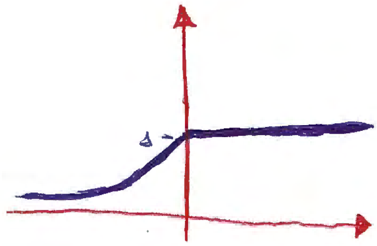
b. Opción 1:

$$y(t) = \int_t^{\infty} x(\tau)\cdot e^{t-\tau}\, d\tau \to \quad s(t) = \int_t^{\infty} u(\tau)\cdot e^{t-\tau}\, d\tau = e^{t}\int_t^{\infty} u(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{t}\begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau, & t<0 \\ \int_t^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau, & t>0 \end{cases} = e^{t}\begin{cases} -[e^{-\tau}]_0^{\infty}, & t<0 \\ -[e^{-\tau}]_t^{\infty}, & t>0 \end{cases} = e^{t}\begin{cases} -(e^{-\infty}-e^{0}) = 1, & t<0 \\ -(e^{-\infty}-e^{-t}) = e^{-t}, & t>0 \end{cases}$$

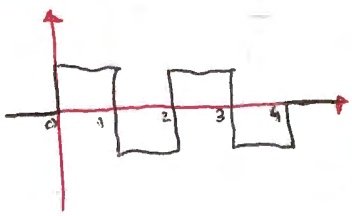
$e^{t} \quad t<0$

$1 = e^{t}\cdot e^{-t} \quad t>0$



Opción 2: Por ser LTI $\Rightarrow$ $s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\, d\tau$

c.



$x(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$

$u(t) \xrightarrow{LTI} s(t)$

$u(t-1) \to s(t-1)$

$u(t-2) \to s(t-2)$

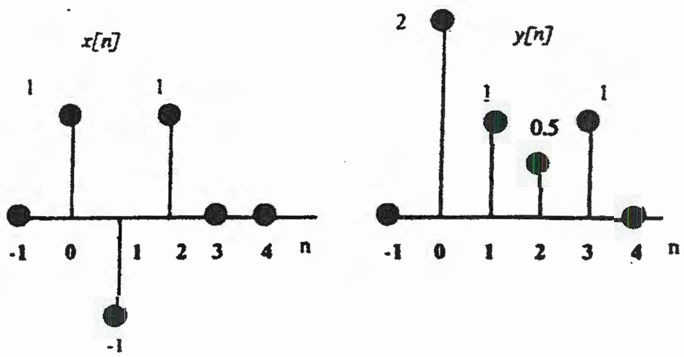
$u(t-3) \to s(t-3)$

$u(t-4) \to s(t-4)$

$$\boxed{y(t) = s(t) - 2s(t-1) + 2s(t-2) - 2s(t-3) + s(t-4)}$$

JUNIO 1996

3. Dadas las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ que se representan en la figura:



Calcular:

a) La convolución lineal de las dos secuencias.
b) La convolución circular o cíclica de ciclo 5.

FEBRERO 2002

1. Sea un sistema definido por la siguiente relación entrada-salida:

$$y(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{t-T_1}^{t+T_2} x(\tau) d\tau$$

con $0 < T_1 < \infty$ y $0 < T_2 < \infty$.

a) ¿Es el sistema lineal? Justifique su respuesta.

b) ¿Es el sistema invariante? Justifique su respuesta.

c) Calcule la respuesta al impulso del sistema.

d) Sea $x(t) = \cos(\omega t)$. Encuentre la relación general entre T_1, T_2 y ω para que la salida sea cero.

FEBRERO 2003

1. Considere el sistema de la figura:

Los bloques denominados “Sistema 1” y “Sistema 3” realizan las siguientes operaciones:

$$y(t) = x(-bt)$$
$$q(t) = z(-t/b)$$

siendo b una constante real y positiva mayor que la unidad. El bloque central representa un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = e^{abt} \cdot u(-b \cdot t)$$

siendo a una constante real y positiva. Se pide:

a) Suponiendo que $x(t)$ es una señal de energía finita, determine cuál es la energía de la señal $y(t)$. ¿Cuál es la energía de la señal $x(t)$. ¿Cuál es la relación entre la energía de ambas señales?. Comente el significado físico del resultado obtenido.

b) Dada una entrada genérica $x(t)$, determine la salida $q(t)$. A partir de ese desarrollo, obtenga $h_{eq}(t)$, tal que $q(t) = h_{eq}(t) * x(t)$.

c) Suponiendo que $x(t)$ es ahora el escalón unidad, calcule la señal $q(t)$ haciendo uso de la operación convolución.

a) $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} p(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} |x(z)|^2\,dz$

Cambio de variable
$s = -b\cdot z \rightarrow z = -s/b \rightarrow dz = -\frac{ds}{b}$
$z = -\infty \rightarrow s = -b(-\infty) = \infty$
$z = \infty \rightarrow s = -\infty$

$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(z)|^2\,dz \quad (y = x(-bt)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(-bz)|^2\,dz$

$\int_{\infty}^{-\infty} |x(s)|^2 \cdot \left(-\frac{ds}{b}\right) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|^2\,ds = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} |x(z)|^2\,dz = \boxed{\frac{E_x}{b}}$

La señal y(t) toma los mismos valores que la señal x(t) pero en un intervalo de tiempo b veces más pequeño por lo que es lógico que la energía de y sea menor que la de x.

b. Nuestro objetivo es llegar a : $q(t) = x(t) * h_{eq}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z) \cdot h_{eq}(t-z) dz$

$\mathrm{I} \to x(t)$

$\mathrm{II} \to y(t) = x(-bt)$

$\mathrm{III} \to z(t) = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(z) \cdot h(t-z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(-bt) \cdot h(t-z)\, dz =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-bz) \cdot e^{ab(t-z)} \cdot u(-b(t-z)) \cdot dz$$

IV $q(t) = z(-t/b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-bz) \cdot e^{ab(-t/b - z)} \cdot u(-b(-t/b - z)) \cdot dz$

$$\left[\begin{array}{l} \text{cambio de variable} \\ s = -bz \to z = -s/b \to dz = -\frac{ds}{b} \\ z = -\infty \to s = -b \cdot (-\infty) = \infty \\ z = \infty \to s = -\infty \end{array}\right] =$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} x(s) \cdot e^{ab(-t/b + \frac{s}{b})} \cdot u(-b(+t/b + s/b)) \cdot \left(\frac{-ds}{b}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \cdot \frac{1}{b} \cdot e^{-a(t-s)} \cdot u(t-s) \cdot ds =$$

cambios s por z

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(z) \cdot \frac{1}{b} \cdot e^{-a(t-z)} \cdot u(t-z) \cdot dz \Rightarrow h_{eq}(t) = \frac{1}{b} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$$

c. $x(t) = u(t) \to q(t) = x(t) * h_{eq}(t) = \dots = \frac{1}{ab}\left[1 - e^{-at}\right] \cdot u(t)$

FEBRERO 2001

1. Sean las tres señales siguientes

$$x_1(t) = e^{-at}u(t), \qquad a \text{ real y positivo}$$

$$x_2(t) = e^{-bt}u(t), \qquad b \text{ real y positivo, } b \neq a.$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT_0) \qquad T_0 > 2T$$

siendo $p(t)$ la señal

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

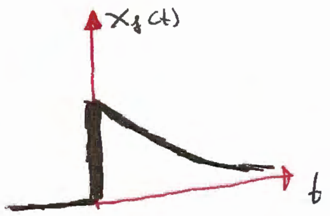
a) Dibuje las señales que resultan de aplicar en el eje de tiempos las transformaciones:

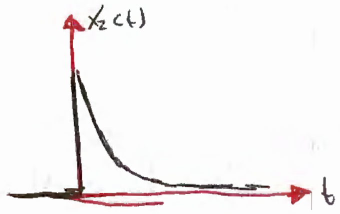
$$y_i(t) = x_i(2t-1), \quad i = 1,2,3$$

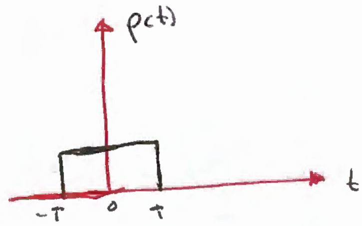
Calcule la energía y la potencia media de las señales resultantes, así como la relación de estos parámetros con los correspondientes parámetros de las señales originales. ¿Es periódica alguna de las señales resultantes $y_i(t), \ i = 1,2,3$? Justifique su respuesta.

b) Realice en el dominio temporal la convolución de las señales $x_1(t)$ y $p(t)$.

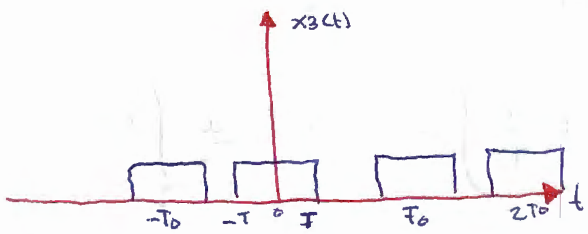
c) Realice en el dominio temporal la convolución de las señales $x_1(t)$ y $x_3(t)$.





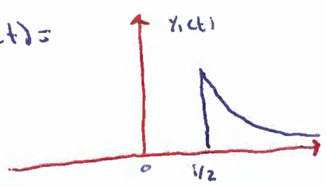


$$X_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - k.T_0) = \ldots + p(t+2T_0) + p(t+T_0) + p(t) + p(t-T_0) + p(t-2T_0) + \ldots$$

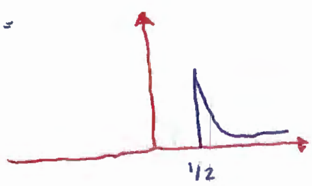


a. $Y_i = X_i(2(t - 1/2))$ (comprimir en factor 2, desplazar 1/2 hacia derecha)

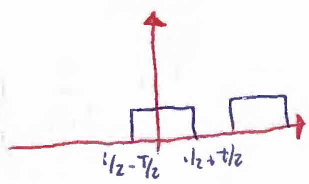
$Y_1(t) =$



$Y_2(t) =$



$Y_3 =$



Energías:

$$E_{y_i} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{y_i}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |y_i(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(2t-1)|^2 dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Cambio} \\ z = 2t-1 \to t = \frac{z+1}{2} \to dt = \frac{1}{2}dz \\ t=-\infty \to z=-\infty \\ t=\infty \to z=\infty \end{array}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(z)|^2 \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(z)|^2 dz = \frac{1}{2}E_{x_i}.$$

Al haber compresión temporal x_2, la energía se divide entre 2. Sin embargo, el desplazamiento no afecta a la energía.

$$E_{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt = \underset{\substack{\uparrow \\ x_1(t)\in\mathbb{R}}}{\int_{-\infty}^{\infty}} x_1(t)^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-at}\cdot u(t)]^2\,dt = \int_0^{\infty} e^{-2at}\,dt = \frac{1}{2a} \Rightarrow \boxed{E_{y_1} = \frac{1}{4a}}$$

$$E_{x_2} = \frac{1}{2b} \Rightarrow \boxed{E_{y_2} = \frac{1}{4b}}$$

Si una señal tiene energía total finita, su potencia total es 0. Así que, $P_{y_1} = P_{y_2} = 0$

$$E_{x_3} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_3^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)\,dt = \underset{\text{base}}{2T}\cdot\underset{\text{altura}}{1}\cdot\underset{\text{nº de rectángulos}}{\infty} = \infty$$

x_3 vale 0 ó 1

Por tanto, la energía de y_3 tendría será infinita.

$$\boxed{P_{x_3} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} P_{x_3}(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x_3(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_3^2(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_3(t)\,dt =}$$

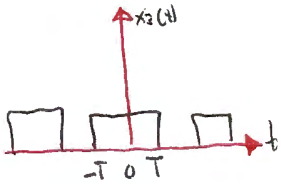
$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T_0-T} x_3(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T} 1\,dt = \frac{2T}{T_0}}$$

$$\boxed{P_{y_3} = \frac{1}{T_0/2}\int_{T_0/2} |y_3(t)|^2 dt = \frac{2T}{T_0}}$$

b.

$$z(t) = x_3(t) * p(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t+T)}\right], & -T < t < T \\ \frac{e^{-at}}{a}\left(e^{aT} - e^{-aT}\right), & t > T \end{cases}$$

c.



$$x_1(t) * x_3(t) = x_1 * \sum_{-\infty}^{\infty} p(t - kT_0) = x_1(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} p(t) * \delta(t - kT_0) =$$

$$x_1(t) * p(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = z(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} z(t) * \delta(t - kT_0) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} z(t - kT_0).$$ $z(t)$ se repite cada T_0, así que $w(t)$ será periódica de period. T_0.

FEBRERO 2006

1. Sea una señal compleja $x(t)$ en tiempo continuo, limitada en el tiempo, tal que $x(t) = 0$ para $t < T_1$ y $t > T_2$, con $T_1 < T_2$. Dicha señal es la entrada de un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso es $h(t) = x^*(-t)$. Sea $y(t)$ la señal de salida de dicho sistema. Operando siempre en el dominio del tiempo:

a) Demuestre que $y(0)$ es siempre real ¿Qué representa $y(0)$? Justifique su respuesta.

b) Sea $x(t) = e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-3)]$, siendo $u(t)$ la función escalón unidad. Calcule $y(t)$.

c) Indique, para el caso del apartado b) si el sistema es causal y si es estable. Justifique su respuesta.

SEPTIEMBRE 2002

1. Considere un sistema en tiempo continuo (SISTEMA 1) caracterizado por la relación:

$$y(t) = \int_{\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$$

donde $x(t)$ es la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida. Se pide

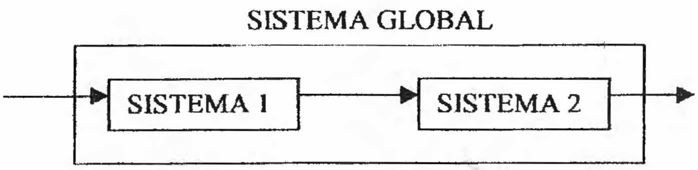
(a) Demuestre que dicho sistema es lineal, **no** invariante en el tiempo y **no** estable en sentido BIBO (Bounded Input-Bounded Output). Determine si el sistema es causal o no causal.

(b) Dada la entrada:

$$x(t) = u(t) + u(t-1) + \text{sen}(t)u(t)$$

determine la correspondiente salida $y(t)$. Sobre el resultado obtenido, verifique las propiedades demostradas en el apartado (a).

(c) Suponga que el sistema dado se pone en serie con un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t) = e^{-at}u(t)$, con $a>0$ y real, que denominaremos SISTEMA 2, como indica la figura:



Calcule la salida del sistema global cuando la entrada es $\delta(t)$ y cuando la entrada es $\delta(t-1)$. Comente los resultados.

a.

Linealidad:

$x_1(t)$, $x_2(t)$ → ¿Lineal? → $y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\cdot d\tau$, $\quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\cdot d\tau$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ $\qquad$ ¿$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$?

Lo que en realidad se obtiene es:

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{2t} [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)]\cdot d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\cdot d\tau = \boxed{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$$

→ ES LINEAL

Invarianza temporal:

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{¿lineal?} \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(z)\,dz$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to \quad \to \; ¿y_2(t) = y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(z)\,dz$$

Lo que en realidad se obtiene es:

$x_2(t) = x_1(t-t_0)$
$x_2(z) = x_1(z-t_0)$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(z)\,dz = \int_{-\infty}^{2t} x_1(z-t_0)\,dz$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{cambio de variable} \\ s = z - t_0 \Rightarrow z = s + t_0 \Rightarrow dz = ds \\ z = -\infty \wedge s = -\infty + t_0 = -\infty \\ z = 2t \to \cancel{s = 2(t-t_0)}\; s = 2t - t_0 \end{array}\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\cancel{2(t-t_0)}\; 2t-t_0} x_1(s)\,ds$$

El sistema no es invariante. $(2t - t_0 \neq 2(t-t_0))$

ESTABILIDAD

$$u(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{2t} u(z)\,dz = \begin{cases} \int_{-\infty}^{2t} 0\,dz = 0 & \text{si } 2t < 0 \\ \int_{0}^{2t} 1\,dz = 2t & \text{si } 2t > 0 \end{cases} =$$

$2t \cdot u(t) =$

no acotada

Causalidad

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(z)\,dz \longrightarrow y(6) = \int_{-\infty}^{2\cdot 6} x(z)\,dz = \int_{-\infty}^{12} x(z)\,dz$$

El sistema utiliza valores de la señal de entrada posteriores al actual (valores futuros) para calcular la salida, con lo que es un sistema no causal o anticipativo.

b. $x_1(t)=u(t)$

$x_2(t)=u(t-1) \longrightarrow$ Sistema lineal $\longrightarrow$

$x_3(t)=\operatorname{sen}(t)\cdot u(t)$

$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$

$y_1(t)=$

$y_2(t)=$

$y_3(t)=$

$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$

Sabemos por a que $\underline{\underline{y_1(t)=2t\cdot u(t)}}$

Calculamos $y_2(t)$: como $x_2(t)=\cancel{x_1(t-1) \to y_2(t)=y_1(t-1)}$ → No, porque el sistema no es invariante

Usamos la definición: $x_2(t)=u(t-1) \to y_2(t)=\int_{-\infty}^{2t} x_2(z)\cdot dz = \int_{-\infty}^{2t} u(z-1)\cdot dz =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 2t<1 \\ 2t-1 & \text{si } 2t>1 \end{cases} = \boxed{(2t-1)\cdot u\left(t-\tfrac{1}{2}\right)}$$

Calculamos $y_3(t)$: $x_3(t)=\operatorname{sen}(t)\cdot u(t) \to y_3(t)=\int_{-\infty}^{2t} x_3(z)\cdot dz = \int_{-\infty}^{2t} \operatorname{sen} z\cdot u(z)\cdot dz =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 2t<0 \\ \int_0^{2t} \operatorname{sen}(z)\cdot dz = -\cos(z)\Big|_0^{2t} = -\cos(2t)-\cos(0) = -\cos 2t+1 = 1-\cos(2t) \end{cases} = \boxed{(1-\cos(2t))u(t)}$$

Finalmente, por ser lineal:

$$\boxed{y(t)=2t\cdot u(t)+(2t-1)\cdot u(t-1/2)+(1-\cos 2t)\cdot u(t)}$$

c. $x(t) \to$ sistema 1 $\xrightarrow{y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(z)\cdot dz}$ sistema 2 LTI $\longrightarrow z(t)=y(t) * h(t)$

$x(t)=\delta(t) \to y(t)=\int_{-\infty}^{2t} \delta(z)\cdot dz$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 2t<0 \\ \int_{-\infty}^{2t} \delta(t)\cdot dz & \text{si } 2t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } 2t<0 \\ 1 & \text{si } 2t>0 \end{cases} = \boxed{u(t)}$$

$$z_1(t) = y(t) * h(t) = u(t) * e^{-at} \cdot u(t) = \boxed{\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) \cdot u(t)}$$

Ahora no se puede aplicar invarianza porque el sistema global no es LTI.

$$x(t) = \delta(t-1) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(z) \cdot dz = \int_{-\infty}^{2t} \delta(z-1) \cdot dz = \begin{cases} 0 & \text{si } 2t < 1 \\ 1 & \text{si } 2t > 1 \end{cases} \quad u(t - 1/2)$$

$$z(t) = y(t) * h(t) = u(t-1/2) * h(t) = u(t) * \delta(t-1/2) * h(t) = u(t) * h(t) * \delta(t-1/2) =$$

$$z_1(t) * \delta(t-1/2) = z_1(t-1/2) = \boxed{\frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t-1/2)}\right] \cdot u(t-1/2)}$$

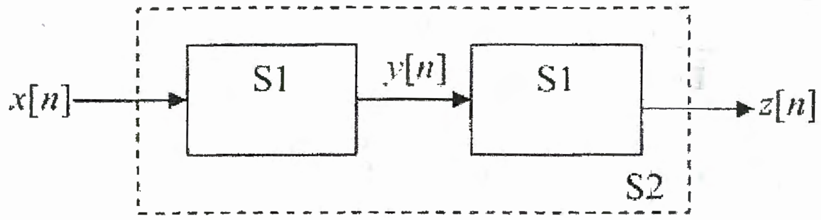
Vemos que $z_2(t) \neq z_1(t-1)$ porque el sistema global no es invariante.

FEBRERO 2007

1. Sea un sistema (S1) definido por la siguiente relación entrada-salida (la entrada es $x[n]$ y la salida es $y[n]$):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Considere un sistema (S2), formado por la combinación en serie de dos sistemas S1:



(a) Demuestre que el sistema S2 es LTI. Analice si es causal y/o estable

(b) Calcule la respuesta al impulso del sistema S2.

(c) Obtenga la relación entre la entrada $x[n]$ y la salida $z[n]$ del sistema S2.

(d) Demuestre que el sistema inverso al S2 es el definido por la relación entrada-salida:

$$x[n] = z[n] - 2z[n-1] + z[n-2]$$

a. Analizamos linealidad e invarianza de S_1. Si S_1 es LTI, S_2 también lo será por ser combinación en serie de sistemas LTI.

Linealidad:

$x_1[n]$, $x_2[n]$ → S_1 →

$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$

$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ ¿$y_3[n]$?

Aplicamos la definición del sistema S_1:

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha x_1[k] + \beta x_2[k] = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] =$$

$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$ ⇒ es LINEAL.

Invarianza:

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{S_1} \rightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$$

$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow \ ¿\, y_2[n] = y_1[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_1[k]\ ?$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k-n_0] = \left[\begin{array}{l}\text{Cambio de variable} \\ m = k-n_0 \rightarrow k = m+n_0 \\ k=-\infty \rightarrow m=-\infty \\ k=n \rightarrow m=n-n_0\end{array}\right] = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x_1[m] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_1[k]$$

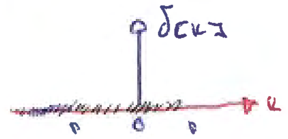
es invariante

b)

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}S_1 \\ LTI\end{array}} \xrightarrow[\text{I}]{h_1[n]} \boxed{\begin{array}{c}S_1 \\ LTI\end{array}} \xrightarrow[\text{II}]{} h_2[n]$$

I → como sabemos que en S_1: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ y en este caso $x[n] = \delta[n]$

$$h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n<0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} = u[n]$$

II → hay dos maneras de calcular $h_2[n]$.

Opción 2.1 → por definición. $h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 & n \geq 0 \end{cases}$

$$= (n+1)\,u[n].$$

es un sistema no estable, pues la salida no es acotada y la entrada sí.

Opción 2.2 → por ser S_1 sistema LTI: $h_2[n] = h_1[n] * h_1[n] = u[n] * u[n]$.

Causalidad de S_2 → S_2 LTI causal ⟺ $h_2[n] = 0 \quad n<0$

Estabilidad de S_2 →

Opción 1 → ya demostrado antes con la $\delta[n]$ → sistema no estable.

Opción 2 → S_2 LTI estable ⟺ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| < \infty \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} n+1 = \infty \rightarrow$ no estable

(c) Opción 1: $z[n] = y[n] * h_1[n] = x[n] * h_1[n] * h_1[n]$

Opción 2: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] = \sum_{m=-\infty}^{n} y[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} \sum_{k=-\infty}^{m} x[k]$$

(d) $x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S_2 \text{ LTI} \\ h_2[n] \end{matrix}} \xrightarrow{z[n]} \boxed{\begin{matrix} S_2 \text{ Inverso LTI} \\ h_{2I}[n] \end{matrix}} \longrightarrow x[n] = x[n] * h_2[n] * h_{2I}[n] =$

$\cancel{x[n]} * \delta[n] =$

Vamos a calcular $h_{2I}[n]$ para ver si es cierto que $h_2[n] * h_{2I}[n] = \delta[n]$

$\begin{matrix} z[n] \\ \delta[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{S_2 \text{ INV}} \longrightarrow \begin{matrix} x[n] = z[n] - 2z[n-1] + z[n-2] \\ h_{2I}[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{matrix}$

$h_2[n] * h_{2I}[n] = h_2[n] * (\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) =$

$h_2[n] - 2h_2[n-1] + h_2[n-2] = (n+1).u[n] - 2(n\cancel{-1+1}).u[n-1] + (n-2+1).u[n-2]$

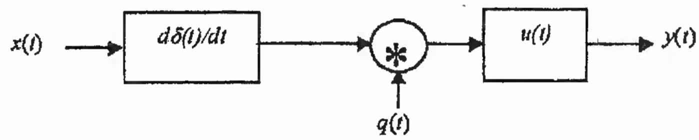
$= (n+1).u[n] - 2n.u[n-1] + (n-1).u[n-2] = (n+1).u[n] - 2n(u[n] - \delta[n]) +$

$(n-1).(u[n] - \delta[n] - \delta[n-1]) = u[n](\cancel{n+1-2n+n-1}) + 2n\delta[n]^{0} - \cancel{(n-1)}.\delta[n] -$

$(n-1).\delta[n-1]^{0} = \boxed{\delta[n]}$

SEPTIEMBRE 2008

1) Considere el sistema de la figura:



Donde las señales en los recuadros representan la respuesta impulsiva de dos filtros lineares e invariantes y el asterisco representa la operación de convolución. x(t) e y(t) representan respectivamente la entrada y la salida del sistema. x(t)es una señal de media nula.

Se pide:

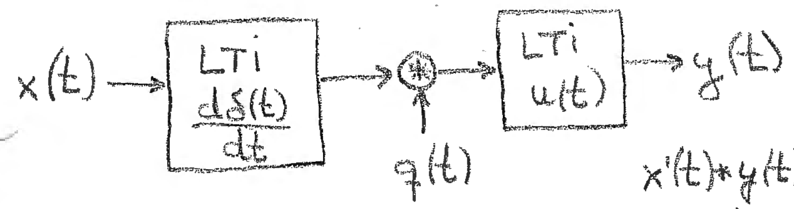
a) Halle, utilizando las propiedades de la convolución, la relación entrada-salida del sistema:

$$y(t) = f(x(t), q(t))$$

b) Demuestre si el sistema es lineal o invariante. Si lo anterior es cierto, calcule su respuesta impulsiva. ¿Qué condiciones tiene que cumplir *q(t)* para que el sistema sea estable?

c) Calcule la salida y la entrada $x(t) = e^{-a.t} \cdot u(t)$ cuando $q(t) = e^{-b.t} \cdot u(t)$ (a y b son constantes reales y positivas). Hágalo en el dominio del tiempo.

SEPT 08. EJ1



$x'(t)*y(t) = x(t)*y'(t)$

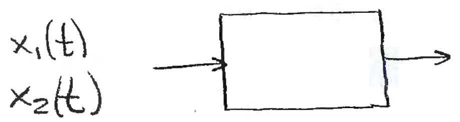
* conmut.

a) $\boxed{y(t)} = \left(x(t)*\frac{d\delta(t)}{dt}\right)*q(t)*u(t) = \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}*\delta(t)}_{\frac{dx(t)}{dt}}*q(t)*u(t) =$

igual q. antes

$= \left(\frac{dx(t)}{dt}*u(t)\right)*q(t) = x(t)*\frac{du(t)}{dt}*q(t) = \boxed{x(t)*q(t)}$, con $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

LINEALIDAD:



$y_1(t) = x_1(t)*q(t)$

$y_2(t) = x_2(t)*q(t)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$??

$y_3(t) = x_3(t)*q(t) = [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]*q(t) = \alpha\, \underline{x_1(t)*q(t)} + \beta\, \underline{x_2(t)*q(t)} =$

$= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ LINEAL

INVARIANZA:

$y_1(t) = x_1(t)*q(t)$

$y_2(t) = y_1(t-t_0)$??

$y_2(t) = x_2(t)*q(t) = x_1(t-t_0)*q(t) = x_1(t)*\delta(t-t_0)*q(t) =$

$= \underbrace{x_1(t)*q(t)}_{y_1(t)}*\delta(t-t_0) = y_1(t-t_0)$ INVARIANTE

La respuesta al impulso será:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow h(t) = \delta(t) * q(t) = q(t)$$

Para que el sistema sea estable $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

c)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} LTI \\ h(t) = e^{-bt}u(t) \end{array}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Hecha en Tema 1: $y(t) = \dfrac{1}{a-b}\left[e^{-bt} - e^{-at}\right]$ si $a \neq b$

$$y(t) = te^{-bt}u(t) \qquad \text{si } a = b$$

SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 1

Considere un sistema discreto cuya secuencia de salida $y[n]$ se obtiene a partir de la secuencia de entrada $x[n]$ (señal real), mediante la expresión siguiente:

$$y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot x[n-k]$$

Se pide:

a) Demuestre si el sistema cumple o no cada una de las siguientes propiedades: linealidad, invarianza temporal, causalidad y estabilidad.

b) Suponiendo que $x[n]=u[n]-u[n-5]$ (siendo $u[n]=1$ si $n\geq 0$, y $u[n]=0$, si $n<0$), determine analíticamente y represente gráficamente la secuencia de salida $y[n]$.

c) Si el valor medio de $x[n]$ es cero, demuestre que el valor medio de $y[n]$ también es cero. Así mismo demuestre la siguiente proposición: si $x[n]$ es antisimétrica (impar), entonces $y[n]$ es simétrica (par).

SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 1

Considere un sistema discreto cuya secuencia de salida $y[n]$ se obtiene a partir de la secuencia de entrada $x[n]$ (señal real), mediante la expresión siguiente:

$$y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot x[n-k]$$

Se pide:

a) Demuestre si el sistema cumple o no cada una de las siguientes propiedades: linealidad, invarianza temporal, causalidad y estabilidad.

b) Suponiendo que $x[n]=u[n]-u[n-5]$ (siendo $u[n]=1$ si $n\geq 0$, y $u[n]=0$, si $n<0$), determine analíticamente y represente gráficamente la secuencia de salida $y[n]$.

c) Si el valor medio de $x[n]$ es cero, demuestre que el valor medio de $y[n]$ también es cero. Así mismo demuestre la siguiente proposición: si $x[n]$ es antisimétrica (impar), entonces $y[n]$ es simétrica (par).

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n-k]$$

a) LINEALIDAD:

$$\begin{matrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \begin{matrix} y_1[n]=x_1[n]*x_1[n] \\ y_2[n]=x_2[n]*x_2[n] \end{matrix}$$

$x_3[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$

$$y_3[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]=$$
$$=\alpha\, x_1[n]*x_1[n]+\beta\, x_2[n]*x_2[n]$$

(si fuera lineal)

Lo que ocurre es:

$$y_3[n]=x_3[n]*x_3[n]=\left(\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]\right)*\left(\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]\right)=$$
$$=\alpha^2\underbrace{x_1[n]*x_1[n]}_{y_1[n]}+\alpha\beta\, x_1[n]*x_2[n]+\beta\alpha\, x_1[n]*x_2[n]+\beta^2\underbrace{x_2[n]*x_2[n]}_{y_2[n]}=$$
$$=\alpha^2 y_1[n]+\beta^2 y_2[n]+2\alpha\beta\, x_1[n]*x_2[n]$$

NO ES LINEAL

INVARIANZA TEMPORAL:

$$\begin{matrix} x_1[n] \\ x_2[n]=x_1[n-n_0] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \begin{matrix} y_1[n]=x_1[n]*x_1[n] \\ y_2[n]=y_1[n-n_0] \end{matrix}$$

(si fuera invar.)

Lo que ocurre ~~es~~:

$$y_2[n] = x_2[n] * x_2[n] = x_1[n-n_0] * x_1[n-n_0] = x_1[n]*\delta[n-n_0] * x_1[n]*\delta[n-n_0]$$

$$= \underbrace{\underbrace{x_1[n]*x_1[n]}_{y_1[n]} * \delta[n-n_0]*\delta[n-n_0]}_{y_1[n-n_0]} = y_1[n-n_0-n_0] = y_1[n-2n_0] \neq y_1[n-n_0]$$

NO INVARIANTE!!

CAUSALIDAD: $y[n] = x[n]*x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n-k]$

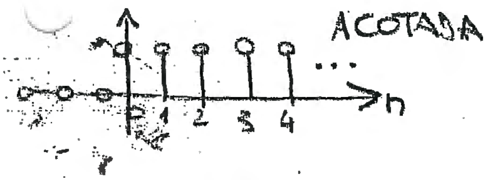
P.ej: $y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[0-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[-k] = \ldots + x[-2]x[2] + x[-1]x[1] +$

$+ x[0]x[0] + x[1]x[-1] + x[2]x[-2] + \ldots$

Para calcular la salida en un instante se necesita conocer los valores de la entrada en instantes posteriores $\Rightarrow$ NO CAUSAL!!

ESTABILIDAD:

ENTRADA $x[n]=u[n] \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow$ SALIDA $y[n] = x[n]*x[n] = u[n]*u[n] \neq n u[n]$



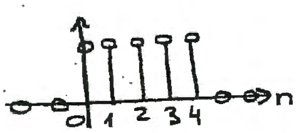
NO ACOTADA

OJO! En realidad es $(n+1)u[n]$ pero en la solución oficial pone $nu[n]$

NO ESTABLE!!

b) $x[n] = u[n]-u[n-5] \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \boxed{y[n]} = x[n]*x[n] = (u[n]-u[n-5])*(u[n]-u[n-5]) =$

$= u[n]*u[n] - u[n]*u[n-5] - u[n-5]*u[n] + u[n-5]*u[n-5] =$



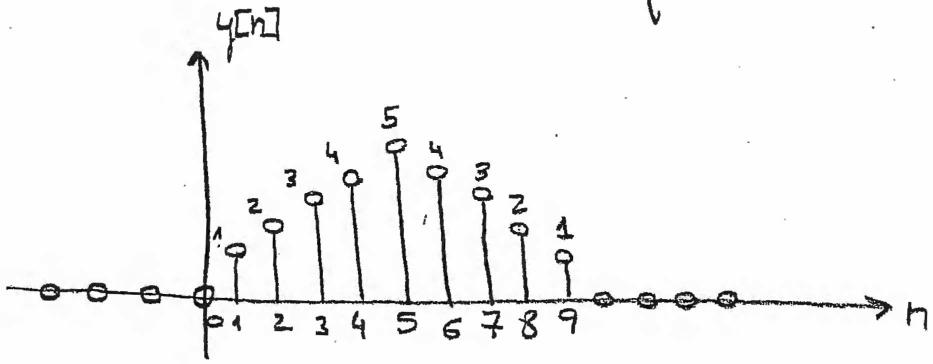
$= u[n]*u[n] - 2u[n]*\underbrace{u[n]*\delta[n-5]}_{u[n-5]} + \underbrace{u[n]*\delta[n-5]}_{u[n-5]}*\underbrace{u[n]*\delta[n-5]}_{u[n-5]}$

$= \underbrace{u[n]*u[n]}_{z[n]} - 2\underbrace{u[n]*u[n]}_{z[n]}*\delta[n-5] + \underbrace{u[n]*u[n]}_{z[n]}*\underbrace{\delta[n-5]*\delta[n-5]}_{\delta[n-10]} =$

$z[n] = nu[n]$

$nu[n] - 2(n-5)u[n-5] + (n-10)u[n-10]$

$$y[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ n, & 0\le n<5\\ n-2(n-5), & 5\le n<10\\ n-2(n-5)+n-10, & n\ge 10\end{cases} = \begin{cases}0, & n\le -1\\ n, & 0\le n\le 4\\ 10-n, & 5\le n\le 9\\ 0, & n\ge 10\end{cases}$$



c) <u>DATO</u>: $\langle x[n]\rangle = \overline{x[n]} = 0$ Demostrar que $\langle y[n]\rangle = \overline{y[n]} = 0$

$$\langle x[n]\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} x[n] = 0$$

$$\langle y[n]\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} y[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} x[n]*x[n] =$$

$\langle x[n]\rangle = \langle x[n-k]\rangle$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} x[n-k]}_{\langle x[n-k]\rangle} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot 0 = 0$$

<u>DATO</u>: $x[n] = -x[-n]$ (impar) Demostrar que $y[n] = y[-n]$ (par)

$$y[n] = x[n]*x[n]$$

$$\boxed{y[-n]} = x[-n]*x[-n] = (-x[n])*(-x[n]) = +\,x[n]*x[n] = \boxed{y[n]}$$

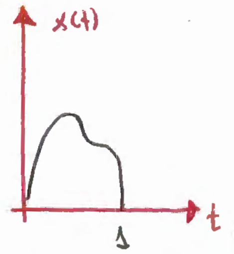
$x[-n] = -x[n]$ (impar)

Tema 2

FEBRERO 1999

1. Considere la siguiente señal:

$$x(t) = te^{-t}\left(u(t)-u(t-1)\right)$$



a) Calcule su transformada de Fourier $X(j\omega)$.

b) A partir de $x(t)$ se construye la siguiente señal $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-2n)$$

Calcule su transformada de Fourier $X_1(j\omega)$ e identifique a partir de ella los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier de $x_1(t)$.

c) A partir de $x(t)$ se construye la siguiente señal $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} x(t-2n)$$

Calcule su transformada de Fourier $X_2(j\omega)$ y establezca las similitudes y diferencias de ésta con $X_1(j\omega)$.

a. Opción 1 → definición: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = \int_0^1 t\cdot e^{-t}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^1 t\cdot e^{-(j\omega+1)t}\, dt =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{por partes:} \\ t = u \to du = 1 \\ e^{-(j\omega+1)t}\cdot dt = dv \to v = \int e^{-\alpha t}\,dt = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \end{array}\right] = \ldots$$

Opción 2 → usando la propiedad $t\cdot x(t) \xleftrightarrow{F} j\cdot \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

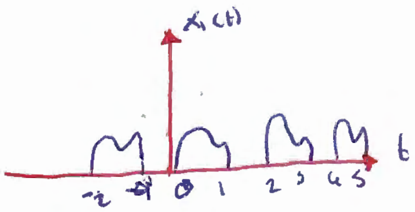
$$x(t) = t\cdot e^{-t}\left[u(t)-u(t-1)\right] \to x(t) = t\cdot x_1(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = j\cdot\frac{dX_1(j\omega)}{d\omega}$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = \int_0^1 e^{-t}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = \int_0^1 e^{-(j\omega+1)t}\, dt = \frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$$

$$X(j\omega) = j\cdot\frac{dX_1(j\omega)}{d\omega} = j\,\frac{j\cdot e^{-(j\omega+1)}(j\omega+1) - j(1-e^{-(j\omega+1)})}{(j\omega+1)^2} = \frac{-e^{-(j\omega+1)}\cdot(j\omega+1)+1-e^{-(j\omega+1)}}{(j\omega+1)^2} =$$

$$\boxed{\frac{1-e^{-(j\omega+1)}\left[j\omega+2\right]}{(j\omega+1)^2}}$$

b. $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-2n)$



$$X_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)*\delta(t-2n) = x(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$$

$$X_1(j\omega) = F\{x_1(t)\} = F\left\{x(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)\right\} = F\{x(t)\}\cdot F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)\right\} =$$

$$X(j\omega)\cdot\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi) = \pi\sum_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot\delta(\omega-k\pi) = \pi\sum_{-\infty}^{\infty} X(jk\pi)\cdot\delta(\omega-k\pi)$$

¡¡ Señal periódica en el tiempo ⇔ Espectro formado por δ !!

c.

$X_2(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} x(t-2n)$ → falta la réplica para $n=0$, no es periódica en el tiempo.

$X(j\omega) = F\{x_2(t)\} = F\{x_1(t) - x(t)\} = F\{x_1(t)\} - F\{x(t)\} = X_1(j\omega) - X(j\omega) =$

$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\pi) \cdot \delta(\omega - k\pi) - X(j\omega)$

SEPTIEMBRE 1999

1. Calcule la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es la siguiente:

$$X(j\omega)=\frac{j\omega\ e^{-(4+2j\omega)}}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

Opción 1: por definición: $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega=$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\omega\cdot e^{-(4+2\omega)}\cdot e^{j\omega t}}{(2+j\omega)(3+j\omega)}d\omega=\dots$$

Opción 2: usando tablas y aplicando propiedades.

$$X(j\omega)=e^{-4}\cdot e^{-j\omega 2}\cdot\underbrace{\frac{j\omega}{(2+j\omega)(3+j\omega)}}_{X_1(j\omega)}$$

$x_1(t-t_0)\xleftrightarrow{f}e^{-j\omega t_0}\cdot x(j\omega)$

$$x(t)=F^{-1}\{e^{-4}\cdot e^{-j\omega 2}\cdot X_1(j\omega)\}=e^{-4}\cdot F^{-1}\{e^{-j\omega 2}\cdot X_1(j\omega)\}=e^{-4}\cdot x_1(t-2)$$

$$\underset{j\omega=s}{X_1(j\omega)}=\frac{s}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}\ \rightarrow\ s=A(s+3)+B(s+2)$$

$s=s(A+B)+3A+2B$ $\quad\begin{cases}A+B=1\\3A+2B=0\end{cases}$

$A=-2\quad B=3$

Así que: $X_1(j\omega)=\frac{-2}{2+s}+\frac{3}{3+s}=\frac{-2}{2+j\omega}+\frac{3}{3+j\omega}$

$x_1(t)=-2\cdot e^{-2t}\cdot u(t)+3\cdot e^{-3t}\cdot u(t)$

Habíamos visto que $x(t)=e^{-4}\cdot x_1(t-2)$ $=\boxed{e^{-4}\cdot\left[3e^{-3(t-2)}-2e^{-2(t-2)}\right]\cdot u(t-2)}$

Carlos Al

FEBRERO 2001

2. Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya relación de entrada $x(t)$ a salida $y(t)$ viene descrita por la siguiente ecuación:

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(\int_{t}^{t+t_0} x(\tau)d\tau-\int_{t-t_0}^{t} x(\tau)d\tau\right)$$

donde t_0 es un parámetro arbitrario real y positivo.

a) Demuestre que la respuesta al impulso del sistema, denotada como $h(t)$, viene expresada por la siguiente ecuación:

$$h(t)=\frac{1}{2}\big(u(t+t_0)-2u(t)+u(t-t_0)\big)$$

siendo $u(t)$ la función escalón unidad.

b) Determine la respuesta en frecuencia del sistema, dentada como $H(j\omega)$. Represente de forma aproximada el módulo y la fase.

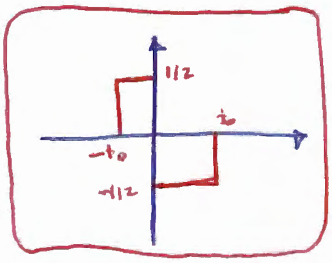
c) Demuestre analíticamente en el dominio de la frecuencia que este sistema elimina cualquier señal periódica de frecuencia:

$$\omega_m=m\frac{2\pi}{t_0},\quad \forall m \text{ entero}$$

(a) $x(t)=\delta(t) \longrightarrow h(t)=\frac{1}{2}\left[\int_{t}^{t+t_0}\delta(\tau)\,d\tau-\int_{t-t_0}^{t}\delta(\tau)\,d\tau\right]=$

$\frac{1}{2}\left[u(\tau)\Big|_{t}^{t+t_0}-u(\tau)\Big|_{t-t_0}^{t}\right]=\frac{1}{2}\left[u(t+t_0)-u(t)-u(t)+u(t-t_0)\right]=$

$\frac{1}{2}\left(u(t+t_0)-2u(t)+u(t-t_0)\right)$



(b) Respuesta en frecuencia $\rightarrow$ $H(j\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathcal{F}\{\frac{1}{2}[u(t+t_0)-2u(t)+u(t-t_0)]\}=$

$\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{u(t+t_0)\}-2\mathcal{F}\{u(t)\}+\mathcal{F}\{u(t-t_0)\}\right]=$

$\frac{1}{2}\left[e^{-j\omega(-t_0)}\cdot U(j\omega)-2\cdot U(j\omega)+e^{-j\omega t_0}\cdot U(j\omega)\right]=U(j\omega)\left[\frac{e^{j\omega t_0}+e^{-j\omega t_0}}{2}-\frac{2}{2}\right]=$

$U(j\omega)\left[\cos(\omega t_0)-1\right]=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\cdot\delta(\omega)\right]\left[\cos(\omega t_0)-1\right]=\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot\left[\cos(\omega t_0)-1\right]$

$\boxed{\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}}$

$\in [-2\pi 0]$

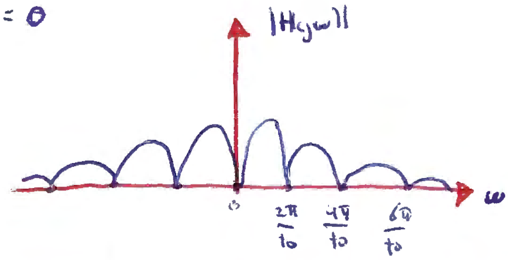
módulo $\to$ $|H(j\omega)| = \dfrac{|\cos(\omega t_0) - 1|}{|j\omega|} = \dfrac{-\cos(\omega t_0) + 1}{|j|\,|\omega|} = \dfrac{1 - \cos(\omega t_0)}{|\omega|} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cos(\omega t_0) - 1}{\omega}, & \omega < 0 \\ \dfrac{1 - \cos(\omega t_0)}{\omega}, & \omega > 0 \end{cases}$$

Ceros de $|H(j\omega)|$: $1 - \cos(\omega t_0) = 0 \to \cos(\omega t_0) = 1$; $\omega t_0 = k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\} \to \omega = k.\frac{2\pi}{t_0}$

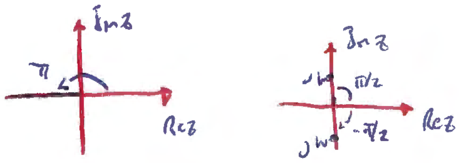
$\omega = 0$: $\lim\limits_{\omega \to 0^+} H(j\omega) = \lim\limits_{\omega \to 0^+} \dfrac{1 - \cos(\omega t_0)}{\omega} = \dfrac{0}{0}$ [L'H] $\to = \lim\limits_{\omega \to 0^+} \dfrac{t_0 \cdot \text{sen}(\omega t_0)}{1} = 0$

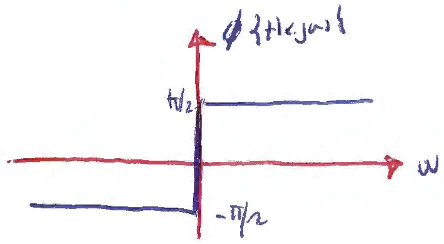
$\lim\limits_{\omega \to 0^-} H(j\omega) = 0$



$\notin [-2\pi 0]$

Fase: $\phi\{H(j\omega)\} = \phi\left\{\dfrac{\cos(\omega t_0) - 1}{j\omega}\right\} = \phi\{\cos(\omega t_0) - 1\} - \phi\{j\omega\} = \pi - \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \omega > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$

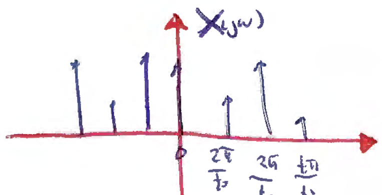




c. Una señal periódica en el tiempo de frecuencias $\omega_m = m.\frac{2\pi}{t_0}$ tendrá un espectro formado exclusivamente por deltas separadas ω_m.

Por ser sistema LTI $\Rightarrow$ $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

$$X(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_m) = 2\pi \sum_{k=-\infty} a_k \cdot \delta\left(\omega - k m \cdot \frac{2\pi}{t_0}\right)$$



$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta\left(\omega - km\frac{2\pi}{t_0}\right)\right] \cdot H(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot a_k \cdot \delta\left(\omega - \frac{km2\pi}{t_0}\right) =$

$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot H\left(j\frac{km2\pi}{t_0}\right) \cdot \delta\left(\omega - \frac{km2\pi}{t_0}\right) = 0$

FEBRERO 2002

2. Considere la siguiente respuesta impulsiva que caracteriza un sistema lineal e invariante (que modela matemáticamente la reverberación que produce un local sobre señales sonoras):

$$h_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot h(t-kT)$$

donde: a y T son números reales positivos.

$h(t)$ es la respuesta impulsiva de un sistema lineal, invariante y causal que responde a la entrada $x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) \cdot u(t)$ con la salida $y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right) \cdot u(t)$.

Determine:

a) La respuesta en frecuencia del sistema completo. ¿Para qué margen de valores de a existe dicha respuesta en frecuencia?

b) La ecuación diferencial que representa la relación entrada-salida del sistema caracterizado por $h(t)$. ¿Cuáles deben ser sus condiciones iniciales?

c) La respuesta en frecuencia y la respuesta impulsiva del sistema inverso de $h_T(t)$.

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t}).u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI causal} \\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t}).u(t)$$

$$X(j\omega) \qquad H(j\omega) \qquad Y(j\omega) = X(j\omega).H(j\omega)$$

a) $H_T(j\omega) = F\{h_T(t)\} = F\{\sum_{k=0}^{\infty} a^k . h(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F\{a^k . h(t-kT)\} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k . F\{h(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k . H(j\omega) . e^{-j\omega kT} = H(j\omega) . \sum_{k=0}^{\infty} a^k . e^{-j\omega kT} =$

$H(j\omega) \sum_{k=0}^{\infty} [a . e^{-j\omega T}]^k = H(j\omega) . \dfrac{1}{1 - a . e^{-j\omega T}}$, $|a e^{-j\omega t}| < 1 \rightarrow |a| |e^{-j\omega t}| = a . 1$ $\boxed{0 < a < 1}$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & , |z| < 1 \\ \infty & |z| \geq 1 \end{cases} \right)$$

margen de valores para los que existe $H_T(j\omega)$

$H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ (por ser LTI)

$x(t) = e^{-t} . u(t) + e^{-3t} . u(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega} + \dfrac{1}{3+j\omega} = \dfrac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$

$y(t) = 2 . e^{-t} u(t) - 2e^{-4t} u(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega) = 2 \dfrac{1}{1+j\omega} - \dfrac{2 . 1}{4+j\omega} = \dfrac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

$H(j\omega) = \dfrac{3(3+j\omega)}{\cancel{2}(2+j\omega)(4+j\omega)}$

$$\boxed{H_T(j\omega) = \dfrac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)(1 - a e^{-j\omega T})}}$$

b.

$$H(j\omega) = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$ que por ser LTI es $\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \rightarrow$

$$\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega).(4+j\omega)} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \rightarrow 3(3+j\omega).X(j\omega) = (2+j\omega)(4+j\omega).Y(j\omega)$$

$$9X(j\omega) + 3j\omega.X(j\omega) = 8Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + (j\omega)^2 Y(j\omega)$$

$\Big\downarrow F^{-1}$ $\quad \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$

$$9x(t) + 3.\frac{dx(t)}{dt} = 8y(t) + 6.\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$y(0)=0$

$y'(0)=0$ $\Big\}$ por ser LTI causal.

c. $x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}LTI\\ h_T(t)\end{matrix}} \xrightarrow{y(t)=x(t)*h(t)} \boxed{\begin{matrix}LTI\,inv\\ h_{TI}\end{matrix}} \xrightarrow{x(t)=y(t)*h_{TI}(t)=x(t)*h_T(t)*h_{TI}(t)} x(t)$

$$X(j\omega) = X(j\omega).\underbrace{H_T(j\omega).H_{TI}(j\omega)}_{1}$$

$$\left[H_{I}(j\omega) = \frac{1}{H_T(j\omega)} = \frac{1}{\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)(1-ae^{-j\omega T})}} = \frac{(1-ae^{-j\omega T})}{H(j\omega)}\right.$$

La respuesta al impulso será:

$$h_{TI}(t) = F^{-1}\{H_{TI}(j\omega)\} = F^{-1}\Big\{\underbrace{(1-ae^{-j\omega T})}_{G_1(j\omega)}.\underbrace{\frac{1}{H(j\omega)}}_{G_2(j\omega)}\Big\} = g_1(t) * g_2(t)$$

$$g_1(t) = F^{-1}\{(1-a.e^{-j\omega T})\} = F^{-1}\{1\} - a.F^{-1}\{e^{-j\omega T}\} = \delta(t) - a.\delta(t-T)$$

$$g_2(t) = F^{-1}\left\{\frac{(4+j\omega)(2+j\omega)}{3(3+j\omega)}\right\} = \frac{1}{3}F^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{(4+j\omega)(2+j\omega)}{3+j\omega}}_{G_3(j\omega)}\Big\}$$

$$G_3(j\omega) = \frac{(4+s)(2+s)}{(3+s)} = \frac{8+6s+s^2}{s+3} = s+3-\frac{1}{s+3} = 3+j\omega - \frac{1}{3+j\omega}.$$

$$\left(\begin{array}{l} s^2+6s+8 \;\; \underline{|\,s+3} \\ \underline{-s^2-3s} \quad\;\; s+3 \\ \quad 3s+8 \\ \quad \underline{-3s-9} \\ \qquad -1 \end{array}\right)$$

$$g_3(t) = F^{-1}\left\{3+j\omega - \frac{1}{3+j\omega}\right\} = 3\delta(t) + \delta'(t) - e^{-3t}u(t)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{3}g_3(t) = \delta(t) + \frac{1}{3}\delta'(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

Finalmente:

$$h_{TI}(t) = g_1(t) * g_2(t) = \left[\delta(t) - a.\delta(t-T)\right] * \left[\delta(t) + \frac{1}{3}\delta'(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}.u(t)\right] =$$

$$\delta(t) + \frac{1}{3}\delta'(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}.u(t) - a\left[\delta(t-T) + \frac{1}{3}\delta'(t-T) + \frac{1}{3}e^{-3(t-T)}.u(t-T)\right]$$

FEBRERO 2003

2. Considere la siguiente señal en tiempo continuo:

$$x(t) = |\,\text{sen}\,\pi t\,|, \quad -\infty < t < \infty$$

La señal $x(t)$ se pasa a través de un sistema LTI cuya salida $y(t)$ se relaciona con la entrada $x(t)$ del siguiente modo

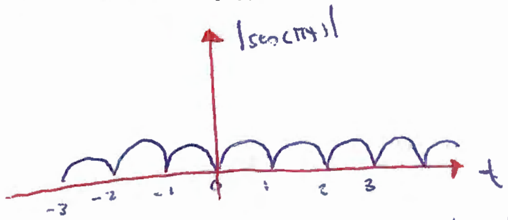
$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t)$$

Se pide:

a) Determine los coeficientes del desarrollo de Fourier en serie de Fourier de la señal $x(t)$. Asimismo, determine la transformada de Fourier de $x(t)$.

b) Calcule las constantes a y b para que la salida del sistema $y(t)$ no tenga componentes de frecuencia en el origen ($w = 0$) y conserve los mismos valores del espectro de $x(t)$ cuando w tiende a infinito. Calcule también la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$.

c) Determine la transformada de Fourier de la señal $y(t)$.



$T = 1$

Por ser señal periódica admite desarrollo en serie de Fourier.

$|\text{sen}(\pi t)| \geq 0$, $t \in [0,1]$

Opción 1:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jw_0kt}\,dt = \int_T x(t)\cdot e^{-j\cdot k\cdot 2\pi\cdot t} = \int_0^1 \text{sen}(\pi t)\cdot e^{-jk2\pi t}\cdot dt =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}\cdot e^{-jk2\pi t}\,dt = \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{j\pi t(1-2k)} - e^{-j\pi t(1+2k)}\,dt =$$

$$\frac{1}{j\pi(1-2k)}\frac{1}{2j}\int_0^1 j\pi(1-2k)\cdot e^{j\pi(1-2k)}\,dt + \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{j\pi(1+2k)}\int_0^1 j\pi(1+2k)\,e^{-j\pi(1+2k)t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\cdot j\cdot j\cdot\pi}\left[\frac{1}{1-2k}\cdot e^{j\pi(1-2k)t}\Big|_0^1 + \frac{1}{1+2k}\,e^{-j\pi(1+2k)t}\Big|_0^1\right] = \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\pi(1-2k)} - 1}{1-2k} + \frac{e^{-j\pi(1+2k)} - 1}{1+2k}\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{-1-1}{1-2k} + \frac{-1-1}{1+2k}\right] = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right] = \boxed{\frac{2}{\pi(1-4k^2)}}$$

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \cdot e^{jk2\pi t} \rightarrow X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(\omega-k\omega_0)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \cdot \delta(\omega-2\pi k)$$

Opción 2:

trans. de Fourier de un periodo de la señal

$$a_k=\frac{1}{T}\cdot X_p(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

b.
$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=a\cdot\frac{dx(t)}{dt}+b\cdot x(t) \xrightarrow{F} j\omega\cdot Y(j\omega)+Y(j\omega)=a\cdot j\omega\cdot X(j\omega)+b\cdot X(j\omega)$$

$$Y(j\omega)(1+j\omega)=X(aj\omega+b) \rightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{aj\omega+b}{j\omega+1}=H(j\omega) \quad \text{(por ser LTI)}$$

Para que $Y(j\omega)=0$ en $\omega=0 \rightarrow H(j\omega)=0$ en $\omega=0$

$H(j0)=b \rightarrow \boxed{b=0}$

Para que $Y(j\omega)=X(j\omega)$ cuando $\omega\rightarrow\infty \rightarrow H(j\omega)=1$

$$\lim_{\omega\to\infty} H(j\omega)=1 \rightarrow \lim_{\omega\to\infty}\frac{aj\omega}{j\omega+1}=\frac{a\cancel{j\omega}}{\cancel{j\omega}}=a \rightarrow \boxed{a=1}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+1} \rightarrow h(t)=F^{-1}\left\{\frac{j\omega}{1+j\omega}\right\}=F^{-1}\left\{j\omega\cdot\frac{1}{1+j\omega}\right\}=\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\cdot u(t)\right]=$$

$$-e^{-t}\cdot u(t)+e^{-t}\cdot du(t)=-e^{-t}\cdot u(t)+\delta(t)\cdot e^{-t}=\boxed{-e^{-t}\cdot u(t)+\delta(t)=h(t)}$$

c.
$$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)=\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\cdot\delta(\omega-2\pi k)\right)\cdot\frac{j\omega}{j\omega+1}=$$

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\cdot\frac{j\cdot 2\pi\cdot k}{j2\pi k+1}}\cdot\delta(\omega-2\pi k)$$

coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $Y(j\omega)$

SEPTIEMBRE 2000 ≡ JUN 07, EJ-3

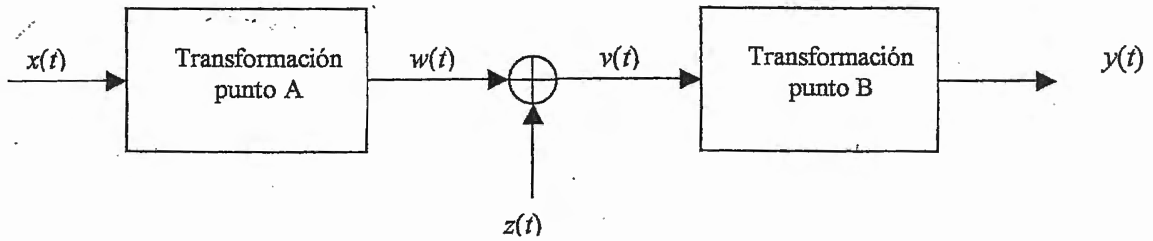
3. Sea un sistema cuya entrada y salida se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$y(t) = x(at)$$

donde a es una constante arbitraria distinta de cero.

a) ¿Es un sistema lineal?.¿Es un sistema invariante en el tiempo?

Supongamos el siguiente esquema:



donde los bloques 'Transformación punto A y punto B' representan una o varias transformaciones en cascada exclusivamente del tipo escalado temporal o filtro paso bajo ideal. De las señales involucradas en el proceso únicamente se sabe que son reales y de banda limitada ($x(t)$ es paso bajo y $z(t)$ es paso banda) verificando,

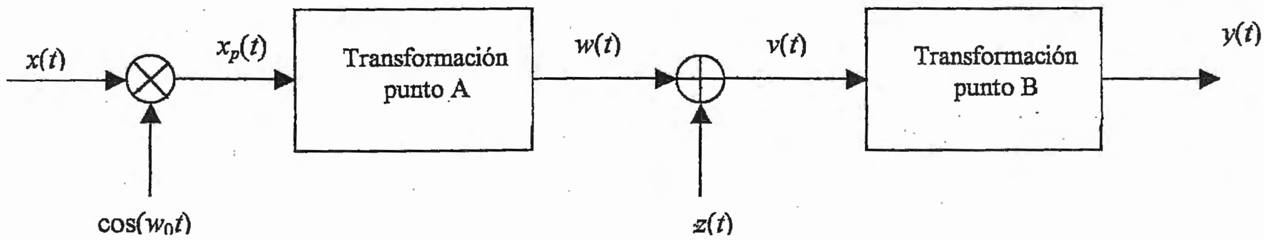
$$X(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \omega_0$$

$$Z(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \omega_0 \text{ y } |\omega| < \frac{\omega_0}{2}$$

siendo ω_0 un parámetro arbitrario.

b) Diseñe convenientemente las transformaciones de los puntos A y B de forma que se garantice la identidad $y(t) = x(t)$.

c) Supongamos ahora un nuevo esquema como el descrito en la figura:



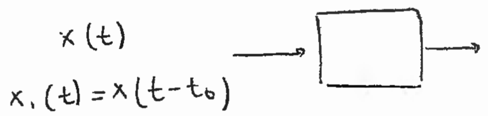
Diseñe nuevamente las transformaciones en los puntos A y B (en B puede considerar un bloque adicional que multiplique una señal por una sinusoide de frecuencia arbitraria) para garantizar igualmente la identidad $y(t) = x(t)$.

a) $x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = x(at)$, $a \neq 0$.

¿ES LINEAL?

$x_1(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t) = x_1(at)$

— ¿es INVARIANTE?



$y(t) = x(at)$

$y_1(t) = y(t-t_0)$ si fuera invariante

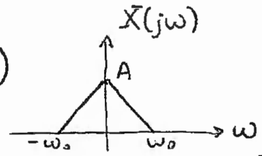
Lo que sale en realidad es:

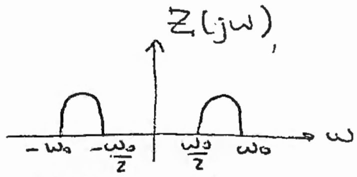
$y_1(t) = x_1(at) = x(at - t_0)$

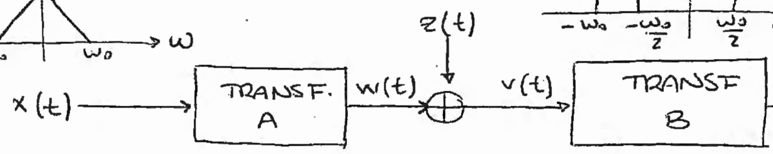
$y(t-t_0) = x(a(t-t_0))$

$y_1(t) \neq y(t-t_0)$ NO ES INVARIANTE

b)

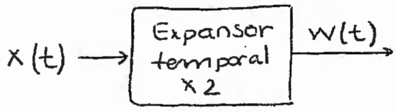




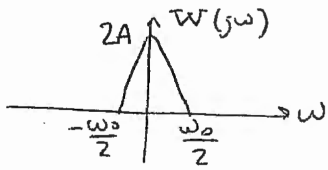


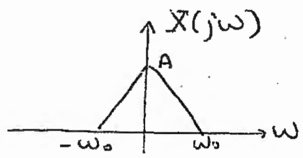
$y(t) = x(t)$

1. Para preservar la información espectral de $x(t)$ sin que se mez con $z(t)$ habrá que comprimir el espectro (expandir en el tiempo) por factor 2.



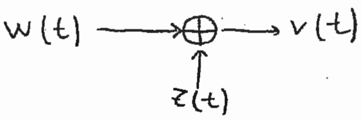
$w(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$

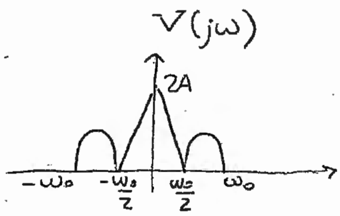




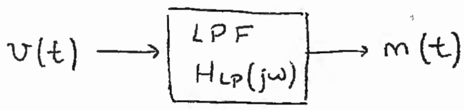
$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$; $W(j\omega) = \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} X\left(j\frac{\omega}{1/2}\right) = 2X(j2\omega$

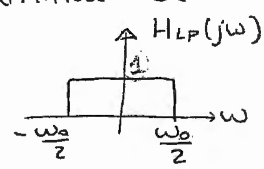
2. Se suma "el ruido" $z(t)$.

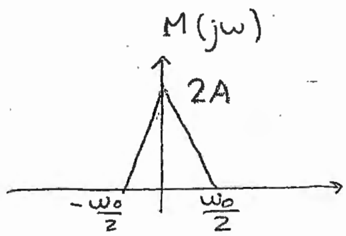




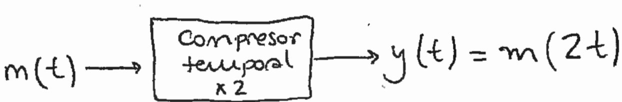
3. Filtramos paso bajo para eliminar el ruido.



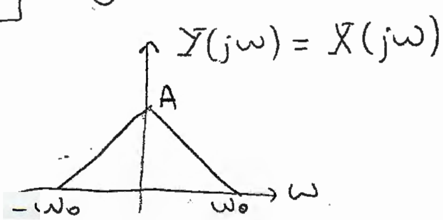


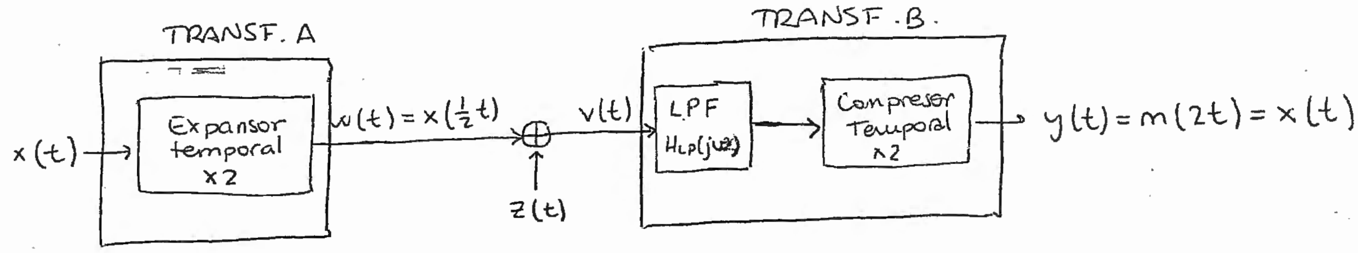


4. Expandimos en frecuencia (comprimimos en el tiempo factor 2).

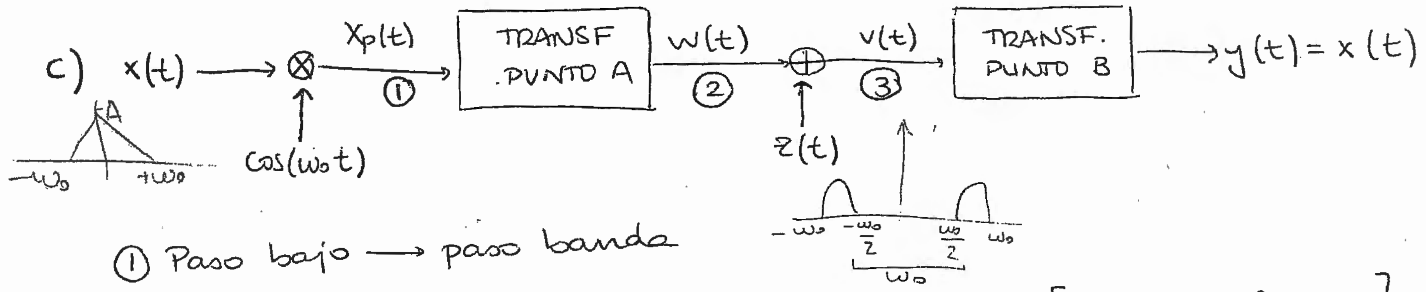


$y(t) = m(2t)$ $\quad Y(j\omega) = \frac{1}{|2|} M\left(j\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} M\left(j\frac{\omega}{2}\right)$





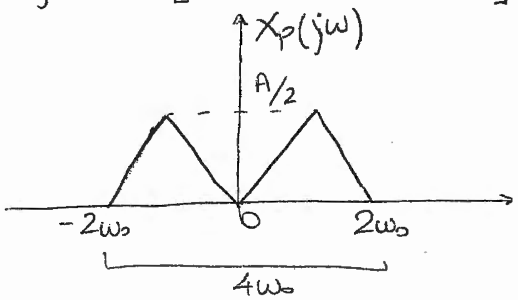
c)



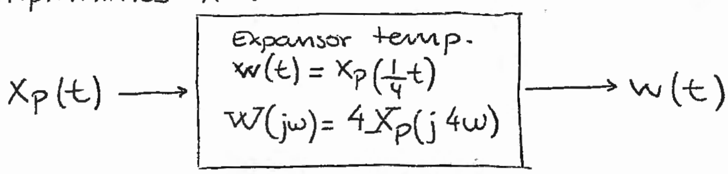
① Paso bajo $\longrightarrow$ paso banda

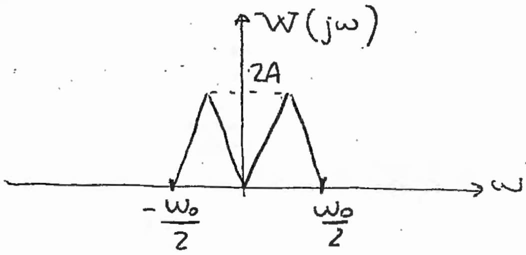
$$x_p(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \longrightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{X(j(\omega+\omega_0))}_{\text{desplazamos } \omega_0 \text{ hacia la izquierda}} + \underbrace{X(j(\omega-\omega_0))}_{\text{desplazamos } \omega_0 \text{ hacia la dcha}}\right]$$

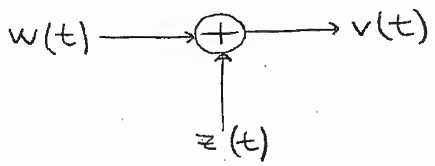


② Comprimimos x 4 en frecuencia (expandimos x 4 en el tiempo).

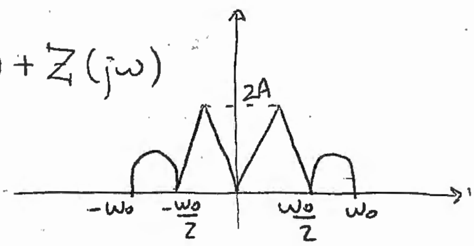




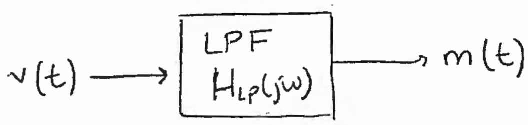
③ Se añade el ruido $z(t)$

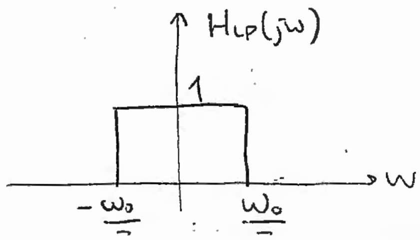


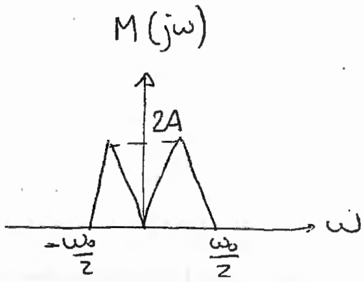
$$V(j\omega) = W(j\omega) + Z(j\omega)$$



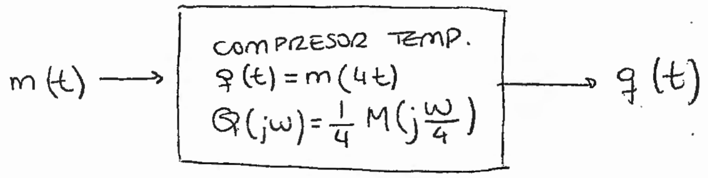
④ Filtramos paso bajo para eliminar el ruido.

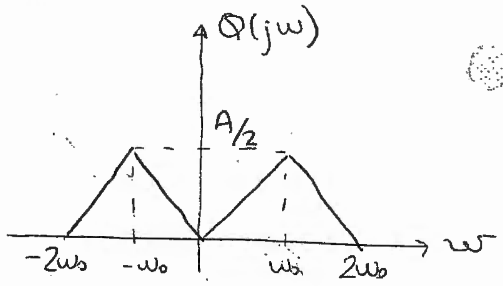




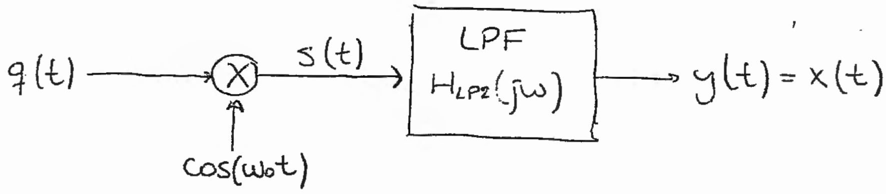


⑤ Expandimos x4 en frecuencia (comprimimos x4 en el tiempo).



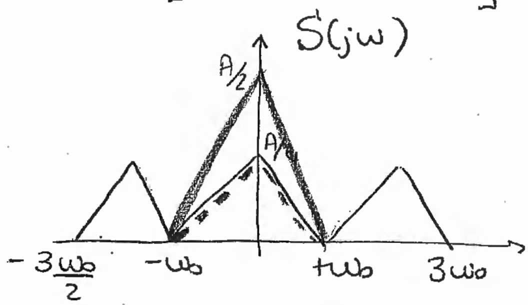


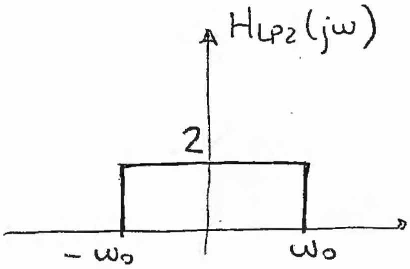
⑥ Paso banda → paso bajo.

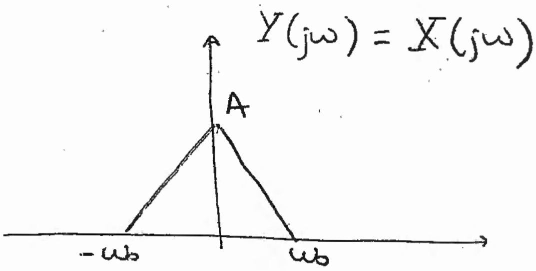


$$s(t) = q(t)\cos(\omega_0 t) \longrightarrow S(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot Q(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right] =$$

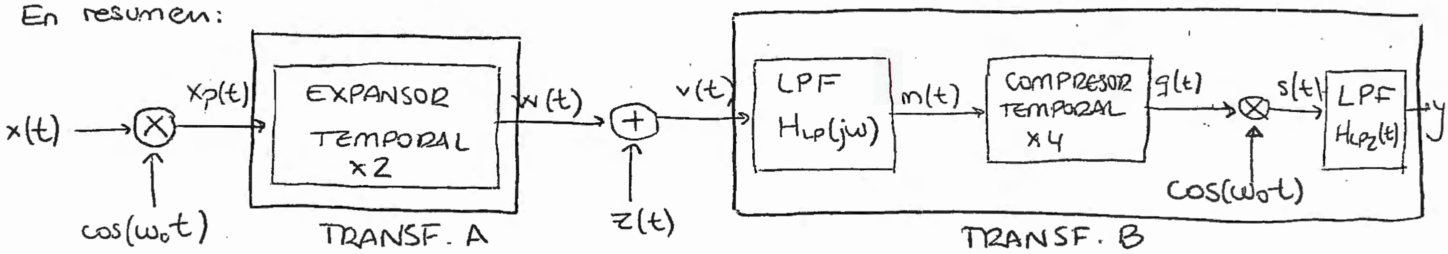
$$= \frac{1}{2}\left[Q(j(\omega+\omega_0)) + Q(j(\omega-\omega_0))\right]$$







En resumen:



2. Sabiendo que las siguientes señales $x_1(t)$, $X_1(j\omega)$ forman un par de transformadas de Fourier,

$$x_1(t) = \frac{1}{jt - \alpha} \overset{TF}{\leftrightarrow} X_1(j\omega) = -2\pi e^{-\alpha\omega} u(\omega); \qquad \alpha > 0 \text{ y } \alpha \text{ real}$$

donde $u(\omega)$ es la función escalón unidad:

$$u(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

(a) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$, denotada como $X(j\omega)$ siendo

$$x(t) = \frac{\cos t}{(jt-3)(jt-1)}$$

Suponga ahora un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso $h(t)$ es periódica de periodo 2π definida en un periodo como

$$h(t) = \begin{cases} \cos t & |t| < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq |t| < \pi \end{cases}$$

(b) Calcule los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $h(t)$ denotados como a_k.

(c) Si la señal $x(t)$ es la entrada del sistema anterior, calcule la expresión de la salida $Y(j\omega)$, expresando el resultado en función de $X(j\omega)$ y a_k.

a.

$$x(t) = \underbrace{\cos t}_{x_3(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(jt-3)(jt-1)}}_{x_2(t)} \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_2(j\omega) * X_3(j\omega)$$

$$X_3(j\omega) = \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[X_2(j(\omega-1)) + X_2(j(\omega+1))] \rightarrow \text{necesito } X_2(j\omega)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{(jt-3)(jt-1)} = \frac{A}{jt-3} + \frac{B}{jt-1} \rightarrow \frac{1}{(jt-3)(jt-1)} = \frac{A(jt-1) + B(jt-3)}{(jt-3)(jt-1)}$$

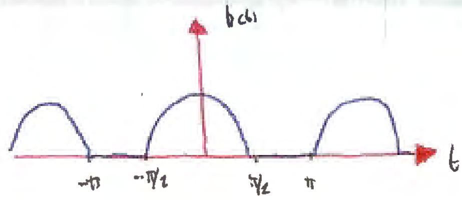
$$1 = A(jt-1) + B(jt-3) \rightarrow 1 = tj[A+B] - A - 3B$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -A-3B=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{array} \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{jt-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{jt-1}$$

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot -\cancel{2}\pi \cdot e^{-3\omega} \cdot u(\omega) - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot -\cancel{2}\pi \cdot e^{-\omega} \cdot u(\omega) = \pi[e^{-\omega} - e^{-3\omega}] \cdot u(\omega)$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot e^{-(\omega-1)} - e^{-3(\omega-1)} \cdot u(\omega-1) + \pi \cdot e^{-(\omega+1)} - e^{-3(\omega+1)} \cdot u(\omega+1)}$$

b.



Opción 1: $a_k = \frac{1}{T}\int_T h(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot e^{-jkt}\,dt =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\cdot e^{-jkt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\cdot e^{-jkt}\,dt =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[e^{jt(1-k)}+e^{-jt(1+k)}\right]dt\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{j(1-k)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} j(1-k)\,e^{j(1-k)t}\,dt + \frac{1}{-j(1+k)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -j(1+k)\,e^{-j(1+k)t}\,dt\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{j(1-k)}\cdot e^{j(1-k)t}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{j(1+k)}\cdot e^{-j(1+k)t}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] = \frac{1}{4\pi j}\left(\frac{e^{j(1-k)\pi/2}-e^{-j(1-k)\pi/2}}{1-k} - \frac{e^{-j(1+k)\pi/2}-e^{j(1+k)\pi/2}}{1+k}\right)$$

$\text{sen}((1-k)\pi/2)$ $\quad$ $\text{sen}((1+k)\pi/2)$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j(1-k)\pi/2}-e^{-j(1-k)\pi/2}}{2j(1-k)} + \frac{e^{j(1+k)\pi/2}-e^{-j(1+k)\pi/2}}{2j(1+k)}\right)$$

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\text{sen}[(k-1)\pi/2]}{1-k} + \frac{\text{sen}[(k+1)\pi/2]}{1+k}\right]$$

$\text{sen}((k-1)\pi/2) = \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $\text{sen}(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$

$\text{sen}((k+1)\pi/2) = \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}+\pi/2\right)$ $\quad$ $\text{sen}(\alpha-\pi/2) = -\cos\alpha$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{k+1} + \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{k-1}\right] = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{2\pi}\left[\frac{k-1-(k+1)}{(k+1)(k-1)}\right] =$$

$$\frac{-2\cos(k\pi/2)}{2\pi(k^2-1)} = \frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1-k^2)}$$

Esta expresión no sirve para $k=\pm1$, con lo que se calcula por separado.

$$a_1 = \frac{1}{T}\int h(t)\cdot e^{-j\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot e^{-jt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\cdot e^{-jt}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\cdot e^{-jt}\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+e^{-2jt})\,dt = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-2jt}\,dt\right] = \frac{1}{4}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{4}$$

El DSF de $h(t)$ será: $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\cdot e^{jk\omega_0 t} \overset{T=2\pi,\ \omega=1}{=} \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq\pm1}}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1-k^2)}\cdot e^{jkt} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot e^{-jt}}_{k=-1} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{jt}}_{k=1}$

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq\pm1}}^{\infty}\frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1-k^2)}\cdot e^{jkt} + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{e^{-jt}+e^{jt}}{2}}_{\cos(t)} = \boxed{\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq\pm1}}^{\infty}\frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1-k^2)}\cdot e^{jkt} + \frac{1}{2}\cos(t)}$$

C.

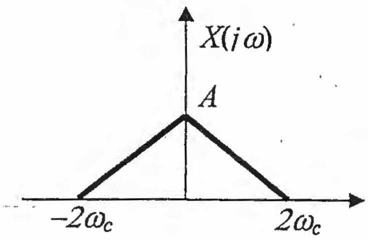
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(j\omega) \qquad H(j\omega) \qquad Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkt} \xleftrightarrow{F} H(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(\omega - k)$$

$$Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \overset{X(jk)}{\cancel{X(j\omega)}} \cdot \delta(\omega - k) = \boxed{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k \cdot X(jk)}_{\text{coef. de } y(t)} \cdot \delta(\omega - k)}$$

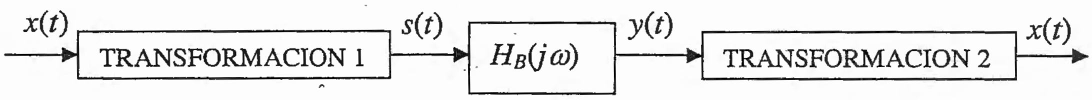
2. Considere una señal $x(t)$ cuyo espectro es



Dicha señal se desea transmitir por un sistema que se puede modelar como un filtro paso banda ideal, cuya respuesta en frecuencia es

$$H_B(j\omega)=\begin{cases}1 & (\omega_0-\omega_c)\le|\omega|\le(\omega_0+\omega_c)\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

siendo $\omega_0 > 2\omega_c > 0$. El esquema es el siguiente:



Es decir, el bloque "TRANSFORMACION 1" transforma la señal de entrada $x(t)$ en otra señal $s(t)$, que será la que pasa por el filtro paso banda ideal, cuya salida es la señal $y(t)$. A partir de la señal $y(t)$, el bloque "TRANSFORMACION 2" recupera la señal original $x(t)$.

(a) Indique y justifique qué transformaciones tiene que realizar el bloque "TRANSFORMACION 1" sobre la señal $x(t)$ (y, por tanto, sobre su espectro), para que a partir de la salida del filtro paso banda ideal, $y(t)$, sea posible recuperar de nuevo la señal $x(t)$.

(b) Indique y justifique qué transformaciones tiene que realizar el bloque "TRANSFORMACION 2" sobre la señal $y(t)$ (y, por tanto, sobre su espectro), para recuperar de nuevo la señal $x(t)$.

SEPTIEMBRE 2000

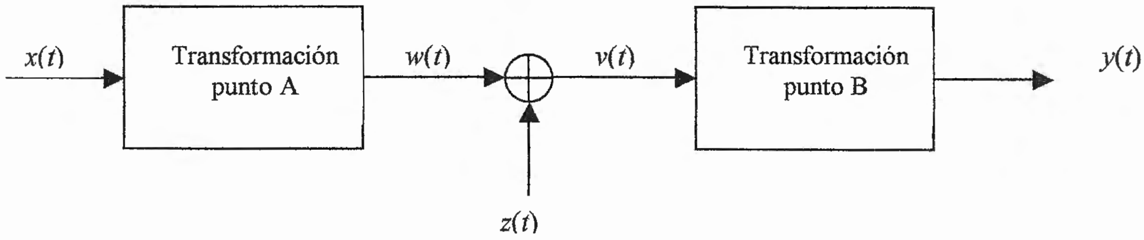
3. Sea un sistema cuya entrada y salida se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$y(t) = x(at)$$

donde a es una constante arbitraria distinta de cero.

a) ¿Es un sistema lineal?.¿Es un sistema invariante en el tiempo?

Supongamos el siguiente esquema:



donde los bloques 'Transformación punto A y punto B' representan una o varias transformaciones en cascada exclusivamente del tipo escalado temporal o filtro paso bajo ideal. De las señales involucradas en el proceso únicamente se sabe que son reales y de banda limitada ($x(t)$ es paso bajo y $z(t)$ es paso banda) verificando,

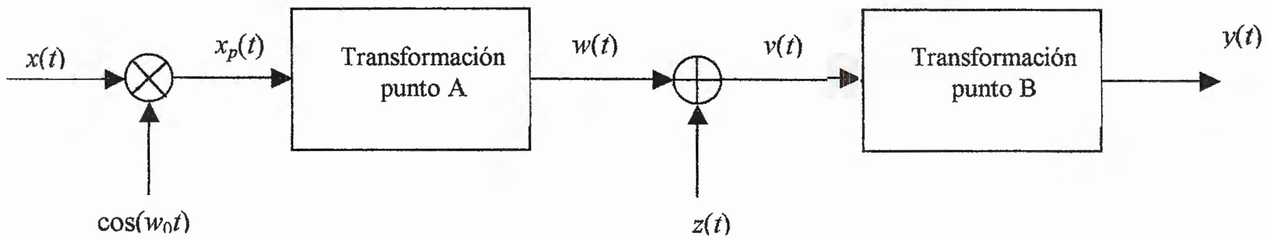
$$X(j\omega) = 0, \quad \forall\,|\,\omega\,| > \omega_0$$

$$Z(j\omega) = 0, \quad \forall\,|\,\omega\,| > \omega_0 \;\text{ y }\; |\omega| < \frac{\omega_0}{2}$$

siendo ω_0 un parámetro arbitrario.

a) Diseñe convenientemente las transformaciones de los puntos A y B de forma que se garantice la identidad $y(t) = x(t)$.

b) Supongamos ahora un nuevo esquema como el descrito en la figura:



Diseñe nuevamente las transformaciones en los puntos A y B (en B puede considerar un bloque adicional que multiplique una señal por una sinusoide de frecuencia arbitraria) para garantizar igualmente la identidad $y(t) = x(t)$.

SEPTIEMBRE 2003

2. Considere una señal $x(t)$ definida mediante la siguiente expresión:

$$x(t) = \begin{cases} |t| & |t| < T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde T_0 es un parámetro real y positivo arbitrario.

a) Calcule la expresión de la su transformada de Fourier $X(jw)$.
b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $y(t)$, $Y(jw)$, si $y(t)$ está definida como:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - T_0 - kT_1)$$

donde $T_1 >> T_0$ es un parámetro real y positivo. Calcule los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier denotados como $\{a_k\}$. Exprese el resultado en función de $X(jw)$. (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (a)).

c) Si dicha señal pasa por un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}\right)$$

donde W es un parámetro positivo arbitrario. Determine la relación que deben cumplir T_1 y W para que se anulen todos los armónicos de orden superior al segundo. Calcule la expresión de los coeficientes no nulos $\{b_k\}$ $k = -2, -1, 0, 1, 2$, expresándolos en función de los coeficientes de la entrada $\{a_k\}$ (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (b)).

SEPTIEMBRE 2003

2. Considere una señal $x(t)$ definida mediante la siguiente expresión:

$$x(t) = \begin{cases} |t| & |t| < T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde T_0 es un parámetro real y positivo arbitrario.

a) Calcule la expresión de la su transformada de Fourier $X(jw)$.
b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $y(t)$, $Y(jw)$, si $y(t)$ está definida como:

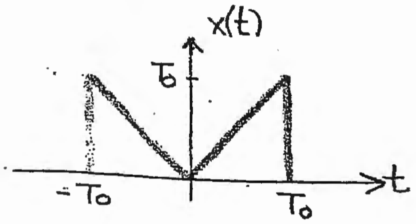
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - T_0 - kT_1)$$

donde $T_1 >> T_0$ es un parámetro real y positivo. Calcule los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier denotados como $\{a_k\}$. Exprese el resultado en función de $X(jw)$. (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (a)).

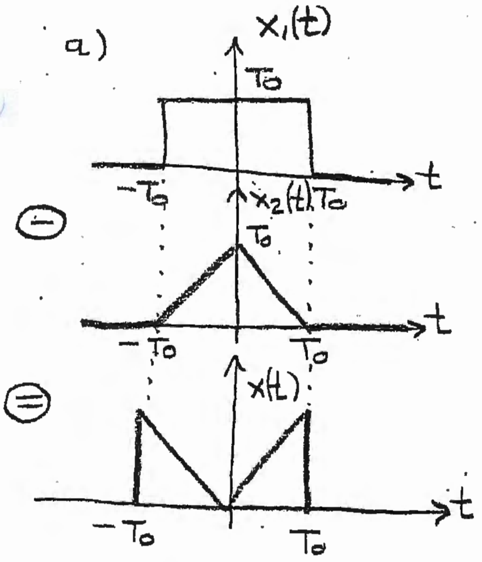
c) Si dicha señal pasa por un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}\right)$$

donde W es un parámetro positivo arbitrario. Determine la relación que deben cumplir T_1 y W para que se anulen todos los armónicos de orden superior al segundo. Calcule la expresión de los coeficientes no nulos $\{b_k\}$ $k = -2, -1, 0, 1, 2$, expresándolos en función de los coeficientes de la entrada $\{a_k\}$ (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (b)).

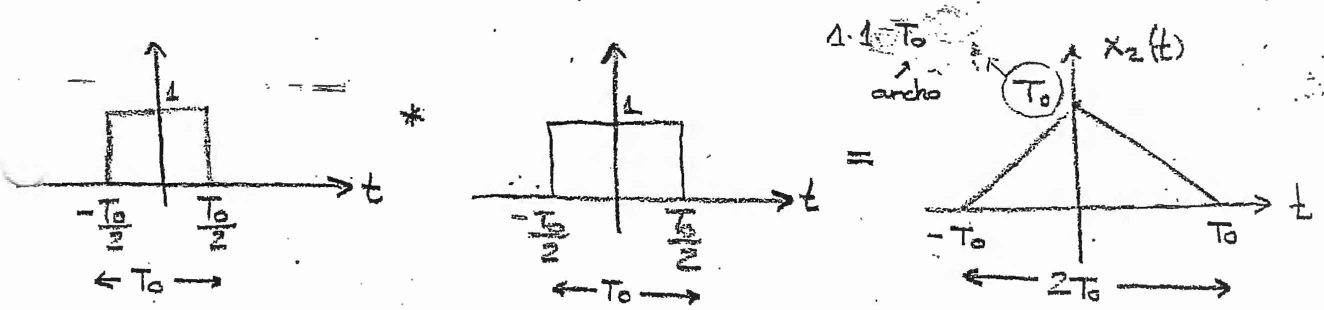


a)



$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = X_1(j\omega) - X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) = T_0 \cdot \begin{cases} 1, & |t| < T_0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = T_0 \frac{2\,\text{sen}\,\omega T_0}{\omega}$$

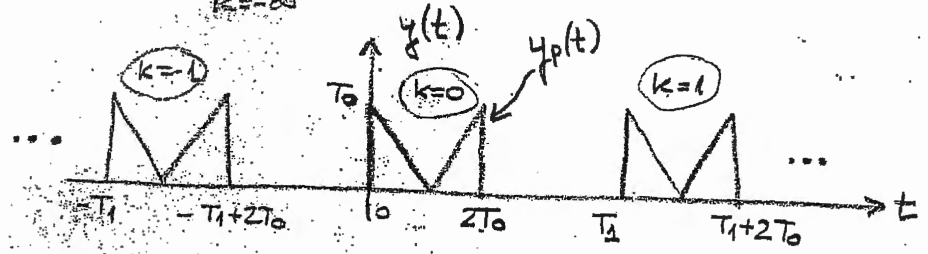


$$\downarrow \mathcal{F} \qquad\qquad \downarrow \mathcal{F} \qquad\qquad \downarrow \mathcal{F}$$

$$\frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{T_0}{2})}{\omega} \qquad \frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{T_0}{2})}{\omega} \qquad X_2(j\omega) = \left[\frac{2\,\text{sen}(\frac{\omega T_0}{2})}{\omega}\right]^2$$

Así que: $\boxed{X(j\omega) = X_1(j\omega) - X_2(j\omega) = \frac{2T_0\,\text{sen}(\omega T_0)}{\omega} - \frac{4\,\text{sen}^2(\frac{\omega T_0}{2})}{\omega^2}}$

b) $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - T_0 - kT_1)$, $T_1 \gg T_0$



Periodo T_1

Opción 1: Por definición $a_k = \cdots \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_1}t} \longrightarrow$

$$Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{T_1})$$

Opción 2: $a_k = \frac{1}{T_1} Y_P(j\omega)\Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{T_1}}$

$y_P(t) = x(t - T_0) \longrightarrow Y_P(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega T_0}$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_1} X(j\omega)e^{-j\omega T_0}\Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{T_1}}} = \boxed{= \frac{1}{T_1} X(jk\tfrac{2\pi}{T_1})e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_0}}$$

Así que: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{T_1} X(jk\tfrac{2\pi}{T_1})e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_0}\right)}_{a_k} e^{j\frac{2\pi}{T_1}t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \boxed{Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{T_1})}$

Opción 3: Calcular directamente $Y(j\omega)$ e identificar a_k

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-T_0-kT_1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-T_0)*\delta(t-kT_1)=x(t-T_0)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_1)$$

$$x(t-t_0)*\delta(t-t_1)=x(t-t_0-t_1)$$

$$\boxed{Y(j\omega)}=\mathcal{F}\left\{x(t-T_0)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_1)\right\}=\mathcal{F}\{x(t-T_0)\}\cdot\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_1)\right\}=$$

$$=X(j\omega)e^{-j\omega T_0}\cdot\frac{2\pi}{T_1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T_1}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_1}X(j\omega)e^{-j\omega T_0}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}\right)=$$

$$\boxed{=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{T_1}X\left(jk\frac{2\pi}{T_1}\right)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_0}\right)}_{a_k}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}\right)}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_1}t}$$

c)

$$y(t)\longrightarrow\boxed{h(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t}\right]}\longrightarrow z(t)=y(t)*h(t)$$

$$y(t)\ \big\downarrow\mathcal{F}\ \ Y(j\omega) \qquad h(t)\ \big\downarrow\mathcal{F}\ \ H(j\omega) \qquad z(t)\ \big\downarrow\mathcal{F}\ \ Z(j\omega)=Y(j\omega)\cdot H(j\omega)=$$

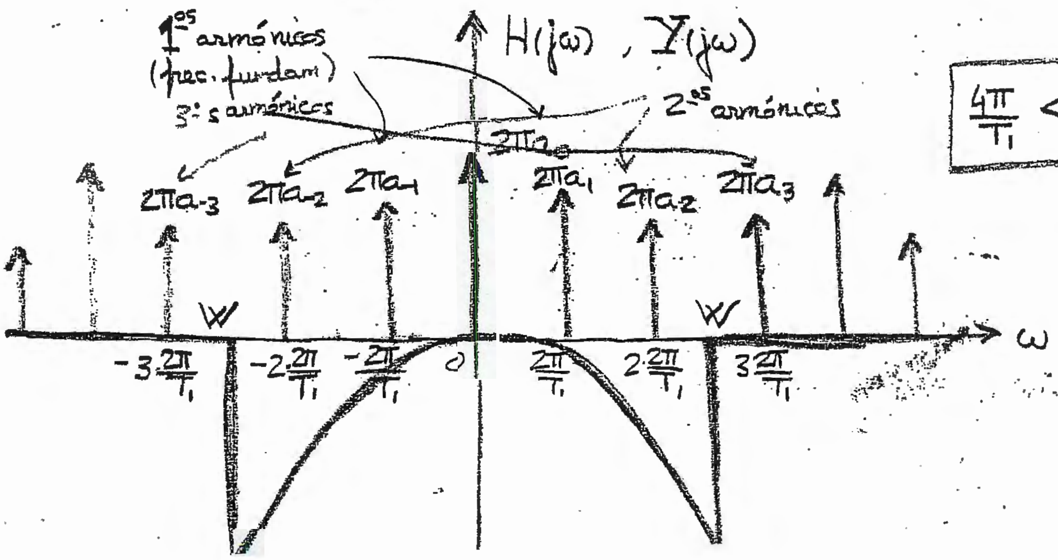
$$Y(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}\right)H(j\omega)=$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{a_k H\left(jk\frac{2\pi}{T_1}\right)}_{c_k}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

$$h_1(t)=\frac{\operatorname{sen}Wt}{\pi t}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}H_1(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{d^2}{dt^2}h_1(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\boxed{H(j\omega)=(j\omega)^2H_1(j\omega)=-\omega^2H_1(j\omega)=\begin{cases}-\omega^2, & |\omega|<W\\ 0, & \text{resto}\end{cases}}$$

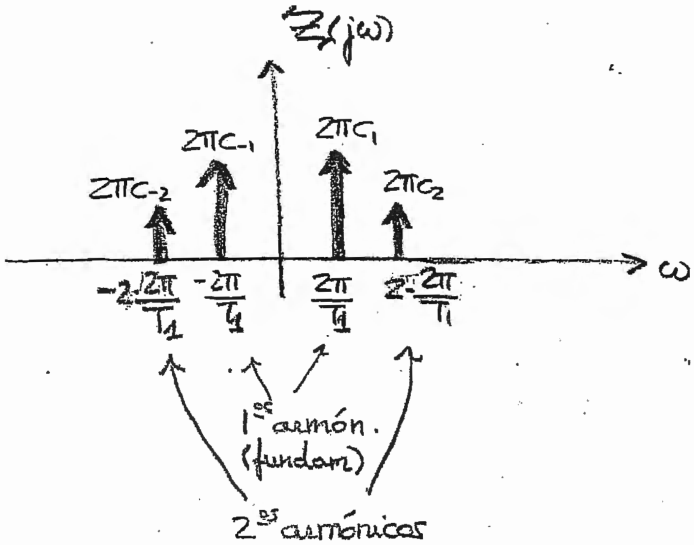


$$\boxed{\frac{4\pi}{T_1}<W<\frac{6\pi}{T_1}}$$

Así será: $Z_1(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_1}\right) \cdot H(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-2}^{+2} \underbrace{a_k H\left(jk\frac{2\pi}{T_1}\right)}_{c_k} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) =$

$$= 2\pi \sum_{k=-2}^{+2} \underbrace{a_k \left[-\left(k\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\right]}_{c_k} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

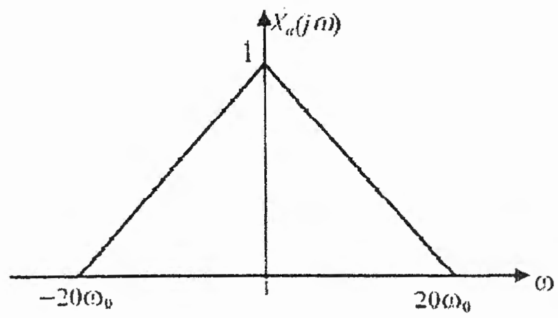
$$k=0 \rightarrow \; c_0 = a_0\left[-\left(0\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\right] = 0$$



2. Sea la señal $x(t)$ cuyo espectro es el siguiente:

$$X(j\omega)=\left\{\sum_{k=-20}^{20} X_a(jk\omega_0)\cdot\delta(\omega-k\omega_0)\right\}*\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-l\cdot 40\cdot\omega_0)\right\}$$

Donde $X_a(j\omega)$ es el espectro de banda limitada representado en la figura y ω_0 vale $\dfrac{2\pi}{T}$.



Se pide:

a) Dibuje $X(j\omega)$ y justifique la periodicidad de $x(t)$.

b) Calcule la señal $x(t)$

c) Considere un filtro lineal e invariante con la siguiente respuesta impulsiva:

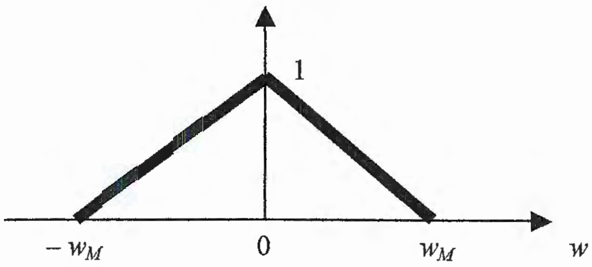
$$h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$

Calcule su respuesta en frecuencia. Dibuje su modulo.

d) Calcule la señal de salida del sistema del apartado c) cuando la entrada es $x(t)$.

SEPTIEMBRE 2002

2. Considere una señal x(t), cuyo espectro X(jw) es la función triangular de la figura:



a) Razonando en el dominio del frecuencia, y explicando claramente los paso seguidos, demuestre la siguiente igualdad, calculando asimismo el valor necesario de K para que la igualdad se cumpla:

$$x(t) = K\left[x(t)\cos^2(w_0 t)\right] * \left[\frac{\text{sen}(w_1 t)}{\pi t}\right]$$

siendo $w_0 > 2w_M$ y $w_1 = 2w_M$.

Indique también el margen de valores que puede tener, en general, w_1 para que se siga cumpliendo la igualdad anterior.

b) Suponga que la igualdad que se plantea ahora es:

$$x(t) = K\left[x(t)\cos^2(w_0 t)\right] * h_1(t) * \left[\frac{\text{sen}(w_1 t)}{\pi t}\right] * h_2(t)$$

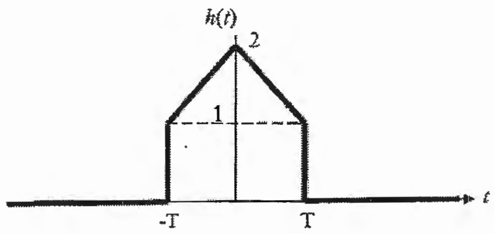
siendo $w_0 > 2w_M$ y $w_1 = 2w_M$, y $h_1(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ y real.

Obtenga el valor de K, la respuesta en frecuencia $H_2(jw)$ y su correspondiente respuesta al impulso $h_2(t)$ para que se cumpla la igualdad anterior.

SEPTIEMBRE 2007

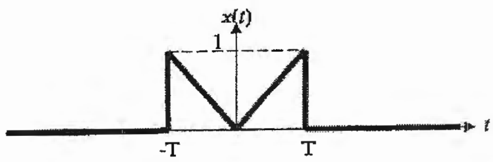
Ejercicio 2

Considere la siguiente respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante:



a) Calcule la transformada de Fourier de $h(t)$.

b) Sea la señal $x(t)$ representada a continuación. Calcule $Y\left(j\omega\right)$, donde $y(t)=x(t)*h(t)$.



c) Considere la señal $x_p(t)=\sum_{k=\infty}^{\infty}x(t-KT)$. Calcule la señal $y_p(t)=x_p(t)*h(t)$.

FEBRERO 2008

Ejercicio 2

Considere el sistema en tiempo continuo, definido por la relación siguiente

$$y(t) = \pi^2 \cdot x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida. Suponiendo que

$$x(t) = (1 + \cos(\pi t)) \cdot (u(t+1) - u(t-1))$$

Se pide:

a) Determinar la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la señal $x(t)$. Representar gráficamente $X(j\omega)$.

b) Determinar la transformada de Fourier $Y(j\omega)$ de la señal $y(t)$, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema y de $X(j\omega)$, simplificando el resultado.

c) Calcular la señal de salida $y(t)$.

FEBRERO 2008

Ejercicio 2

Considere el sistema en tiempo continuo, definido por la relación siguiente

$$y(t) = \pi^2 \cdot x(t) + \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida. Suponiendo que

$$x(t) = (1 + \cos(\pi t)) \cdot (u(t+1) - u(t-1))$$

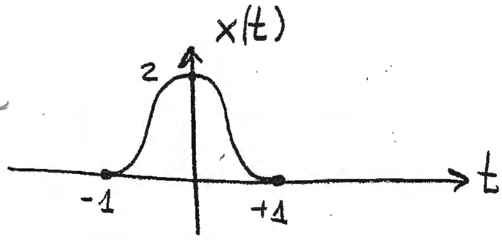
Se pide:

a) Determinar la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la señal $x(t)$. Representar gráficamente $X(j\omega)$.

b) Determinar la transformada de Fourier $Y(j\omega)$ de la señal $y(t)$, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema y de $X(j\omega)$, simplificando el resultado.

c) Calcular la señal de salida $y(t)$.

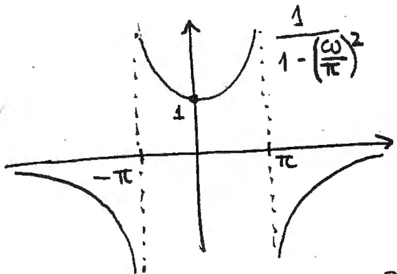
a) $x(t) = (1+\cos\pi t)\cdot[u(t+1) - u(t-1)] = \begin{cases} 1+\cos\pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

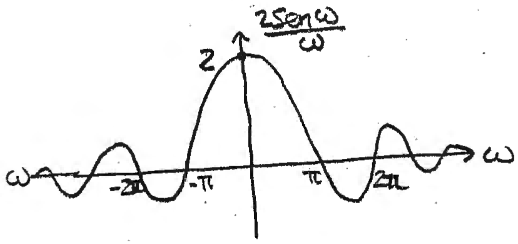


Hecho en ej 2. tema 3

$$X(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}\,\omega}{\omega} + \frac{\text{sen}(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\text{sen}(\omega+\pi)}{\omega+\pi} = \dots = \frac{2\pi^2\,\text{sen}\,\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)} =$$

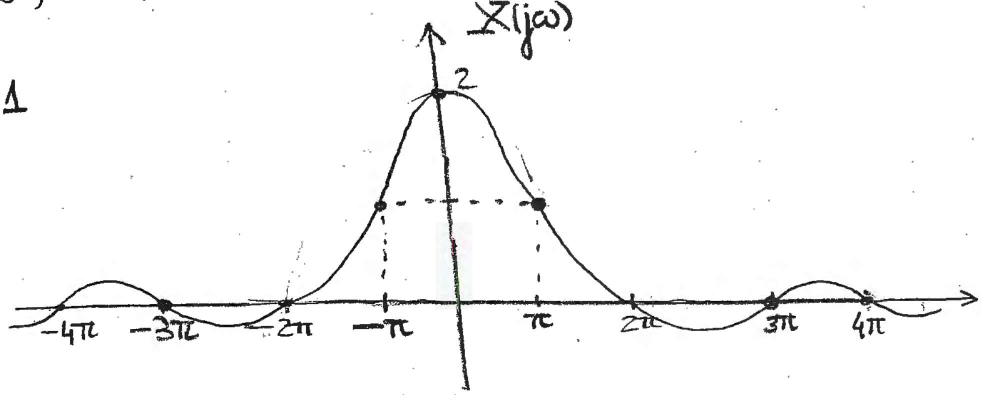
$$= 2\cdot\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}\cdot\frac{+1}{1-\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2} \in \mathbb{R}$$





$$\lim_{\omega\to\pi} X(j\omega) = \lim_{\omega\to\pi} \frac{2\pi^2\,\text{sen}\,\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)} \overset{0/0}{=} \frac{2\pi^2}{\pi} \lim_{\omega\to\pi} \frac{\text{sen}\,\omega}{\pi^2-\omega^2} = [L'H] = 2\pi \lim_{\omega\to\pi} \frac{\cos\omega}{-2\omega} =$$

$$= 2\pi\frac{\cos\pi}{-2\pi} = -\cos\pi = 1$$



(b) $x(t) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ H(j\omega) \end{matrix}} \rightarrow y(t)$

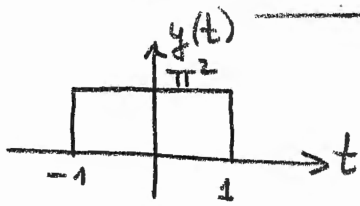
$$y(t) = \pi^2 x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \pi^2 X(j\omega) + (j\omega)^2 X(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \pi^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{2\pi^2 \operatorname{sen}\omega}{\omega\,\cancel{(\pi^2-\omega^2)}} \cdot \cancel{\pi^2-\omega^2} = 2\pi^2\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = \pi^2\, 2\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}}$$

$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

c) $$y(t) = \pi^2 \cdot \begin{cases} 1, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases} = \pi^2[u(t+1)-u(t-1)]$$



Tb. se puede hacer directamente mediante la expresión:

$$y(t) = \pi^2 x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$x(t) = (1+\cos\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]$$

$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\pi \operatorname{sen}\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)] + (1+\cos\pi t)[\delta(t+1)-\delta(t-1)] =$$

$$= -\pi\operatorname{sen}(\pi t)[u(t+1)-u(t-1)] + \cancelto{0}{[1+\underbrace{\cos(\pi\cdot(-1))}_{-1}]}\,\delta(t+1) - \cancelto{0}{[1+\underbrace{\cos(\pi\cdot 1)}_{-1}]}\,\delta(t-1) =$$

$$= -\pi\operatorname{sen}(\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\pi^2\cos\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)] - \pi\operatorname{sen}\pi t\,[\delta(t+1)-\delta(t-1)] =$$

$$= -\pi^2\cos\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)] - \pi\,\cancelto{0}{\operatorname{sen}(-\pi)}\,\delta(t+1) + \pi\,\cancelto{0}{\operatorname{sen}\pi}\,\delta(t-1) =$$

$$= -\pi^2\cos\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)]$$

Así que: $y(t) = \pi^2(1+\cancel{\cos\pi t})[u(t+1)-u(t-1)] \cancel{-\pi^2\cos\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)]}$

$$= \pi^2[u(t+1)-u(t-1)]$$

SEPTIEMBRE 2008

2) Sea un sistema lineal, invariante en el tiempo y casual caracterizado por su respuesta al impulso h(t) y su función de transferencia H(s) del cual se sabe que cuando la entrada es $x(t) = t\cos(\omega_0 t)u(t)$, la salida es $y(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$.

a) Calcule la transformada de Laplace de y(t) denotada como Y(s) especificando su región de convergencia.
b) Calcule la transformada de Laplace de x(t) denotada como X(s) especificando su región de convergencia. (Se recomienda usar el resultado de a) y aplicar propiedades)
c) Calcule H(s) especificando su región de convergencia y su correspondiente transformada inversa h(t).
d) Calcule la función g(t) como la transformada de Fourier inversa de $H(j\omega)$. Justifique por qué esta respuesta al impulso no coincide con h(t).

2) Sea un sistema lineal, invariante en el tiempo y casual caracterizado por su respuesta al impulso h(t) y su función de transferencia H(s) del cual se sabe que cuando la entrada es $x(t)=t\cos(\omega_0 t)u(t)$, la salida es $y(t)=\cos(\omega_0 t)u(t)$.

a) Calcule la transformada de Laplace de y(t) denotada como Y(s) especificando su región de convergencia.
b) Calcule la transformada de Laplace de x(t) denotada como X(s) especificando su región de convergencia. (Se recomienda usar el resultado de a) y aplicar propiedades)
c) Calcule H(s) especificando su región de convergencia y su correspondiente transformada inversa h(t).
d) Calcule la función g(t) como la transformada de Fourier inversa de $H(j\omega)$. Justifique por qué esta respuesta al impulso no coincide con h(t).

$$x(t)=t\cos(\omega_0 t)u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI causal}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t)=\cos(\omega_0 t)u(t)$$

a) $$y(t)=\cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\}=$$

$$=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}u(t)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\underbrace{e^{j\omega_0 t}u(t)}_{a=-j\omega_0}\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\underbrace{e^{-j\omega_0 t}u(t)}_{a=+j\omega_0}\}=$$

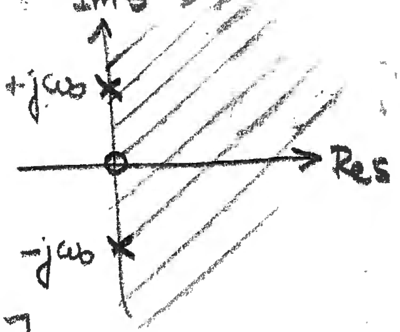
$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s-j\omega_0}}_{Re(s)>Re(j\omega_0)=0}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s+j\omega_0}}_{\text{idem}}=\frac{1}{2}\left[\frac{s+j\omega_0+s-j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\ Re\, s>0$$

ROC a dchas...

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ Re(s)>-a$$

Polos: $s^2+\omega_0^2=0 \longrightarrow s=\pm\sqrt{-\omega_0^2}=\pm\sqrt{-1}\,\omega_0=\pm j\omega_0$ simples!

Ceros: $s=0$



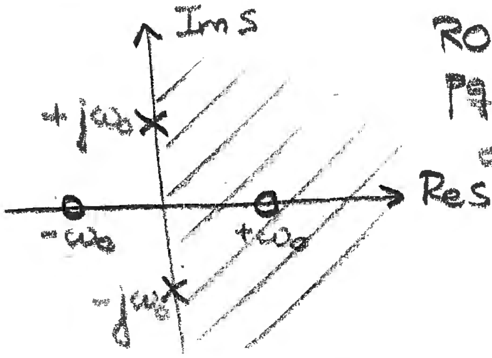
b) $$x(t)=t\,y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)=-\frac{dY(s)}{ds}=-\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right]=$$

$$=-\frac{s^2+\omega_0^2-2s^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}=\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

Ceros: $s^2-\omega_0^2=0 \to s^2=\omega_0^2 \to s=\pm\sqrt{\omega_0^2}=\pm\omega_0$

Polos: $(s^2+\omega_0^2)^2=0 \to \dots \to s=\pm j\omega_0$ (polos dobles)

$$X(s)=\frac{s^2-\omega_0^2}{(s+j\omega_0)^2(s-j\omega_0)^2}$$



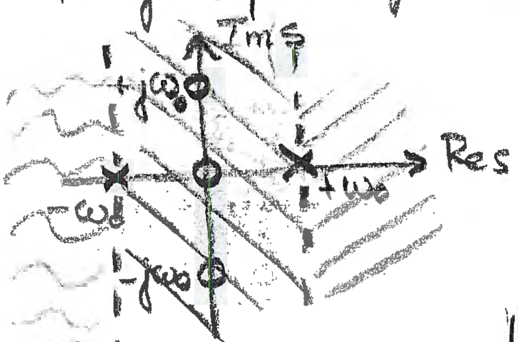
ROC a derechas
Pq. $x(t)$ es ilimitad a dchas.

c) $$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\dfrac{s}{(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)}}{\dfrac{s^2-\omega_0^2}{(s+j\omega_0)^2(s-j\omega_0)^2}}=\frac{s(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)}$$

Ceros: $s=0$, $s=+j\omega_0$, $s=-j\omega_0$

Polos: $s=\omega_0$, $s=-\omega_0$,

Diag de polos y ceros



ROC 1 $Re(s)<-\omega_0$ Anticausal, No estable

ROC 2 $-\omega_0<Re(s)<+\omega_0$ No causal, Estable

$\boxed{\text{ROC 3} \quad Re(s)>\omega_0 \quad \text{Causal, No estable}}$

$H(s)$, ROC1 $\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_1(t) \quad \nexists \; H_1(j\omega)$

$H(s)$, ROC2 $\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_2(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$

$H(s)$, ROC3 $\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_3(t)=h(t) \quad \nexists \; H_3(j\omega)$

$$h(t)=h_3(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s^2+\omega_0^2)}{s^2-\omega_0^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2}\right\}$$

Hay que dividir polinomios

$$\begin{array}{rr|l} s^3 & \omega_0^2 s & s^2-\omega_0^2 \\ \cancel{s^3} & +\omega_0^2 s & s \\ \hline 0 & 2\omega_0^2 s & \end{array}$$

Así que: $$\frac{s^3+\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2} = s + \underbrace{\frac{2\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2}}_{K(s)}$$

$$K(s) = \frac{2\omega_0^2 s}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)} = \frac{A}{s+\omega_0} + \frac{B}{s-\omega_0}$$

$$A = K(s)(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = \frac{2\omega_0^2 s}{s-\omega_0}\Big|_{s=-\omega_0} = \frac{-2\omega_0^3}{-2\omega_0} = \omega_0^2$$

$$B = K(s)(s-\omega_0)\Big|_{s=+\omega_0} = \frac{2\omega_0^2 s}{s+\omega_0}\Big|_{s=+\omega_0} = \frac{2\omega_0^3}{2\omega_0} = \omega_0^2$$

Así que: $$\boxed{h(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{s + K(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{s + \omega_0^2\frac{1}{s+\omega_0} + \omega_0^2\frac{1}{s-\omega_0}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{s\cdot 1\} + \omega_0^2\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s+\omega_0}}_{\substack{a=\omega_0 \\ \mathrm{Re}(s)>-\omega_0}}\Big\} + \omega_0^2\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s-\omega_0}}_{\substack{a=-\omega_0 \\ \mathrm{Re}(s)>\omega_0}}\Big\} =$$

$\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} 1$

$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$

$$= \delta'(t) + \omega_0^2\left[e^{-\omega_0 t}u(t) + e^{+\omega_0 t}u(t)\right] = \delta'(t) + \omega_0^2\left[e^{-\omega_0 t} + e^{+\omega_0 t}\right]u(t) =$$

$$\boxed{= \delta'(t) + 2\omega_0^2\,\mathrm{ch}(\omega_0 t)\,u(t)}$$

Nota: $h(t)=0$, $t<0$ como corresponde a un sistema LTI causal.

No lo piden, pero calculamos:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{s\cdot 1\} + \omega_0^2 \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s+\omega_0}}_{\substack{a=+\omega_0 \\ Re(s)<-\omega_0}}\Big\} + \omega_0^2 \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s-\omega_0}}_{\substack{a=-\omega_0 \\ Re(s)<\omega_0}}\Big\} =$$

$$= \delta'(t) - \omega_0^2 e^{-\omega_0 t} u(-t) - \omega_0^2 e^{\omega_0 t} u(-t) = \delta'(t) - \omega_0^2\, ch(\omega_0 t)\, u(-t)$$

<u>Nota</u>: $h_1(t) = 0,\ t>0$ como corresponde a un sist. anticausal

$$h_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s\} + \omega_0^2 \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s+\omega_0}}_{\substack{a=+\omega_0 \\ Re(s)>-\omega_0}}\Big\} + \omega_0^2 \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s-\omega_0}}_{\substack{a=-\omega_0 \\ Re(s)<\omega_0}}\Big\} =$$

$$= \delta'(t) + \omega_0^2 e^{-\omega_0 t} u(t) - \omega_0^2 e^{\omega_0 t} u(-t)$$

d)

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{s(s^2+\omega_0^2)}{s^2-\omega_0^2}\Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega(\omega_0^2-\omega^2)}{-\omega^2-\omega_0^2} = \frac{j\omega(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega^2+\omega_0^2}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$h_2(t) = \delta'(t) + \cdots$$

La solución de c) es $h(t) = h_3(t)$ corresp. al sist. causal, mientras que la que piden aquí es $h_2(t)$ que es la corresp. al sist. estable.

2. Considere el sistema LTI en tiempo continuo, definido por la relación siguiente

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ es la salida.

Se pide:

(a) Determinar la función de transferencia $H(s)=Y(s)/X(s)$ en el dominio de Laplace, indicando las posibles regiones de convergencia.

(b) Determinar la respuesta al impulso del sistema, denotada por $h(t)$, correspondiente al sistema estable. Calcular la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ del sistema estable.

(c) Determinar la respuesta al impulso, correspondiente al sistema causal. Razonar por qué no existe respuesta en frecuencia para este sistema. En este caso, determine $y(t)$ cuando $x(t)=u(t)$.

(2,5 puntos)

FEB. 2010. P2

SISTEMA LTI

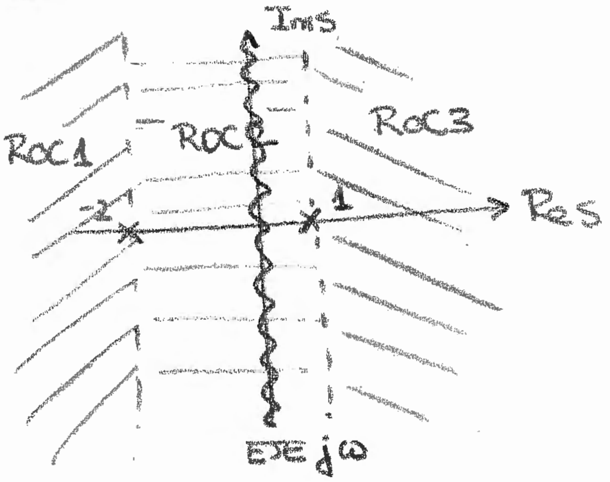
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2}} \longrightarrow y(t)$$

a)

$$\Big\downarrow \mathcal{L} \qquad \frac{d^{n)}x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s)$$

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s) + s^2X(s)$$

Por ser LTI: $\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+1}{s^2+s-2} = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+2)}}$



$H(s)$, ROC1 $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_1(t)$, $\nexists H_1(j\omega)$

ANTICAUSAL, NO ESTABLE

$H(s)$, ROC2 $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_2(t)$, $H_2(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$

NO CAUSAL, ESTABLE

$H(s)$, ROC3 $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_3(t)$, $\nexists H_3(j\omega)$

CAUSAL, NO ESTABLE

ROC1 $\mathrm{Re}(s) < -2$

ROC2 $-2 < \mathrm{Re}(s) < 1$

ROC3 $\mathrm{Re}(s) > 1$

b) $H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+s-2} = 1 + \underbrace{\frac{3-s}{s^2+s-2}}_{G(s)}$

$$\begin{array}{rl|l} s^2 & +1 & s^2+s-2 \\ -s^2-s & +2 & 1 \\ \hline -s & +3 & \end{array}$$

Estas fórmulas funcionan con polos de orden 1

$$G(s) = \frac{3-s}{s^2+s-2} = \frac{3-s}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = G(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{3-s}{s+2}\Big|_{s=1} = \frac{2}{3}$$

$$B = G(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{3-s}{s-1}\Big|_{s=-2} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

Así que $H(s) = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$

NOTA: $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(-a)$

$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(-a)$

ROC 1: $\mathrm{Re}(s) < -2$: $h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} =$

$\cancel{\mathrm{Re}(s)>1}$ $\quad$ $\cancel{\mathrm{Re}(s)>-2}$

$\mathrm{Re}(s)<1$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s)<-2$

$a=-1$ $\quad$ $a=2$

$= \delta(t) - \frac{2}{3}e^{+t}u(-t) + \frac{5}{3}e^{-2t}u(-t)$ ANTICAUSAL NO ESTABLE

ROC 2: $-2 < \mathrm{Re}(s) < 1$: $h_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} =$

$\cancel{\mathrm{Re}(s)>1}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s)>-2$

$\mathrm{Re}(s)<1$ $\quad$ $\cancel{\mathrm{Re}(s)<-2}$

$a=-1$ $\quad$ $a=2$

$= \delta(t) - \frac{2}{3}e^{+t}u(-t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t)$ NO CAUSAL $\boxed{\text{ESTABLE}}$

ROC 3: $\mathrm{Re}(s) > 1$: $h_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} =$

$\mathrm{Re}(s)>1$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s)>-2$

$\cancel{\mathrm{Re}(s)<1}$ $\quad$ $\cancel{\mathrm{Re}(s)<-2}$

$a=-1$ $\quad$ $a=2$

$= \delta(t) + \frac{2}{3}e^{+t}u(t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t)$ $\boxed{\text{CAUSAL}}$ NO ESTABLE

b) SISTEMA ESTABLE: $\boxed{h(t) = h_2(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^{+t}u(-t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t)}$

$$\boxed{H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{s^2+1}{s^2+s-2} = \frac{(j\omega)^2+1}{(j\omega)^2+j\omega-2} = \frac{1-\omega^2}{-\omega^2+j\omega-2}}$$

c) SISTEMA CAUSAL: $\boxed{h_3(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{+t}u(t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t)}$

$\nexists\ H_3(j\omega) = \mathcal{F}\{h_3(t)\}$ porque su ROC no incluye el $j\omega$ y la integral $H_3(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t)e^{-j\omega t}dt$ divergerá, ya que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_3(t)|dt = \infty$ por no ser un sistema estable.

$$\begin{tikzcd}
x(t)=u(t) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI causal}\\ h_3(t)\end{array}} \arrow[r] \arrow[d] & y(t) \\
X(s)=\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0 & H(s),\ \text{ROC3}\ \mathrm{Re}(s)>1 & Y(s)=X(s)H(s) \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s^2+1}{(s-1)(s+2)}=\frac{\overbrace{s^2+1}^{\text{grado 2}}}{\underbrace{s(s-1)(s+2)}_{\text{grado 3}}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+2}$$

$$A=Y(s)\,s\Big|_{s=0}=-\frac{1}{2}$$

$$B=Y(s)(s-1)\Big|_{s=1}=\frac{2}{3}$$

$$C=Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2}=\frac{5}{6}$$

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{5}{6}\,\frac{1}{s+2}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{y(t)}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=$$

$$\cancel{\mathrm{Re}(s)<0}\quad \cancel{\mathrm{Re}(s)<1}\quad \cancel{\mathrm{Re}(s)<-2}$$

$$\mathrm{Re}(s)>0\quad \mathrm{Re}(s)>1\quad \mathrm{Re}(s)>-2$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}u(t)+\frac{2}{3}e^{+t}u(t)+\frac{5}{6}e^{-2t}u(t)}$$

RESPUESTA AL ESCALÓN DEL SISTEMA CAUSAL

CARLOS ALBERTO OLMEDO
S. PAUS

SEPTIEMBRE 2010

2. Sea una señal $x(t) = te^{-a|t|}$ siendo a un parámetro real estrictamente positivo. A partir de ella definiremos $y(t) = te^{-|t|} * te^{-2|t|}$, donde el símbolo * representa el operador convolución.

a) Demuestre que la transformada de Laplace de $x(t)$ es $X(s) = \dfrac{-4as}{(s^2 - a^2)^2}$ especificando su región de convergencia.

b) La señal $y(t)$ puede ser expresada mediante la siguiente convolución: $y(t) = z(t) * (-z(-t))$, siendo $z(t)$ causal. Calcule $Z(s)$ indicando su región de convergencia.

c) Calcule $z(t)$ como la transformada inversa de Laplace de $Z(s)$.

(2,5 puntos)

Tema 3

FEBRERO 1999

2. Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$$

a) Determine su respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso.

b) Suponga que la señal de entrada a dicho sistema es:

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

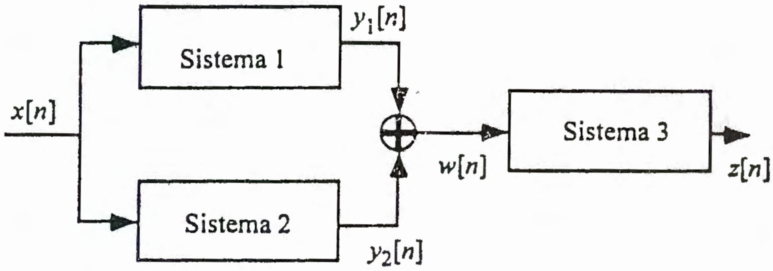
Calcule la expresión de la salida $y[n]$.

c) Descomponga el sistema descrito en el apartado a) utilizando exclusivamente en su diseño una conexión de subsistemas cuya respuesta al impulso sea de la forma general:

$$h_s[n]=K\,a^{n-n_0}\,u[n-n_0]$$

SEPTIEMBRE 1999

2. Suponga una conexión de sistemas LTI causales y estables tal como se muestra en la siguiente figura:



donde cada uno de los sistemas componentes viene caracterizado por su correspondiente ecuación en diferencias, dadas a continuación:

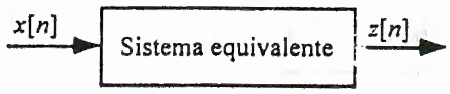
Sistema 1: $y_1[n]+ay_1[n-1]=x[n]$

Sistema 2: $y_2[n]+by_2[n-2]=x[n]$

Sistema 3: $z[n]=w[n]+aw[n-1]$

a) Determine la expresión de la respuesta en frecuencia del sistema equivalente.

b) Utilizando el resultado obtenido en el apartado a), calcule la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema equivalente.



$x[n] \rightarrow \boxed{\text{sistema equivalente LTI } h_{eq}[n]} \rightarrow z[n] = x[n] * h_{eq}[n]$

$z[n] = w[n] * h_3[n] = (y_1[n] + y_2[n]) * h_3[n] = (x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]) * h_3[n] =$

$x[n] * \underbrace{(h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]}_{h_{eq}[n]}$.

$H_{eq}(e^{jw}) = [H_1(e^{jw}) + H_2(e^{jw})] \cdot H_3(e^{jw})$ ((Sacamos $H_1(e^{jw})$, $H_2(e^{jw})$ y $H_3(e^{jw})$ de los sistemas.))

Sistema 1: $y_1[n] + a y_1[n-1] = x[n] \xrightarrow{F} Y_1(e^{jw}) + a \cdot Y_1(e^{jw}) \cdot e^{-jw1} = X(e^{jw})$

$H_1(e^{jw}) = \dfrac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \dfrac{1}{1 + a \cdot e^{-jw}}$

Sistema 2: $y_2[n] + b \cdot y_2[n-2] = x[n] \xrightarrow{F} H_2(e^{jw}) = \dfrac{1}{1 + b \cdot e^{-2jw}}$

Sistema 3: $z[n] = w[n] + a \cdot w[n-1] \xrightarrow{F} H_3(e^{jw}) = 1 + a \cdot e^{-jw} = \dfrac{Z[n]}{W[n]}$

$$H_{eq}(e^{jw}) = \left[H_1(e^{jw}) + H_2(e^{jw})\right]\cdot H_3(e^{jw}) = \left[\frac{1}{1+a e^{-jw}} + \frac{1}{1+b.e^{-jw2}}\right]\cdot(1+a.e^{-jw}) =$$

$$\frac{1+b.e^{-jw2} + 1 + a.e^{-jw}}{(1+ae^{-jw})(1+b.e^{-jw2})}\cdot(1+a.e^{-jw}) = \frac{(2+b.e^{-jw2} + a.e^{-jw})\cancel{(1+a.e^{-jw})}}{\cancel{(1+ae^{-jw})}.(1+b.e^{-jw2})} =$$

$$\boxed{\frac{2+b.e^{-jw2}+a.e^{-jw}}{1+b\,e^{-jw2}}}$$

b)

$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{sistema eq}} \longrightarrow z[n]$

Por ser LTI: $H_{eq}(e^{jw}) = \dfrac{Z(e^{jw})}{X(e^{jw})} =$

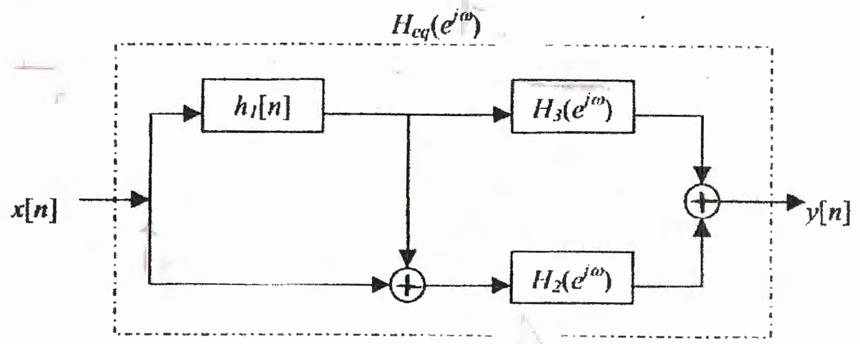
$$\frac{2+b.e^{-jw2}+a.e^{-jw}}{1+b.e^{-jw2}} \Rightarrow Z(e^{jw}).(1+b.e^{-jw2}) = 2X(e^{jw}) + b.e^{-jw2}X(e^{jw}) + a.e^{-jw}.X(e^{jw})$$

$\xrightarrow{F^{-1}}$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jwn_0}.X(e^{jw})$

$$\boxed{z[n] + b.z[n-2] = 2\,x[n] + b.x[n-2] + a.x[n-1]}$$

3. En la figura siguiente se muestra una asociación de sistemas LTI cuya respuesta global se representa mediante $H_{eq}(e^{j\omega})$.



Donde

$$h_1[n]=\delta[n]-\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi/2\right)}{n\pi} \qquad H_2(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{4}{\pi}|\omega|, & |\omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\omega|<\pi\end{cases}$$

$$H_3(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{4\omega}{\pi}, & 0\le\omega<\pi\\ 8-\frac{4\omega}{\pi}, & \pi\le\omega<2\pi\end{cases}$$

(a) Represente $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, y $H_3(e^{j\omega})$. Exprese analíticamente $H_{eq}(e^{j\omega})$ en función de $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, y $H_3(e^{j\omega})$, justificando que se verifica que $H_{eq}(e^{j\omega})=H_3(e^{j\omega})$.

(b) Calcule la expresión de la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n]=(1)^n+(-1)^n$.

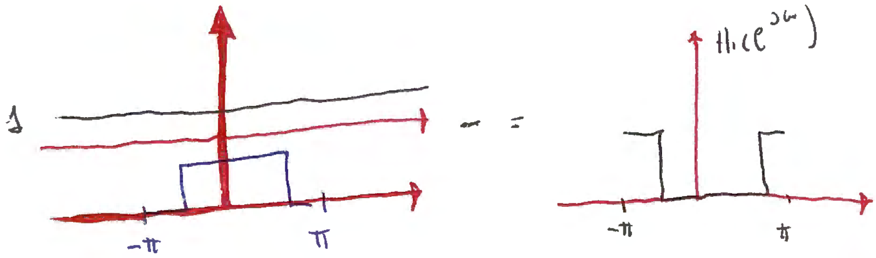
(c) Calcule la expresión de la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n]=\delta[n]$.

a]
$$y[n]= x[n]*h_1[n]*h_3[n] + (x[n]+ x[n]*h_1[n])*h_2[n] =$$
$$x[n]*h_1[n]*h_3[n] + x[n]*(\delta[n]+h_1[n])*h_2[n] =$$
$$x[n]*(h_1[n]*h_3[n] + (\delta[n]+h_1[n])*h_2[n]) =$$
$$x[n]*(\underbrace{h_1[n]*h_3[n]+h_2[n]+h_1[n]*h_2[n]}_{h_{eq}[n]})$$

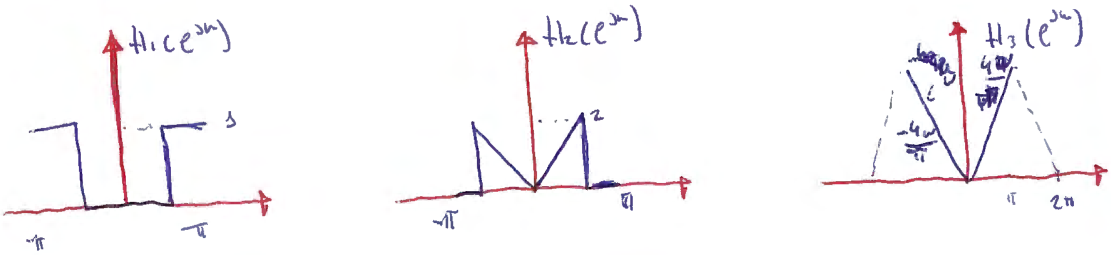
$$H_{eq}(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega})\cdot H_3(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})\cdot H_2(e^{j\omega})$$

Calculamos $H_1(e^{jw})$

$$H_1(e^{jw}) = \mathcal{F}\{h_1[n]\} = \mathcal{F}\left\{\delta[n] - \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi}\right\} = 1 - \mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi}\right\} \xrightarrow{\text{tabla}} = \begin{cases} 0 & 0\le|w|\le\pi/2 \\ 1 & \pi/2\le|w|<\pi \\ \text{periódica } 2\pi & \end{cases}$$



Pintamos $H_1(e^{jw})$, $H_2(e^{jw})$, $H_3(e^{jw})$



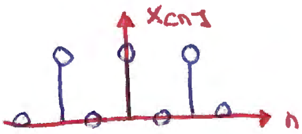
Gráficamente → $H_1(e^{jw}) \cdot H_2(e^{jw}) = 0$

$H_3(e^{jw}) \cdot [1 - H_1(e^{jw})] = H_2(e^{jw})$

Así que $H_{eq}(e^{jw}) = H_1(e^{jw}) \cdot H_3(e^{jw}) + H_2(e^{jw}) + \cancel{H_1(e^{jw}) \cdot H_2(e^{jw})}^{\to 0} =$

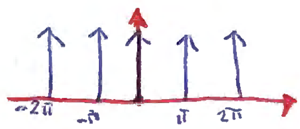
$$H_1(e^{jw}) \cdot H_3(e^{jw}) + H_3(e^{jw})[1 - H_1(e^{jw})] = H_2(e^{jw}) \;\|$$

b) $x[n] = 1^n + (-1)^n$ $\begin{cases} 2 & \text{si } n = \text{par} \\ 0 & \text{si } n = \text{impar} \end{cases}$

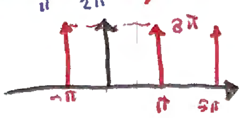


$$x[n] = 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k \cdot 2] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw}) = 2 \cdot \mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n - k \cdot 2]\right\} = 2 \cdot \frac{2\pi}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - k \cdot \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - k\pi)}$$



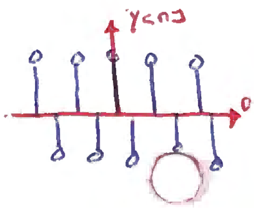
$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H_{eq}(e^{jw}) \to$



$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - (2k+1)\pi)$$

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{jw})\} = \frac{1}{2\pi}\int Y(e^{jw}) \cdot e^{jwn}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 8\pi \cdot \delta(w-\pi) \cdot e^{jwn}\, dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{j\pi n}}_{-1} \delta(w-\pi)\, dw = 4 \cdot (-1)^n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(w-\pi)\, dw}_{\text{área de la delta } 1} = 4 \cdot (-1)^n \begin{cases} 4, & n \text{ par} \\ -4, & n \text{ impar} \end{cases}$$



c] $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = x[n] * h_{eq}[n] = h_{eq}[n]$

$$Y(e^{jw}) = H_{eq}(e^{jw})$$

$$y[n] = F^{-1}\{Y(e^{jw})\} = F\{H_{eq}(e^{jw})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H_{eq}(e^{jw}) \cdot e^{jwn} \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{eq}(e^{jw})\, e^{jwn} \cdot dw = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\frac{4w}{\pi} \cdot e^{jwn} \cdot dw + \int_{0}^{\pi} \frac{4w}{\pi} \cdot e^{jwn} \cdot dw\right] =$$

$$\frac{4}{2\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} w \cdot e^{jwn} + \int_{0}^{\pi} w \cdot e^{jwn}\right];$$

$$\int w \cdot e^{jwn} \cdot dw = \left[\begin{matrix} u = w \rightarrow du = dw \\ dv = e^{jwn} \cdot dw \rightarrow v = \dfrac{e^{jwn}}{jn}\end{matrix}\right] = \frac{w \cdot e^{jwn}}{jn} - \int \frac{e^{jwn}}{jn} dw =$$

$$e^{jwn}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{w}{jn}\right]$$

$$y[n] = \frac{2}{\pi^2}\left[e^{jwn}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{w}{jn}\right)\right]_{-\pi}^{0} + e^{jwn}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{w}{jn}\right)\Big|_{\pi}^{0} = \ldots =$$

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ par } \neq 0 \\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$y[n]$ para $n = 0$

$$y[0] = y[n]\Big|_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} Y(e^{jw}) \cdot e^{jwn} \cdot dw = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} Y(e^{jw}) \cdot dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{jw}) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi \cdot 4}{2} + \frac{\pi \cdot 4}{2}\right] = 2$$

Así que $y[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \text{ par} \\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}$

JUNIO 2003

3. Un sistema LTI causal tiene su entrada $x[n]$ relacionada con la salida $y[n]$ mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 0{,}2y[n-1] + 0{,}8x[n] + 0{,}3x[n-1]$$

a) Determine la respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{jw})$

b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

c) Demuestre que el sistema es estable.

d) Si se introduce la señal $x_1[n] = u[n-5] - u[n-27]$, y la salida correspondiente es $y_1[n]$, calcule $X_1(e^{jw})$ e $Y_1(e^{jw})$.

$$X[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow Y[n]$$

a]

$$Y(e^{jw}) = 0{,}2 \cdot e^{-jw} \cdot Y(e^{jw}) + 0{,}8 \cdot X(e^{jw}) + 0{,}3\, e^{-jw} \cdot X(e^{jw})$$

$$\boxed{H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{0{,}8 + 0{,}3 \cdot e^{-jw}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-jw}}}$$

$$a^n \cdot u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-jw}}$$

b]

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{jw})\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{0{,}8 + 0{,}3 \cdot e^{-jw}}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-jw}}\right\} = 0{,}8\, \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0{,}2 \cdot e^{-jw}}\right\} + 0{,}3 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0{,}2 e^{-jw}} \cdot e^{-jw}\right\}$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{jw}) \cdot e^{-jwn_0}$$

$$0{,}8 \cdot (0{,}2)^n u[n] + 0{,}3 \cdot (0{,}2)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

c] Por ser LTI será estable $\Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big| \underbrace{\underbrace{0{,}8 \cdot (0{,}2)^n \cdot u[n]}_{\geq 0} + \underbrace{0{,}3 \cdot (0{,}2)^{n-1} \cdot u[n-1]}_{\geq 0}}_{\geq 0} \Big| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0{,}8 \cdot (0{,}2)^n \cdot u[n] + 0{,}3 \cdot (0{,}2)^{n-1} u[n-1]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 0{,}8 \cdot (0{,}2)^n \cdot u[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0{,}3 \cdot (0{,}2)^{n-1} \cdot u[n-1] = 0{,}8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0{,}2)^n \cdot u[n] + 0{,}3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0{,}2)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

$$0{,}8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}2^n + 0{,}3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} = 0{,}8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}2^n + 0{,}3 \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^n / 0{,}2 = 0{,}8 \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}2^n + \frac{0{,}3}{0{,}2} \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^n =$$

$$0{,}8 \cdot \frac{1}{1-0{,}2} + \frac{0{,}3}{0{,}2} \cdot \frac{0{,}2}{1-0{,}2} = \frac{0{,}8}{1-0{,}2} + \frac{0{,}3}{1-0{,}2} = 1{,}375 < \infty \longrightarrow \text{SISTEMA ESTABLE}$$

d]

$$X_1[n] = u[n-5] - u[n-27] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}LTI\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y_1[n] = x_1[n] * h[n]$$

$$X_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) \qquad h[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega}) \qquad y_1[n] \xrightarrow{F} Y_1(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \,.\, H(e^{j\omega}) \xrightarrow{F^{-1}} y_1[n]$$

$$X_1(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\} = F\{u[n-5]\} - F\{u[n-27]\} =$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} \,.\, X(e^{j\omega})$$

$$U(e^{j\omega}) \,.\, e^{-j\omega 5} - U(e^{j\omega}) \,.\, e^{-j\omega 27} = U(e^{j\omega}) \,.\, \left[e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}\right] =$$

$$\left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \,.\, \delta(\omega - 2\pi k)\right] \,.\, \left[e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}\right] =$$

$$\frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left[e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}\right] \pi \,.\, \delta(\omega - 2\pi k)\right] =$$

$$\frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\overset{1}{e^{-j2\pi k 5}} - \overset{1}{e^{-j2\pi k 27}}\right]}_{0} \,.\, \pi \,.\, \delta(\omega - 2\pi k) = \boxed{\frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1-e^{-j\omega}} = X_1(e^{j\omega})}$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \,.\, H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1-e^{-j\omega}} \,.\, \frac{0{,}8 + 0{,}3\, e^{-j\omega}}{1 - 0{,}2 \,.\, e^{-j\omega}} =$$

$$\boxed{\frac{0{,}8 \,.\, e^{-j\omega 5} - 0{,}8 \,.\, e^{-j\omega 27} + 0{,}3 \,.\, e^{-j\omega 6} - 0{,}3 \,.\, e^{-j\omega 28}}{(1 - 0{,}2 \,.\, e^{-j\omega}) \,.\, (1 - e^{-j\omega})} = Y_1(e^{j\omega})}$$

JUNIO 2003

1. Sea un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t) & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcule la respuesta al escalón $u(t)$ denominándola $s(t)$.

b) Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = u(t) - u(t-0.5)$, realizando el operador de convolución. Exprese dicha solución en función de $s(t)$.

c) Suponiendo que ahora definimos $h_1(t)$ como una versión periódica de $h(t)$ de período 1, e igualmente $x_1(t)$ como una versión periódica de $x(t)$ del mismo periodo, calcule la expresión de la convolución circular de ambas señales, expresando el resultado en función de $y(t)$. Describa razonadamente el fenómeno que ocurriría si el periodo de las versiones periódicas fuera inferior a 1.

SEPTIEMBRE 1999

2. Sean dos secuencias $x_1[n]$, $y_1[n]$ definidas como:

$$x_1[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$
$$y_1[n] = u[n] - u[n-3]$$

A partir de ellas generamos otras dos señales de periodo N=4:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-kN] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-kN]$$

a) Calcule la convolución lineal de las dos señales $x_1[n]$, $y_1[n]$:

$$z_1[n] = x_1[n] * y_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\cdot y_1[n-m]$$

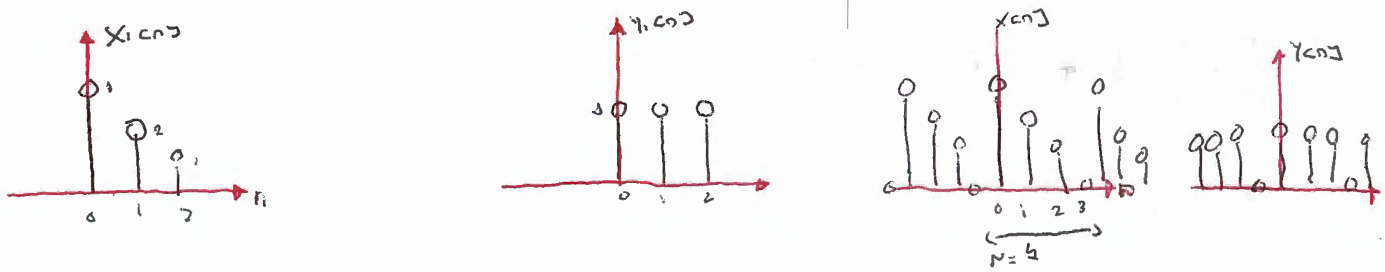
b) Calcule el Desarrollo en Serie de Fourier de $w[n]$:

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-kN]$$

c) Calcule la convolución circular de las señales $x[n]$, $y[n]$, definida mediante la siguiente expresión:

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ \ y[n-m]$$

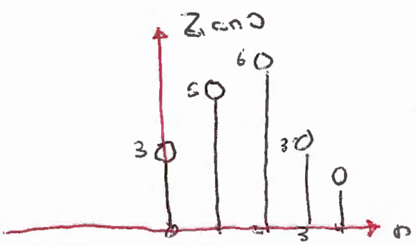
d) Calcule el Desarrollo en Serie de Fourier de $z[n]$. Comente los resultados de los apartados b) y d).



a] $Z_1[n] = X_1[n] * Y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k]\cdot Y_1[k-n]$

$Z_1[n] = X_1[n] * Y_1[n] = (3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) * (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])$

$3\delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] = 3\delta[n] + 5\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4]$

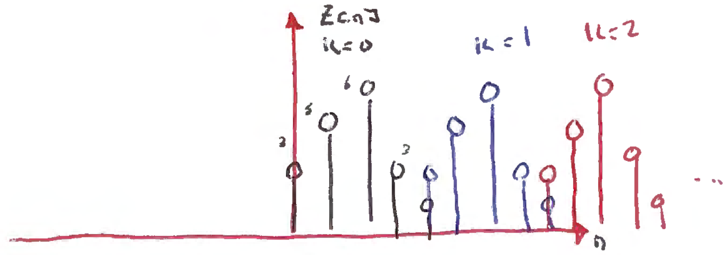


NOTA → Si $X_1[n]$ tiene N_1 muestras
Si $X_2[n]$ tiene N_2 muestras
$X_1[n] * X_2[n]$ tiene (N_1+N_2-1) muestras

c] $z[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} x[k] \cdot y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot y[n-k] =$

$x_1[n] * y[n] = x_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-kN] = x_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n] * \delta[n-kN] =$

$x_1[n] * y_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-kN], \; \underline{\underline{N=4}}$



hay solapamiento, con lo que los palotes se suman.

b] d]

Opción 1: $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} z[n] \cdot e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} z[n] \cdot e^{-jk\pi/2} =$

$\frac{1}{4} \left[z[0] \cdot e^{-jk\pi/2 \cdot 0} + z[1] \cdot e^{-jk\pi/2 \cdot 1} + z[2] \cdot e^{-jk\pi/2 \cdot 2} + z[3] \cdot e^{-jk\pi/2 \cdot 3} \right] =$

$\frac{1}{4} \cdot \left(4 \cdot 1 + 5 \cdot \underbrace{e^{-j\pi/2 k}}_{-j} + 6 \cdot \underbrace{e^{-j\pi k}}_{-1} + 3 \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot k}}_{j} \right) = \frac{1}{4} \left[4 + 5 \cdot (-j)^k + 6 \cdot (-1)^k + 3 \cdot j^k \right]$

$a_0 = \frac{1}{4} \left(4 + 5(-j)^0 + 6(-1)^0 + 3j^0 \right) = 18/4 = 9/2$

$a_1 = \frac{-1}{2} - j \cdot \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2}$

un periodo

$\boxed{a_k = a_{k+N}}$

Opción 2: $a_k = \frac{1}{N} \cdot Z_p(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \omega_0}$

$Z_p(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{z_p[n]\} = \mathcal{F}\{4\delta[n] + 5\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 3\delta[n-3]\} =$

$4 \cdot 1 + 5 \cdot e^{-j\omega 1} + 6 e^{-j\omega 2} + 3 \cdot e^{-j\omega 3}$

Finalmente: $a_k = \frac{1}{N} \cdot Z_p(e^{j\omega}) \Big|_{\substack{\omega = k\omega_0 \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{4} \cdot \left[4 + 5 \cdot e^{-j\omega k\frac{\pi}{2}} + 6 e^{-jk\frac{\pi}{2} 2} + 3 e^{-jk\frac{\pi}{2} 3} \right] =$

$\frac{1}{4} \left(4 + 5 \cdot (-j)^k + 6 \cdot (-1)^k + 3j^k \right)$

Así que el DSF $\rightarrow$ $z[n] = w[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot e^{jk\frac{\pi}{2} n}$

FEBRERO 2003

3. Sea una señal en tiempo discreto x[n] cuyo espectro en $|w| < \pi$ es

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} |w|\,, & |w| < \pi/8 \\ 0 & , \pi/8 < |w| < \pi \end{cases}$$

Se forma la señal en tiempo discreto $x_p[n] = x[n]\cdot p[n]$, siendo $p[n]$ el tren de impulsos en tiempo discreto:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - Nk], \quad \text{con} \quad N = 4$$

a) Obtenga la expresión de $X_p(e^{jw})$ en función de $X(e^{jw})$.

b) Dibuje razonadamente $X_p(e^{jw})$, el espectro de $x_p[n]$.

c) Determine la respuesta en frecuencia del filtro que permite recuperar $x[n]$ a partir de $x_p[n]$.

d) ¿Cuál es el máximo valor de N que permite realizar el apartado (c)?.

a] $X_p(e^{jw}) = F\{x[n]\cdot p[n]\} = \frac{1}{2\pi}\cdot X(e^{jw}) \circledast P(e^{jw})$

Opción 1 → $X_p(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\cdot X_1(e^{jw}) * P(e^{jw})$

Opción 2 → $X_p(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(e^{jw}) * P_1(e^{jw})$

$X_1(e^{jw})$, $P_1(e^{jw})$ son periodos de esas señales.

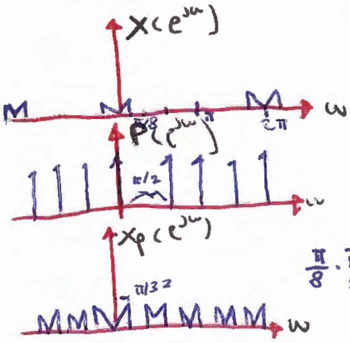
Opción 3 → $X_p(e^{jw}) = X_1(e^{jw}) * P_1(e^{jw}) \rightarrow X_p(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{p_1}(e^{j(w-k2\pi)})$

Calculamos $P(e^{jw})$:

$P(e^{jw}) = F\{p[n]\} = F\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w - \frac{k\cdot 2\pi}{N}) \overset{N=4}{=}$

$\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w - k\pi/2)$

apartado b)

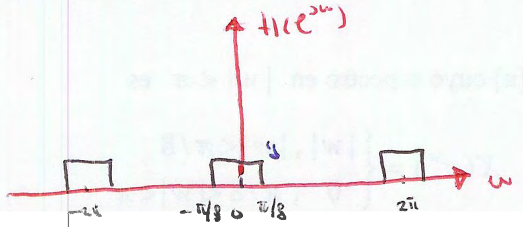


$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\pi} = \pi/32$

Analíticamente usamos opción 2 para dejar el resultado en función de $X(e^{jw})$ que es lo que te pide el enunciado:

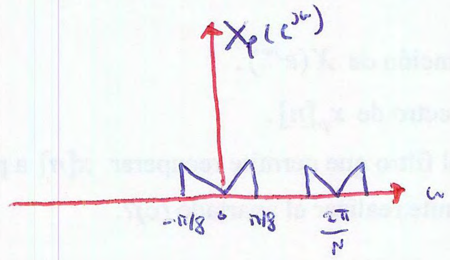
$$X_p(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(e^{jw}) * \underbrace{\sum_{k=-2}^{k=1}\delta(w - k\pi/2)}_{\text{por ser un periodo}} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-2}^{1} X(e^{j(w-k\pi/2)})}$$

c] Se necesita un filtro paso bajo



$$H(e^{j\omega}) \begin{cases} 4 & |\omega| \le \pi/8 \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

d] En general: $P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$



tenemos que evitar que se solapen las réplicas, con lo que: $\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi}{8} \ge \frac{\pi}{8}$

$$\boxed{N \le 8}$$

SEPTIEMBRE 2004

3. Considere las tres secuencias $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ relacionadas del siguiente modo

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{2}\right] & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad z[n] = \frac{1}{2}z[n-1] + y[n] - y[n-1]$$

Se pide:

a) Determine la transformada de Fourier $Y(e^{jw})$ y $Z(e^{jw})$ de $y[n]$ y $z[n]$, respectivamente, en función de la transformada de Fourier de $X(e^{jw})$ de $x[n]$.

b) Si $x[n] = 1 + \delta[n] + (-1)^n$, calcule $X(e^{jw})$, $Y(e^{jw})$ y $Z(e^{jw})$.

c) Determine las secuencias $y[n]$ y $z[n]$, que corresponden al apartado b).

a) Propiedad $\rightarrow$ $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & n = \dot{k} \\ 0 & n \neq \dot{k} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_{(k)}(e^{jw}) = X(e^{jwk})$

En este caso: $Y(e^{jw}) = X(e^{j2w})$

$$Z(e^{jw}) = \frac{1}{2} Z(e^{jw}) \cdot e^{-jw} + Y(e^{jw}) - Y(e^{jw}) \cdot e^{-jw} =$$

$$Z(e^{jw}) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-jw}\right] = Y(e^{jw}) \cdot \left[1 - e^{-jw}\right]$$

$$Z(e^{jw}) = Y(e^{jw}) \cdot \frac{1 - e^{-jw}}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}} = \frac{X(e^{j2w}) \cdot 1 - e^{-jw}}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

b) $x[n] = 1 + \delta[n] + (-1)^n = \delta[n] + \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} = \delta[n] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k2]$

$$X(e^{jw}) = F\{\delta[n]\} + 2 \cdot F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k2]\right\} = 1 + \frac{2\pi}{\underset{N=2}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{k2\pi}{\underset{N=2}{2}}\right) =$$

$$1 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - k\pi)$$

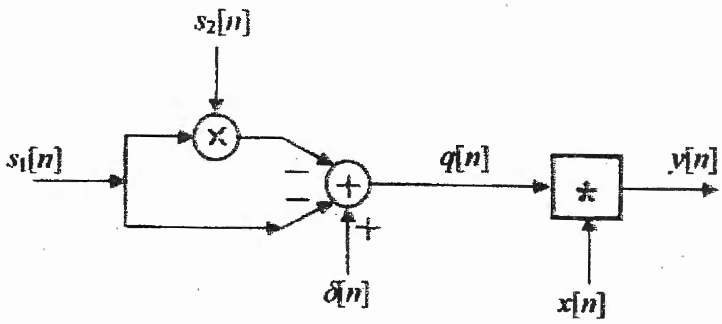
$$\boxed{Y(e^{jw}) = X(e^{j2w}) = 1 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2w - k\pi)} = 1 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2(w - k\pi/2)) =$$

$$1 + 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \delta(w - k\pi/2) \qquad \left(\delta\left(\frac{w - w_0}{W}\right) = W \cdot \delta(w - w_0)\right)$$

$$Z(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \cdot \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \left[1+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi/2)\right]\cdot\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} =$$

$$\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-jk\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/2}}\,\delta(\omega-k\pi/2) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \pi\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1-(-j)^k}{1-\frac{1}{2}(-j)^k}\cdot\delta(\omega-k\pi/2)$$

3. Sea el siguiente sistema en tiempo discreto:



Donde el asterisco (*) representa la operación de convolución. Dadas las señales:

$$s_1[n] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$$

$$s_2[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(a) Obtenga $Q(e^{j\omega})$ y represéntela gráficamente.

(b) Calcule $y[n]$ si $x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

(c) Calcule $y[n]$ si $x[n] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

3. Considere las siguientes secuencias

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-4m] \qquad ; \qquad f[n] = 2^{-|n|}$$

a) Determinar la transformada de Fourier $F(e^{jw})$ de $f[n]$. Represente gráficamente el módulo y la fase de $F(e^{jw})$ en función de w.

b) Demostrar que $x[n]$ es una secuencia periódica y determinar los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.

Considere ahora el sistema LTI definido por la siguiente ecuación en diferencias donde $x[n]$ es la señal de entrada e $y[n]$ la señal de salida:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-2]$$

c) Obtenga la respuesta en frecuencia de dicho sistema. Para la secuencia $x[n]$, dada al principio del ejercicio, determinar la señal de salida $y[n]$.

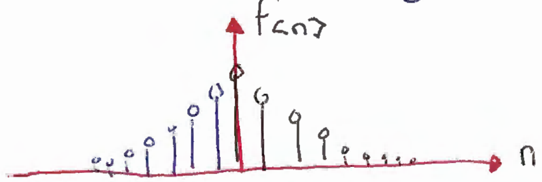
cambio k por m

b] $X(e^{jw}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-4k]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n] * \delta[n-4k]\right\} =$

$\mathcal{F}\left\{f[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]\right\} = F(e^{jw}) \cdot \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]\right\} = F(e^{jw}) \cdot \frac{2\pi}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(w - k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)$

$\cancel{\frac{\pi}{2} F(e^{jw}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(w - \frac{k\pi}{2}\right)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{F(e^{jk\frac{\pi}{2}})}{4}}_{a_k} \cdot \delta(w - k\pi/2)$. Es periódica en el tiempo

a] $f[n] = 2^{-|n|} = \frac{1}{2^{|n|}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n<0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n\geq 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot u[n]$



también se puede ver como: $f[n] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta[n-k] + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta[n+k]$

$F(e^{jw}) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \delta[n-k]\right\} + \mathcal{F}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \delta[n+k]\right\} =$ como no tiene n y la transf de Fourier depende de n se saca,

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \mathcal{F}\{\delta[n-k]\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \mathcal{F}\{\delta[n+k]\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{-jwk} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{jwk}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-jw}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{jw}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} + \frac{\frac{1}{2}e^{jw}}{1-\frac{1}{2}e^{jw}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(e^{jw}+e^{-jw}\right)} = \frac{3}{5-4\cos w}$

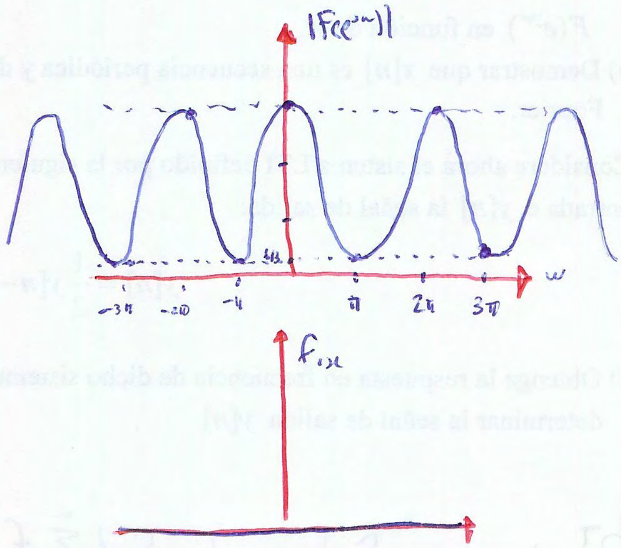
$$a_k = \frac{F(e^{jw})}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5 - 4 \cdot \cos(k\pi/2)}$$

módulo y fase de $F(e^{jw})$:

$$F(e^{jw}) = \frac{3}{5 - 4 \cdot \cos w} \qquad \cos(w) \in [-1, 1] \Rightarrow F(e^{jw}) \in [\tfrac{1}{3}, 3]$$

Por lo que $F(e^{jw}) \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} |F(e^{jw})| = F(e^{jw}) = \dfrac{3}{5 - 4\cos w} \\ \text{fase } \{F(e^{jw})\} = 0 \quad \text{porque } F(e^{jw}) \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$



FEBRERO 2001

3. Considérese un sistema discreto lineal, invariante en el tiempo y causal, caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-3]=x[n]-x[n-2]$$

donde $x[n]$ es la secuencia de entrada e $y[n]$ es la secuencia de salida. Suponiendo que $x[n]$ es la secuencia periódica siguiente:

$$x[n]=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)+2\cos\pi n$$

Determine:

a) El periodo de $x[n]$ y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.

b) La respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j\omega})$ y la transformada de Fourier de la señal de salida, $Y(e^{j\omega})$.

c) La secuencia de la salda $y[n]$.

a]

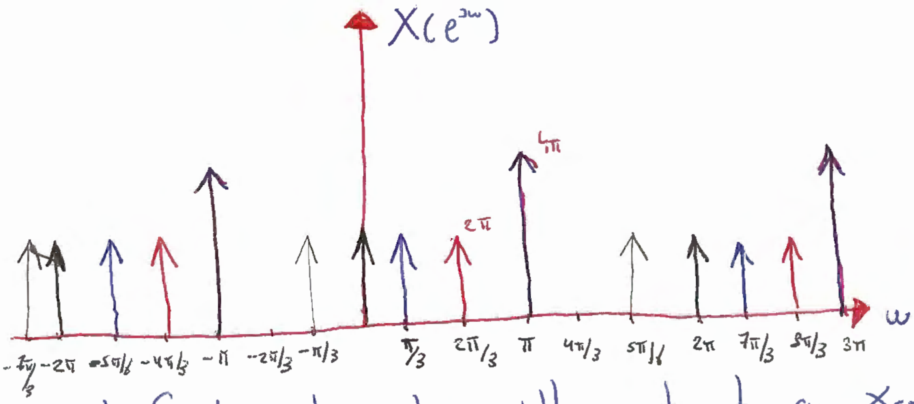
$$x[n] = 1 + \cancel{2}\cdot\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}n}-e^{-j\pi/3\,n}}{\cancel{2}j} + \cancel{2}\cdot\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{\cancel{2}} =$$

$$1+e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}-j\cdot e^{j\frac{\pi}{3}n}+je^{-j\frac{\pi}{3}n}+e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k2\pi)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega-\tfrac{2\pi}{3}-k2\pi)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega+\tfrac{2\pi}{3}-k2\pi)+j2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega-\tfrac{\pi}{3}-k2\pi)$$

$$+j2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega+\tfrac{\pi}{3}-k2\pi)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega-\pi-k2\pi)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega+\pi-2k\pi)$$



Al tener un espectro formado exclusivamente por deltas, se demuestra que $x[n]$ es periódica.
El periodo se puede deducir del espaciado entre deltas, con lo que: $\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{N}\rightarrow N=6$

$(\omega=\frac{2\pi}{N})$

La transformada de Fourier de una señal periódica es $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$

En este caso, sería: $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . \delta(\omega - k\frac{2\pi}{6}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . \delta(\omega - \frac{k\pi}{3})$

$k=0 \rightarrow 2\pi . a_0 = 2\pi \rightarrow a_0 = 1$ $\quad$ $k=2 \rightarrow 2\pi . a_2 = 2\pi \rightarrow a_2 = 1$

$k=1 \rightarrow 2\pi . a_1 = -j2\pi \rightarrow a_1 = -j$ $\quad$ $k=3 \rightarrow 2\pi . a_3 = 4\pi \rightarrow a_2 = 2$

$k=4 \rightarrow 2\pi . a_4 = 2\pi \rightarrow a_4 = 1$ $\quad$ $k=5 \rightarrow 2\pi . a_5 = j2\pi \rightarrow a_5 = j$

b)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI causal}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-3] = x[n] - x[n-2] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega 3} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega 2} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})\left[1 + \frac{1}{2} e^{-j3\omega}\right] = X(e^{j\omega})\left[1 - e^{-2j\omega}\right] \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-3j\omega}}}$$

Ahora:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$x[n] = \sum_{n=0}^{5} a_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{6}\right)$$

Así que:

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{6}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H\left(e^{jk\frac{\pi}{3}}\right) \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right)}$$

b_k : coef. del DSF de $y[n]$

c) $$Y(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3}k\right) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} y[n] = \sum_{k=0}^{5} b_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

Calculemos $\boxed{b_k = a_k H\left(e^{jk\frac{\pi}{3}}\right)}$ $\rightarrow$ $$b_k = a_k \frac{1 - e^{-2jk\frac{\pi}{3}}}{1 + \frac{1}{2} e^{-3jk\frac{\pi}{3}}} = a_k \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}k}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\pi k}}$$

$\boxed{k=0}$

$$\boxed{b_0 = a_0 \frac{1 - e^0}{1 + \frac{1}{2} e^0} = 0}$$

$\boxed{k=1}$

$$\boxed{b_1} = a_1 \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1 + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}} = -j \frac{1 - e^{j\frac{4\pi}{3}}}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = -j \frac{1 - \left(\cos\frac{4\pi}{3} + j \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= -2j\left[1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right] = -2j\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -3j - \sqrt{3}j^2 = \boxed{\sqrt{3} - 3j}$$

$\boxed{k=2}$

$$b_2 = a_2 \frac{1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{1 + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j2\pi}}_{1}} = 1 \cdot \frac{1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-\frac{1}{2}} + j \underbrace{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right] =$$

$-\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$= \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right] = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}j}$$

ECP 01 EJ-3

$\boxed{k=3}$ $\boxed{b_3 = 0}$

$\boxed{k=4}$ $\boxed{b_4 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} j = b_2^*}$

$\boxed{k=5}$ $\boxed{b_5 = \sqrt{3} + 3j = b_1^*}$

Así que:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{5} b_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n} = \sum_{k=0}^{5} b_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \cancel{b_0} e^{0} + b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \cancel{b_3} e^{j\pi n} + b_4 e^{j\frac{4\pi}{3}n} +$$

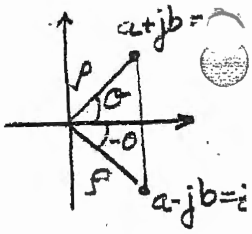
$$+ b_5 e^{j\frac{5\pi}{3}n} = b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} + b_2^* e^{j\frac{4\pi}{3}n} + b_1^* e^{j\frac{5\pi}{3}n} =$$

$b_4 = b_2^*$

$b_5 = b_1^*$

$$e^{j\frac{4\pi}{3}n} = e^{-j\frac{2\pi}{3}n} = \left(e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right)^*$$

$$e^{j\frac{5\pi}{3}n} = e^{-j\frac{\pi}{3}n} = \left(e^{j\frac{\pi}{3}n}\right)^*$$



$z_1^* z_2^* = (z_1 z_2)^*$

$$= b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} + b_2^* \left(e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right)^* + b_1^* \left(e^{j\frac{\pi}{3}n}\right)^* =$$

$$= b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + \left(b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n}\right)^* + b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \left(b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right)^* = 2\,\mathrm{Re}\left\{b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n}\right\} + 2\,\mathrm{Re}\left\{b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}}\right\} =$$

$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

$$\mathrm{Re}\left\{b_1 e^{j\frac{\pi}{3}n}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(\sqrt{3}-3j)\left[\cos\tfrac{\pi}{3}n + j\,\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{3}n\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{3}\cos\left(\tfrac{\pi}{3}n\right) + 3\,\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{3}n + j\cdots\right\} =$$

$$= \sqrt{3}\cos\left(\tfrac{\pi}{3}n\right) + 3\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}n\right)$$

$$\left\{b_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}j\right)\left[\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right)\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right) + j\cdots\right\} =$$

$$= \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right)$$

í que: $\boxed{y[n] = 2\left[\sqrt{3}\cos\left(\tfrac{\pi}{3}n\right) + 3\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}n\right)\right]}$

JUNIO 2004

4. Sea un sistema como el descrito en la figura 1 donde $x_c(t)$ es una señal paso bajo de espectro arbitrario y banda limitada, cuya frecuencia máxima es ω_{max}. $h_1(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante cuya respuesta en frecuencia es $H_1(j\omega)=\dfrac{1-e^{-aT}e^{-j\omega T}}{a+j\omega}$ siendo T el periodo de muestreo y a una constante real y positiva.

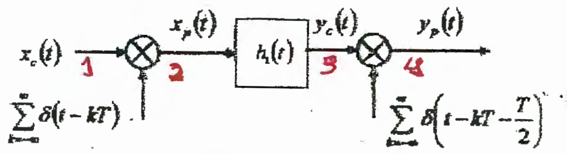


Figura 1

a) Represente gráficamente las señales $x_c(t)$, $x_p(t)$, $y_c(t)$ e $y_p(t)$. Demuestre en el dominio del tiempo que se verifica la relación $y_p(t)=e^{-a\frac{T}{2}}x_p\left(t-\frac{T}{2}\right)$.

Nota: Aunque no se haya demostrado, utilice esta expresión para el resto del ejercicio.

b) Determine las condiciones bajo las que se puede recuperar la señal $x_c(t)$ a partir de $y_p(t)$. Determine el sistema que permite recuperar la señal $x_c(t)$ a partir de $y_p(t)$.

c) Considere la estructura en tiempo discreto de la figura 2 (que utiliza el esquema de muestreo de la figura 1). El conversor discreto/continuo está formado por conversor de señal en tiempo discreto a tren de deltas seguido de un filtro interpolador ideal. Calcule la expresión del sistema en tiempo continuo equivalente $H_c(jw)$ en función del sistema en tiempo discreto $H_d(e^{j\omega})$.

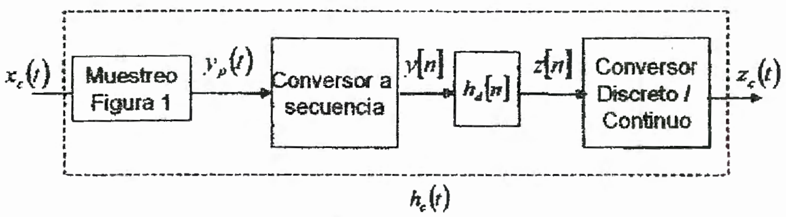
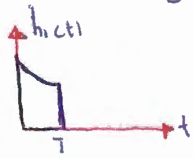
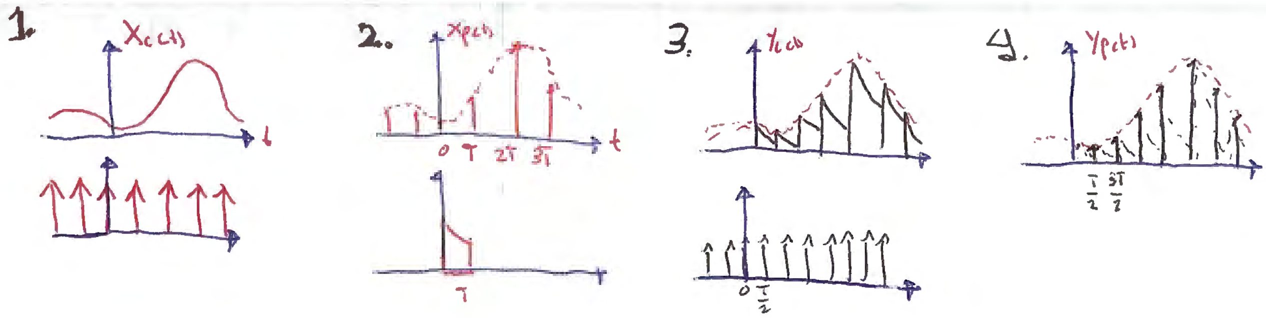


Figura 2

a) Antes de nada calculemos $h_1(t)$: $h_1(t) = F^{-1}\{H_1(jw)\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\} - e^{-a.T} F^{-1}\left\{\frac{e^{-jwT}}{a+jw}\right\}$

$e^{-a.t}\cdot u(t) - e^{-aT}\cdot e^{-a(t-T)} = e^{-a.T}\left[u(t) - u(t-T)\right]$





Demostrar que: $y_p(t) = e^{-a\cdot\frac{T}{2}} \cdot x_p(t-\frac{T}{2})$

$$x_p(t) = x_c(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

$$y_c(t) = x_p(t) * h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot h_1(t-kT)$$

ver dibujo

$$y_p(t) = y_c(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT-\frac{T}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot h_1(t-kT)\cdot\delta(t-kT-\frac{T}{2}) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot h_1(kT+\frac{T}{2}-kT)\cdot\delta(t-(kT+\frac{T}{2})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot h_1(\frac{T}{2})\cdot\delta(t-(kT+\frac{T}{2}))$$

$$h_1\left(\frac{T}{2}\right) = e^{-at}\cdot[u(t)-u(t-T)]\Big|_{t=\frac{T}{2}} = e^{-a\frac{T}{2}}\cdot\left[\underbrace{u\left(\frac{T}{2}\right)}_{1} - \underbrace{u\left(\frac{T}{2}-T\right)}_{0}\right]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot e^{-\frac{a\cdot T}{2}}\cdot\delta(t-kT-\frac{T}{2}) = e^{-\frac{aT}{2}}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\cdot\delta(t-kT-\frac{T}{2}) =$$

$$e^{-\frac{aT}{2}}\cdot x_p(t-\frac{T}{2}) = y_p(t)$$

FEBRERO 2008

Ejercicio 1

Sea una señal $x[n]$ arbitraria que se expresa como una combinación lineal de otra función $g[n]$ y de sus versiones desplazadas:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g[n-k]$$

donde c_k son los coeficientes. Dicha señal atraviesa un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ -1 & n>0\end{cases}$$

obteniéndose una señal a su salida denotada como $y[n]$.

a) Suponiendo que $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, calcule la secuencia que representa a los coeficientes $c[n]=c_n$ en función de $x[n]$, asumiendo ésta conocida. Resuélvalo en el dominio de la frecuencia.

b) Calcule la respuesta del sistema, que denominaremos $d[n]$, a la señal $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, operando exclusivamente en el dominio del tiempo. Halle la respuesta $y[n]$ a la entrada $x[n]$ en función de $c[n]$ y $d[n]$, supuestas conocidas.

c) Suponiendo que $g[n]=e^{j\omega_0 n}$ siendo ω_0 un parámetro real arbitrario, calcule la expresión de la salida $y[n]$ expresada en función de $C(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$, asumiendo que son conocidas.

SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 3

Considere un sistema de tiempo discreto lineal, invariante y causal descrito por los polos $(z_{p1} = 2,\ z_{p2} = j2, z_{p3} = -j2)$, los ceros $(z_{c1} = j/2,\ z_{c2} = -j/2)$ y la unidad como constante multiplicativa de la función de transferencia:

a) Calcule la función de transferencia del sistema.
b) ¿Es estable el filtro) ¿Y su inverso? Razone la respuesta.
c) Calcule la respuesta al impulso del sistema.

FEBRERO 2006

3. Sea la señal en tiempo discreto $x[n]=a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$ donde a y ω_0 son parámetros reales, positivos y arbitrarios, siendo $u[n]$ la función escalón unidad.

(a) Demuestre que su transformada Z viene dada por la siguiente expresión

$$X(z)=\frac{1-a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

justificando su región de convergencia.

(b) Calcule el intervalo de valores de a para el cual existe la transformada de Fourier de $x[n]$ y calcule dicha transformada de Fourier.

Suponga un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, caracterizado por su respuesta al impulso $h[n]$ desconocida. Para dicha entrada $x[n]$ con los valores de a calculados en el apartado (b), se observa que la salida del sistema es $y[n]=\delta[n-n_0]$ donde n_0 es un parámetro entero conocido.

(c) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$ en función de a, ω_0, y n_0.

a) Opción 1:

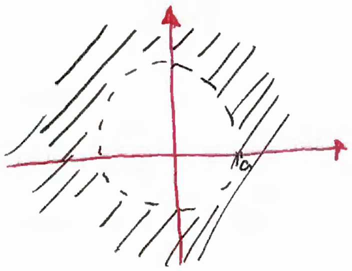
$$x[n]=a^n\cdot\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\cdot u[n]=\frac{1}{2}(a\cdot e^{j\omega_0})^n\cdot u[n]+\frac{1}{2}(a\cdot e^{-j\omega_0})^n\cdot u[n];$$

$$X(z)=\frac{1}{2}Z\{(ae^{j\omega_0})^n\cdot u[n]\}+\frac{1}{2}Z\{(ae^{-j\omega_0})^n\cdot u[n]\}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-a\cdot e^{j\omega_0}\cdot z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}}=\frac{1}{2}\frac{(1-ae^{-j\omega}z^{-1})+(1-ae^{j\omega_0}z^{-1})}{(1-ae^{j\omega_0}\cdot z^{-1})(1-ae^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})}=$$

$$\frac{\cancel{2}-a\cdot z^{-1}\underbrace{(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})}_{2\cos(\omega_0)}}{\cancel{2}(1-ae^{j\omega_0}z^{-1})(1-ae^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})}=\frac{1-a\cdot\cos(\omega_0)\cdot z^{-1}}{(1-ae^{j\omega_0}\cdot z^{-1})(1-a\cdot e^{-j\omega_0}z^{-1})}=$$

$$\frac{1-a\cdot\cos(\omega_0)\cdot z^{-1}}{1-a\cdot e^{-j\omega_0}\cdot z^{-1}-a\cdot e^{j\omega_0}z^{-1}+a^2\cdot z^{-2}}=\frac{1-a\cdot\cos(\omega_0)\cdot z^{-1}}{1-a\cdot z^{-1}(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})+a^2\cdot z^{-2}}=\frac{1-a\cdot\cos(\omega_0)\cdot z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$



ROC → $|z|>a$ porque $x[n]$ es ilimitada en el tiempo hacia la derecha

b] Para que $\exists X(e^{jw}) = X(z)\Big|_{z=e^{jw}}$ la ROC debe incluir la circunferencia unidad: $\Rightarrow$ $a<1$
$a>0$

$\boxed{0<a<1}$,

$$X(e^{jw}) = X(z)\Big|_{z=e^{jw}} = \frac{1-a.\cos(w_0).z^{-1}}{1-2a.\cos(w_0).z^{-1}+a^2.z^{-2}}\Bigg|_{z=e^{jw}} = \frac{1-a\cos(w_0)e^{-jw}}{1-2a\cos(w_0).e^{-jw}+a^2.e^{-j2w}}$$

Opción 2:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n.\cos(w_0 n).u[n].z^{-n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n.\cos(w_0 n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n.\cos(w_0 n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}\,\frac{e^{jw_0 n}+e^{-jw_0 n}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(a e^{jw_0}.z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(a e^{-jw_0}.z^{-1})^n\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{jw_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-ae^{-jw_0}.z^{-1}}\right]$$

c]
$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} \to H(e^{jw}) = e^{-jwn_0}.\frac{1-2a\cos(w_0)e^{-jw}+a^2e^{-j2w}}{1-a.\cos(w_0)e^{-jw}} =$$

$$\overbrace{\frac{1}{1-a.\cos(w_0).e^{-jw}}}^{G(e^{jw})}.\left[e^{-jwn_0} - 2a\cos(w_0)e^{-jw(n_0+1)} + a^2.e^{-jw(n_0+2)}\right] =$$

$$h[n] = F^{-1}\left\{\frac{e^{-jwn_0}}{1-a\cos(w_0).e^{-jw}}\right\} - 2a\cos w_0 . F^{-1}\left\{\frac{e^{-jw(n_0+1)}}{1-a\cos(w_0)e^{-jw}}\right\} +$$

$$a^2.F^{-1}\left\{\frac{e^{-jw(n_0+2)}}{1-a\cos(w_0).e^{-jw}}\right\} = g[n-n_0] - 2a\cos w_0 \cdot g[n-(n_0+1)] + a^2 g[n-(n_0+2)]$$

$$g[n] = [a\cos(w_0)]^n.u[n]$$

FEBRERO 2007

3. Sea un sistema lineal, causal c invariante en el tiempo cuya relación entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ viene descrita por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]+a_1 y[n1]+a_2 y[n-2]=x[n]$$

a) Calcule los parámetros a_1, a_2 sabiendo que la función de transferencia del sistema tiene dos polos complejos en $z_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}$, donde r y ω_0 son números reales positivos. Exprese sus valores en función de r y ω_0.

b) Sabiendo que la respuesta al impulso es $h[n]=Ar^n \operatorname{sen}(\omega_0 n+\theta)u[n]$, identifique A y θ en función de r $y\,\omega_0$ (la expresión de $h[n]$ es válida también cambiando la función seno por coseno).

c) Suponiendo que $r=1$, calcule la transformada de Fourier de $h[n]$. Compare el resultado obtenido con la particularización de $H(z)$ en la circunferencia unidad y comente el resultado.

SEPTIEMBRE 2008

3) Considere el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

donde x[n] es la secuencia de entrada e y[n] es la secuencia de salida.

Se pide:

a) Determine las posibles funciones de transferencia H(z)=Y(z)/X(z), con sus respectivas regiones de convergencia, donde X(z) e Y(z) son las transformadas Z de x[n] e y[n].

b) Calcule las posibles respuestas al impulso $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$, analizando la causalidad y estabilidad de cada solución.

c) Suponiendo $x[n] = e^{j\pi n} + 2^{-n} u[n]$, determine la secuencia de salida y[n], correspondiente al sistema estable.

SEPTIEMBRE 2008

3) Considere el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

donde x[n] es la secuencia de entrada e y[n] es la secuencia de salida.

Se pide:

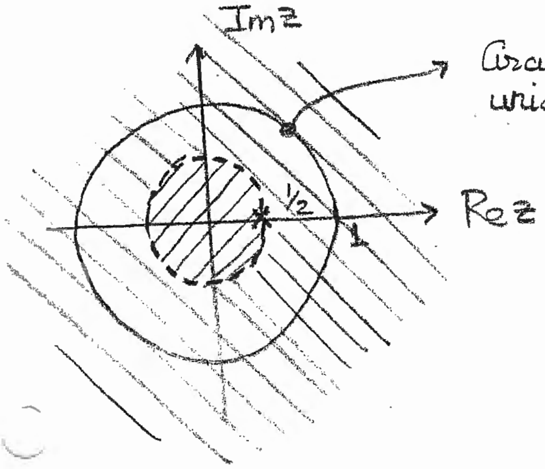
a) Determine las posibles funciones de transferencia H(z)=Y(z)/X(z), con sus respectivas regiones de convergencia, donde X(z) e Y(z) son las transformadas Z de x[n] e y[n].

b) Calcule las posibles respuestas al impulso $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$, analizando la causalidad y estabilidad de cada solución.

c) Suponiendo $x[n] = e^{j\pi n} + 2^{-n}u[n]$, determine la secuencia de salida y[n], correspondiente al sistema estable.

a) $y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + X(z)$

Así que: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ que tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$



ROC1 : $|z| < \frac{1}{2}$ ANTICAUSAL, NO ESTABLE

ROC2 : $|z| > \frac{1}{2}$ CAUSAL, ESTABLE

$-a^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|<|a|$

b) $h_1[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$ ANTICAUSAL NO ESTABLE

ROC1 : $|z| < \frac{1}{2}$

$h_2[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 2^{-n} u[n]$ CAUSAL ESTABLE

ROC2 : $|z| > \frac{1}{2}$

$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a|$

c) $x[n] = e^{j\pi n} + 2^{-n}u[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI estable}\\ h_2[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]$

$$\begin{array}{ccc} x[n] \big\downarrow \mathcal{F} & h_2[n] \big\downarrow \mathcal{F} & y[n] \big\uparrow \mathcal{F}^{-1} \\ X(e^{j\omega}) & H(e^{j\omega}) & Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{array}$$

Como se trata del sistema estable: $H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{e^{j\pi n} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \mathcal{F}\left\{e^{j\pi n}\right\} + \mathcal{F}\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \pi - 2\pi k) + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} e^{j\omega_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi k) \\ a^n u[n],\ |a|<1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \end{matrix}}$$

Así que: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = 2\pi \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\pi-2\pi k)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \left(\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}}_{H(e^{j\omega})}\right)^2 =$

$f(\omega)\delta(\omega-\omega_0) = f(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\pi-2\pi k)\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\pi+2\pi k)}}}_{2/3} + \left[H(e^{j\omega})\right]^2 =$$

$$e^{-j(\pi+2\pi k)} = e^{-j\pi}\cancel{e^{-j2\pi k}}^{\,1} = e^{-j\pi} = -1$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\pi-2\pi k) + H(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega}) \quad \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}$$

$\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = h_2[n]$

$$y[n] = \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\pi-2\pi k)\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{H(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} + \underbrace{h_2[n] * h_2[n]}_{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]} = \frac{2}{3}(-1)^n + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(se puede hacer gráficamente)

FEBRERO 2002

3. Sea un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n]-a^2y[n-2]=x[n-2]-a^2x[n]$$

donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ es la salida y a es un parámetro real tal que $0 < a < 1$.

a) Calcule la función de transferencia del sistema. Represente su diagrama de polos y ceros.

b) Demuestre que el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema vale 1 para todo ω.

c) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, detallando el valor de la función para n par e impar.

d) Suponiendo que la entrada $x[n]$ es una secuencia finita de energía unidad, calcule la energía de la secuencia de salida $y[n]$.

FEBRERO 2002

3. Sea un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n]-a^2y[n-2]=x[n-2]-a^2x[n]$$

donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ es la salida y a es un parámetro real tal que $0<a<1$.

a) Calcule la función de transferencia del sistema. Represente su diagrama de polos y ceros.

b) Demuestre que el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema vale 1 para todo ω.

c) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, detallando el valor de la función para n par e impar.

d) Suponiendo que la entrada $x[n]$ es una secuencia finita de energía unidad, calcule la energía de la secuencia de salida $y[n]$.

Respuesta en frecuencia: $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ T.F.

Función de transferencia: $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ T.Z.

a) $y[n]-a^2y[n-2]=x[n-2]-a^2x[n]$

$\updownarrow$ TZ $\quad x[n-n_0]\longleftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$Y(z)-a^2z^{-2}Y(z)=z^{-2}X(z)-a^2X(z)$

$$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-2}-a^2}{1-a^2z^{-2}}}$$

Nota:

$$\frac{1}{(1-az^{-1})(1+bz^{-1})}$$

Polos $z=a$, $z=-b$

Diagrama de polos y ceros:

Polos: valores que hacen que $H(z)=\infty$

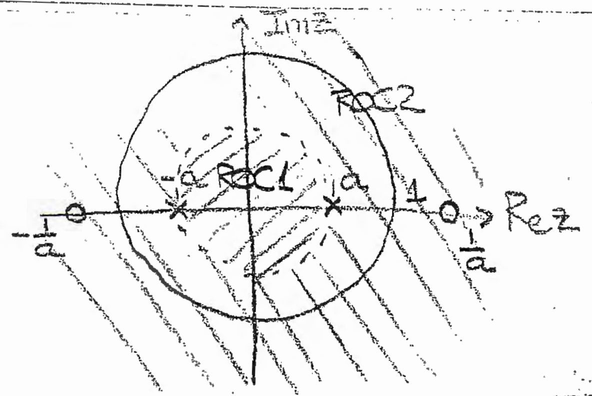
Ceros: " " " " $H(z)=0$

$$H(z)=\frac{z^{-2}-a^2}{1-a^2z^{-2}}=\frac{(z^{-1}+a)(z^{-1}-a)}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}=\frac{\left(\frac{z^{-1}+a}{a}\right)\cdot a\left(\frac{z^{-1}-a}{-a}\right)(-a)}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{a}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}(-a^2)$$

Polos: $z=-a$, $z=+a$

Ceros: $z=-\frac{1}{a}$, $z=+\frac{1}{a}$



ROC1 $|z|<a$ Anticausal, No estable

$\boxed{\text{ROC2} \quad |z|>a \quad \text{Causal, estable}}$

$0<a<1$

No es de fase mínima!!

Así que: $\boxed{H(z)=\dfrac{z^{-2}-a^2}{1-az^{-2}}, \ |z|>a}$

Nota: si hubieran dicho sistema anticausal, $\nexists H(e^{j\omega})$ pq la ROC de $H(z)$ no incluiría la circunf. unidad

b) $H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}}$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})\,H^*(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}}\cdot\frac{e^{j2\omega}-a^2}{1-a^2e^{+2j\omega}} = \frac{1-a^2e^{-2j\omega}-a^2e^{2j\omega}+a^4}{1-a^2e^{2j\omega}-a^2e^{-2j\omega}+a^4} = 1$$

$z\cdot z^* = |z|^2$

$(z_1+z_2)^* = z_1^*+z_2^*$

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

$\Longrightarrow |H(e^{j\omega})| = 1$

$H_1(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1+ae^{-j\omega})}$

c) $$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}} = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1+ae^{-j\omega})} = H_1(e^{j\omega})e^{-2j\omega} - H_1(e^{j\omega})a^2$$

$$\boxed{h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(e^{j\omega})e^{-2j\omega}\} - a^2\mathcal{F}^{-1}\{H_1(e^{j\omega})\} = h_1[n-2] - a^2h_1[n]}$$

calculamos $h_1[n]$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1+ae^{-j\omega})} = \frac{A}{(1-ae^{-j\omega})} + \frac{B}{(1+ae^{-j\omega})}$$

$$\frac{1}{\cancel{(1-ae^{-j\omega})(1+ae^{-j\omega})}} = \frac{A(1+ae^{-j\omega})+B(1-ae^{-j\omega})}{\cancel{\phantom{(1-ae^{-j\omega})}}}$$

$$0e^{-j\omega}+1 = (aA-aB)e^{-j\omega}+(A+B) \quad \begin{cases} aA-aB=0 \rightarrow A=B \\ A+B=1 \longrightarrow \boxed{A=B=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+ae^{-j\omega}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$a^nu[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$$h_1[n] = \frac{1}{2}a^nu[n] + \frac{1}{2}(-a)^nu[n] = \frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]a^nu[n]$$

Así que: $$\boxed{h[n] = h_1[n-2] - a^2h_1[n] = \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n-2}\right]a^{n-2}u[n-2] - a^{n+2}\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]u[n]}$$

$$\boxed{h[n] = \begin{cases} a^{n-2}u[n-2] - a^{n+2}u[n], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}}$$

d) $$E_x = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}_{\text{Rel. Parseval}} = 1$$ $x[n]$ energía unidad (DATO)

$$\boxed{E_y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})H(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \underbrace{|H(e^{j\omega})|^2}_{=\,1 \text{ b)}} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \boxed{E_x = 1}$$

Tema 4

SEPTIEMBRE 1999

3. Sea $x(t)$ una señal real de banda limitada ($X(j\omega)=0\ \forall\omega>\omega_0$). A partir de ella obtenemos otra señal $y(t)$ mediante la siguiente operación:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

donde T es un parámetro arbitrario y la función 'sinc' se define a continuación: $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$

a) Determine la expresión de la transformada de Fourier de $y(t)$, esto es, $Y(j\omega)$ en función de $X(j\omega)$.

b) Si se verifica que $T<\pi/\omega_0$, demuestre que $y(t)=x(t)\ \forall t$.

Nota: Puede utilizar los siguientes pares de transformadas para la resolución del ejercicio.

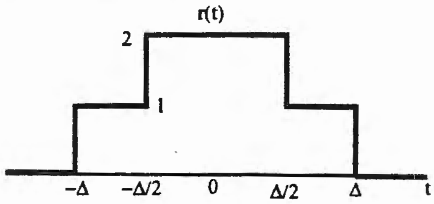
$$\frac{\mathrm{sen}(Wt)}{\pi t} \overset{TF}{\underset{TF^{-1}}{\leftrightarrow}} \begin{cases} 1, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W \end{cases} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{TF}{\underset{TF^{-1}}{\leftrightarrow}} \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

FEBRERO 2000

5. Considere un esquema de muestreo en el que la señal de muestreo $p(t)$ es un tren de pulsos:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$

donde el pulso r(t) se representa en la figura siguiente:



suponiendo que $\Delta << T$.

Si denominamos $x(t)$ a la señal que se muestrea, supuesta de banda limitada, esto es $X(j\omega)=0$ $|\omega|>\omega_{max}$, y que se verifica la condición de muestreo de Nyquist,

a) Calcule $R(j\omega)$, transformada de Fourier de $r(t)$.

b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_p(t)=x(t)p(t)$.

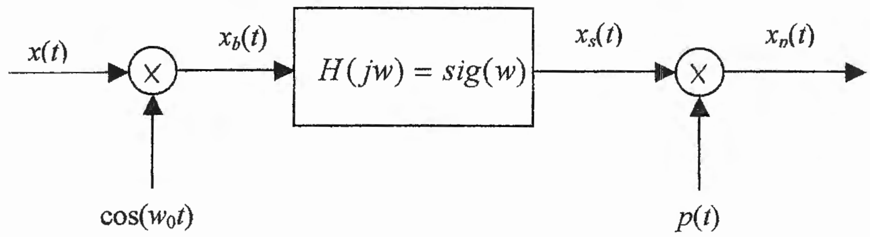
c) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_i(t)$ definida como

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)r(t-nT)$$

d) Explique detalladamente para los casos b), c), cómo sería la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo que permitiría recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ y $x_i(t)$ respectivamente.

FEBRERO 2001

4. Se sabe que la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de una señal arbitraria $x(t)$ cumple que $X(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_M$. Considérese el siguiente sistema:



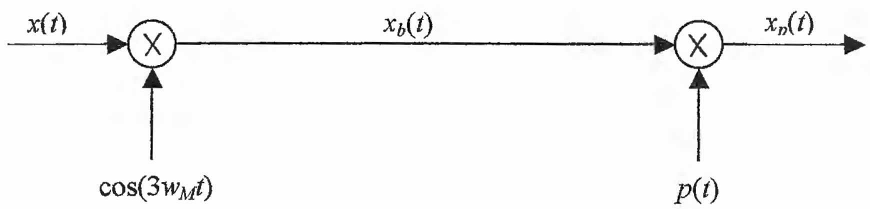
Siendo $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ y $\text{sig}(\omega)$ la función signo, definida como:

$$\text{sig}(\omega)=\begin{cases} 1 & \omega>0 \\ 0 & \omega=0 \\ -1 & \omega<0 \end{cases}$$

a) Obtenga razonadamente el máximo valor de T que permite recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

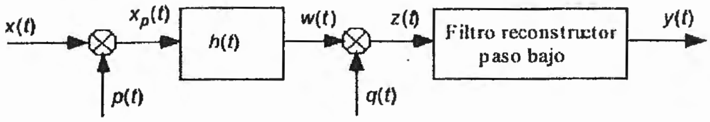
b) Diseñe razonadamente el sistema que permitiría obtener la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

c) Considere el esquema de la FIGURA 2:

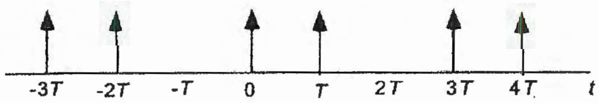


Justifique que en este caso se puede muestrear la señal $x_b(t)$ a una frecuencia de $4\omega_M$, que es inferior a la frecuencia de Nyquist de $x_b(t)$, y no obstante es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

4. Sea el esquema de la figura

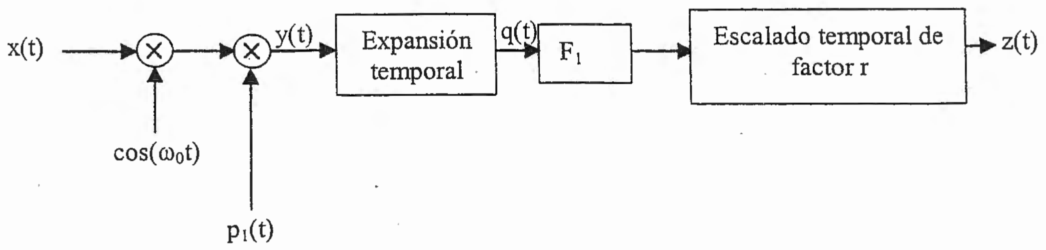


donde la señal de entrada $x(t)$ es de banda limitada (ω_m es la frecuencia máxima) y la señal $p(t)$ es periódica de la forma que representamos a continuación:



a) Calcule los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier de la señal $p(t)$, demostrando que dichos coeficientes constituyen a su vez una secuencia periódica. Calcule su periodo.
b) Calcule la expresión del espectro de $X_p(j\omega)$. Represente de manera aproximada su módulo asumiendo una forma arbitraria para la representación del módulo de $X(j\omega)$. Calcule el máximo valor del parámetro T que permite la recuperación de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$
c) Suponiendo que $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema LTI definido por la expresión $h(t) = u(t+T) - u(t-T)$, y que la señal $q(t) = \exp(j4\pi t/(3T))$, diseñe el filtro reconstructor paso bajo que permite recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

4. Considere el sistema de la figura:



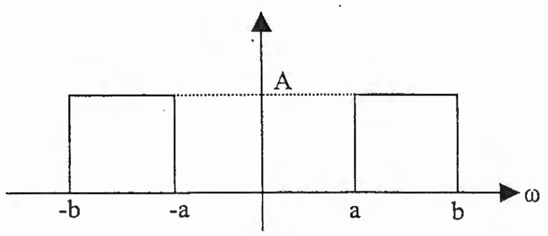
donde: $x(t)$ es una señal paso bajo de banda limitada ($X(j\omega)=0$ cuando $|\omega| > \omega_m>0$). Se cumple:

$$\omega_0=(3/4)\ \omega_s\ ;\quad f_s=1/T_s$$

$$p_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$

El bloque de expansión temporal realiza la siguiente operación: $q(t)=y(t/2)$, y el bloque de escalado temporal realiza un escalado del eje de tiempos con un factor r.

El bloque F_1 es un filtro paso banda ideal cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura siguiente:



Se pide:

(a) Dibuje el espectro de la señal $y(t)$. ¿Cuál es el valor mínimo de ω_s para el que se puede recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$?

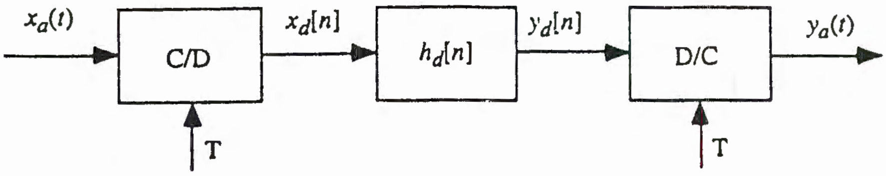
(b) Demuestre la siguiente igualdad: $\delta(t/2)=2\delta(t)$ (Utilice esta igualdad en el resto del ejercicio).

(c) Con el bloque de expansión temporal, el filtro paso banda ideal, y el bloque de escalado temporal se pretende recuperar la señal modulada $x(t)\cos(\omega_0 t)$. Determine lo siguiente para que pueda obtenerse dicho objetivo:

- Dibuje el espectro de la señal $q(t)$ (salida del bloque de expansión temporal)
- ¿Cuales deben ser los parámetros del filtro F_1: A, a, b?
- ¿Cuál debe ser el valor del parámetro de escalado temporal r?

SEPTIEMBRE 1999

3. Considere el esquema de la figura siguiente correspondiente al filtrado de señales de banda limitada en tiempo continuo, mediante procesado discreto de secuencias:



donde el primer bloque conversor continuo-discreto (C/D) muestrea de forma ideal la señal de entrada cada T segundos obteniéndose $x_d[n]=x_a(nT)$; el segundo bloque es un sistema discreto de respuesta al impulso $h_d[n]$; y el tercer bloque es un conversor de discreto a continuo (D/C) mediante una operación de interpolación, descrita por la siguiente expresión:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\; h_a(t-nT) \tag{1}$$

siendo $h_a(t)$ la señal interpoladora.

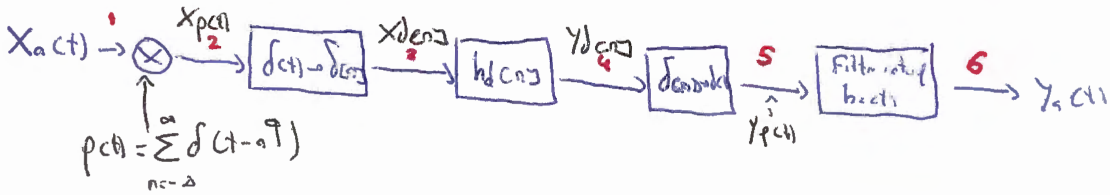
a) Determine la transformada de Fourier $Y_a(j\omega)$ en función de la transformada de Fourier de la entrada $X_a(j\omega)$ y las respuestas frecuenciales de los distintos sistemas. Para ello, suponga que $X_a(j\omega)$ es de banda limitada y que se verifica el teorema de Nyquist de muestreo.

b) Si consideramos la siguiente situación particular:

$$x_a(t) = 1, \qquad h_d[n] = \delta[n], \qquad h_a(t) = e^{-t/T}u(t) \tag{2}$$

determine la expresión analítica de $Y_a(j\omega)$ a partir del resultado obtenido en a).

c) Determine $y_a(t)$ como la transformada inversa de Fourier de $Y_a(j\omega)$. Justifique que es periódica y calcule los coeficientes de su Desarrollo en Serie de Fourier.



$$Y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Yd[n]\,.\,h_a(t-nT) = \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} Yd[n]\,.\,\delta(t-nT)\right)}_{Y_p(t)} * h_a(t) \Rightarrow \text{Filtro interpolador}$$

se cumple Nyquist

a) ① $\to X_a(j\omega)$

② $\to X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k\omega_s)) = \frac{1}{T} X_a(j\omega)$, $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$, periódica con ω_s.

$\omega \to \Omega$, $\omega = \frac{\Omega}{T}$

③ $Xd(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{1}{T} X_a\left(j\frac{\Omega}{T}\right)$, $-\pi < \Omega < \pi$, periódica 2π

④ $Yd(e^{j\Omega}) = Xd(e^{j\Omega})\,.\,Hd(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} X_a\left(j\frac{\Omega}{T}\right).\,Hd(e^{j\Omega})$, $-\pi < \Omega < \pi$

$\Omega \to \omega$, $\Omega = \omega T$

⑤ $Y_p(j\omega) = Yd(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}.X_a\left(j\frac{\omega T}{T}\right).\,Hd(e^{j\omega T})$, $-\omega s/2 < \omega < \omega s/2$ - Periódica ω_s

⑥ $Y_a(j\omega) = Y_p(j\omega)\,.\,H_a(j\omega) = \frac{1}{T}.X_a(j\omega)\,.\,Hd(e^{j\omega T})\,.\,H_a(j\omega)$, $-\omega s/2 < \omega < \omega s/2$

Opción 2 => Sirve se cumpla Nyquist o no:

① $X_a(jw)$ ② $X_p(jw) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(w-kw_s))$ ③ $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\frac{\Omega}{T} - \frac{k2\pi}{T}))$

$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\cdot\frac{1}{T}(\Omega - k2\pi))$ ④ $Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega}) . H_d(e^{j\Omega}) =$

$\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{1}{T}(\Omega - k2\pi))\right] . H_d(e^{j\Omega})$ ⑤ $Y_p(jw) = Y_d(e^{jwT}) =$

$\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{1}{T}(wT - k2\pi))\right] . H_d(e^{jwT}) = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(w - k\frac{2\pi}{T}))\right] . H_d(e^{jwT})$.

⑥ $Y_a(jw) = Y_p(jw) . H_a(jw) = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(w-k\frac{2\pi}{T}))\right] . H_d(e^{jwT}) . H_a(jw)$

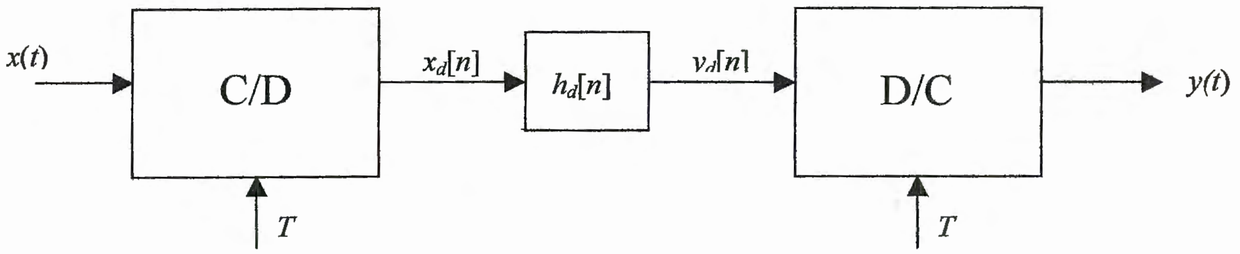
b) $X_a(jw) = 2\pi\delta(w)$ $H_d(e^{j\Omega}) = 1$ $H_a(jw) = \frac{1}{\frac{1}{T} + jw}$

Sustituyendo -> $Y_a(jw) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w - k\frac{2\pi}{T}) . 1 . \frac{1}{\frac{1}{T} + jw} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{T} + j\frac{k2\pi}{T}} \cdot \frac{1}{T}\delta(w - \frac{k2\pi}{T})$

$$\boxed{= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + jk2\pi} \cdot \delta(w - k\frac{2\pi}{T})}$$

FEBRERO 2005

4. Considera el sistema de la figura:



Dada la señal de entrada $x(t) = x_0(t) + x_0(t)\cos w_0 t$, cumpliéndose que $X_0(jw) = 0$, $\forall |w| > w_0/2$.

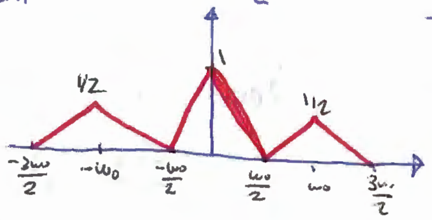
a) Determine el máximo periodo de muestreo $T = T_{max}$ de modo que la secuencia de muestras de $x(t)$, $x_d[n] = x(nT)$, sea representativa de $x(t)$, (es decir que $x(t)$ se puede recuperar a partir de $x_d[n]$).

b) Determine la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro de manera que $y_d[n] = x_0(nT_{max})$, (observe que $x_0(t)$ es una componente aditiva de $x(t)$) donde T_{max} corresponde al valor de T determinado en el apartado a).

c) En las condiciones del apartado b), diseñe el conversor "D/C" de manera que $y(t) = x_0(t)$, y exprese $y(t)$ en función de las muestras de $x_0(t)$.

a) ① $X(t) = X_0(t) + X_0(t)\cdot\cos(w_0 t) \xrightarrow{F} X(jw) = X_0(jw) + \frac{1}{2\pi}\cdot X_0(jw) * \pi\cdot[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)]$

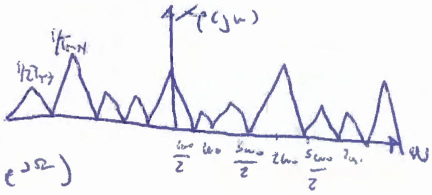
$X(jw) = X_0(jw) + \frac{1}{2}[X_0(j(w-w_0)) + X_0(j(w+w_0))]$



(Para que $x(t)$ sea recuperable a partir de $xd[n]$, y se cumple que $xd[n] = x(nT)$, se debe cumplir Nyquist} $w_s \geq 2\cdot\frac{3w_0}{2} \to w_s \geq 3w_0 \to w_{s\,min} = 3w_0$ $\quad \frac{2\pi}{T_{max}} = 3w_0 \to T_{max} = \frac{2\pi}{3w_0}$

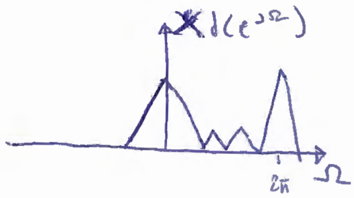
$w_s = \frac{2\pi}{T_{max}}$

② b) $X_p(jw) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(w-kw_s))$



$w \to \Omega$
$w = \frac{\Omega}{T}$

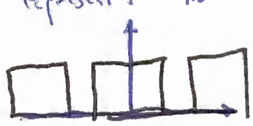
③ $Xd(e^{j\Omega}) = Xp(j\frac{\Omega}{T})$



④ Objetivo ⇒ $yd[n] = x_0(nT_{max})$ es decir, $yd[n]$ debe representar las muestras de $x_0(t)$. Para ello,

$Xd(e^{j\Omega})$ debe ser:

con lo que $Hd(e^{j\Omega})$:



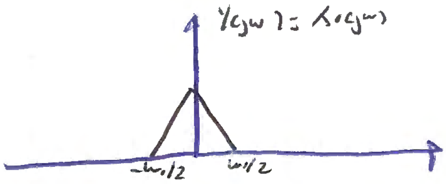
$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{w_0}{2} \cdot T_{max} \\ \text{Periodo } 2\pi & \\ 0, & \frac{w_0}{2} T_{max} < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad \xleftrightarrow{F^{-1}} \quad h[n] = \frac{sen(\pi/3 \, n)}{\pi/n}$$

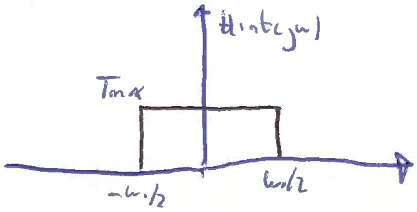
$$\frac{w_0}{2} T_{max} = \frac{w_0}{2} \cdot \frac{2\pi}{3 w_0} = \pi/3$$

c) $\Omega \to w$

$\Omega = w \cdot T$

⑥ $Y_p(jw) = Y_d(e^{jwT})$





$$H_{int}(jw) = \begin{cases} T_{max}, & |w| < \frac{w_0}{2} \\ 0, & r.o.t \end{cases}$$

$$H_{int}(jw) = T_{max} \cdot \begin{cases} 1 & |w| < \frac{w_0}{2} \\ 0 & r.o.t \end{cases} \quad \xleftrightarrow{F} \quad h_{int}(t) = T_{max} \cdot \frac{sen(\frac{w_0}{2} t)}{\pi t}$$

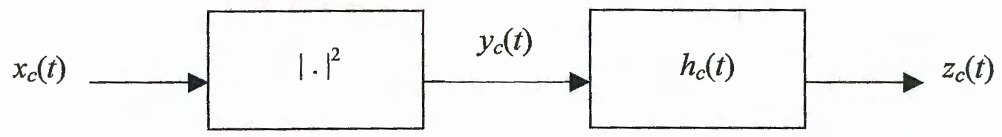
④ $Y_d[n] = X_0(nT_{max})$

⑤ $Y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_d[n] \delta(t - nT_{max}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(nT_{max}) \cdot \delta(t - nT_{max})$

⑥ $Y(t) = Y_p(t) * h_{int}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT_{max}) \cdot h_{int}(t - nT_{max}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT_{max}) \cdot T_{max} \cdot \frac{sen\left(\frac{w_0}{2}(t - nT_{max})\right)}{\pi (t - nT_{max})}$

SEPTIEMBRE 2002

4. Sea el sistema en tiempo continuo de la figura:

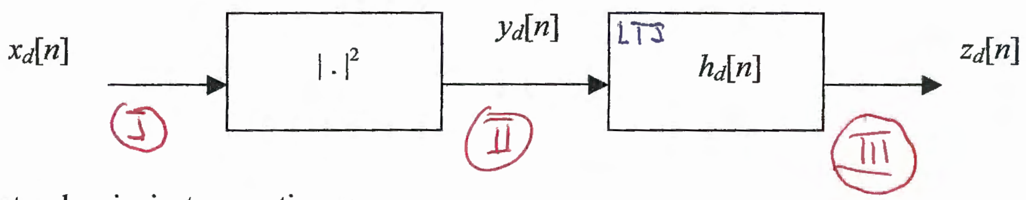


El primer bloque halla el cuadrado del módulo de la señal de entrada $x_c(t)$, que supondremos real y de banda limitada ($X(jw) = 0 \quad \forall |w| > w_0$).

El sistema $h_c(t)$ se define mediante la siguiente relación entrada–salida:

$$z_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}$$

El sistema en tiempo discreto equivalente es:

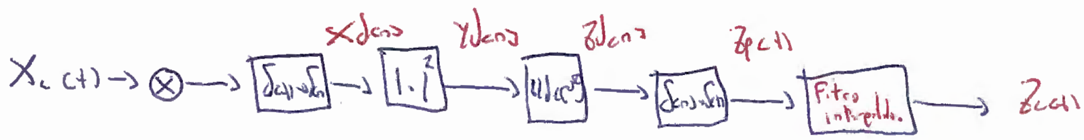


Conteste a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál debe ser la frecuencia de muestreo f_s mínima para poder recuperar $z_c(t)$ a partir de la salida del sistema equivalente en tiempo discreto, $z_d[n]$?

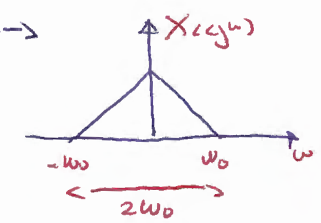
b) ¿Cuál debe ser la respuesta en frecuencia $H_d(e^{jw})$ del sistema discreto $h_d[n]$ equivalente al sistema lineal $h_c(t)$?

c) Halle la respuesta impulsiva del sistema equivalente $h_d[n]$.



a) Debemos exigir que se cumpla Nyquist para la señal de mayor ancho de banda del sistema continuo:

I →



II → $y_c(t) = |x_c(t)|^2 = x_c(t)^2 = x_c(t) \cdot x_c(t)$

$Y_c(jw) = \frac{1}{2\pi} \cdot X_c(jw) * X_c(jw)$ → tiene un ancho de $4w_0$. Va de $-2W_0$ a $2W_0$. $W_m = 2W_0$

III Un sistema LTI jamás aumenta el ancho de banda. $Z_c(jw) = jw \cdot Y_c(jw)$ ← $H_c(jw) = jw$

Se debe cumplir Nyquist para $y_c(t)$, con lo que →

$\rightarrow \omega_s \geq 2 \cdot 2\omega_0 \rightarrow \omega_s \geq 4\omega_0 \therefore \omega_{s\,min} = 4\omega_0 \qquad F_{s\,min} = \frac{\omega_{s\,min}}{2\pi} = \frac{2\omega_0}{\pi}$ Hz.

b) Como $\begin{cases} \text{se cumple Nyquist para la señal de mayor ancho de banda} \\ \text{C/D y D/C son ideales.} \end{cases}$

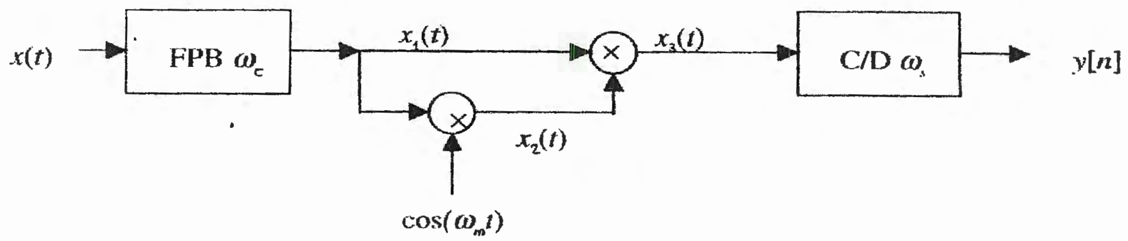
$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right) & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases} = \begin{cases} j\frac{\Omega}{T} & |\Omega| < \pi \\ \text{periódica } 2\pi \end{cases}$$

c) $$h_d[n] = F^{-1}\{H_d(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\frac{\Omega}{T} \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega =$$

$$\frac{j}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} \Omega \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega = \dots = \frac{(-1)^n}{nT} = \begin{cases} \frac{1}{nT}, & n \neq 0 \text{ par} \\ \frac{-1}{nT}, & n \neq 0 \text{ impar} \\ 0, & n = 0 \rightarrow \text{hay que hacerlo aparte.} \end{cases}$$

SEPTIEMBRE 2003

4. Considere el sistema de la figura en el que el filtro paso bajo ideal (FPB) tiene una frecuencia de corte de $w_c = 2\pi \times 1000$ y donde $w_m = 2\pi \times 2000$. El bloque C/D es un conversor continuo-discreto que trabaja a la frecuencia w_s.



La señal de entrada $x(t)$ está limitada en banda. Es decir:

$$X(jw) \neq 0, \quad |w| < 2\pi \times 8000$$
$$X(jw) = 0, \quad |w| > 2\pi \times 8000$$

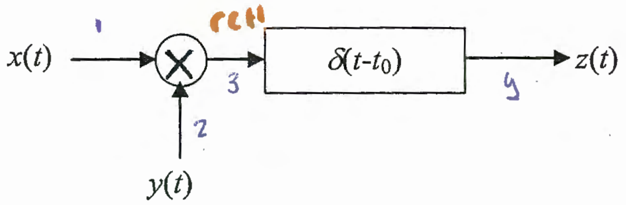
a) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo w_s que debe tener el conversor de continuo a discreto para que no haya solapamiento de $x_3(t)$.Razónelo empleando un esquema de los espectros de las señales $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.

b) Si $x(t) = 2\cos(2\pi \cdot 300t) + 4\,\text{sen}(2\pi \cdot 3000t)$, ¿Cuál es la expresión de la salida $y[n]$ para la w_s calculada en el apartado anterior?.

c) Represente el espectro de la salida $y[n]$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ para $w_s = 2\pi \times 4000$.

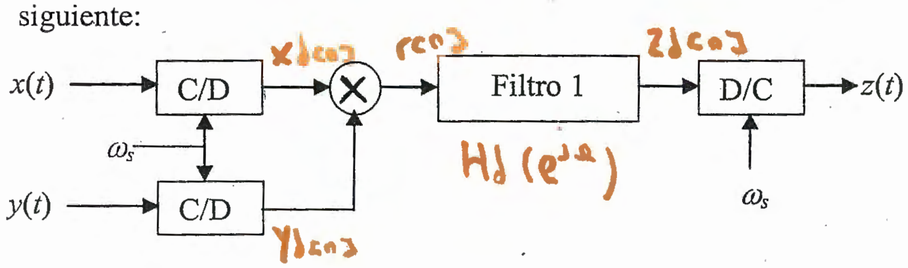
FEBRERO 2004

4. Considere el siguiente sistema de procesado de señales en tiempo continuo:



donde $x(t)$ e $y(t)$ son señales limitadas en banda, es decir, $X(j\omega)=0\ \forall\ |\omega|>\omega_x$; $Y(j\omega)=0\ \forall\ |\omega|>\omega_y$

Se desea diseñar un sistema discreto que simule el efecto del sistema continuo anterior sobre las señales. El diagrama de bloques de dicho sistema será el siguiente:



donde los conversores continuo-discreto y discreto-continuo son ideales.

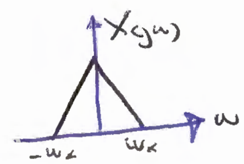
Conteste a las siguientes cuestiones:

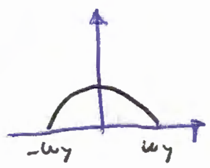
(a) ¿Cual es la mínima frecuencia de muestreo ω_s que debe utilizar el sistema discreto?

(b) Calcule la respuesta en frecuencia que debe tener el Filtro 1 para que el sistema discreto y el continuo sean equivalentes.

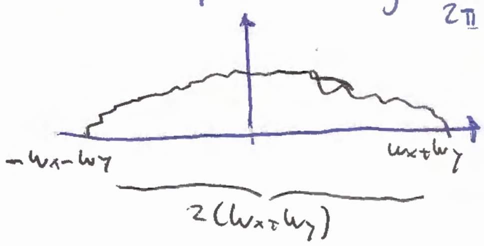
(c) Calcule la respuesta impulsiva del Filtro 1. Particularícela cuando el retardo t_0 es un múltiplo entero del periodo de muestreo. Comente el resultado.

a) Tienes que garantizar que se cumple Nyquist para la señal de mayor ancho de banda del sistema continuo.

① 

② 

③ $r(t) = x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{F} R(jw) = \frac{1}{2\pi} X(jw) * Y(jw)$



④ $h_c(t) = \delta(t-t_0) \xrightarrow{F} H_c(jw) = e^{-jwt_0}$

$Z(jw) = R(jw)\cdot H_c(jw) = R(jw)\cdot e^{-jwt_0}$

nota: un sistema LTI no puede aumentar el ancho de banda de una señal.

Las señales de mayor ancho de banda del sistema continuo son ③ y ⑤. Tengo que garantizar que se cumpla Nyquist para ellas: $\omega_s \geq 2(\omega_x + \omega_y)$

$$\omega_{s\,min} = 2(\omega_x + \omega_y)$$

b) · Se cumple el criterio de Nyquist para la señal de mayor ancho de banda del sistema continuo
· Los conversores C/D y D/C son ideales.

Así que.

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c(j\frac{\Omega}{T}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = \cancel{e^{-j\omega t_0}\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = e^{-j\Omega t_0}} & |\Omega|<\pi \\ \text{periódica } 2\pi \end{cases}$$

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = e^{-j\Omega\frac{t_0}{T}} & |\Omega|<\pi \\ \text{periódica } 2\pi \end{cases}$$

c) $$h_d[n] = F^{-1}\{H_d(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H_d(e^{j\Omega})\,e^{j\Omega n}\,d\Omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega\frac{t_0}{T}}\cdot e^{j\Omega n}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-\frac{t_0}{T})}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi j(n-\frac{t_0}{T})}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{j(n-\frac{t_0}{T})}\cdot e^{j\Omega(n-\frac{t_0}{T})}\,d\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi j(n-\frac{t_0}{T})}\cdot\left[e^{j\Omega(n-\frac{t_0}{T})}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\operatorname{sen}(\pi(n-\frac{t_0}{T}))}{\pi(n-\frac{t_0}{T})}$$

En el caso particular de que $\frac{t_0}{T} = k \in \mathbb{Z}$

$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\cdot\frac{t_0}{T}} \longleftrightarrow h_d[n] = \delta[n-k] \longrightarrow$ esta forma no es válida si $\frac{t_0}{T} \neq k \in \mathbb{Z}$ puesto que aparecería una δ situada en un valor de n no entero.

SEPTIEMBRE 1999

3. Sea $x(t)$ una señal real de banda limitada ($X(j\omega)=0\ \forall\omega>\omega_0$). A partir de ella obtenemos otra señal $y(t)$ mediante la siguiente operación:

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

donde T es un parámetro arbitrario y la función 'sinc' se define a continuación $\mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$

a) Determine la expresión de la transformada de Fourier de $y(t)$, esto es, $Y(j\omega)$ en función de $X(j\omega)$.

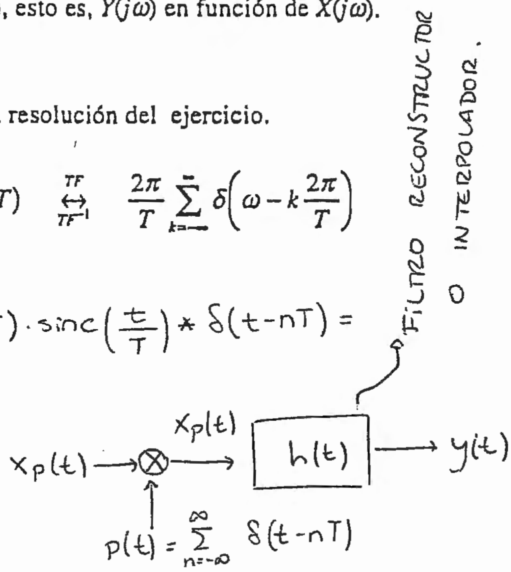
b) Si se verifica que $T<\pi/\omega_0$, demuestre que $y(t)=x(t)\ \forall t$.

Nota: Puede utilizar los siguientes pares de transformadas para la resolución del ejercicio.

$$\frac{\mathrm{sen}(Wt)}{\pi t}\ \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\leftrightarrow}}\ \begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}\qquad\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\ \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\leftrightarrow}}\ \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

a) $$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)*\delta(t-nT)=$$

$$=\underbrace{\boxed{\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)}}_{h(t)}*\underbrace{\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)}}_{x_p(t)\text{ del muestreo ideal.}}$$



$$y(t)=h(t)*x_p(t)\ \xrightarrow{\mathcal{F}}\ Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X_p(j\omega)$$

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\delta(t-nT)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\ \xrightarrow{\mathcal{F}}$$

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

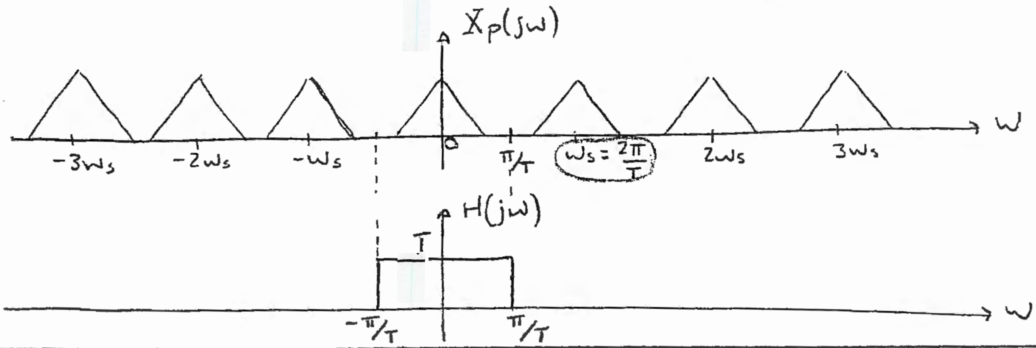
(de memoria)

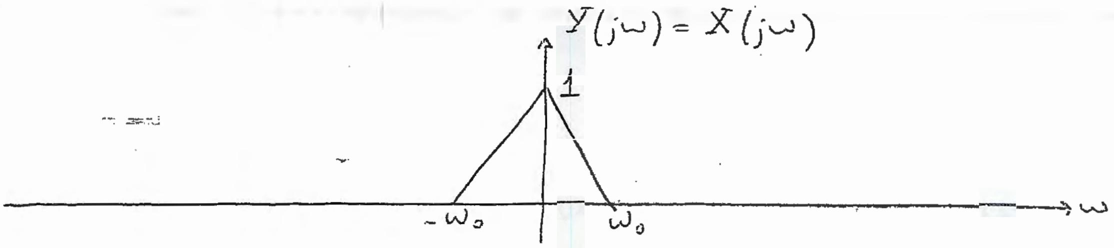
$$H(j\omega):\quad h(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t\pi}{T}\right)}{\frac{\pi}{T}t}=T\cdot\frac{\mathrm{sen}\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi t}\ \xrightarrow[\text{tabla}]{\mathcal{F}}$$

$$H(j\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\frac{\pi}{T}\\ 0, & |\omega|>\frac{\pi}{T}\end{cases}$$

Así que: $Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X_p(j\omega)\Rightarrow$ $\boxed{Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))}$

b)





Para que no haya solapamiento espectral y se pueda recuperar la señal original: $\omega_s - \omega_0 > \omega_0 \longrightarrow \omega_s > 2\omega_0 \longrightarrow \frac{2\pi}{T} > 2\omega_0 \longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{T} > \omega_0}$

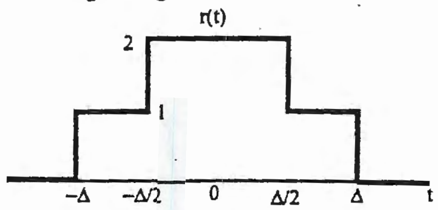
Condición que se cumple según el enunciado (criterio de Nyquist).

FEBRERO 2000

5. Considere un esquema de muestreo en el que la señal de muestreo $p(t)$ es un tren de pulsos:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$

donde el pulso r(t) se representa en la figura siguiente:



suponiendo que $\Delta << T$. → Es decir, el pulso es estrecho.

Si denominamos $x(t)$ a la señal que se muestrea, supuesta de banda limitada, esto es $X(j\omega)=0$ $|\omega|>\omega_{max}$ y que se verifica la condición de muestreo de Nyquist,

a) Calcule $R(j\omega)$, transformada de Fourier de $r(t)$.

b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_p(t)=x(t)p(t)$.

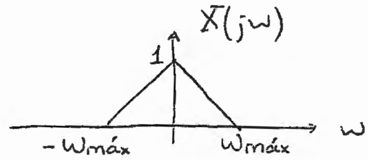
c) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_i(t)$ definida como

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)r(t-nT)$$

d) Explique detalladamente para los casos b), c), cómo sería la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo que permitiría recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ y $x_i(t)$ respectivamente.

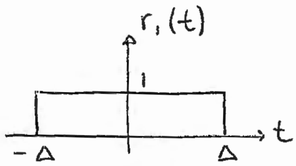
$$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$



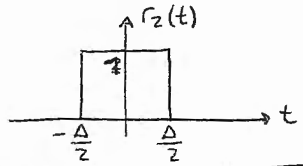
Cond. Nyquist: no hay solapamiento espectral ("aliasing")

a)



$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} R(j\omega) = R_1(j\omega) + R_2(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} R_1(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega\Delta)}{\omega}$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}} R_2(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{\Delta}{2})}{\omega}$$

$$\boxed{R(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega\Delta)}{\omega} + \frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{\Delta}{2})}{\omega}}$$

b) $x_p(t) = x(t)\cdot p(t)$ MUESTREO NATURAL

$$x_p(t) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t) * \delta(t-nT) =$$

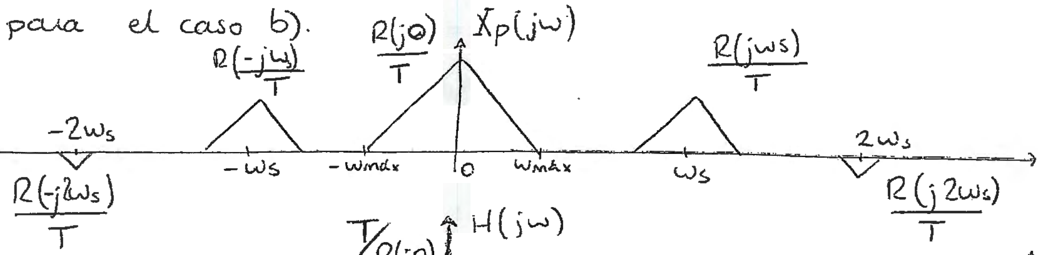
$$= x(t)\cdot\left[r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]$$

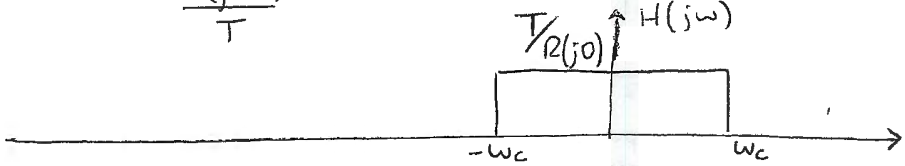
$$\xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left[R(j\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\right] =$$

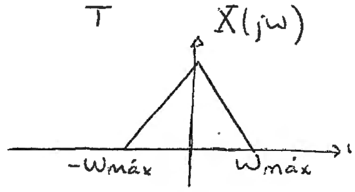
$$= \frac{1}{T} X(j\omega) * \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s)\cdot\delta(\omega-k\omega_s)\right];$$

$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s)\cdot X\left(j(\omega-k\omega_s)\right)}$$

Apartado d) para el caso b).







con $\omega_{máx} < \omega_c < \omega_s - \omega_{máx}$

$$R(j0) = R(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \lim_{\omega\to 0}\frac{2\,\text{sen}(\omega\Delta)}{\omega} + \lim_{\omega\to 0}\frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{\Delta}{2})}{\omega} = \boxed{\frac{0}{0}} \xrightarrow{L'H} =$$

$$= \lim_{\omega\to 0}\frac{2\Delta\cos(\omega\Delta)}{1} + \lim_{\omega\to 0}\frac{2\frac{\Delta}{2}\cos(\omega\frac{\Delta}{2})}{1} = 2\Delta + \Delta = 3\Delta.$$

Así que: $\boxed{H(j\omega)} = \begin{cases} \frac{T}{R(j0)}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \frac{T}{3\Delta}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}}$

c) $x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, r(t-nT)$ MUESTREO INSTANTÁNEO

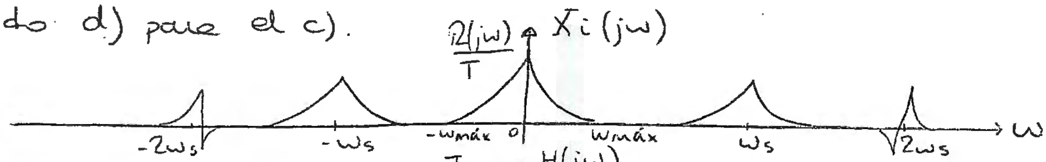
$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot r(t) * \delta(t-nT) = r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT) =$$

$$= r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-nT) = r(t) * \left[x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]$$

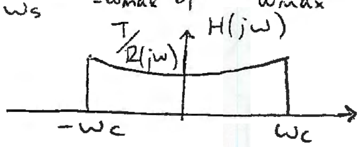
$$\boxed{X_i(j\omega)} = R(j\omega)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\right] =$$

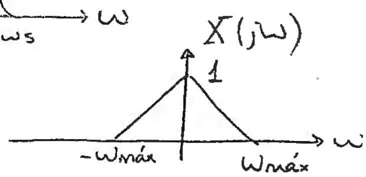
$$= \boxed{\frac{1}{T}R(j\omega)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega-k\omega_s)\right)}$$

Apartado d) para el c).



$\omega_{máx} < \omega_c < \omega_s - \omega_{máx}$

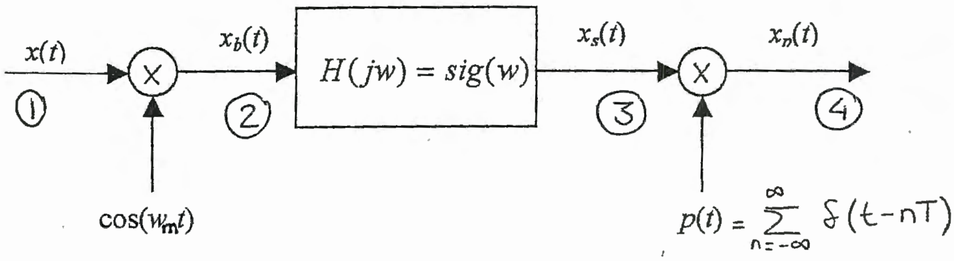




Así que: $H(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{R(j\omega)}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$ $\quad \omega_{máx} < \omega_c < \omega_s - \omega_{máx}$

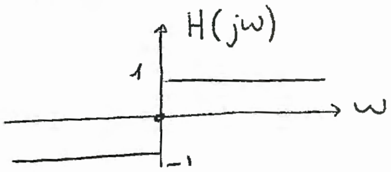
FEBRERO 2001

4. Se sabe que la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de una señal arbitraria $x(t)$ cumple que $X(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_M$. Considérese el siguiente sistema:



Siendo $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ y $\text{sig}(\omega)$ la función signo, definida como:

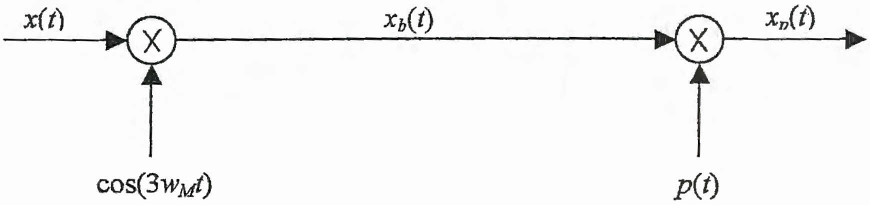
$$\text{sig}(\omega)=\begin{cases}1 & \omega>0\\ 0 & \omega=0\\ -1 & \omega<0\end{cases}$$



a) Obtenga razonadamente el máximo valor de T que permite recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

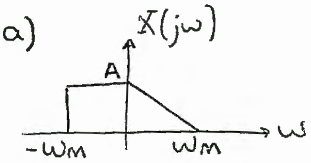
b) Diseñe razonadamente el sistema que permitiría obtener la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

c) Considere el esquema de la FIGURA 2:



Justifique que en este caso se puede muestrear la señal $x_b(t)$ a una frecuencia de $4\omega_M$, que es inferior a la frecuencia de Nyquist de $x_b(t)$, y no obstante es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

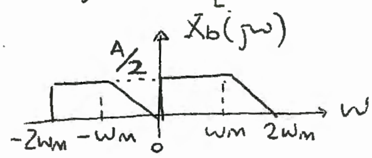
a)



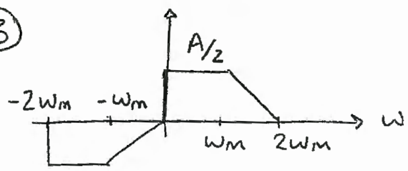
Suponemos el caso más general: $x(t)\in\mathbb{C} \Rightarrow |X(j\omega)|$ no es pa

② $x_b(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_m t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_b(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega+\omega_M)+\delta(\omega-\omega_M)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[X(j(\omega+\omega_M)) + X(j(\omega-\omega_M))\right]$

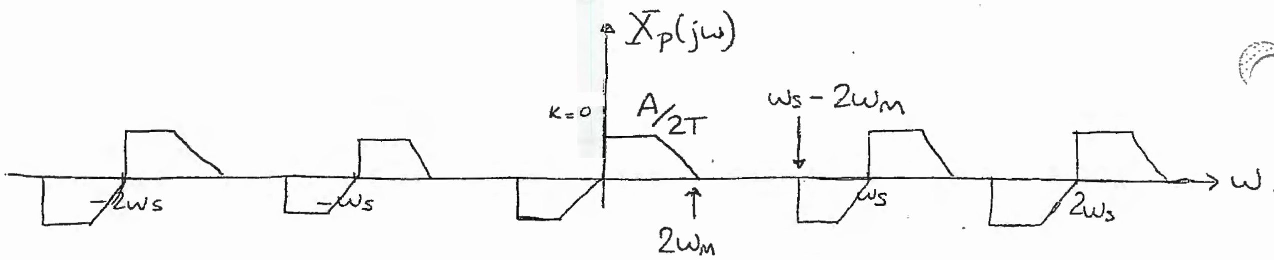


③



$X_s(j\omega) = X_b(j\omega)\cdot H(j\omega)$

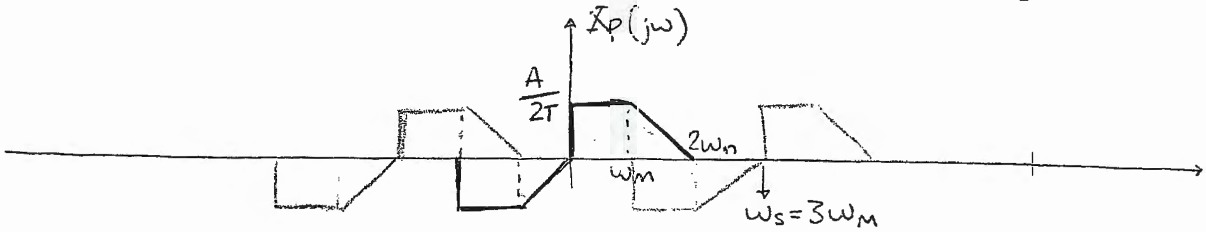
④ MUESTREO IDEAL $\quad X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s(j(\omega - k\omega_s))$ $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$



En primera aproximación intentamos que no haya solapamiento espectral. Para ello se debe cumplir: $\omega_s - 2\omega_M \geq 2\omega_M \Rightarrow$

$$\omega_s \geq 4\omega_M \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 4\omega_M; \quad T \leq \frac{\pi}{2\omega_M} \longrightarrow \boxed{T_{máx} = \frac{\pi}{2\omega_M}}$$

En realidad se puede permitir cierto grado de aliasing:

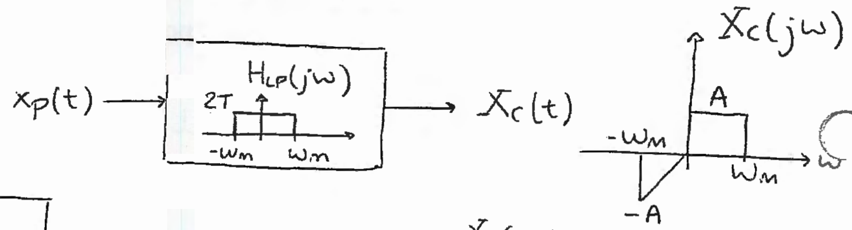


y a pesar de todo se mantiene la información espectral de $x(t)$.

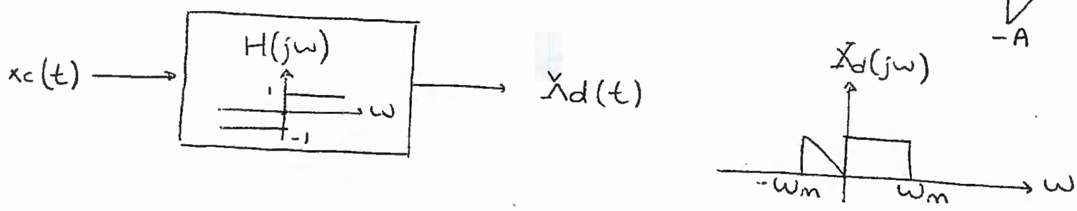
Así que lo que se debe cumplir es que: $\omega_s \geq 3\omega_m$; $\frac{2\pi}{T} \geq 3\omega_m$;

$$T \leq \frac{2\pi}{3\omega_m}; \quad \boxed{T_{máx} = \frac{2\pi}{3\omega_M}}$$

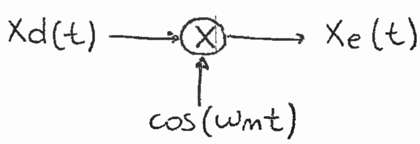
b) ⑤ Filtro paso bajo



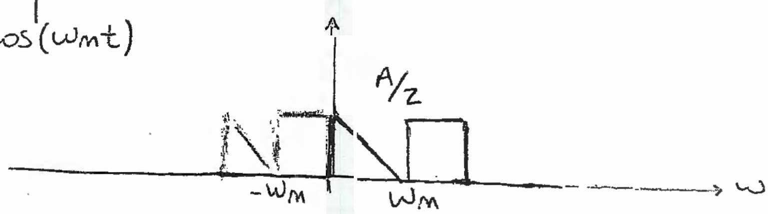
⑥



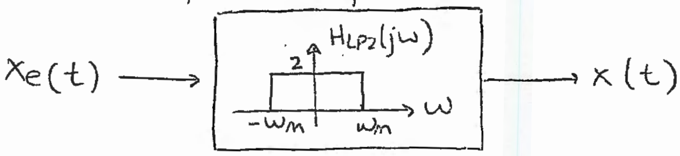
⑦ Convertimos a paso banda

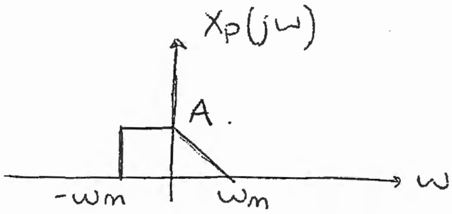


$$X_e(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X_d(j(\omega+\omega_M)) + X_d(j(\omega-\omega_M))\right]$$

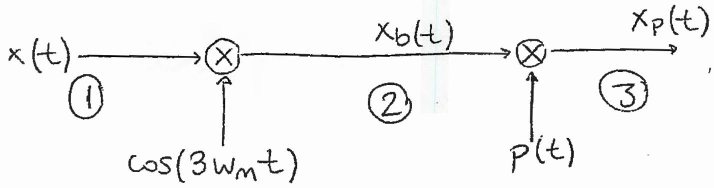


⑧ Filtramos paso bajo

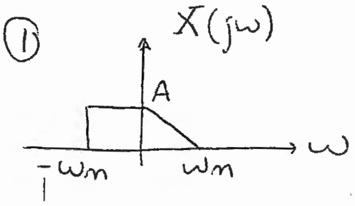




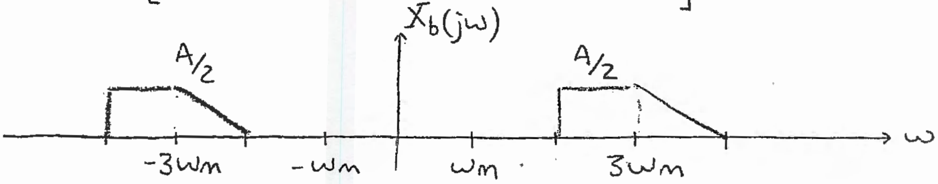
c)



①

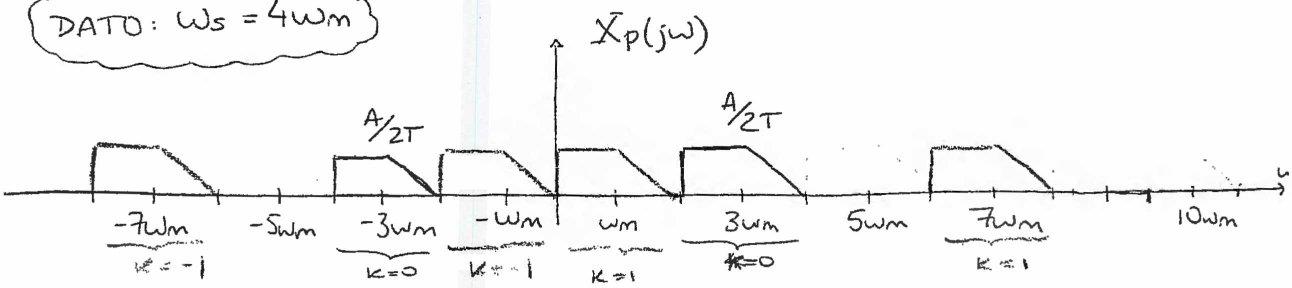


② $X_b(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega + 3\omega_m)) + X(j(\omega - 3\omega_m)) \right]$



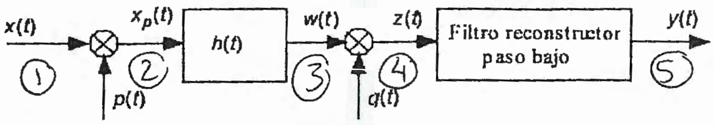
③ MUESTREO IDEAL $\quad X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_b(j(\omega - k\omega_s))$ $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

DATO: $\omega_s = 4\omega_m$

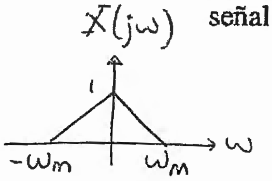


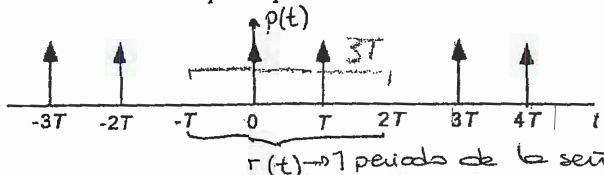
Efectivamente, con $\omega_s = 4\omega_m$ se puede recuperar $x(t)$ porque se preserva su información espectral.

4. Sea el esquema de la figura



donde la señal de entrada $x(t)$ es de banda limitada (ω_m es la frecuencia máxima) y la señal $p(t)$ es periódica de la forma que representamos a continuación:





3T

$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t-nT_s)$ MUESTREO NATURAL.

a) Calcule los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier de la señal $p(t)$, demostrando que dichos coeficientes constituyen a su vez una secuencia periódica. Calcule su periodo.

b) Calcule la expresión del espectro de $X_p(j\omega)$. Represente de manera aproximada su módulo asumiendo una forma arbitraria para la representación del módulo de $X(j\omega)$. Calcule el máximo valor del parámetro T que permite la recuperación de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$

c) Suponiendo que $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema LTI definido por la expresión $h(t) = u(t+T) - u(t-T)$, y que la señal $q(t) = \exp(j4\pi t/(3T))$, diseñe el filtro reconstructor paso bajo que permite recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

a) $$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT_s) \overset{DSF}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_s}=\frac{2\pi}{3T}$$

CÁLCULO DE a_k:

Opción 1: $$a_k=\frac{1}{T_s}\int_{T_s} p(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{3T}\int_{-T}^{2T}\left[\delta(t)+\delta(t-T)\right]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{3T}t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$

Opción 2: $$a_k=\frac{1}{T}R(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0=k\frac{2\pi}{3T}}$$

$$R(j\omega)=\mathcal{F}\{\delta(t)+\delta(t-T)\}=1+e^{-j\omega T}$$

$$a_k=\frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$

Tengo que demostrar: $a_k=a_{k+N}$

$$\frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)=\frac{1}{3T}\left(1+e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{3}}\right);$$

$$e^{-jk\frac{2\pi}{3}}=e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\cdot e^{-jN\frac{2\pi}{3}}; \quad e^{-jN\frac{2\pi}{3}}=e^{j2m\pi}, \quad m\in\mathbb{Z}$$

$$-\cancel{j}\frac{2\cancel{\pi}}{3}N=-j\cdot 2m\pi; \quad N=+3m, \; m\in\mathbb{N}$$

$\boxed{N=3}$ es el mínimo de los periodos de los coeficientes.

Otra forma: $a_0 = \frac{2}{3T}$, $a_1 = \frac{1}{3T}\left(1+e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$, $a_2 = \frac{1}{3T}\left(1+e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)$,

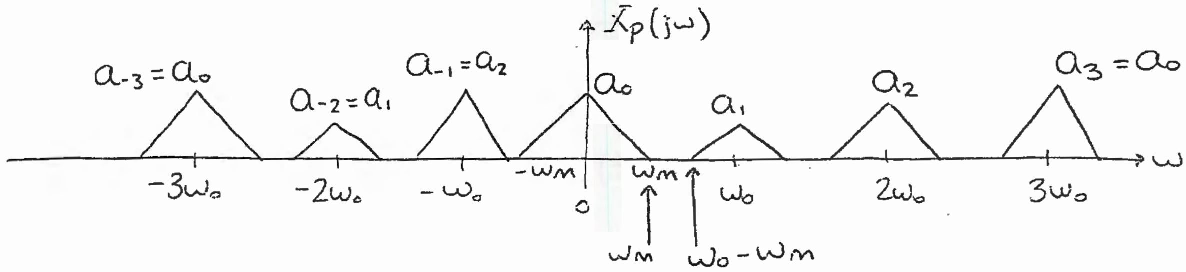
$a_3 = \frac{2}{3T} = a_0$, $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2 \ldots$ $a_k = a_{k+N} \rightarrow N=3$

<u>NOTA</u>: En este caso concreto, los coef. del DSF son periódicos de periodo $N=3$ igual que pasaba con las señales en tiempo discreto periódicas. Esto se debe a que se trata de una señal en tiempo continuo pero compuesta exclusivamente por deltas, lo que ~~la~~ asemeja mucho a una señal en tiempo discreto.

b) $x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3T}t} \xrightarrow{\mathcal{F}} P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{3T}\right)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot X(j\omega) * \cancel{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot X(j(\omega - k\omega_0))$$



Para que no haya solapamiento espectral, se debe cumplir:

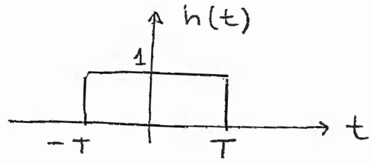
$\omega_0 - \omega_m \geq \omega_m$; $\frac{2\pi}{T_s} - \omega_m \geq \omega_m$; $\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_m$; $\frac{\pi}{3T} \geq \omega_m$;

$T \leq \frac{\pi}{3\omega_m}$ $\boxed{T_{máx} = \frac{\pi}{3\omega_m}}$ $T_{s\,máx} = 3T_{máx} = \frac{\pi}{\omega_m}$

c)

FEB-03
EJ-4

c) $h(t) = u(t+T) - u(t-T)$



No es filtro paso bajo, está en el tiempo!!

$\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}(\omega T)}{\omega}$

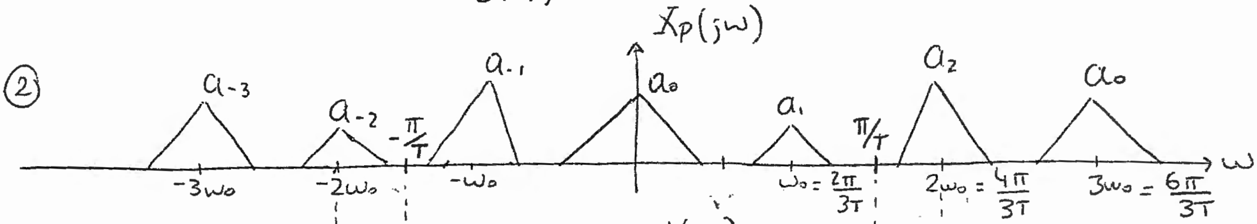
(3) $w(t) = x_p(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(j\omega) = X_p(j\omega)\cdot H(j\omega)$

(4) $z(t) = w(t)\cdot q(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\cdot W(j\omega) * Q(j\omega) =$

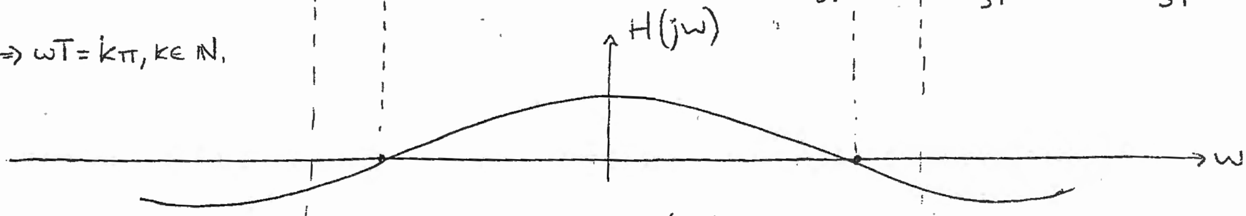
$= \dfrac{1}{2\pi}\cdot W(j\omega) * \mathcal{F}\left\{e^{j\frac{4\pi t}{3T}}\right\} = \dfrac{1}{2\pi}\cdot W(j\omega) * 2\pi\,\delta\left(\omega - \dfrac{4\pi}{3T}\right) =$

$= W\left(j\left(\omega - \dfrac{4\pi}{3T}\right)\right)$

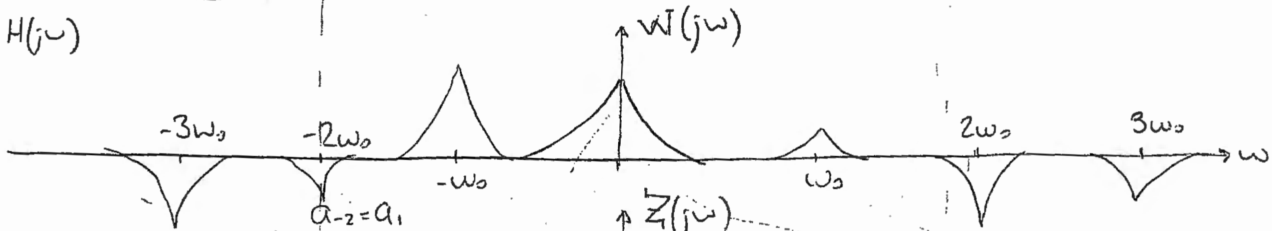
(2)



$\text{sen}(\omega T) = 0 \Leftrightarrow \omega T = k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$
$\omega = k\dfrac{\pi}{T}$

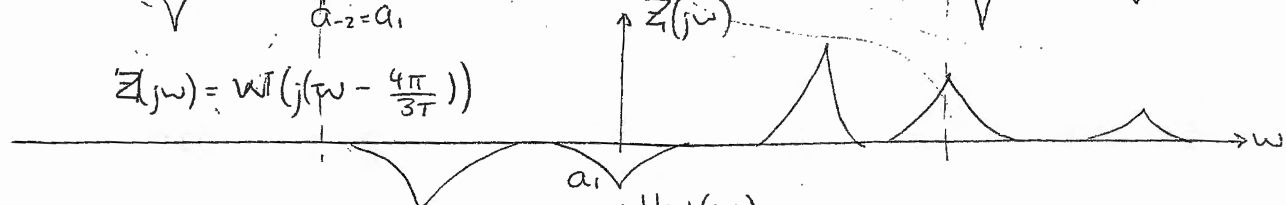


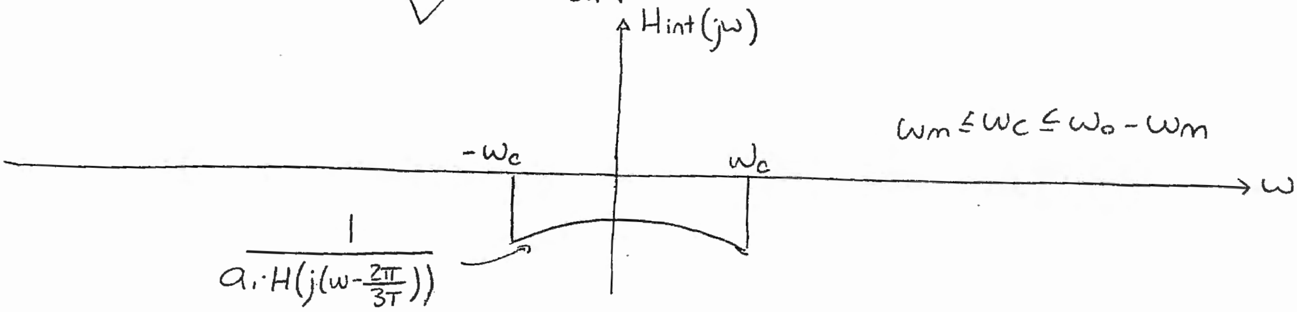
$W(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$
(3)



(4)

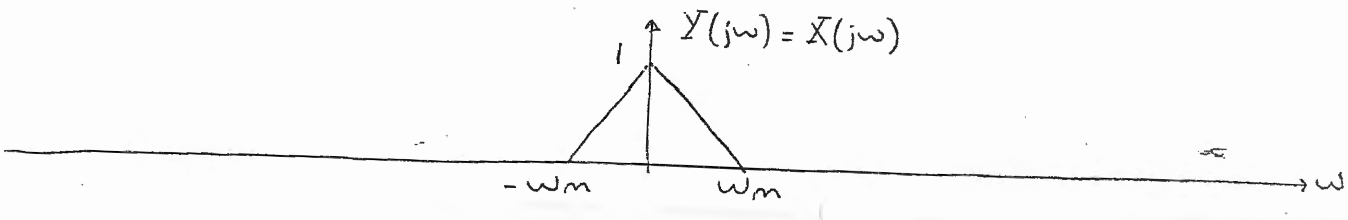
$Z(j\omega) = W\left(j\left(\omega - \dfrac{4\pi}{3T}\right)\right)$





$\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_0 - \omega_m$

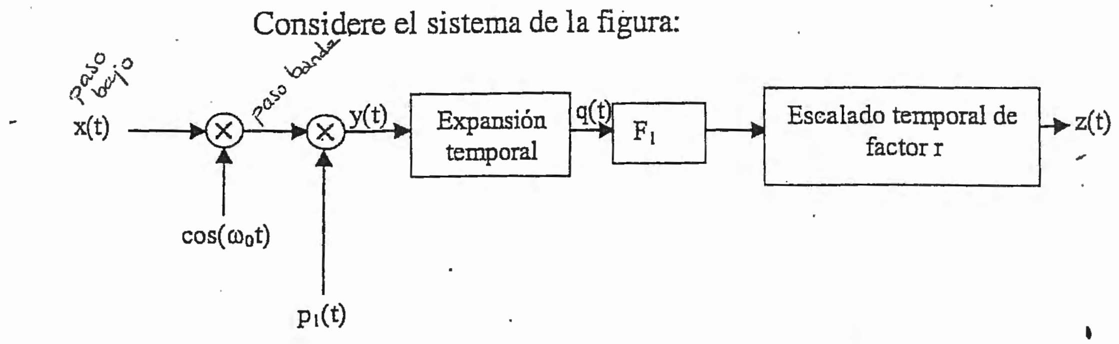
$\dfrac{1}{a_1\cdot H\left(j\left(\omega - \frac{2\pi}{3T}\right)\right)}$



$$- \quad H_{INT}(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1 \cdot H\left(j\left(\omega - \frac{2\pi}{3T}\right)\right)} , & |\omega| < \omega_c \longrightarrow \omega_m \leq \omega_c \leq \omega_0 - \omega_m \\ 0 , & \text{resto} \end{cases}$$

SEPTIEMBRE 2004

4. Considere el sistema de la figura:



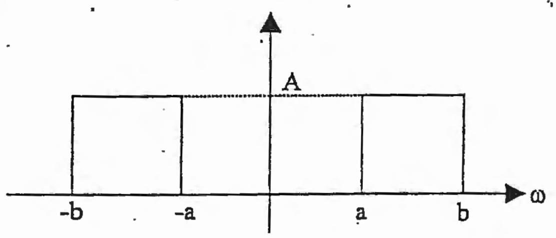
donde: $x(t)$ es una señal paso bajo de banda limitada ($X(j\omega)=0$ cuando $|\omega| > \omega_m>0$). Se cumple:

$$\omega_0=(3/4)\ \omega_s\ ;\quad f_s=1/T_s$$

$$p_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$ MUESTREO IDEAL.

El bloque de expansión temporal realiza la siguiente operación: $q(t)=y(t/2)$, y el bloque de escalado temporal realiza un escalado del eje de tiempos con un factor r.

El bloque F_1 es un filtro paso banda ideal cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura siguiente:



Se pide:

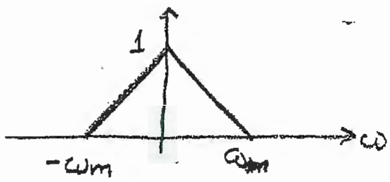
(a) Dibuje el espectro de la señal $y(t)$. ¿Cuál es el valor mínimo de ω_s para el que se puede recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$?

(b) Demuestre la siguiente igualdad: $\delta(t/2)=2\delta(t)$ (Utilice esta igualdad en el resto del ejercicio).

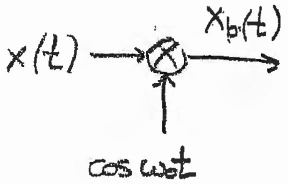
(c) Con el bloque de expansión temporal, el filtro paso banda ideal, y el bloque de escalado temporal se pretende recuperar la señal modulada $x(t)\cos(\omega_0 t)$. Determine lo siguiente para que pueda obtenerse dicho objetivo:

- Dibuje el espectro de la señal $q(t)$ (salida del bloque de expansión temporal)
- ¿Cuales deben ser los parámetros del filtro F_1: A, a, b?
- ¿Cuál debe ser el valor del parámetro de escalado temporal r?

a) $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$

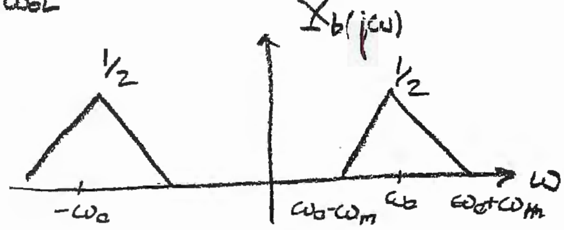


<u>Primero</u>: convertimos en paso banda

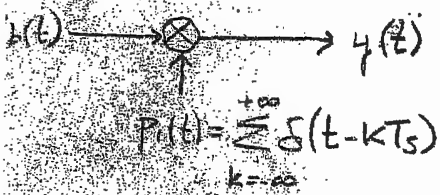


$$x_b(t)=x(t)\cdot\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_b(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\omega_0))+X(j(\omega+\omega_0))\right]$$



<u>Segundo</u>: muestreamos la señal paso banda.



$$y(t)=x_b(t)\,p_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_b(j\omega) * P_1(j\omega)}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X_b(j\omega) * \frac{\cancel{2\pi}}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\Big(\omega-k\underbrace{\tfrac{2\pi}{T_s}}_{\omega_s}\Big)=$$

$\boxed{\omega_0=\frac{3}{4}\omega_s}$ DATO!

$\Downarrow$

$\boxed{\omega_s=\frac{4}{3}\omega_0}$

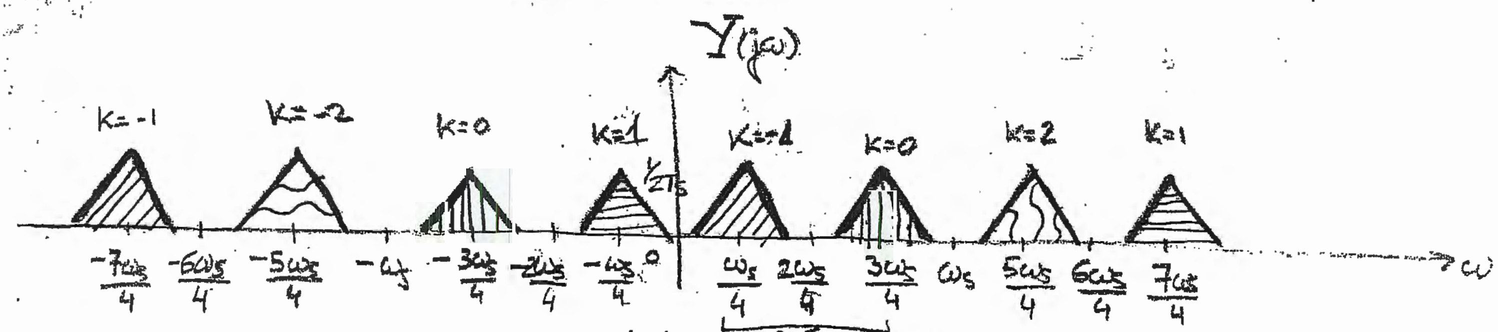
$$=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_b(j(\omega-k\omega_s))=\frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[X(j(\omega-\omega_0-k\omega_s))+\right.$$

$$\left.+X(j(\omega+\omega_0-k\omega_s))\right]$$

$\omega_0=\frac{3}{4}\omega_s$

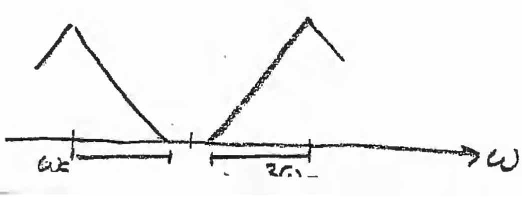
$X_b(j\omega)=\dots$

$$=\frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[X\left(j\left(\omega-\left(\tfrac{3}{4}+k\right)\omega_s\right)\right)+X\left(j\left(\omega+\left(\tfrac{3}{4}-k\right)\omega_s\right)\right)\right]$$



Para poder recuperar $x(t)$ no debe haber solapamiento

ZOOM



$$\frac{3\omega_s}{4}-\omega_m \geq \frac{\omega_s}{4}+\omega_m \rightarrow \frac{2\omega_s}{4} \geq 2\omega_m \rightarrow$$

$\boxed{\omega_s \geq 4\omega_m}$

b) Explicar lo que significa intuitivamente

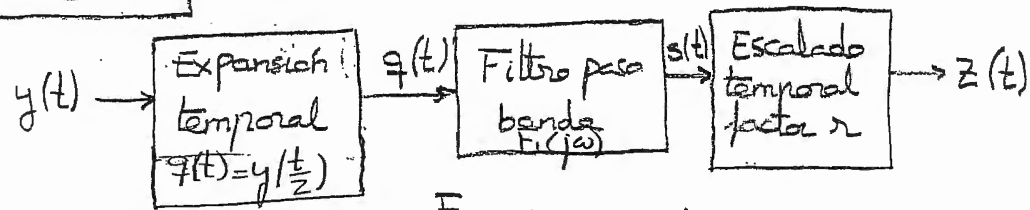
Partimos de: $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \delta(t)\,dt = \left[\begin{array}{l}\text{Cambio de variable:}\\ t=\frac{\tau}{2} \rightarrow dt=\frac{d\tau}{2}\\ t=-\infty \rightarrow \tau=2(-\infty)=-\infty\\ t=+\infty \rightarrow \tau=2(+\infty)=+\infty\end{array}\right] = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \delta\left(\frac{\tau}{2}\right)\frac{1}{2}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\delta\left(\frac{t}{2}\right)dt = 1$

τ variable muda $\tau \leftrightarrow t$

Así que:

$$\boxed{\delta(t)=\frac{1}{2}\delta\left(\frac{t}{2}\right)}$$

c)

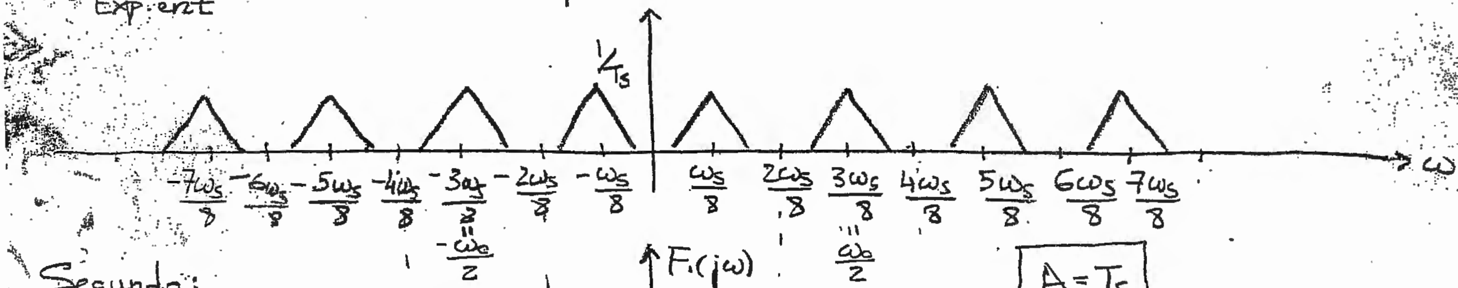


Escalado temporal: $x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

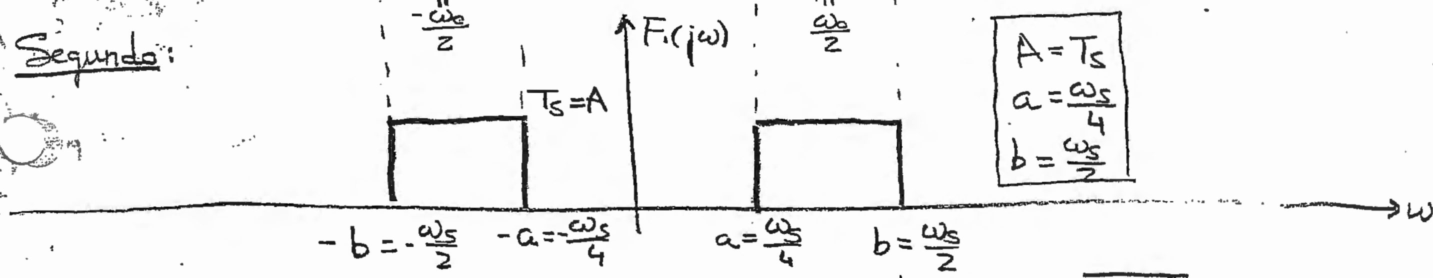
Primero:

$q(t)=y\left(\frac{1}{2}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} Q(j\omega)=2Y(j2\omega)$

Exp. ent — Comp. en ω

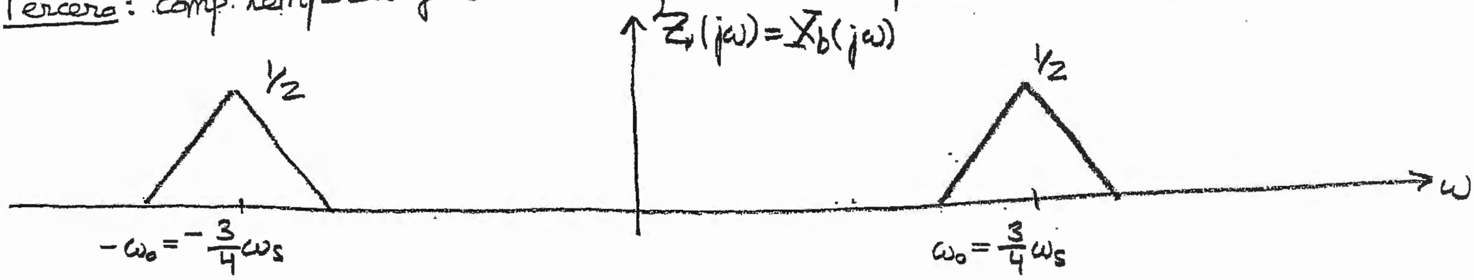


Segundo:



$$\boxed{\begin{array}{l}A=T_s\\ a=\frac{\omega_s}{4}\\ b=\frac{\omega_s}{2}\end{array}}$$

Tercero: comp. temporal factor 2 $\leftrightarrow$ expansión en ω factor 2 $\boxed{r=2}$



$z(t)=s(2t) \longleftrightarrow Z_1(j\omega)=\frac{1}{2}S\left(j\frac{\omega}{2}\right)$

Así que: $\boxed{z(t)=x_b(t)=x(t)\cos\omega_0 t}$

SEPTIEMBRE 2007

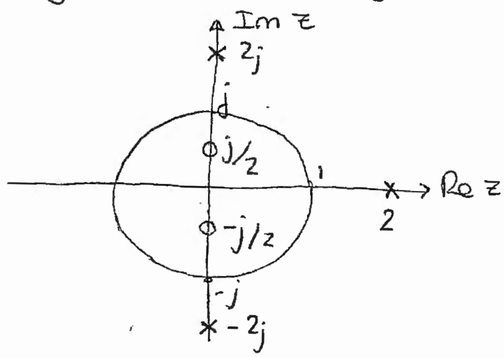
Ejercicio 3

→ Región de conv. hacia afuera.

Considere un sistema de tiempo discreto lineal, invariante y causal descrito por los polos $(z_{p1} = 2, z_{p2} = j2, z_{p3} = -j2)$, los ceros $(z_{c1} = j/2, z_{c2} = -j/2)$ y la unidad como constante multiplicativa de la función de transferencia:

a) Calcule la función de transferencia del sistema.
b) ¿Es estable el filtro) ¿Y su inverso? Razone la respuesta.
c) Calcule la respuesta al impulso del sistema. ⟶ CAUSAL ⟶ $h_2[n]$

a) Diagrama de ceros y polos



OPCIÓN 1: Sabiendo donde están los ceros y los polos:

$$H(z) = k \cdot \frac{(1 - z_{c1} \cdot z^{-1})(1 - z_{c2} \cdot z^{-1})}{(1 - \boxed{z_{p1}}z^{-1})(1 - \boxed{z_{p2}}z^{-1})(1 - \boxed{z_{p3}}z^{-1})}$$

$k = 1$

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{j}{2} z^{-1})\ (1 + \frac{j}{2} \cdot z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})(1 - 2j \cdot z^{-1})(1 + 2j \cdot z^{-1})}$$

OPCIÓN 2: $H(z) = k \cdot \frac{(z - z_{c1})\ (z - z_{c2})}{(z - \boxed{z_{p1}})(z - \boxed{z_{p2}})(z - \boxed{z_{p3}})}$; Busco $\frac{1}{1 - az^{-1}}$

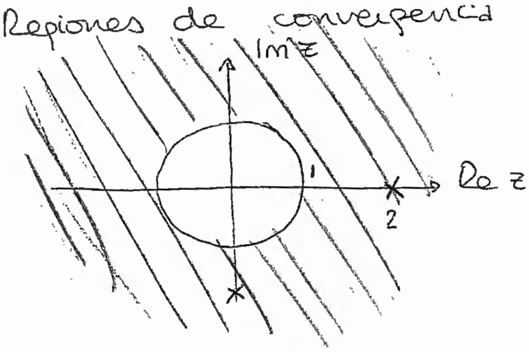
$$\boxed{H(z) = \frac{(z - \frac{j}{2})\ (z + \frac{j}{2})}{(z-2)(z-2j)(z+2j)}} = \frac{(z - \frac{j}{2})\, z^{-1}(z + \frac{j}{2})\, z^{-1}}{(z-2)\, z^{-1}(z - 2j)\, z^{-1}(z + j2)\, z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1}}{z^{-1} \cdot z^{-1}}$$

$$= \boxed{\frac{(1 - \frac{j}{2} z^{-1})\ (1 + \frac{j}{2} z^{-1})\ z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 2j \cdot z^{-1})(1 + 2j \cdot z^{-1})}}$$

ESTÁN BIEN LAS DOS OPCIONES

F. transf. del sistema.

b) Regiones de convergencia



⟷ $h_1[n]$ ANTICAUSAL
ESTABLE
$\exists\ H_1(e^{j\omega}) = H(z)|_{z = e^{j\omega}}$

$H(z)$, ROC 1 ⟷ $h_2[n]$ CAUSAL NO ESTABLE $\nexists\ H_2(e^{j\omega})$

En el enunciado me hablan de ésta.

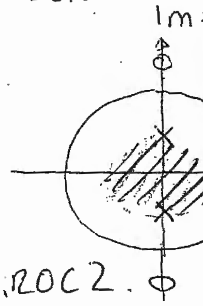
Sistema inverso de $h_2[n]$

$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$

ROC_I: aquella con intersección no nula con la ROC del sistema original (ROC 2).

$$H_I(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-2j\cdot z^{-1})(1+2j\cdot z^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}$$

Diagrama de polos y ceros del sist. inverso



ROC 1 ~~$|z|<\frac{1}{2}$~~

$|z|>\frac{1}{2}$ Esta es la que tiene intersección no nula con $H(z)$, ROC 2.

$\boxed{\text{ESTABLE!!}}$

c) $$H(z) = \frac{z^{-1}(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})} = \dots =$$

→ Para descomponer en fracciones es necesario que el grado del num sea menor q el del denor

$$= \frac{\frac{1}{4}z^{-3}+z^{-1}}{-8z^{-3}+4z^{-2}-2z^{-1}+1} = \circledast$$

↳ divido polinomios

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{4}z^{-3} + \qquad + z^{-1} & -8z^{-3}+4z^{-2}-2z^{-1}+1 \\ -\ \frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ \hline \quad \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{15}{16}z^{-1} + \frac{1}{32} & \end{array}$$

$$\circledast = -\frac{1}{32} + \frac{\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{32}}{-8z^{-3}+4z^{-2}-2z^{-1}+1} = -\frac{1}{32} + \frac{\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{32}}{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})}$$

$$= -\frac{1}{32} + \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-2jz^{-1}} + \frac{C}{1+2jz^{-1}}$$

$$A = H_1(z)\cdot(1-2z^{-1})\Big|_{z=2} = \dots = \frac{17}{64}$$

$$B = H_1(z)(1-2jz^{-1})\Big|_{z=2j} = \dots = -\frac{15}{64(1-j)}$$

$$C = H_1(z)(1+2jz^{-1})\Big|_{z=-2j} = \dots = \frac{-15}{64(1+j)}$$

Asi que:

$$h_2[n] = -\frac{1}{32}\, Z^{-1}\{1\} + A\cdot Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\} + BZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-2jz^{-1}}\right\} + CZ^{-1}\left\{\frac{1}{1+2jz^{-1}}\right\}$$

~~$|z|<2$~~ $|z|>2$ ~~$|z|<2$~~ $|z|>2$ ~~$|z|<2$~~ $|z|>2$

$$= -\frac{1}{32}\cdot\delta[n] + A\cdot 2^n\cdot u[n] + B\cdot(2j)^n\cdot u[n] + C\cdot(-2j)^n\cdot u[n] =$$

$$= -\frac{1}{32}\cdot\delta[n] + u[n]\cdot\left(A\cdot 2^n + B(2j)^n + C(-2j)^n\right)$$

FEBRERO 2008

Ejercicio 1

Sea una señal $x[n]$ arbitraria que se expresa como una combinación lineal de otra función $g[n]$ y de sus versiones desplazadas:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g[n-k]$$

donde c_k son los coeficientes. Dicha señal atraviesa un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ -1 & n>0\end{cases}$$

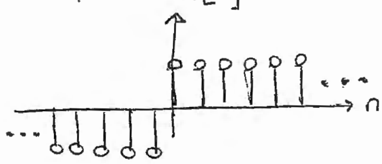
obteniéndose una señal a su salida denotada como $y[n]$.

a) Suponiendo que $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, calcule la secuencia que representa a los coeficientes $c[n]=c_n$ en función de $x[n]$, asumiendo ésta conocida. Resuélvalo en el dominio de la frecuencia.

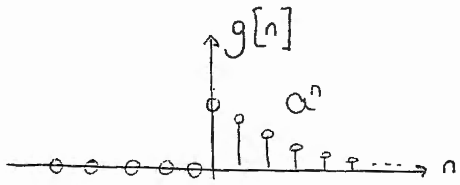
b) Calcule la respuesta del sistema, que denominaremos $d[n]$, a la señal $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, operando exclusivamente en el dominio del tiempo. Halle la respuesta $y[n]$ a la entrada $x[n]$ en función de $c[n]$ y $d[n]$, supuestas conocidas.

c) Suponiendo que $g[n]=e^{j\omega_0 n}$ siendo ω_0 un parámetro real arbitrario, calcule la expresión de la salida $y[n]$ expresada en función de $C(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$, asumiendo que son conocidas.

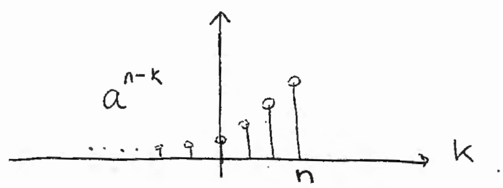
$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, g[n-k] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]$$

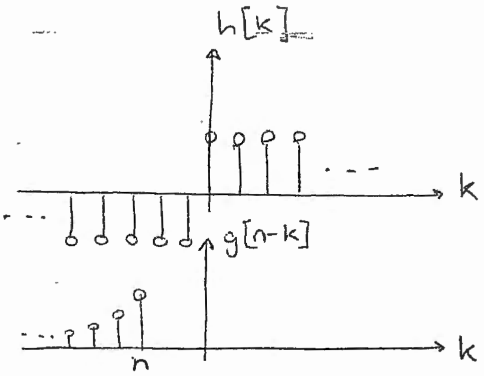


b) $$g[n]=a^n\cdot u[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow d[n]=g[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{g[k]}_{\text{fija}}\cdot \underbrace{h[n-k]}_{\text{móvil}} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]}_{\text{fija}}\, \underbrace{g[n-k]}_{\text{móvil}}}$$



$$g[n-k]=g[-(k-n)]$$ → Reflejar → Despl.





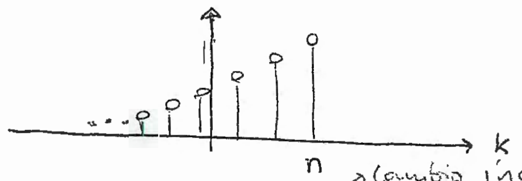
$\boxed{\text{Caso } n<0}$ $d[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,g[n-k]=$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}(-1)\cdot a^{n-k}=-\sum_{k=-\infty}^{n}a^{n}\cdot a^{-k}=$$

$$=-a^{n}\cdot\sum_{k=-\infty}^{n}a^{-k}=\left[\begin{array}{l}\text{cambio de índice}\\ m=-k;\quad k=-m\\ k=-\infty\longrightarrow m=\infty\\ k=n\longrightarrow m=-n\end{array}\right]=$$

$$=-a^{n}\cdot\sum_{m=\infty}^{-n}a^{m}=-a^{n}\cdot\sum_{m=-n}^{\infty}a^{m}=\quad\rightarrow\sum_{m=n_1}^{n_2}z^{m}=\frac{z^{n_1}(1-z^{n_2+1})}{1-z}$$

$$=\cancel{-a^{n}}\cdot\frac{\cancel{a^{-n}}(1-\overset{\to 0}{a^{\infty+1}})}{1-a}=\frac{1}{a-1}$$



$\boxed{\text{Caso } n\geq 0}$ $d[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,g[n-k]=$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)\cdot a^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}1\cdot a^{n-k}=$$

cambio índice $(m=-k)$

$$=-\sum_{k=\infty}^{-1}a^{n}\cdot a^{-k}+\sum_{k=0}^{n}a^{n}\cdot a^{-k}=-a^{n}\cdot\sum_{m=\infty}^{1}a^{m}+a^{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}=$$

$$=a^{n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}-\sum_{m=1}^{\infty}a^{m}\right]=a^{n}\cdot\left[\frac{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^{0}}^{\,1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{a}}-\frac{a}{1-a}\right]=$$

$$=\dots=\frac{2a^{n+1}-1}{a-1}$$

Así que:

$$d[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{a-1}, & n<0\\[2mm] \dfrac{2a^{n+1}-1}{a-1}, & n\geq 0\end{cases}=\frac{1}{a-1}u[-n-1]+\frac{2a^{n+1}-1}{a-1}u[n$$

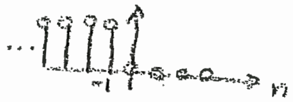
$$y[n]=x[n]*h[n];\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot g[n-k]*h[n]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot g[n]*\delta[n-k]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot\overbrace{\boxed{g[n]*h[n]}}^{d[n]}*\delta[n-k]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot d[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c[k]\cdot d[n-k]=c[n]*d[n]$$

$$\boxed{y[n]=c[n]*d[n]}$$

En resumen:



$$d[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1}, & n<0 \\ \dfrac{2a^{n+1}-1}{a-1}, & n\geq 0 \end{cases} = \frac{1}{a-1}u[-n-1] + \frac{2a^{n+1}-1}{a-1}u[n]$$

Ahora calculamos $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k] * h[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n] * \delta[n-k] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta[n-k] * \underbrace{g[n] * h[n]}_{d[n]} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, d[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k]\, d[n-k] = c[n] * d[n]$$

a) $g[n] = a^n u[n], \quad 0<a<1$

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k]$

Calcular $c[n] = c_n$ en función de $x[n]$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$

Opción 1

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \mathcal{F}\{g[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, G(e^{j\omega})e^{-j\omega k} =$$

k índice mudo

$C(e^{j\omega})$

$$= G(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-j\omega k} = G(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-j\omega n} = G(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n] e^{-j\omega n}$$

Así que: $C(e^{j\omega}) = \dfrac{X(e^{j\omega})}{G(e^{j\omega})} \longrightarrow C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})$

$$g[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - ae^{-j\omega}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{c[n] = x[n] - a\,x[n-1]}$$

Opción 2

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k]\, g[n-k] = c[n] * g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega})G(e^{j\omega})$$

$C(e^{j\omega}) = \dfrac{X(e^{j\omega})}{\ldots}$ (igual que en opción 1)

c) $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]$

Ahora $g[n]=e^{j\omega_0 n}$. Calcular $y[n]$ en función de $C(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$

$$y[n]=x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, g[n-k]*h[n] = \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k]\, g[n-k]}^{c[n]*g[n]}*h[n] =$$

$$= c[n]*g[n]*h[n] \Rightarrow y[n]=c[n]*h[n]*g[n]$$

$$\updownarrow \mathcal{F} \qquad e^{-j\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

$$Y(e^{j\omega})=C(e^{j\omega})H(e^{j\omega})G(e^{j\omega}) =$$

$$= C(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\, 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-(\omega_0+2\pi k)) = \qquad \text{Periodicidad } 2\pi$$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(e^{j(\omega_0+2\pi k)})H(e^{j(\omega_0+2\pi k)})\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) =$$

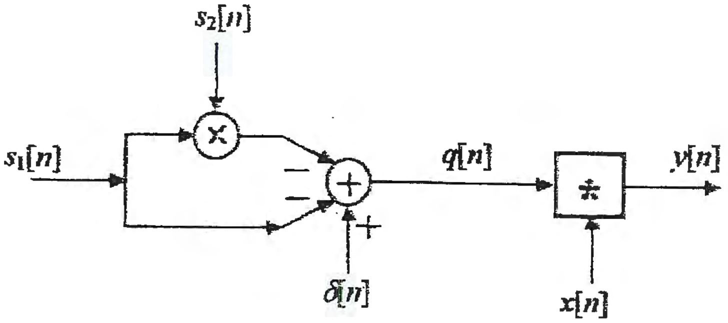
$$= C(e^{j\omega_0})H(e^{j\omega_0})\, 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) \qquad e^{-j\omega_0 n}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\sum\ldots$$

$$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$\boxed{y[n]=\mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}} = \mathcal{F}^{-1}\left\{C(e^{j\omega_0})H(e^{j\omega_0})\, 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)\right\} =$$

$$= \boxed{C(e^{j\omega_0})H(e^{j\omega_0})\, e^{-j\omega_0 n}}$$

3. Sea el siguiente sistema en tiempo discreto:



Donde el asterisco (*) representa la operación de convolución. Dadas las señales:

$$s_1[n] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$$
$$s_2[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(a) Obtenga $Q(e^{j\omega})$ y represéntela gráficamente.

(b) Calcule $y[n]$ si $x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

(c) Calcule $y[n]$ si $x[n] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

a) $q[n] = \delta[n] - s_1[n] - s_1[n]\cdot s_2[n]$

$$Q(e^{j\omega}) = \underbrace{\mathcal{F}\{\delta[n]\}}_{①} - \underbrace{\mathcal{F}\{s_1[n]\}}_{②} - \underbrace{\mathcal{F}\{s_1[n]\cdot s_2[n]\}}_{③}$$

① $\mathcal{F}\{\delta[n]\} = 1$

② $\mathcal{F}\{s_1[n]\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}\right\} = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{6} \\ 0, & \frac{\pi}{6} < |\omega| \le \pi \end{cases} = S_1(e^{j\omega})$

periódica de periodo 2π

¡OJO!

③ $\mathcal{F}\{s_1[n]\cdot s_2[n]\} = \frac{1}{2\pi} S_1(e^{j\omega}) \circledast S_2(e^{j\omega})$

Calculo primero $S_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\} =$

$= 2\pi\left[\delta(\omega - \pi/2) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ periódica 2π.

$= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)\right]$

Convolución circular:

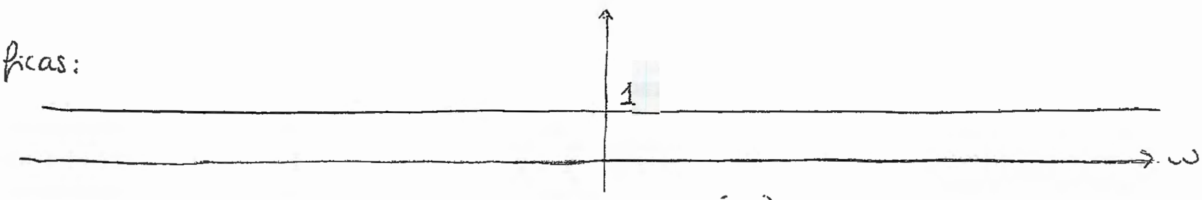
- Opción 1: $\frac{1}{2\pi} S_{1p}(e^{j\omega}) * S_2(e^{j\omega})$ → 1 periodo de $S_1(e^{j\omega})$
- Opción 2: $\frac{1}{2\pi} S_1(e^{j\omega}) * S_{2p}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} S_1(e^{j\omega}) * 2\pi\left[\delta(\omega-\frac{\pi}{2}) + \delta(\omega+\frac{\pi}{2})\right] =$ → 1 periodo de $S_2(e^{j\omega})$

$$= S_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}) + S_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})$$

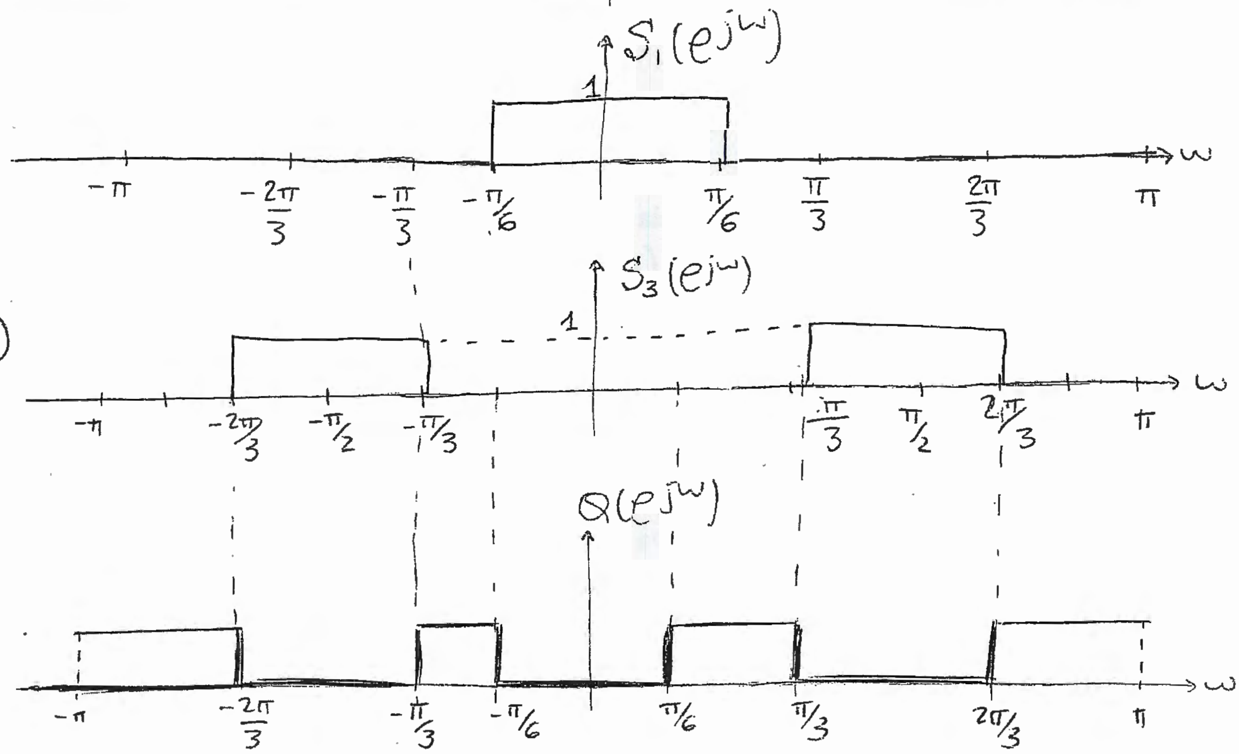
- Opción 3: $\frac{1}{2\pi} S_1(e^{j\omega}) \circledast S_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{3p}(e^{j(\omega-2k\pi)})$

$$S_{3p} = S_{1p}(e^{j\omega}) * S_{2p}(e^{j\omega})$$

Gráficas:

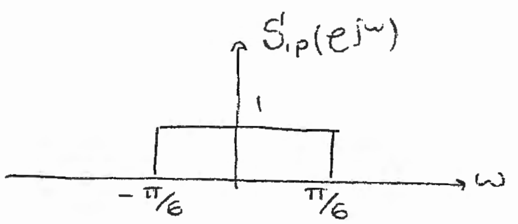
①


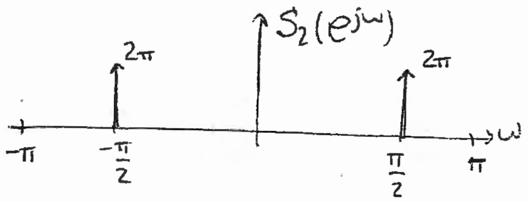
②

③


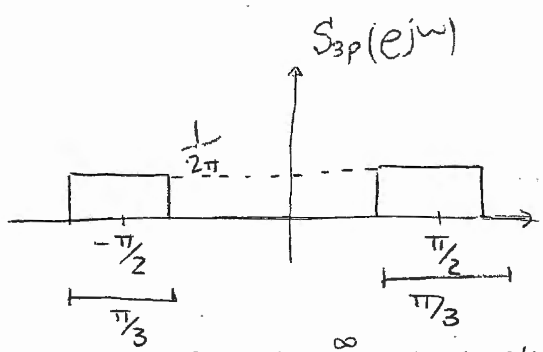
PREVIO!!

Pintamos $S_{1p}(e^{j\omega})$ y $S_{2p}(e^{j\omega})$





$*$



El término ③ $= \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{la amplitud se divide}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{S_{3p}(e^{j(\omega-k2\pi)})}_{\text{periódica}}$

Así que: $Q(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \pi/6 \leq |\omega| \leq \pi/3 \quad \text{y} \quad \pi/3 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{si} \quad |\omega| < \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \pi/3 < |\omega| < 2\pi/3 \end{cases}$

periódica 2π

b) $y[n] = q[n] * x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$

$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\} +$

$+ \mathcal{F}\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\} = 2\pi\delta(\omega) + \pi\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4})\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) - \delta(\omega + \frac{\pi}{2})\right]$

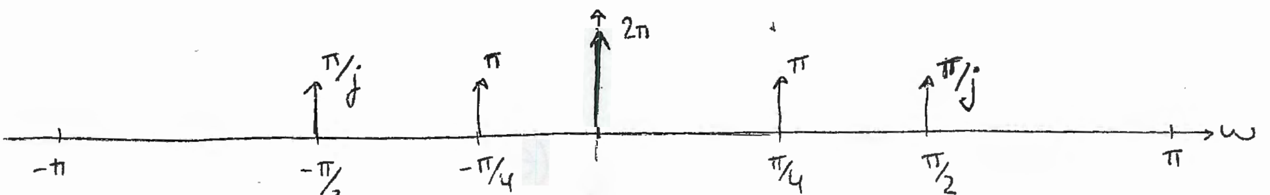
$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4})\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) - \delta(\omega + \frac{\pi}{2})\right]$$

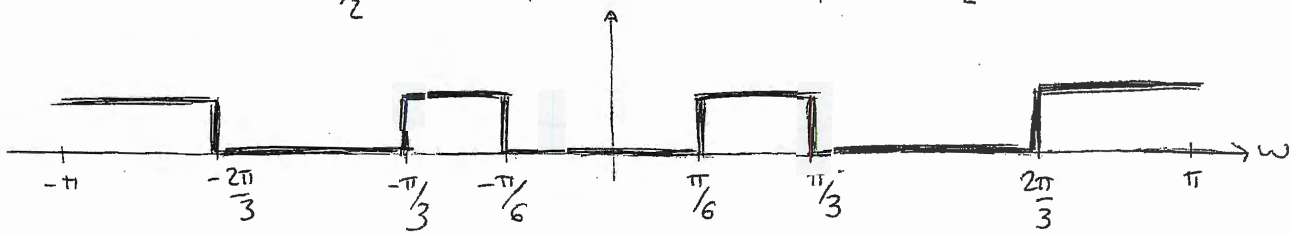
periódico de periodo 2π.

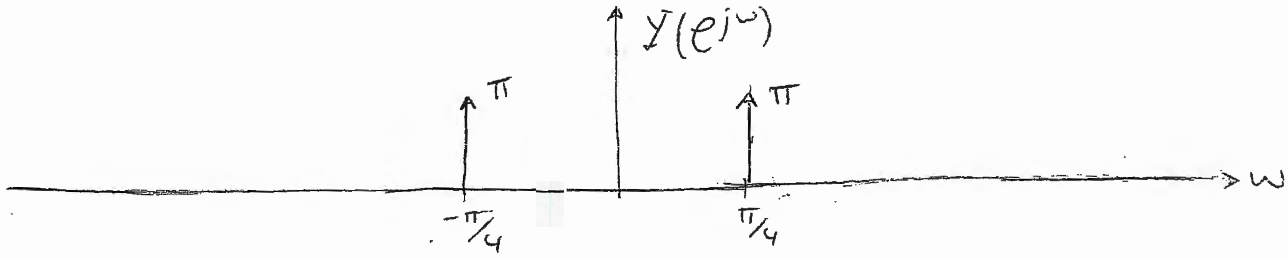
Con tablas:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k)\right] +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) - \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) - 2\pi k)\right]$$







Así que: $Y(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta(\omega + \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4})\right]$, $|\omega| < \pi$ periódica 2π

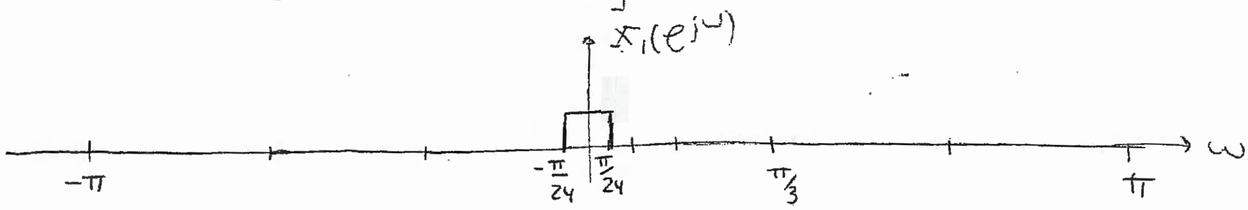
ó tb: $Y(e^{j\omega}) = \pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega + \frac{\pi}{4} - 2k\pi) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4} - 2k\pi)\right]$

$$\boxed{y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}$$

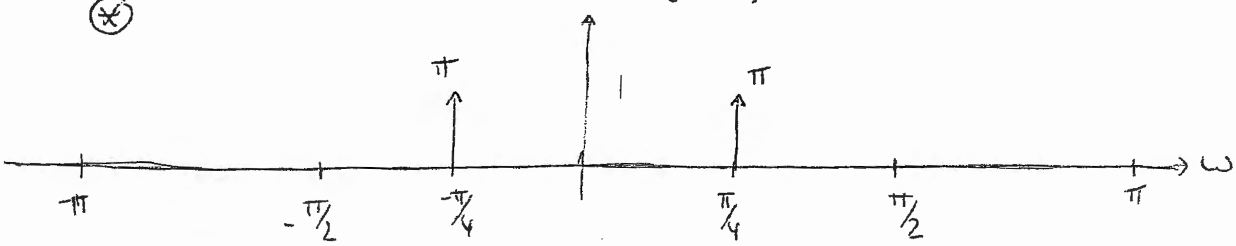
c) $x[n] = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}n\right)}{\pi n}}_{x_1[n]} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_2[n]} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega})$

$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{24} \\ 0, & \frac{\pi}{24} < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \text{periódica } 2\pi$$

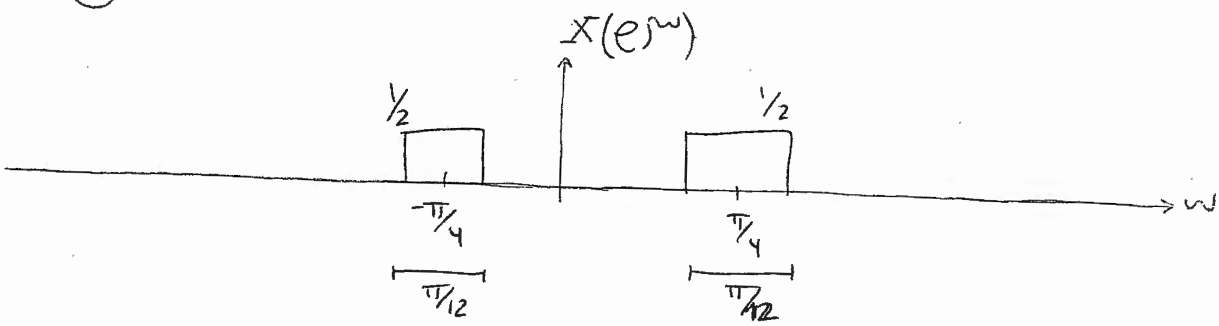
$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right], \ |\omega| < \pi \quad \text{periódica } 2\pi.$$



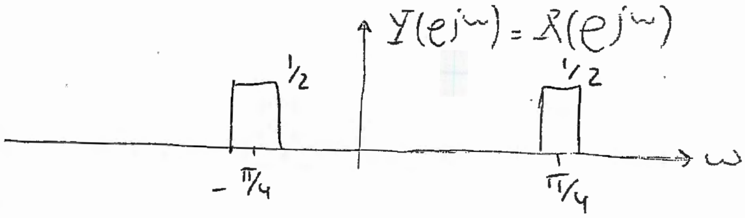
$\circledast$



$=$



$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot Q(e^{j\omega})$ (Multiplico por las gráficas)



$\boxed{y[n] = x[n]}$

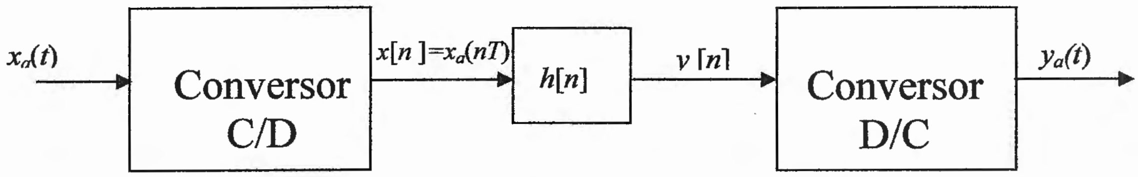
FEBRERO 2007

4. Considere el diagrama de la figura, donde $x_a(t) = 1 + \cos(8\pi \cdot 10^3 \cdot t + \pi/4)$, el periodo de muestreo $T = 10^{-4}\,seg.$ (0.1 milisegundos). El filtro estable de respuesta al impulso $h[n]$, está caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

El conversor D/C está caracterizado por la siguiente relación:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \exp(-|t - nT|/T)$$



Se pide:

a) Calcule la transformación de Fourier de las señales $x_a(t)$ y $x[n]$ y represente sus módulos. Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $x[n]$, y cómo lo podría realizar.

b) Determine la transformada de Fourier de la secuencia $y[n]$.

c) Calcule la transformada de Fourier de la señal de salida $y_a(t)$.

d) Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $y_a(t)$, y dibuje el diagrama de bloques del sistema que realiza dicha operación.

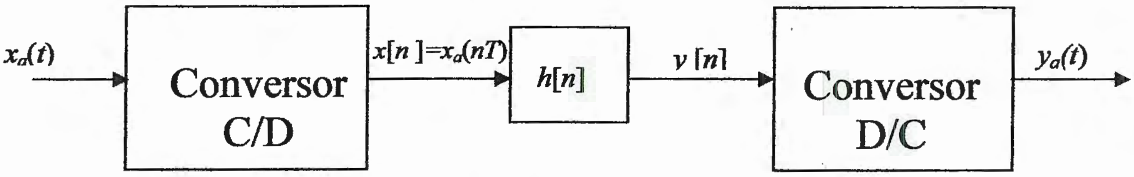
FEBRERO 2007

4. Considere el diagrama de la figura, donde $x_a(t) = 1 + \cos(8\pi \cdot 10^3 \cdot t + \pi/4)$, el periodo de muestreo $T = 10^{-4}\,seg.$ (0.1 milisegundos). El filtro estable de respuesta al impulso $h[n]$, está caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

El conversor D/C está caracterizado por la siguiente relación:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \exp(-|t - nT|/T)$$



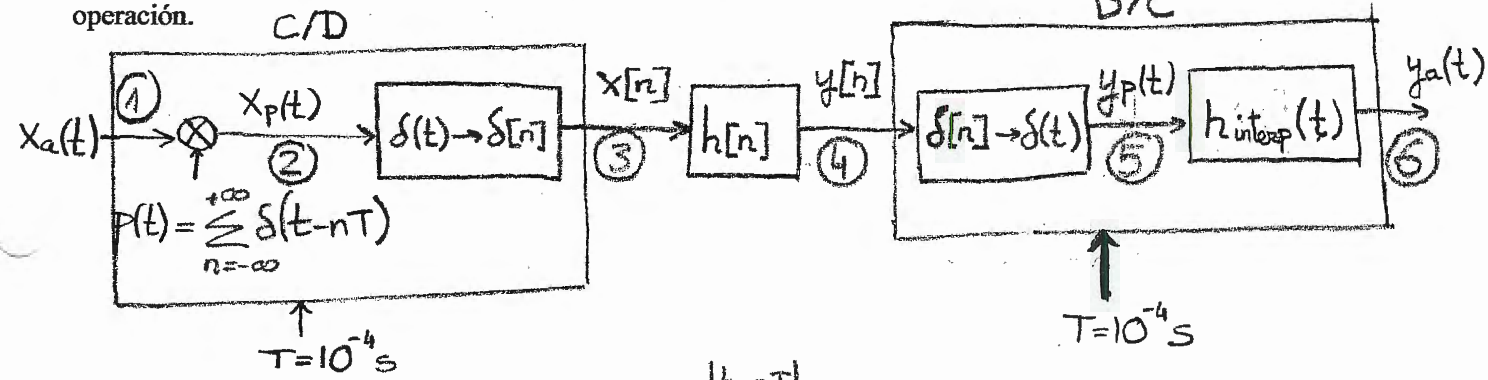
Se pide:

a) Calcule la transformación de Fourier de las señales $x_a(t)$ y $x[n]$ y represente sus módulos. Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $x[n]$, y cómo lo podría realizar.

b) Determine la transformada de Fourier de la secuencia $y[n]$.

c) Calcule la transformada de Fourier de la señal de salida $y_a(t)$.

d) Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $y_a(t)$, y dibuje el diagrama de bloques del sistema que realiza dicha operación.



Sabemos que: $y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, e^{-\frac{|t-nT|}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, h_{interp}(t-nT)$

así que se deduce que: $h_{interp}(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$

Antes de empezar, vamos a calcular también $H(e^{j\Omega})$, porque luego hará falta:

Así que: $\boxed{Y_a(j\omega) = Y(e^{j\omega T})\dfrac{2T}{1+(\omega T)^2}}$

d) Como se cumple la condición de Nyquist, no se ha producido solapamiento espectral al muestrear, por tanto $x_a(t)$ será recuperable a partir de $y_a(t)$ si compensamos el efecto de los distintos filtros de la cadena: $H(e^{j\omega T})$ y $H_{interp}(j\omega)$. Para ello tomaremos sus inversos en la banda $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$

Lo vemos:

$$Y_a(j\omega) = Y(e^{j\omega T})\, H_{interp}(j\omega) = X(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega) =$$

$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$ $\qquad$ $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}X_a(j\frac{\Omega}{T})$

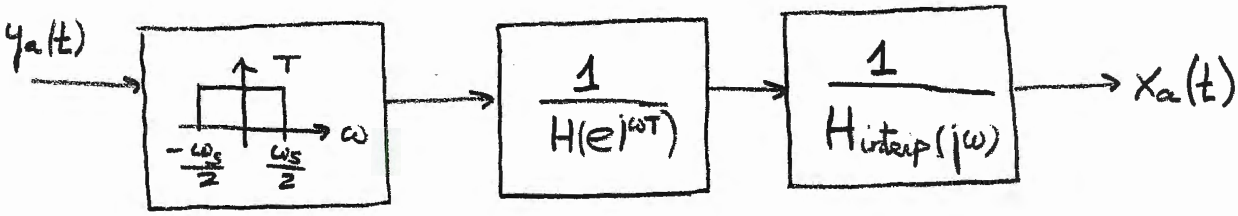
$-\pi < \Omega < \pi$, Periódico 2π

$$= \frac{1}{T}X_a(j\omega)H(e^{j\omega T})\,H_{interp}(j\omega) = X_a(j\omega)\,\frac{1}{T}H(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega)$$

$-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$

Periódico ω_s $\qquad$ Periódico ω_s

Así que el esquema para recuperar $X_a(j\omega)$ a partir de $Y_a(j\omega)$ será:



Filtro paso bajo con altura T

Nota: el orden de las cajas es indiferente.

De la ecuación en diferencias:

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{2}Y(e^{j\Omega})e^{-j\Omega}+X(e^{j\Omega})$$

$$H(e^{j\Omega})=\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

a) ① $x_a(t)=1+\cos\left(8\pi\cdot10^3t+\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{e^{j(8\pi\cdot10^3t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(8\pi\cdot10^3t+\frac{\pi}{4})}}{2}=$

$$=1+\frac{1}{2}e^{j8\pi\cdot10^3t}e^{j\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j8\pi\cdot10^3t}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$\boxed{X_a(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-8\pi\cdot10^3)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+8\pi\cdot10^3)}$$, No periódico

② $X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\left(\omega-k\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s}\right)\right)$. Nota: espectro periódico ω_s

$\omega=\frac{\Omega}{T}$

③ $X(e^{j\Omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\left(\frac{\Omega}{T}-k\frac{2\pi}{T}\right)\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi)\right)$

Nota: espectro periódico 2π

Así que en este caso particular:

$$\boxed{X(e^{j\Omega})}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2\pi\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi)\right)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi)-8\pi\cdot10^3\right)+\right.$$

$$\left.+\pi\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi)+8\pi\cdot10^3\right)\right]=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2\pi\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi)\right)+\right.$$

$$\left.+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi-8\pi\cdot10^3T)\right)+\pi\delta\left(\frac{1}{T}(\Omega-k2\pi+8\pi\cdot10^3T)\right)\right]=$$

$\delta\left(\frac{t}{T}\right)=T\delta(t)$

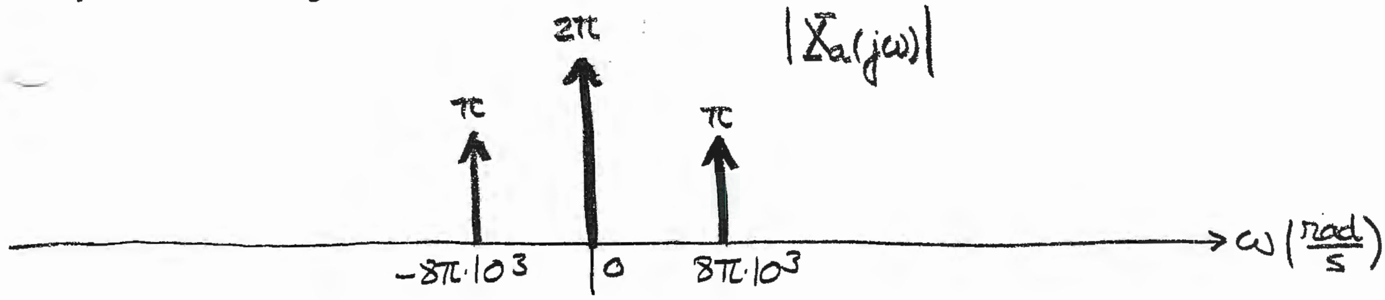
$$=\frac{1}{\cancel{T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[2\pi\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi-8\pi\cdot10^3T)+\right.$$

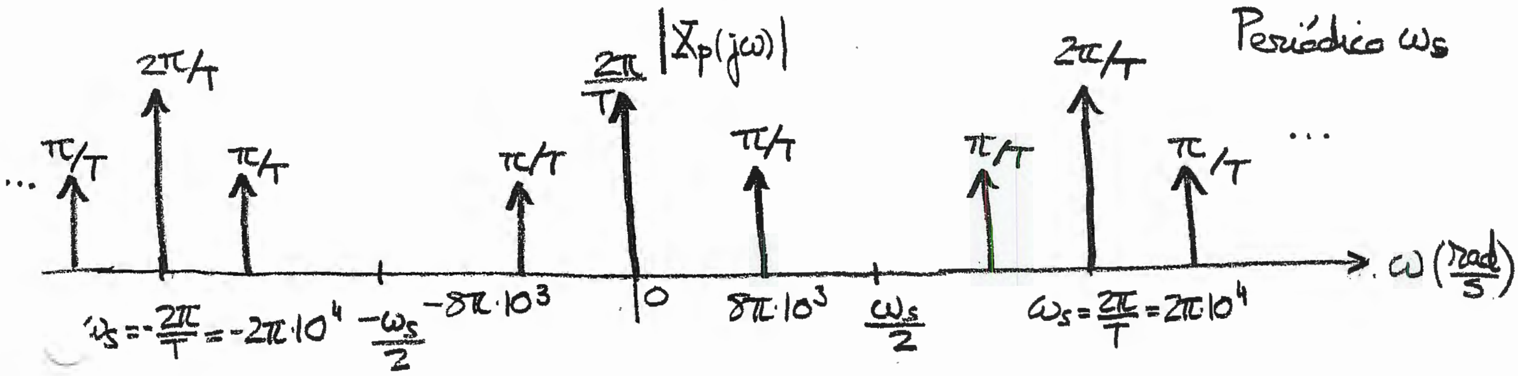
$$\left.+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi+8\pi\cdot10^3)\right]=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2\delta(\Omega-k2\pi)+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-0{,}8\pi-k2\pi)+\right.$$

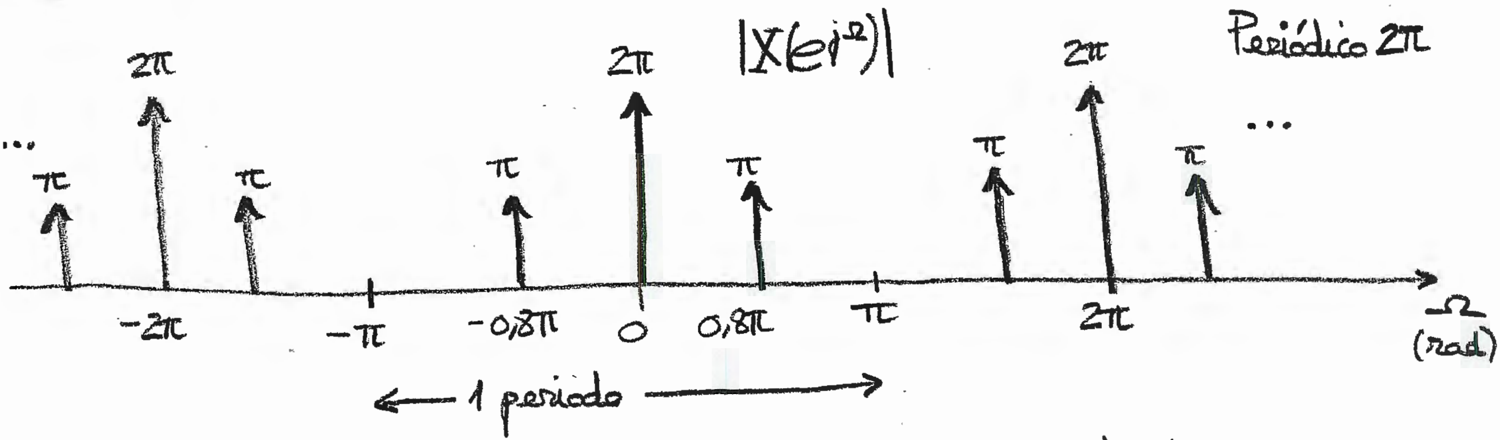
$T=10^{-4}s$

$$\left.+e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega+0{,}8\pi-k2\pi)\right]$$

Representación gráfica de $|X_a(j\omega)|$ y $|X(e^{j\Omega})|$



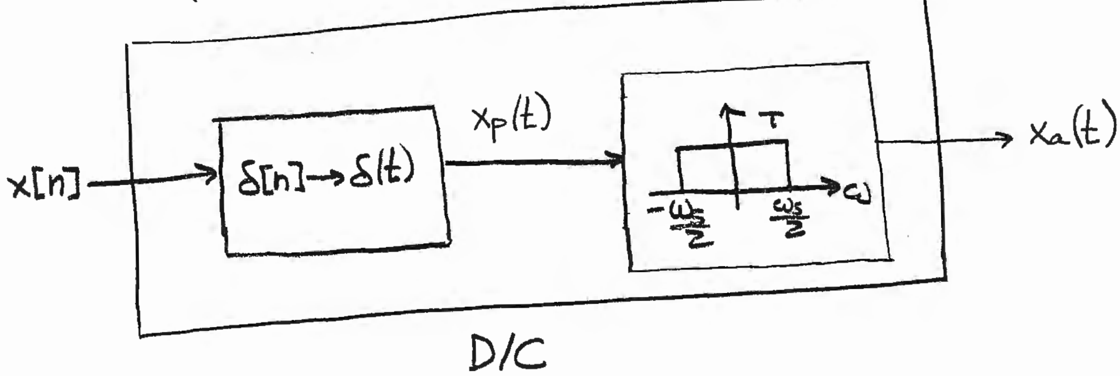




Dado que no hay solapamiento espectral porque se cumple la condición de Nyquist:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_M = 8\pi\cdot10^3\\ \omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot10^4\end{array}\right\}\ \omega_s \geq 2\omega_M \Longrightarrow$$

Es posible recuperar $x_a(t)$ a partir de $x[n]$, bastará con un conversor D/C



b) Siguiendo con el esquema original:

④ $$\boxed{Y(e^{j\Omega})} = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} =$$

$$= \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2\delta(\Omega-k2\pi)+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-0{,}8\pi-k2\pi)+e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega+0{,}8\pi-k2\pi)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[\underbrace{2\delta(\Omega-k2\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}\underbrace{e^{-jk2\pi}}_{=1}}}_{2}+$$

$f(\Omega)\delta(\Omega-\Omega_0)=f(\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0)$

$$+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-0{,}8\pi-k2\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(0{,}8\pi+k2\pi)}}+e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega+0{,}8\pi-k2\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(-0{,}8\pi+k2\pi)}}$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}4\delta(\Omega-k2\pi)+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-0{,}8\pi-k2\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j0{,}8\pi}}+e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega+0{,}8\pi-k2\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j0{,}8\pi}}$$

$e^{\pm jk2\pi}=1$

c) ④ (Hecho en b))

$\Omega=\omega T$

⑤ $Y_p(j\omega)=Y(e^{j\omega T})$ <u>Nota</u>: espectro periódico ω_s

⑥ $Y_a(j\omega)=Y_p(j\omega)\,H_{interp}(j\omega)$

Como $h_{interp}(t)=e^{-\frac{|t|}{T}}=\begin{cases}e^{+\frac{t}{T}}, & t<0\\ e^{-\frac{t}{T}}, & t>0\end{cases}=e^{\frac{t}{T}}u(-t)+e^{-\frac{t}{T}}u(t)$

$\updownarrow\mathcal{F}$ (aplicando tabla y propiedad $x(-t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X(-j\omega)$

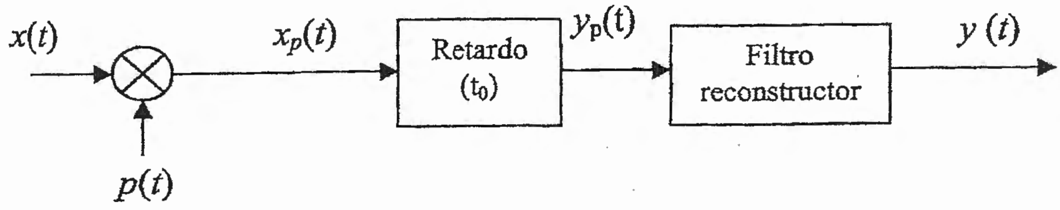
$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$

$$H_{interp}(j\omega)=\ldots=\frac{2T}{1+(\omega T)^2}$$

FEBRERO 2008

Ejercicio 4

Considere el sistema de la figura:



Donde: $x(t)$ es una señal de banda limitada $(X(j\omega)=0,\ \forall|\omega|>\omega_{\max})$

$p(t)$ es un tren de pulsos con forma $p_p(t)$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_p(t-nT)$$

$$p_p(t)=\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right)\cdot\left(u\left(t+T/4\right)-u(t-T/4)\right)$$

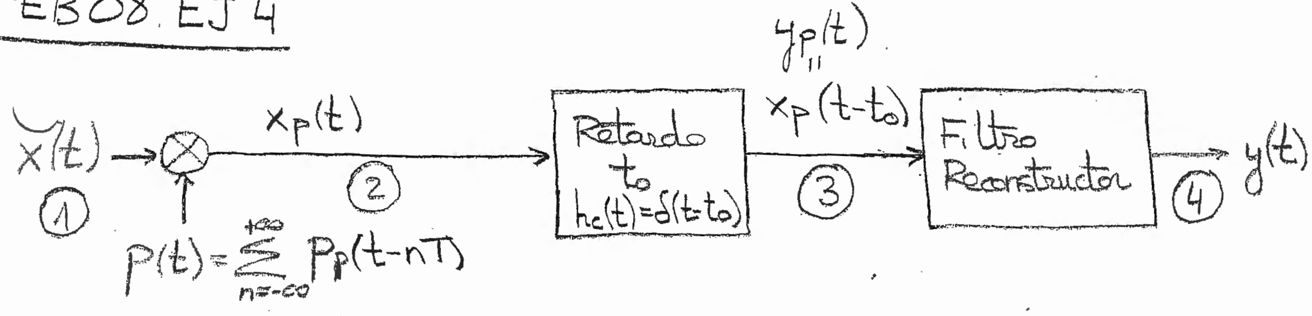
El bloque **Retardo** retarda la señal de entrada t_0 unidades temporales.

Se pide:

a) Calcule el espectro de $x_p(t)$ e $y_p(t)$. Diga cuál debe ser el filtro reconstructor para que $y(t)=x(t-t_0)$. Suponga que se cumple el criterio de muestreo de Nyquist $(2\pi/T>2\omega_{\max})$.

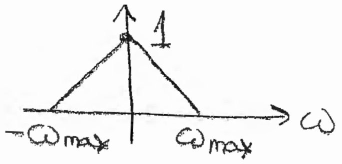
b) Suponga ahora que quiere retardar la señal $x(t)$ utilizando un sistema discreto (conversor C/D ideal, filtro discreto, conversor D/C ideal) equivalente al de la figura ($y(t)=x(t-t_0)$). Asumiendo que se muestrea $x(t)$ cumpliendo el criterio de Nyquist, ¿cuál debe ser la respuesta en frecuencia del filtro discreto en este caso?.

FEB 08. EJ 4



Muestreo natural !!

1 $X(j\omega)$



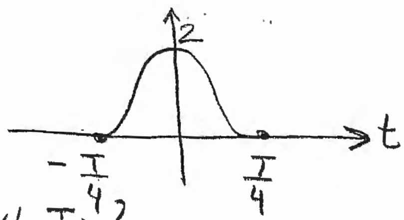
2 $x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = x(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_p(t-nT)$

$$X_p(j\omega) = F\left\{x(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_p(t) * \delta(t-nT)\right\} = F\left\{x(t)\cdot\left[p_p(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} X(j\omega) * \left[P_p(j\omega)\cdot \frac{\cancel{2\pi}}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - k\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s}\right)\right] =$$

$$= X(j\omega) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_p\left(jk\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s}\right)\delta\left(\omega - k\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_p(jk\omega_s) X(j(\omega - k\omega_s))$$

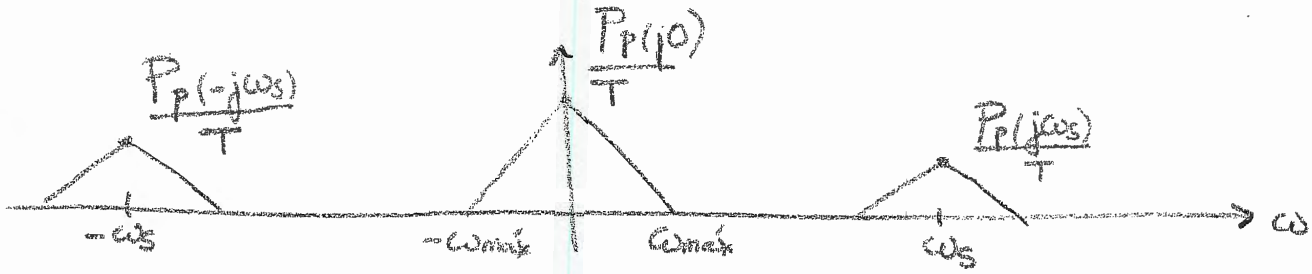
$$p_p(t) = \left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]\left[u\left(t+\frac{T}{4}\right) - u\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]$$



$$P_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F\left[1+\cos\frac{4\pi}{T}t\right] * F\left\{u\left(t+\frac{T}{4}\right) - u\left(t-\frac{T}{4}\right)\right\} =$$

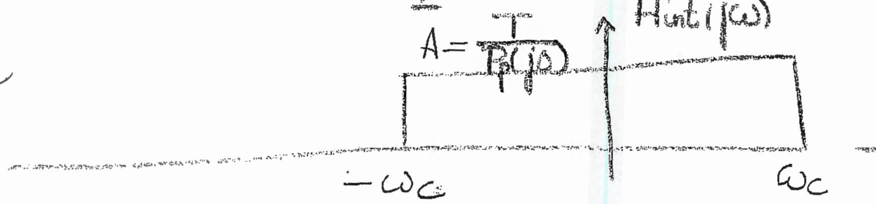
$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\left[2\pi\delta(\omega) + \pi\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{T}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{T}\right)\right] * \left[\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\omega}\right] =$$

$$= 2\,\frac{\mathrm{sen}\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\omega} + \frac{\mathrm{sen}\left[\left(\omega - \frac{4\pi}{T}\right)\frac{T}{4}\right]}{\omega - \frac{4\pi}{T}} + \frac{\mathrm{sen}\left[\left(\omega + \frac{4\pi}{T}\right)\frac{T}{4}\right]}{\omega + \frac{4\pi}{T}}$$



③ $y_p(t)=x_p(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y_p(j\omega)=X_p(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

④



$\omega_{máx}<\omega_c<\omega_s-\omega_{máx}$

$$P_p(j0)=\lim_{\omega\to 0} P_p(j\omega) = \frac{2\,\cancel{sen}\,0}{0} + \frac{\cancel{sen(-\pi)}}{-\frac{4\pi}{T}} + \frac{\cancel{sen(\pi)}}{\frac{4\pi}{T}} \overset{[L'H]}{=}$$

$$= \lim_{\omega\to 0} \frac{2\cos\left(\omega\frac{T}{4}\right)\frac{T}{4}}{1} = \frac{T}{2} \quad \text{así que } A=\frac{T}{P_p(j0)}=\frac{T}{\frac{T}{2}}=2$$

$$x(t)\longrightarrow \boxed{\begin{matrix}C/D\\ \text{ideal}\end{matrix}} \xrightarrow{x_d[n]} \boxed{H_d(e^{j\Omega})} \xrightarrow{y_d[n]} \boxed{\begin{matrix}D/C\\ \text{ideal}\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=x(t-t_0)$$

$\Updownarrow$

$$x(t)\longrightarrow \boxed{\begin{matrix}h_c(t)=\delta(t-t_0)\\ H_c(j\omega)=e^{-j\omega t_0}\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=x(t-t_0)$$

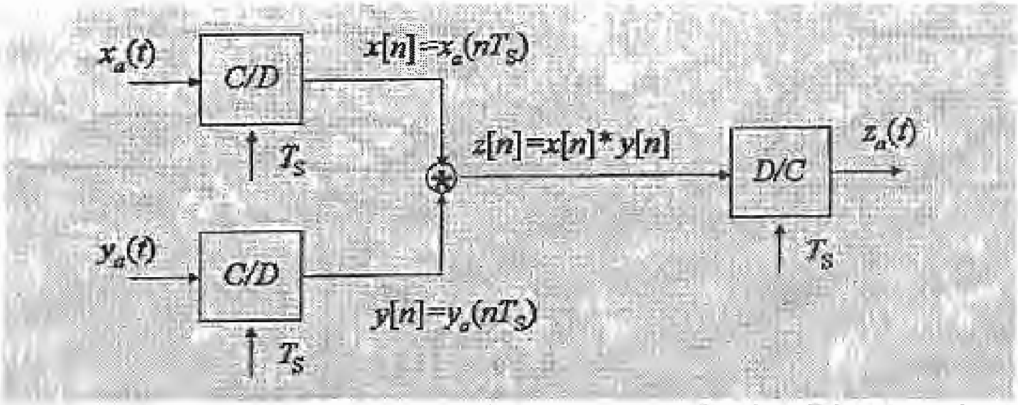
Como los conversores son ideales y se verifica el t^{ma} de muestreo:

$$H_d(e^{j\Omega})=\begin{cases} H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right), & |\Omega|<\pi \\ \text{Periódico } 2\pi \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\Omega}{T}t_0}, & |\Omega|<\pi \\ \text{Periódico } 2\pi \end{cases}$$

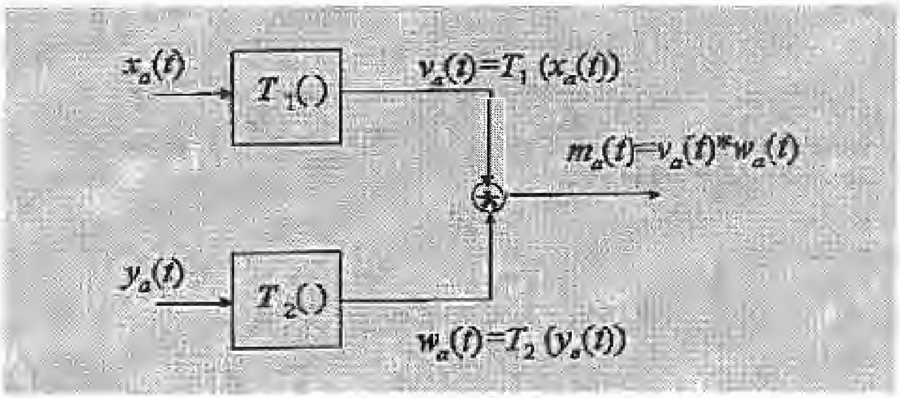
SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 4

Sea el esquema de la figura donde $x_a(t)$ e $y_a(t)$ son señales estrictamente de banda limitada, es decir, $X_a(j\omega)=0, \forall|\omega|>\omega_{\max}, Y_a(j\omega)=0,\forall|\omega|>2\omega_{\max}$ siendo $\omega_{\max}$ un parámetro arbitrario real positivo que representa su pulsación máxima.

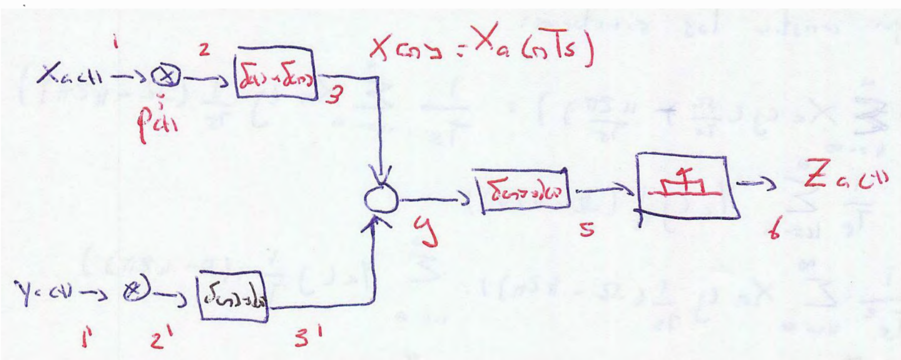


Los bloques C/D y D/C representan los procesos ideales de conversión Continuo/Discreto y Discreto/Continuo respectivamente, el operador convolución se representa por el símbolo " * " y T_S, ω_S son el período y la pulsación de muestreo. Considere igualmente que se propone el siguiente esquema donde las entradas $x_a(t)$ e $y_a(t)$ ya han sido descritas y $T_1()$, $T_2()$ representan unas transformaciones arbitrarias a calcular.

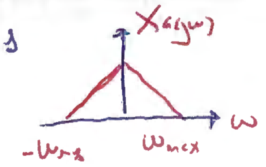


a) Suponiendo que $\omega_S=2\omega_{\max}$, calcule analíticamente y represente de forma esquemática $Z_a(j\omega)$ en función de $X_a(j\omega)$ e $Y_a(j\omega)$.

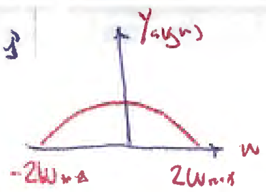
b) Determine las transformaciones $T_1(), T_2()$ calculando $v_a(t)$ en función de su entrada $x_a(t)$ e igualmente $w_a(t)$ en función de su entrada $y_a(t)$ de manera que se verifique que $m_a(t)=z_a(t)$ para el caso descrito en a).



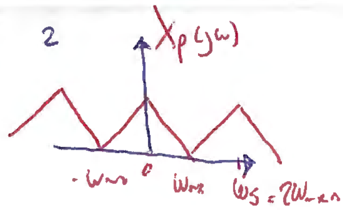
a) 1



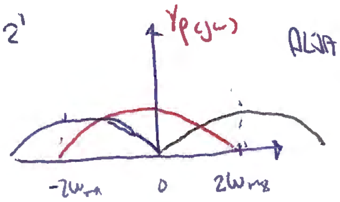
1'



2

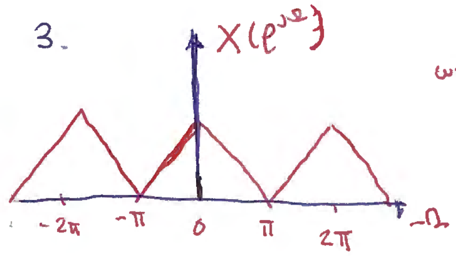


2'



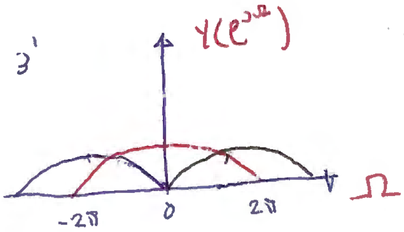
ALIASING (solapamiento)

3.

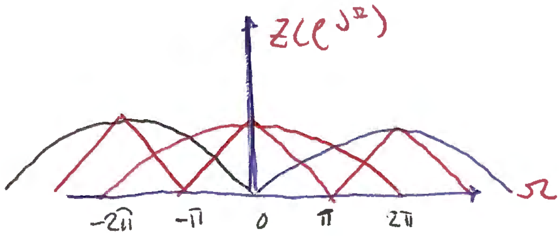


$\omega_s \to 2\pi$

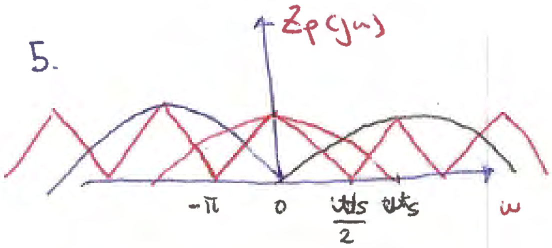
3'



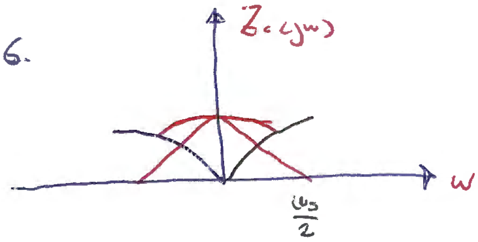
4. $z[n] = x[n] * y[n] \to Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot Y(e^{j\Omega})$



5.



6.



$$Z_a(j\omega) = \frac{1}{T_s} X_a(j\omega) \cdot \left[Y_a(j\omega) + Y_a(j(\omega - 2\omega_{max})) + Y_a(j(\omega + 2\omega_{max})) \right]$$

Analíticamente:

$1 \to X_a(j\omega)$ $\quad 1' \to Y_a(j\omega)$ $\quad 2 \to X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k \overbrace{\tfrac{2\pi}{T_s}}^{\omega_s}))$ $\quad 2' \to Y_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a(j(\omega - k \overbrace{\tfrac{2\pi}{T_s}}^{\omega_s}))$

Como no se cumple Nyquist, hay que construir los sumatorios:

$$3 \to X(e^{j\Omega}) = X_p(j\tfrac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\tfrac{\Omega}{T_s} - k\tfrac{2\pi}{T_s})) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty} X_a(j\tfrac{1}{T_s}(\Omega - k2\pi))$$

$$3' \to Y(e^{j\Omega}) = Y_p(j\tfrac{\Omega}{T_s}) = \dots = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a(j\tfrac{1}{T_s}(\Omega - k2\pi))$$

$$4 \to Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\tfrac{1}{T_s}(\Omega - k2\pi)) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a(j\tfrac{1}{T_s}(\Omega - k2\pi))$$

$$5 \to Z_p(j\omega) = Z(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k\tfrac{2\pi}{T_s})) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a(j(\omega - k\tfrac{2\pi}{T_s}))$$

$$6 \to Z_c(j\omega) = Z_p(j\omega) \cdot H_{int}(j\omega)$$

SEPTIEMBRE 2008

4) Sea una señal $x_c(t)$ de banda limitada $(X_c(j\omega)=0 \quad para \quad |\omega| =\geq \omega_M)$. Se desea realizar en tiempo discreto un sistema que ejecute la siguiente operación en tiempo continuo: $y_c(t)=x_c(t)*h_c(t)$.
Indique razonadamente qué condición debe cumplir la frecuencia de muestreo y cómo debe ser la respuesta en frecuencia del sistema discreto, $H_d(e^{j\Omega})$, en los dos casos siguientes:

a) $h_c(t)=\left(\dfrac{sen((\omega_M/4)t)}{\pi t}\right)^2$

b) $h_c(t)=e^{-a|t|},\ a>0\ y\ real$

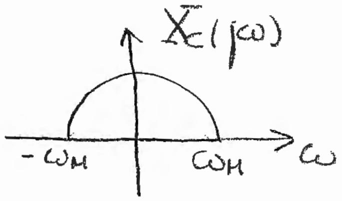
SEPT.08.EJ4

$x_c(t) \rightarrow \boxed{H_c(j\omega)} \rightarrow y_c(t) = x_c(t) * h(t)$

$x_c(t) \rightarrow \boxed{C/D} \xrightarrow{x_d[n]} \boxed{H_d(e^{j\Omega})} \xrightarrow{y_d[n]} \boxed{D/C} \rightarrow y_c(t)$

(C/D ideal, D/C ideal)

Condición de muestreo: debe cumplirse para la señal con mayor ancho de banda del sistema continuo. En este caso $x_c(t)$, puesto que $Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) \cdot H_c(j\omega)$ por lo que $y_c(t)$ tendrá un ancho de banda menor o igual que el de $x_c(t)$



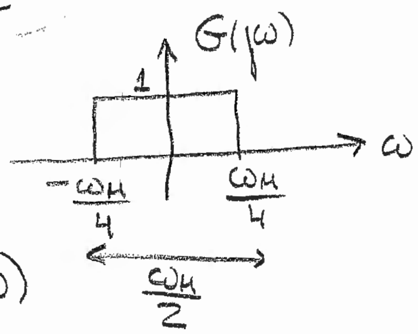
Así que: $\boxed{\omega_s > 2\omega_M}$

Para que el sistema discreto sea equiv. al continuo:

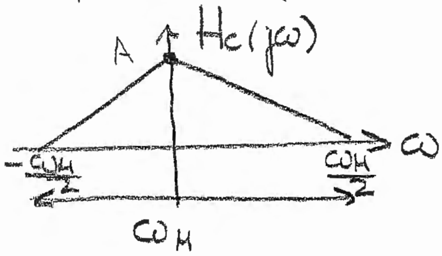
$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right), & |\Omega|<\pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$

a) $$h_c(t) = \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t}\right]^2 = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega_M}{4}t}{\pi t}}_{g(t)} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega_M}{4}t}{\pi t}}_{g(t)}$$

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t}\right\} = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\omega_M}{4} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



$$H_c(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * G(j\omega)$$

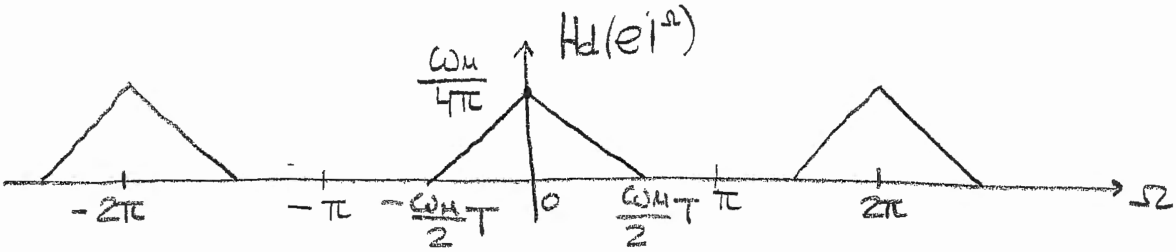


$$A = \frac{1}{2\pi}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\omega_M}{2} = \frac{\omega_M}{4\pi}$$

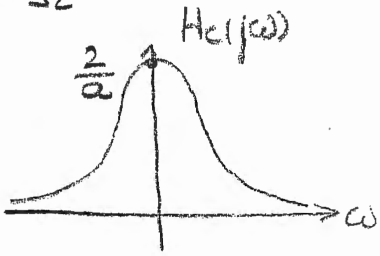
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega_M}{4\pi}\left(\frac{2}{\omega_M}\omega + 1\right), & -\frac{\omega_M}{2} < \omega < 0 \\ \frac{\omega_M}{4\pi}\left(-\frac{2}{\omega_M}\omega + 1\right), & 0 < \omega < \frac{\omega_M}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Así que:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \dfrac{\omega_M}{4\pi}\left(\dfrac{2}{\omega_M}\dfrac{\Omega}{T}+1\right), & -\dfrac{\omega_M}{2}T < \Omega < 0 \\[2mm] \dfrac{\omega_M}{4\pi}\left(-\dfrac{2}{\omega_M}\dfrac{\Omega}{T}+1\right), & 0 < \Omega < \dfrac{\omega_M}{2}T \\[2mm] 0, & \dfrac{\omega_M T}{2} < |\Omega| < \pi \\[2mm] \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$



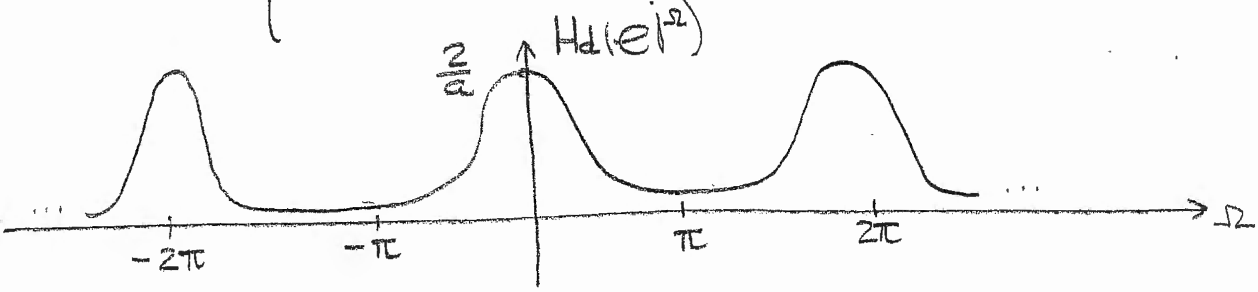
b) $h_c(t) = e^{-a|t|}, \; a \in \mathbb{R}^+ \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_c(j\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$



(Ej 1 b) tema 3)

Así que:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \dfrac{2a}{a^2+\left(\dfrac{\Omega}{T}\right)^2}, & |\Omega| < \pi \\[2mm] \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$



4. Considere una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ cuyo espectro cumple $X_c(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_M$. Definamos la siguiente secuencia:

$$x_d[n]=x_c(nT)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k\cdot 3]=\begin{cases}x_c(nT), & \text{para } n \text{ múltiplo de } 3\\ 0, & \text{para el resto}\end{cases}$$

Se pide:

(a) Determine el espectro de la secuencia $x_d[n]$, denotado por $X_d(e^{j\Omega})$, en función de $X_c(j\omega)$ (espectro de $x_c(t)$) y del periodo de muestreo T

(b) Calcule el periodo de muestreo T para que la señal $x_c(t)$ pueda ser recuperada a partir de la secuencia $x_d[n]$. Obtenga la expresión de $x_c(t)$ en función de $x_d[n]$ y T

(c) Suponiendo que $x_c(t)=1+\cos\left(10^3t+\pi/4\right)+\cos\left(2\pi 10^3 t\right)$, determine el máximo período de muestreo T y la señal $x_c(t)$ a partir de las expresiones obtenidas en el apartado (b)