STLN

Carpeta de
Montero Espinosa
(resuelta en 2010)

STLN
Teoría

CLASE 7

Feb'02 - ej2 (c))

Teoría; 3.5, 3.6, 3.7

Sep.'04 - ej2 // Sep'00 - P3 == Jun'07 - P3//

CLASE EXTRA PROBLEMAS:

Sep'99 - ej 1 // Sep'02 - Ej 1 // Feb'07 - ej 1//

CLASE 8

Teoría: 3.8

Feb'03 - ej 2 // Feb'06 - ej. 2

CLASE 9:

Sep'03 - ej2 // Feb'07 - ej. 2 //

Teoría: 4.1,

el q tiene dibujos

CLASE 10:

Jun'03 - ej 3 // Sep'99 - ej 2 // Sep'02 - ej 3

CLASE 11:

Teoría, 1.10

Jun'03 - ej 1 // Sep'99 - ej 2 [el que no tiene dibujos] // → (a y c)

Teoría, 4.3

Feb'03 ~~f~~ - ej 3 // Sep'04 - ej 3

CLASE EXTRA PROBLEMAS

Jun'04 - ej 3

CLASE 12.

Sep'05 - ej 3 //

Teoría: 4.6

Sep'99 - ej 2 [el que no tiene dibujos] → (b) // Feb'01 - ej 3

Teoría: 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3,
4.7.4, 4.7.5

CLASE 13:

Teoría: 5.1, 5.1 (Muestreo ideal), 5.1.1, 5.2, 5.3, 5.3.1, 5.4

Sep'99 - ej 3 // Feb'00 - ej 5

CLASE EXTRA EJERCICIOS

Feb'02.ej3 (T-4) // Feb'01.ej4 (T-5) // Feb'03.ej4 (T-5) // Sep'04.ej4 (T-5)
(b, c y d)

CLASE 14

Repaso 4.7, 4.7.5, 4.7.6, 4.7.7

Ej1-Tema 4 // Feb'02.ej3 (a) // Feb'06-ej3 (a y b) // Feb'07-ej3

CLASE 15

Teoría 5.5 (Dibujo)

Sep'99-ej3 (El que empieza por considere) // Feb'05-ej4

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

LAPLACE NO VIENE

Tema 1. Introducción a señales y sistemas

SEÑALES

1.1. Concepto de señal: señales en tiempo continuo y en tiempo discreto
1.2. Operaciones básicas con señales: suma, producto y transformación de la variable temporal
1.3. Señales básicas: sinusoidal, exponencial, impulso unitario, escalón, rampa
1.4. Características y parámetros asociados a las señales: valor medio, valor de pico, energía y potencia; periodicidad; simetrías
1.5. Concepto de sistema. Asociación. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo .
1.6. Ecuaciones diferenciales (en diferencias) con condiciones de reposo inicial como sistemas LTI

Tema 2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)

SISTEMAS

2.1. Caracterización de sistemas en tiempo discreto LTI mediante la respuesta al impulso. Convolución
2.2. Realización de la operación de convolución en tiempo discreto
2.3. Caracterización de sistemas en tiempo continuo LTI mediante la respuesta al impulso. Convolución .
2.4. Realización de la operación de convolución en tiempo continuo
2.5. Propiedades del operador de convolución: elemento unitario, conmutativa, asociativa, distributiva, derivación, desplazamiento
2.6. Propiedades de los sistemas LTI: memoria, invertibilidad, causalidad y estabilidad

Tema 3. Transformada de Fourier (TF) de señales en tiempo continuo

3.1. La exponencial compleja y los sistemas LTI. Concepto de autofunción y de respuesta en frecuencia
3.2. Desarrollo en serie de Fourier (DSF) de señales periódicas
3.3. Señales periódicas y sistemas LTI
3.4. Introducción al concepto de TF a partir del DSF
3.5. Definición y condiciones de existencia
3.6. Transformada generalizada de Fourier
3.7. Propiedades de la TF. Aplicaciones
3.8. TF de señales periódicas. Relación con el DSF. Fórmula sumatoria de Poisson
3.9. Análisis de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales. Cálculo de la respuesta en frecuencia y de la respuesta al impulso

Tema 4. Transformada de Fourier (TF) de señales en tiempo discreto

4.1. La exponencial compleja y los sistemas LTI. Concepto de autofunción y de respuesta en frecuencia
4.2. Desarrollo en serie de Fourier (DSF) de señales periódicas
4.3. Señales periódicas y sistemas LTI
4.4. Introducción al concepto de TF a partir del DSF
4.5. Definición y condiciones de existencia
4.6. Transformada generalizada de Fourier
4.7. Propiedades de la TF. Aplicaciones
4.8. TF de señales periódicas. Relación con el DSF. Fórmula sumatoria de Poisson
4.9. Análisis de sistemas descritos por ecuaciones en diferencias. Cálculo de la respuesta en frecuencia y de la respuesta al impulso

Tema 5. Muestreo: representación de una señal continua a partir de sus muestras equiespaciadas

5.1. Muestreo ideal. Condición de Nyquist, interpolación temporal y solapamiento espectral
5.2. Muestreo natural e instantáneo
5.3. Simulación en tiempo discreto de sistemas en tiempo continuo

Tema 6. Análisis de señales y sistemas en los dominios transformados

6.1. Introducción a los dominios transformados
6.2. Introducción a la transformada de Laplace (bilateral)
6.3. Introducción a la transformada Z (bilateral)

TEMA 1: SEÑALES

1.1 Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto

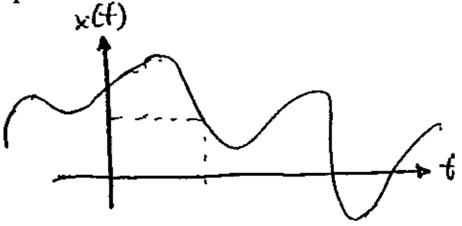
Básicamente se trata de funciones matemáticas típicas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o en un caso más general de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aunque no las utilizaremos en esta asignatura.

Ejemplo de señal en tiempo continuo:

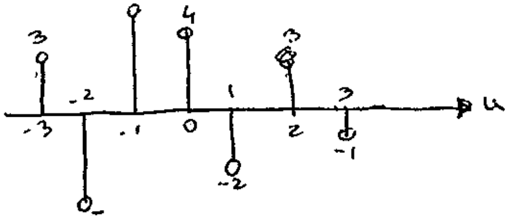
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \to x(t)$

$\mathbb{R} \cancel{\to} \mathbb{C}$ no en esta asig.



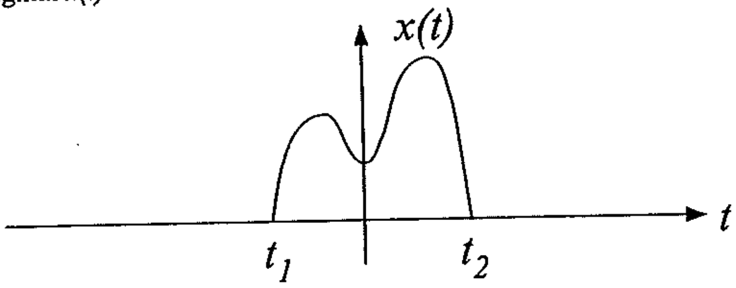
Ejemplo de señal en tiempo discreto:



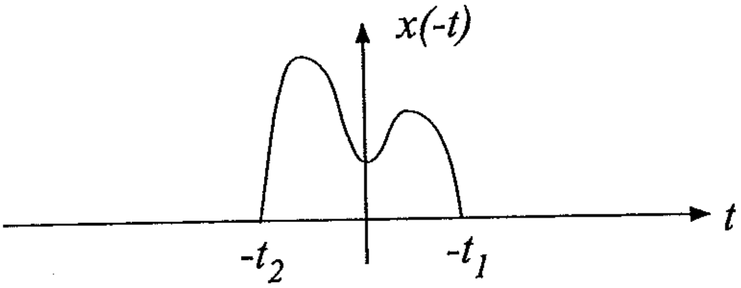
En el tema 5 veremos que una manera de obtener señales en tiempo discreto es muestrear señales en tiempo continuo

1.2 Transformaciones de la variable independiente

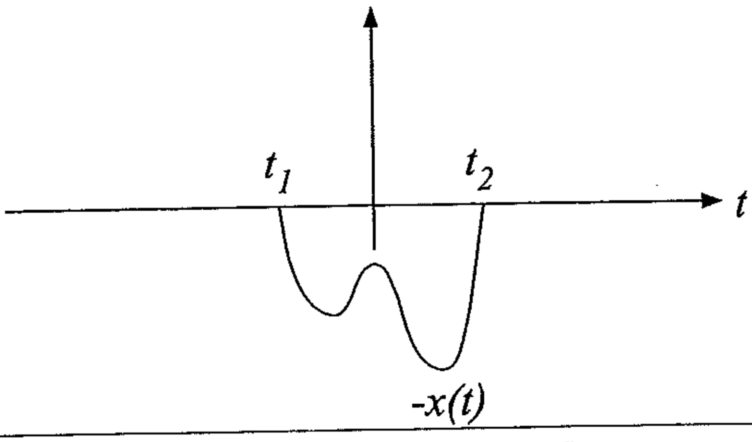
Sea la señal original *x(t)*



1.2.1 Inversión, reflexión o abatimiento

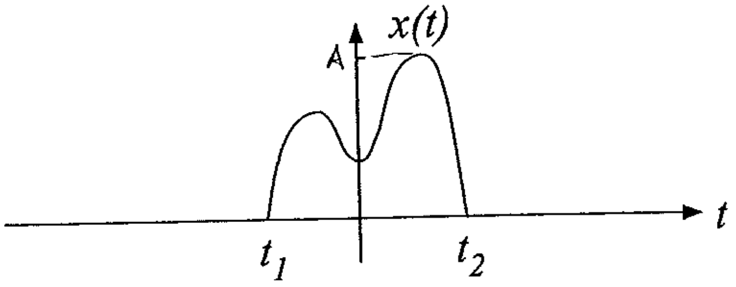


Hay que darse cuenta de que no es lo mismo que :



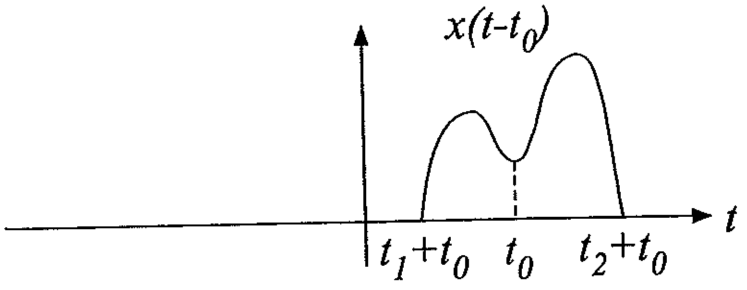
1.2.2 Desplazamiento

Sea la señal original $x(t)$:



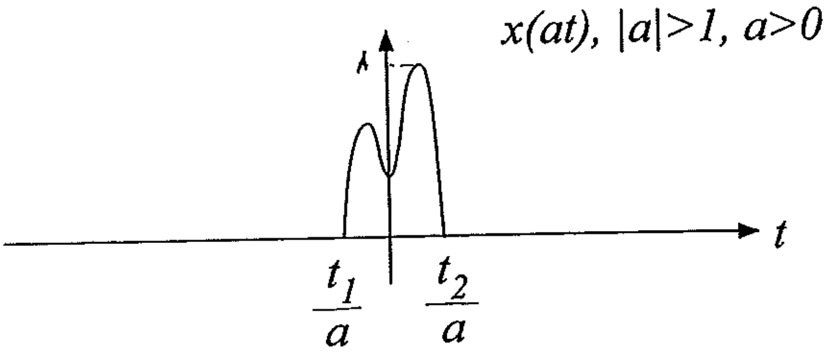
su versión desplazada $x(t-t_0)$

Si $t_0<0$ se desplazaría a la izquierda en lugar de a la derecha



1.2.3 Cambio de escala

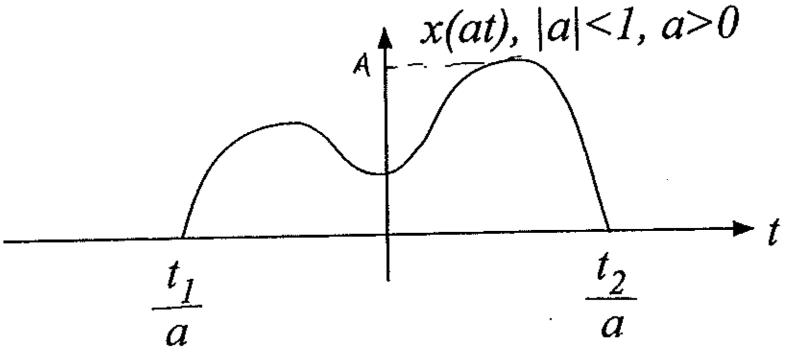
Compresión



Si $a<0$, además de compresión, la señal experimentaría reflexión

se mantiene a amplitud

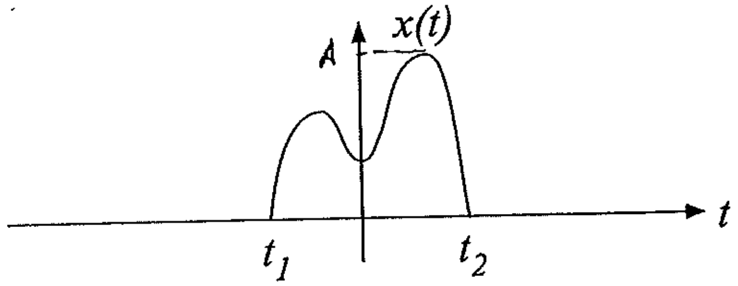
Expansión



Si $a<0$, además de expansión, la señal experimentaría reflexión

1.2.4 Caso general

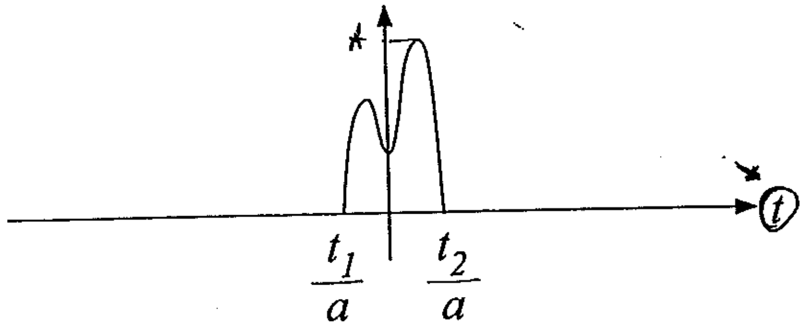
Sea la señal original *x(t)*:



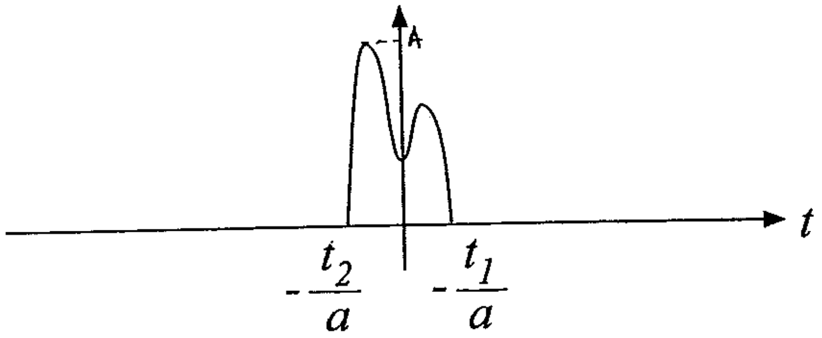
Representemos $x(t)=x(-at+t_0)=x(-a(\underset{\uparrow}{t}-\frac{t_0}{a}))$, donde $a>0$ y $t_0>0$, $|a|>1$.

Para ello seguiremos el siguiente orden :

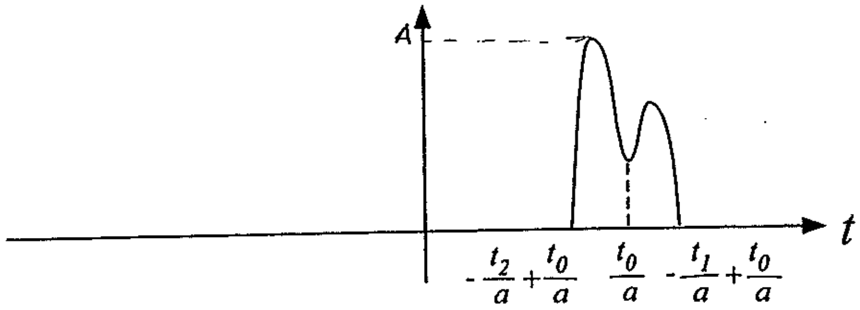
Paso 1. Aplicar cambio de escala



Paso 2. Reflejar



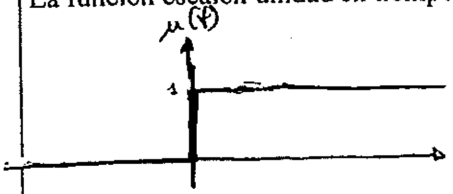
Paso 3. Desplazar



1.3 Función escalón unidad

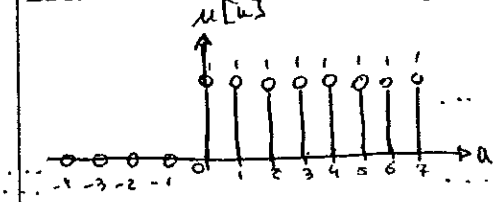
1.3.1 En tiempo continuo

La función escalón unidad en tiempo continuo es $u(t) = \begin{cases} 1 \ , & t>0 \\ 0 \ , & t<0 \end{cases}$



1.3.2 En tiempo discreto

La función escalón unidad en tiempo discreto es $u[n] = \begin{cases} 1 \ , & n \geq 0 \\ 0 \ , & n<0 \end{cases}$



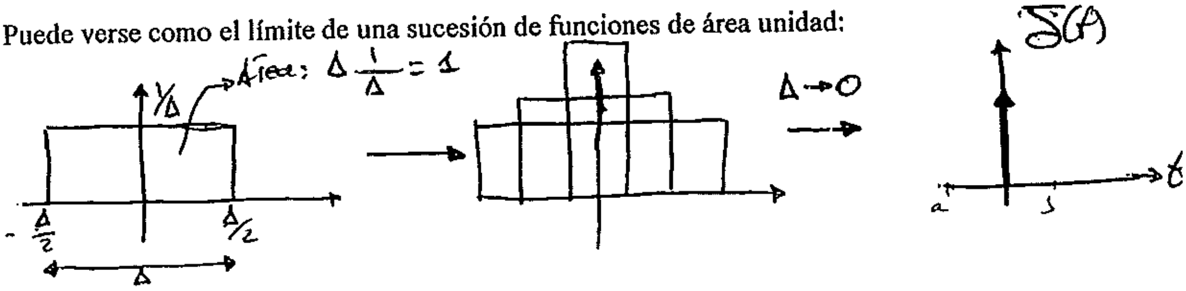
1.4 Función impulso unidad

1.4.1 En tiempo continuo. Delta de Dirac $\delta(t)$

La delta de Dirac es una función que se representa de la siguiente manera

Se caracteriza porque su valor es 0, $\forall t \neq 0$

Puede verse como el límite de una sucesión de funciones de área unidad:



Por ello hay quien dice que en *t=0* la delta vale ∞

Esto se ve en más detalle en MMT2

Propiedades de la delta de Dirac

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

Tiene "área" unidad

2) $\boxed{x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)}$ ① at

Esto sirve para "quedarte" con el valor de una señal en el instante que tú quieras.

Caso particular $x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$

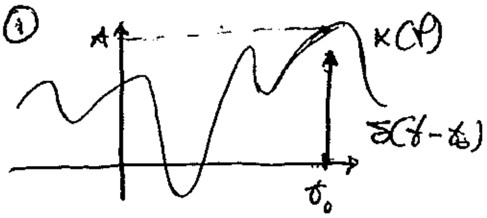
3) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)\,dt = x(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt}_{1} = x(0)$

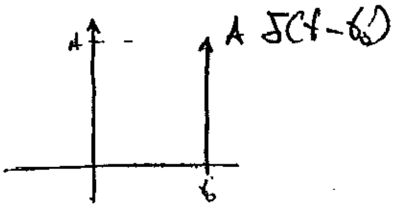
4) $\boxed{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$ ② at

5) $\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow \int \delta(t)\,dt = u(t)}$

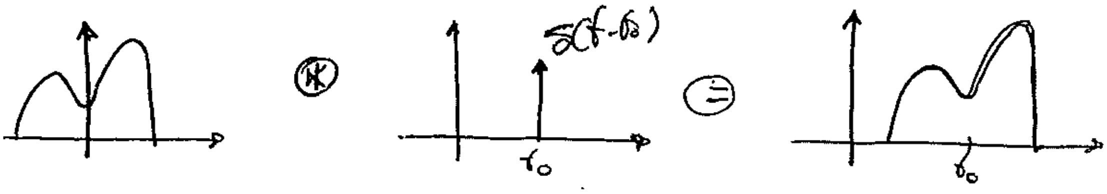
6) $\delta(t/T) = T\delta(t)$

①



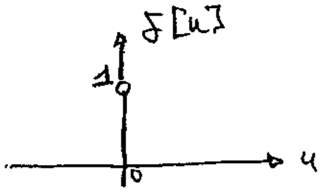


② $x(f) * \delta(f-f_0) = x(f-f_0)$



1.4.2 En tiempo discreto. Delta de Kronecker $\delta[n]$

La delta de Kronecker es la siguiente función $\delta[n] = \begin{cases} 1 & , \; n=0 \\ 0 & , \; n \neq 0 \end{cases}$ que se representa como:



Propiedades de la delta de Kronecker

Fíjate que estas propiedades son equivalentes a las de la delta de Dirac, pero en tiempo discreto. Por eso en vez de integrales aparecen sumatorios.

1) $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

2) $\boxed{x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]}$

Caso particular $x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$

3) $\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[0]\delta[n] = x[0]\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n]}_{1} = x[0]$

Juega

4) $\boxed{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]}$

5) $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

1.5 Señales periódicas

1.5.1. Definición

Una señal en tiempo continuo es periódica si se cumple $x(t) = x(t+T) = x(t \pm kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, donde T se denomina periodo de la señal $x(t)$.

Una señal en tiempo discreto es periódica si se cumple $x[n] = x[n+N] = x[n \pm kN]$, $k \in \mathbb{Z}$, donde N se denomina periodo de la señal $x[n]$.

1.5.2 Suma de señales periódicas

m.c.m representa el mínimo común múltiplo.

Esta propiedad es generalizable a la suma de varias funciones periódicas.

Sean dos señales $x_1(t)$ de periodo T_1 y $x_2(t)$ de periodo T_2. Se puede demostrar que la señal $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ es periódica de periodo $T=m.c.m(T_1,T_2)$

Sean dos señales $x_1[n]$ de periodo N_1 y $x_2[n]$ de periodo N_2. Se puede demostrar que la señal $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$ es periódica de periodo $N=m.c.m(N_1,N_2)$

1.6 Simetrías

Señales complejas son aquellas que devuelven valores complejos. Esto no se utiliza habitualmente en STLN, pero sí en otras asignaturas como TECM

Para un caso general en el que manejemos señales complejas:

Señal simétrica conjugada o hermítica: $x(t)=x^*(-t)$

Señal antisimétrica conjugada o antihermítica: $x(t)=-x^*(-t)$

Si particularizamos para señales reales:

Esto será lo que utilicemos en STLN

Simetría par: $x(t)=x(-t)$

Simetría impar: $x(t)=-x(-t)$

1.7 Características y parámetros de las señales. Potencia y energía

1.7.1 Tiempo continuo

Valor medio: $\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$

Valor de pico : $x_{pico} = máx\{|x(t)|\}$

Potencia instantánea: $p(t) = |x(t)|^2$

Energía en el intervalo (t_1,t_2) : $E_{t_1 \cdot t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt$

Hablaremos de señales de energía finita/infinita cuando la energía total de la señal sea finita/infinita

Energía total de la señal: $E_\infty = E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$

Hablaremos de señales de potencia finita/infinita cuando la potencia media de la señal sea finita/infinita.

Potencia media en el intervalo (t_1,t_2): $P_{t_1 \cdot t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt$

Potencia media de la señal: $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$

La potencia media en la señal periódica es igual a la de potencia media de un periodo

1.7.2 Tiempo discreto

Valor medio: $x[n]$: $\overline{x[n]} = \langle x[n] \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x[n]$

Valor de pico: $x_{pico} = máx\{|x[n]|\}$

Potencia instantánea: $p[n] = |x[n]|^2$

Energía en el intervalo (t_1,t_2) : $E_{n_1 n_2} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

Mismos comentarios que para tiempo continuo.

Energía total de la señal: $E_\infty = E = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

Potencia media en el intervalo (t_1,t_2): $P_{n_1 n_2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

Potencia media de la señal: $P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

Observaciones

- Una señal de energía total finita tiene una potencia media total nula.
- Una señal de potencia media infinita siempre tiene una energía infinita.

1.8 Operador Convolución en tiempo continuo

A parte de las operaciones habituales que ya sabemos utilizar con las señales (suma, resta y multiplicación), existe una operación nueva denominada convolución y que veremos en detalle.

1.8.1 Definición

Importante:
Fíjate que en esta integral la variable que se integra es τ (variable independiente).En la integral t actúa como un parámetro.

La convolución de dos señales devuelve siempre otra señal.

Sean dos señales cualesquiera $x(t)$ e $y(t)$ en tiempo continuo. Definimos la operación de **convolución** entre $x(t)$ e $y(t)$ de la siguiente forma:

$$\boxed{z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau}$$

Es decir , la convolución de dos señales en tiempo continuo no es más que "calcular una Integral". Lo que sucede es que el procedimiento para obtener esta integral es algo especial. Normalmente no se calcula como hacemos con la integrales que nos aparecen en Cálculo.

Básicamente existen dos métodos para calcular una convolución:

- Aplicación de propiedades
- Método gráfico

Ambos métodos se aplicarán de forma práctica en los ejercicios de clase.

1.8.2 Propiedades de la convolución

Conmutativa: $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

Asociativa: $(x(t) * y(t)) * w(t) = x(t) * (y(t) * w(t))$

Distributiva: $x(t) * (y(t) + w(t)) = (x(t) * y(t)) + (x(t) * w(t))$

Convolución con delta: $\boxed{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$ Mucho uso.

Cambio de signo:
$x(t) * y(t) = z(t)$
$x(-t) * y(t) = z(-t)$

Derivación:
$x(t) * y(t) = z(t)$
$x'(t) * y(t) = x(t) * y'(t) = z'(t)$
$x''(t) * y(t) = x'(t) * y'(t) = x'(t) * y''(t) = z''(t)$

Simetrías:
par * par = par
par * impar = impar
impar * impar = impar !

Desplazamientos :
$x(t) * y(t) = z(t)$
$x(t-t_0) * y(t+t_1) = z(t-t_0+t_1)$

Producto por una constante : $(ax(t)) * y(t) = x(t) * (a\,y(t)) = a(x(t) * y(t))$

1.9 Operador Convolución en tiempo discreto

Sean dos señales $x[n]$ e $y[n]$ en tiempo discreto (secuencias). La operación de convolución se define análogamente a la de tiempo continuo sin más que cambiar la integral por un sumatorio y las variables t y τ por n y k:

En la convolución en tiempo discreto el sumatorio se define sobre m y n actúa como parámetro

$$\boxed{x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]}$$

Las propiedades de esta operación siguen siendo las mismas que las del caso continuo por lo que nos remitimos a la página anterior. Simplemente resaltaremos por su importancia la propiedad:

Convolución con delta: $\boxed{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]}$

1.10 Convolución circular, cíclica o periódica en tiempo continuo

Existe una operación denominada convolución circular o periódica, que aparecerá en diferentes partes dentro de la asignatura. Es una operación que sólo es aplicable a señales periódicas del mismo periodo.

Así pues, si tenemos dos señales en tiempo continuo, periódicas con el mismo período T se define la **convolución circular** de la siguiente forma:

Como puedes observar ahora la integral de convolución sólo se extiende a un período

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{\infty} \overset{\text{un periodo}}{x_p}(\tau)\; y(t-\tau)\, d\tau = x_p(t) * y(t)$$

Como se puede ver, podemos realizar la convolución circular entre dos señales periódicas de periodo T sin más que realizar una convolución lineal entre un periodo de una de ellas $x_p(t)$*, y la otra señal periódica completa* $y(t)$.

Pero si vamos más allá, podemos ver:

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = x_p(t) * y(t) = x_p(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_p(t-kT) =$$

$$= \underbrace{x_p(t) * y_p(t)}_{z_p(t)} * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_p(t-kT)$$

Así que también podemos hacer lo siguiente

El resultado de una convolución periódica es siempre otra señal periódica del mismo período que las dos señales convolucionadas

$$\boxed{z(t) = x(t) \circledast y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_p(t-kT)} \quad \text{donde} \quad \boxed{z_p(t) = x_p(t) * y_p(t)}$$

1.10 Convolución circular, cíclica o periódica en tiempo discreto

Como puedes observar ahora el sumatorio de convolución sólo se extiende a un periodo

Análogamente para dos secuencias (señales en tiempo discreto) periódicas con el mismo periodo N:

$$z[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=<N>} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[k] y[n-k] = x_p[n] * y[n]$$

Como se puede ver, podemos realizar la convolución circular entre dos señales periódicas de periodo T sin más que realizar una convolución lineal entre un periodo de una de ellas $x_p[n]$ *, y la otra señal periódica completa* $y[n]$.

Pero si vamos más allá, podemos ver:

$$z[n] = x[n] \circledast y[n] = x_p[n] * y[n] = x_p[n] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_p[n-kN] =$$

$$= \underbrace{x_p[n] * y_p[n]}_{z_p[n]} * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_p[n-kN]$$

El resultado de una convolución periódica es siempre otra señal periódica del mismo periodo que las dos señales convolucionadas

Así que también podemos hacer lo siguiente:

$$\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_p[n-kN]} \text{ donde } \boxed{z_p[n] = x_p[n] * y_p[n]}$$

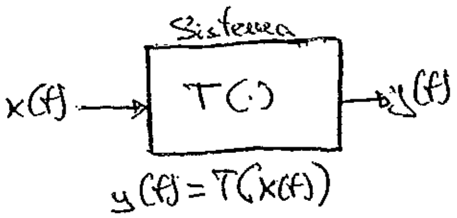
TEMA 2: SISTEMAS

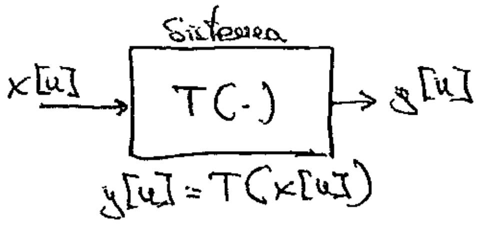
2.1 Definición y propiedades de los sistemas

2.1.1 Definición

En la práctica, para nosotros un sistema va a ser una caja en la que introducimos una entrada y nos devuelve una salida.

Un sistema es una regla de transformación de una señal de entrada *x(t)*, en otra de salida *y(t)*, manteniéndose su naturaleza continua o discreta.





2.1.2 Propiedades de los sistemas

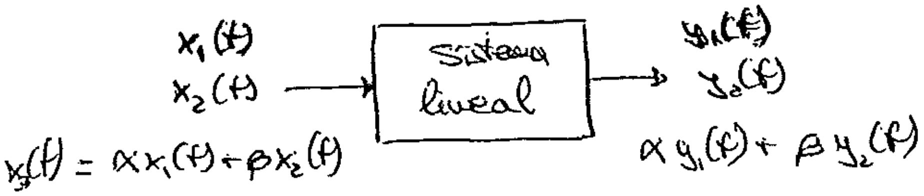
Todas las propiedades son igualmente aplicables a señales en tiempo discreto

Linealidad

Sea un sistema al que introducimos dos señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y obteniéndose sus respectivas salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$. Decimos que el **sistema** es lineal si cumple:

Si nuestro sistema es lineal, necesariamente se va a cumplir que para entrada nula, la salida también será nula.

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$
$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

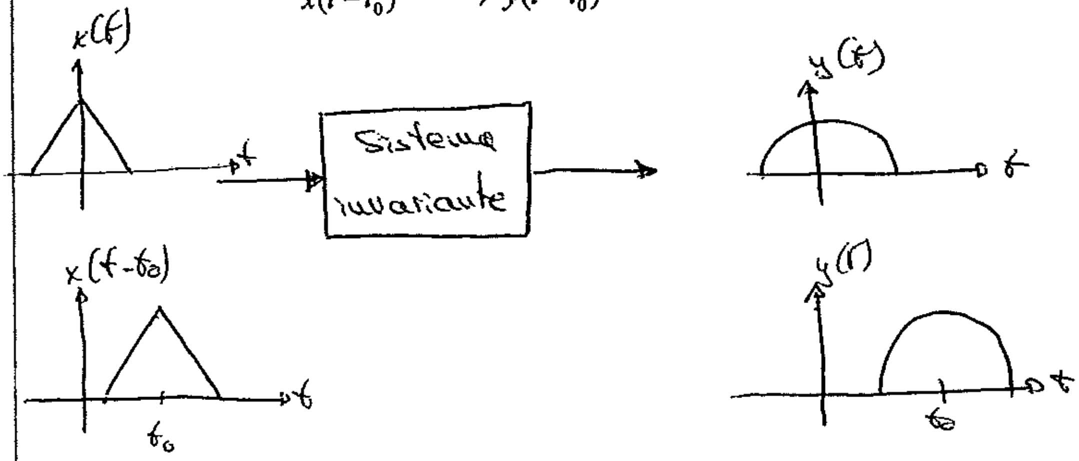


Invarianza temporal

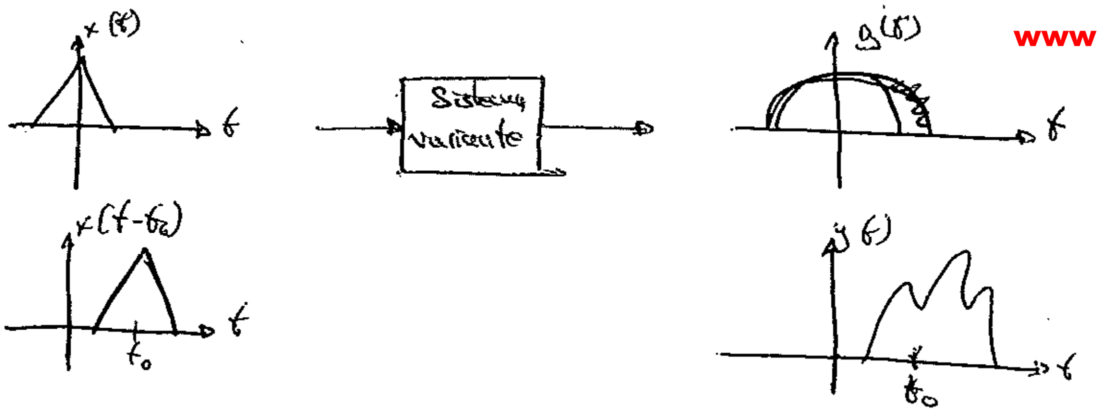
Los sistemas más importantes para nosotros serán los **LTI** (*linear and time invariant*), es decir, los lineales e invariantes.

Sea un sistema al que se introduce una señal $x(t)$, obteniéndose a la salida la señal $y(t)$. Diremos que el sistema es **invariante** si al introducir como entrada la señal $x(t)$ desplazada una cierta cantidad t_0 en un determinado sentido se obtiene a la salida la señal $y(t)$ desplazada la misma cantidad t_0 en el mismo sentido:

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$
$$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$$



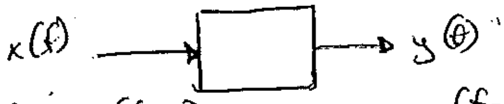
①a'


x(t)
t
Sistema variante
g(t)
t
x(t-t0)
t
t0
y(t)
t
t0

Causalidad

A los sistemas causales, se les llama también no anticipativos, porque para calcular la salida no se utiliza la entrada en instantes de tiempo posteriores ("futuros")

Un sistema es **causal** si para calcular la salida en un instante dado sólo se necesita conocer la entrada en ese mismo instante y/o la entrada en instantes de tiempo anteriores.



Ej. 1: $y(t) = x(t-3) \longrightarrow y(t=6) = x(3) \Rightarrow$ CAUSAL

Ej. 2: $y[n] = x[n] - x[n-3] \longrightarrow y[n=7] = x[7] - x[4] \Rightarrow$ CAUSAL

Ej. 3: $y(t) = x(t) + 3x(t+5) \longrightarrow y(t=8) = x(8) + 3x(13) \Rightarrow$ NO CAUSAL

Sin Memoria

Importante: Si un sistema es "sin memoria" no depende de instantes pasados pero tampoco depende de instantes futuros, sólo del instante actual

Si un sistema es sin memoria entonces es causal.

Un sistema es **sin memoria** si la salida en un instante dado sólo depende de la entrada en ese mismo instante, no de la entrada en instantes anteriores ni posteriores.

Ej. 1: $y(t) = [x(t)]^2 + 5 \longrightarrow y(t=4) = [x(4)]^2 + 5 \Rightarrow$ SIN MEMORIA (Tb caus

Ej. 2: $y[n] = x[n] - x[n-3] \longrightarrow y[t=7] = x[7] - x[4] \Rightarrow$ CON MEMORIA. (Tb caus

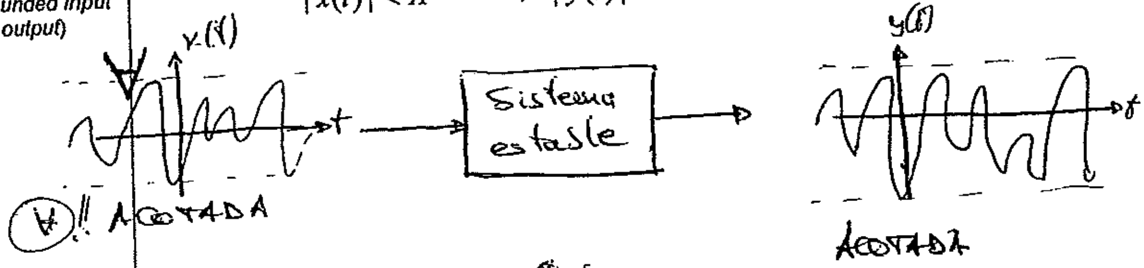
Ej. 3: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow y(t=12) = \int_{-\infty}^{12} x(\tau)d\tau \Rightarrow$ CON MEMORIA. (Tb caus

Estabilidad

A veces se habla de estabilidad en sentido BIBO (*bounded input bounded output*)

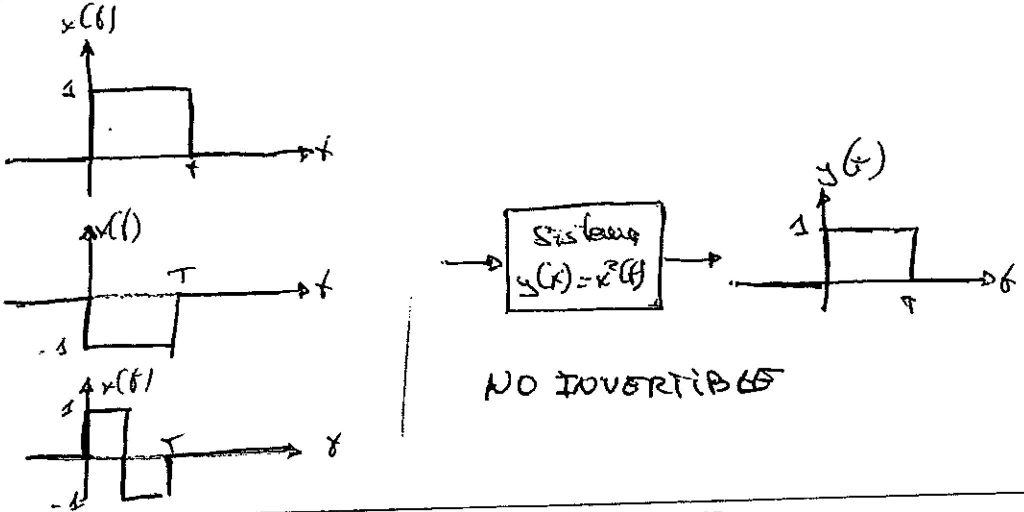
Un sistema es estable si a **toda** entrada $x(t)$ acotada le corresponde una salida también acotada. Es decir:

$$|x(t)| < A \longrightarrow |y(t)| < B \qquad A, B \in \mathbb{R}$$



Invertibilidad

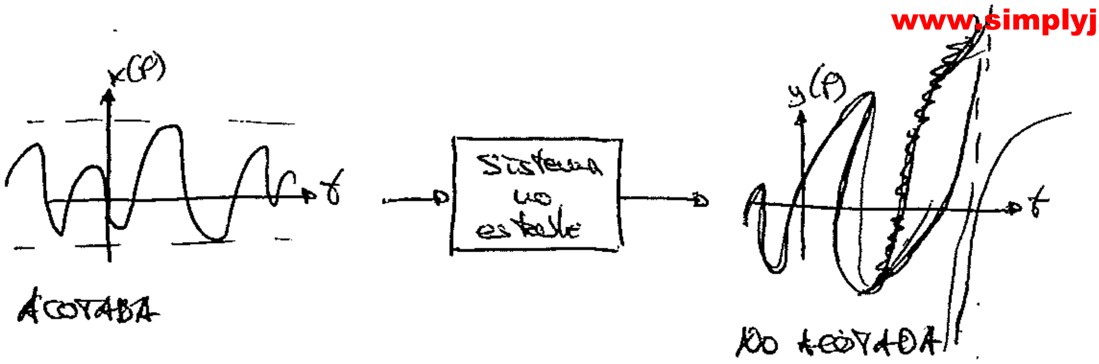
Un sistema es invertible cuando dos entradas distintas producen dos salidas distintas. Dicho de otra forma, un sistema es invertible si observando la salida sabemos cuál fue la entrada. Un sistema invertible tiene un sistema inverso, aquel que colocado en serie con nuestro sistema nos devuelve a su salida la señal que hemos introducido a la entrada.



①

1A)

⑦

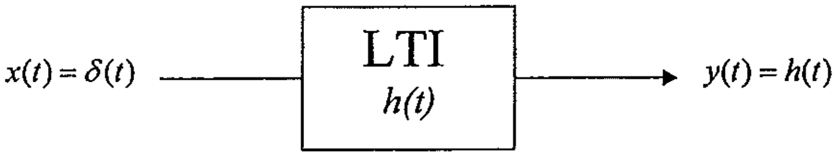


[illegible]

2.2 Sistemas LTI (lineales e invariantes). Respuesta al impulso

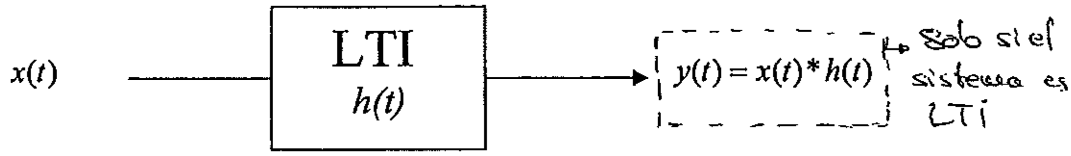
De entre todas las propiedades vistas en el apartado anterior, hay dos que son especialmente importantes para los sistemas, que son la linealidad y la invarianza temporal. A un sistema lineal e invariante le denominaremos a partir de ahora **sistema LTI.**

Definimos la **respuesta al impulso** *h(t)* ó *h[n]* de un sistema LTI como la salida de dicho sistema cuando a la entrada se introduce el impulso unidad, es decir $x(t)=\delta(t)$ ó $x[n]=\delta[n]$



Esta es la razón por la que es tan importante en esta asignatura la operación de convolución

La respuesta al impulso caracteriza perfectamente al sistema LTI ya que, conocida cualquier entrada *x(t)*, podemos calcular la salida simplemente realizando la convolución $y(t)=x(t)*h(t)$



La respuesta al impulso de un sistema LTI es única.

Observaciones

- En realidad cualquier sistema sin necesidad de ser LTI tiene respuesta al impulso, que es la salida del dicho sistema cuando a la entrada se introduce el impulso unidad. Lo que ocurre es que dicha **respuesta al impulso sólo caracteriza completamente al sistema cuando es LTI. Sólo en ese caso, conocida la respuesta al impulso del sistema, podremos calcular la salida para cualquier entrada realizando una convolución.**

- En la práctica, si en algún problema nos dan como dato *h(t)* sin decirnos explícitamente que el sistema es LTI, daremos por supuesto que lo es.

2.3 Relación entre $h(t)$ y las propiedades de un sistema LTI (Sólo xa LTI !!!!)

La linealidad y la invarianza temporal no hace falta estudiarlas pues estamos suponiendo que el sistema es LTI

Sea un sistema LTI y sea $h(t)$ su respuesta al impulso.

Las propiedades de causalidad, estabilidad, memoria e invertibilidad de un sistema LTI se pueden estudiar fácilmente a través de la respuesta al impulso:

Causalidad

$$\text{El sistema LTI es causal} \;\Leftrightarrow\; h(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\text{El sistema LTI es causal} \;\Leftrightarrow\; h[n] = 0, \quad n < 0$$

Estabilidad

$$\text{El sistema LTI es estable} \;\Leftrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \;<\; \infty$$

$$\text{El sistema LTI es estable} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \;<\; \infty$$

Sin memoria

$$\text{El sistema LTI es sin memoria} \;\Leftrightarrow\; h(t) = k\delta(t)$$

$$\text{El sistema LTI es sin memoria} \;\Leftrightarrow\; h[n] = k\delta[n]$$

Invertibilidad [illegible]

Los sistemas LTI siempre son invertibles. Es decir siempre existe sistema inverso de un sistema LTI. El sistema inverso es, a su vez, LTI con respuesta al impulso $h_I(t)$ de forma que:

$$\big(x(t) * h(t)\big) * h_I(t) \;=\; x(t)$$

Hemos aplicado la propiedad asociativa de la convolución y que δ(*t*) es el elemento neutro de la convolución

Operando obtenemos:

$$x(t) * \big(h(t) * h_I(t)\big) \;=\; x(t) \quad\Rightarrow\quad x(t) * \delta(t) \;=\; x(t)$$

Por tanto:

$$h(t) * h_I(t) \;=\; \delta(t)$$

Esto lo entenderemos cuando veamos el tema 3, donde aprenderemos qué es la transformada de Fourier.

Pasando la última expresión a la frecuencia:

$$h(t) * h_I(t) \;=\; \delta(t) \;\xleftrightarrow{TF}\; H(j\omega)\cdot H_I(j\omega) \;=\; 1$$

y despejando nos queda:

$$\boxed{H_I(j\omega) \;=\; \frac{1}{H(j\omega)}}$$

que es la expresión que utilizaremos siempre para calcular la respuesta en frecuencia del sistema inverso.

①

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & \boxed{\begin{array}{c}LTI\\ h(t)\end{array}} \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \boxed{\begin{array}{c}LTI\\ h_I(t)\end{array}} \arrow[r] \arrow[d, "F"] & x(t) = x(t) * \underbrace{h(t) * h_I(t)}_{\delta(t)} \\
X(j\omega) & H(j\omega) & H_I(j\omega) & X(j\omega)\underbrace{H(j\omega)\, H_I(j\omega)}_{1} = X(j\omega)
\end{tikzcd}$$

2.4 Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones en diferencias.

Las ecuaciones en diferencias son el equivalente en tiempo discreto a las ecuaciones diferenciales en tiempo continuo.

Muchos sistemas aparecen descritos mediante una ecuación diferencial (si se trata de un sistema en tiempo continuo) o mediante una ecuación en diferencias (si se trata de un sistema en tiempo discreto).

Esto ya lo vimos en IACR cuando analizábamos circuitos en el dominio del tiempo.

Pero para conocer el comportamiento de un sistema no basta solamente con la ecuación diferencial (o en diferencias), también es necesario conocer la/s condicion/es inicial/es

Estos PVI's habitualmente los resolveremos haciendo uso de la transformada de Fourier, que veremos en los temas 3 y 4

Tiempo continuo

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \\ y(t_0) = c_0 \\ \displaystyle\frac{dy}{dt}(t_0) = c_1 \\ \ldots \\ \displaystyle\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(t_0) = c_{N-1} \end{array}\right\}$$

Tiempo discreto

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[n_0] = c_0 \\ y[n_0 - 1] = c_1 \\ \ldots \\ y[n_0 - (N-1)] = c_{N-1} \end{array}\right\}$$

Observaciones

- La señal de salida del sistema no solo depende de la entrada al mismo, sino también de las condiciones iniciales.
- → ⊙ Habitualmente se trabajará con las llamadas *condiciones de reposo inicial,* o condiciones iniciales nulas, es decir, $c_0 = c_1 = \ldots = c_{N-1} = 0$. En esta situación podremos asegurar que el sistema descrito será LTI y además causal y se cumplirá que si $x(t) = 0, \forall t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, \forall t < t_0$ (en tiempo continuo) ó que $x[n] = 0, \forall n < n_0 \Rightarrow y[n] = 0, \forall n < n_0$.

2.5 Formas de describir un sistema

A modo de resumen, en los ejercicios podremos encontramos sistemas descritos de distintas formas:

En esta asignatura es poco habitual

- Estructura física interna del sistema. Por ejemplo: un circuito RLC
- Describiendo cómo es la salida en función de la entrada. Por ejemplo:
  $y(t) = 3x(t-5) + 4$ ó también $y(t) = \dfrac{1}{T_1 + T_2} \displaystyle\int_{t-T_1}^{t+T_2} x(\tau) d\tau$, etc.
- Mediante un PVI (ecuación diferencial o en diferencias + condiciones iniciales). Por ejemplo:
  $$\left.\begin{array}{l} 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 8x(t) + 2\dfrac{dx(t)}{dt} \\ y(0) = 0 \end{array}\right\}$$
- Dando la respuesta al impulso (sólo caracterizará totalmente al sistema si es LTI).
  Por ejemplo: $h(t) = e^{-at}\dfrac{sen(\pi t)}{\pi t}$

TEMA 3: TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO.

3.1 Definición y concepto de transformada de Fourier.

Definición de transformada de Fourier

Sea $x(t)$ una señal en tiempo continuo. Se define la **transformada de Fourier** de $x(t)$ como:

$$\boxed{F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{\textcircled{-}j\omega t}\,dt}$$

Fíjate que al ser una integral definida en la variable t, el resultado va a depender únicamente de ω.

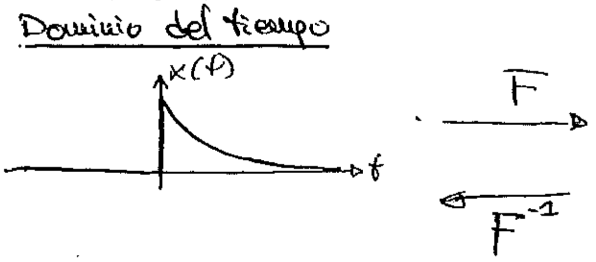
Definición de transformada inversa de Fourier

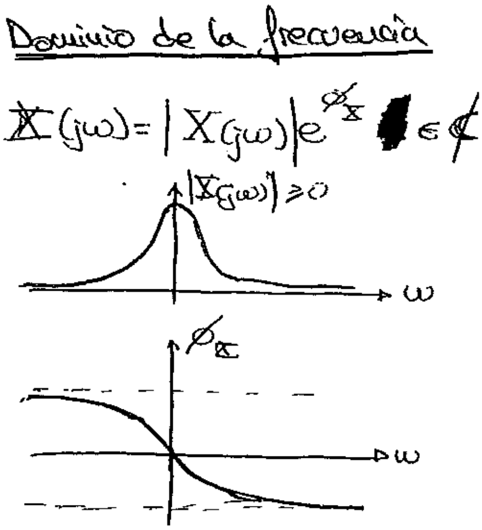
Sea $X(j\omega)$ la transformada de Fourier de una señal $x(t)$. Se define la transformada inversa de Fourier de $X(j\omega)$ como:

$$\boxed{F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{\textcircled{+}j\omega t}\,d\omega}$$

Fíjate que al ser una integral definida en la variable *ω*, el resultado va a depender únicamente de t.

Veamos un ejemplo gráfico:





A la transformada de Fourier se le llama *X(jω)* por cuestiones de notación.

En realidad, en muchos sitios se la llama simplemente *X(ω)*, ya que en realidad depende de la variable *ω*.

En otros sitios (por ej. TECM) la podrás ver como *X(f)*, ya que existe una relación directa entre *ω* y *f*, que es:

$\omega = 2\pi f$

Observaciones:

- Es importante darse cuenta de que $X(j\omega) \in \mathbb{C}$, es decir, $X(j\omega)$ es una función que en general toma valores complejos.
- $X(j\omega)$ estará definida para aquellos valores de ω para los que la integral anterior converja.
- No para cualquier señal existe su transformada de Fourier. Ahora bien, si existe la transformada de $x(t)$, es única.
- Calcular $X(j\omega)$, nos permite ver la señal temporal $x(t)$ en el dominio de la frecuencia. Recuerda que $\omega = 2\pi f$
- A $X(j\omega)$ también se la conoce como **espectro** (de frecuencias) de la señal $x(t)$.
- El espectro de frecuencias de una señal nos da una idea de cómo se distribuye la energía de la señal en sus diferentes componentes frecuenciales. De hecho podemos calcular la energía total de la señal *x(t)*, sin más que aplicar la relación de Parseval:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$$

Este es el motivo por el que a $|X(j\omega)|^2$ se le denomine *densidad espectral de energía* de la señal $x(t)$, ya que al integrarla se obtiene la energía de la señal $x(t)$.

Tipo señales	Ec de síntesis	Ec de análisis
Periódicas DSF	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$
No Periódicas TF	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Para calcular la T.F. de $x(t)$ primero hay que ver:

- Si se puede integrar directamente, se aplica la def.
- Si no se sabe integrar:
  + Se descompone en $x_1(t)$, $x_2(t)$ ... tales que si se sepa integrar directamente. La descomposición de $x(t)$ debe ser mediante operaciones que se conozcan también en el dominio espectral. ($x_1(t)$, $x_2(t)$, ... también pueden ser de la tabla de transformadas, y las operaciones deben aparecer en la tabla de propiedades)

3.2 Transformadas de Fourier de las señales más importantes.

(ejemplos y demos en el reverso)

Utilizaremos directamente la **tabla de pares de transformadas**, que es la que se puede usar en el examen.

Merece una atención especial el caso de las señales periódicas, puesto que como veremos posteriormente, toda señal *x(t)* periódica de periodo *T* se puede representar mediante su Desarrollo en Serie de Fourier (DSF) de la siguiente manera:

Importante:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Y su transformada de Fourier es:

Este par transformado es el primero de la tabla de transformadas

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Con esto podemos ver que toda señal periódica tiene un espectro compuesto por deltas, por eso se dice que las señales periódicas tienen "espectro de rayas".

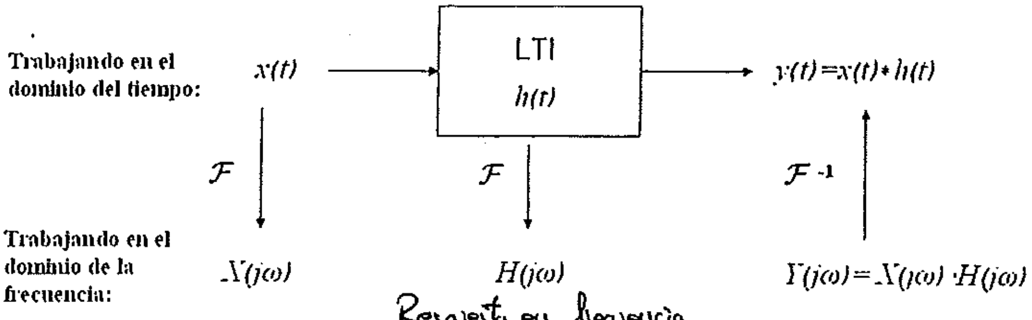
3.3 Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo continuo.

Utilizaremos directamente la **tabla de propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo**, que es la que se puede usar en el examen.

Muy Imp!

3.4 Transformada de Fourier en los sistemas LTI. (Lo ⊕ IMPORTANTE!!!)

Ahora que conocemos la transformada de Fourier, podemos calcular la salida de un sistema LTI conocida la entrada mediante un procedimiento alternativo al cálculo de la convolución de *x(t)* con *h(t)*. Se trata simplemente de trabajar en el dominio de la frecuencia y aplicar la propiedad de que "convolucionar en el dominio del tiempo equivale a multiplicar en el dominio de la frecuencia". El siguiente gráfico explica el procedimiento:



Respuesta en frecuencia del sistema

Sea x(t) una señal periódica:

$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow y(t) = \sum b_k e^{j\omega_0 t} = \sum a_k H(jk\omega_0) e^{j\omega_0 k}$

en el dominio de T.F. está en la pág 3.5 (reverso)

TRANSFORMADAS GENERALIZADAS.

- $u(t) \longleftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$ (esta se pone sin demostración)

- $X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int 2\pi\,\delta(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = 1$$

demostración con la (T.F.$^{-1}$

- $X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int 2\pi\,\underbrace{\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}}_{\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega_0 t}}\,d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

- $x(t)$ periodica

$$x(t) = \sum a_k\,e^{jk\omega_0 t} \qquad X(j\omega) = T.F.(x(t)) = \sum a_k\,TF\left(e^{jk\omega_0 t}\right) =$$

$$= \sum 2\pi\,a_k\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

$\boxed{\text{Ejemplos:}}$

$$x(t) = \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = T.F.(x(t)) = \frac{1}{2}\,TF\left(e^{j\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2}\,TF\left(e^{-j\omega_0 t}\right) = \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

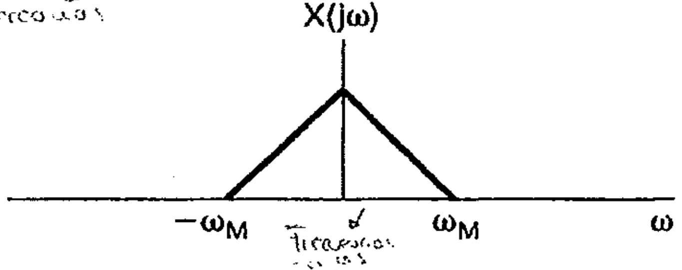
$$x(t) = \operatorname{sen}\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j}\,TF\left(e^{j\omega_0 t}\right) - \frac{1}{2j}\,TF\left(e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega+\omega_0)$$

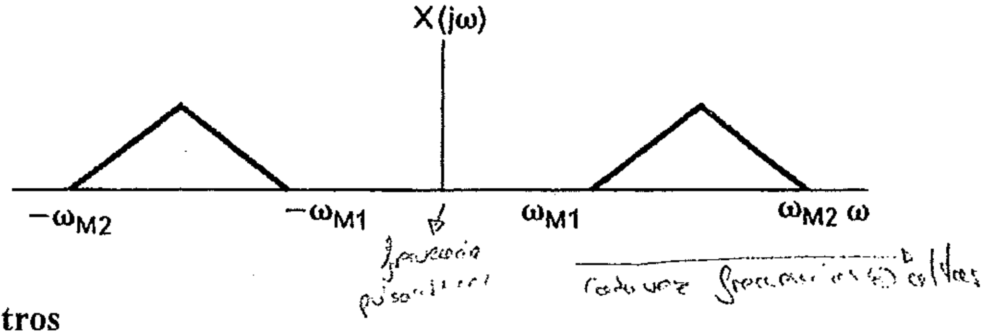
3.5 Señales paso bajo y paso banda

Diremos que una señal es **paso bajo** cuando $X(j\omega) = 0 \ , |\omega| > \omega_M$

(Frecuencias bajas, son las cercanas al cero)



Diremos que una señal es **paso banda** cuando $X(j\omega) = 0 \ , \ \omega_{M1} < \ |\omega| \ < \omega_{M2}$



Importante

3.6 Filtros

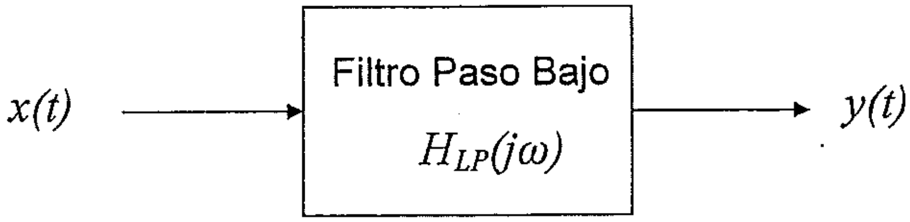
Son ideales porque la las transiciones entre banda de paso y banda eliminada son totalmente verticales. Esto en la práctica es muy difícil de conseguir. En ADCT se aprende a diseñar filtros reales (no ideales) con resistencias, bobinas y condensadores.

Ad+ no tiene retardo ni en la banda eliminada ni en la banda de paso.

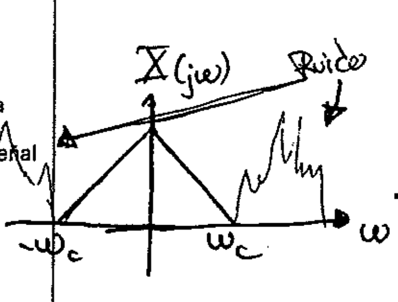
LP: low pass

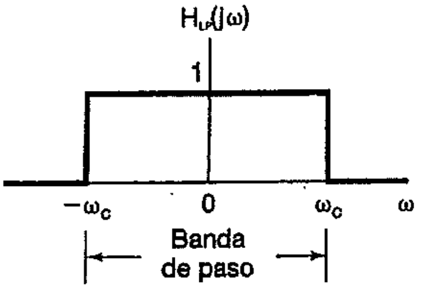
Los filtros están destinados a seleccionar con exactitud o muy aproximadamente algunas bandas de frecuencias y rechazar otras. A continuación veremos ejemplos típicos de filtros ideales.

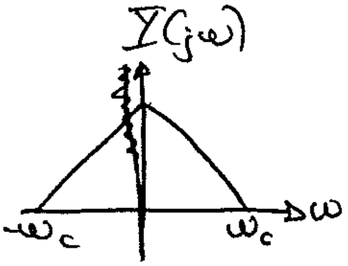
Filtro paso bajo ideal



Fíjate que sólo deja pasar las bajas frecuencias de la señal de entrada.



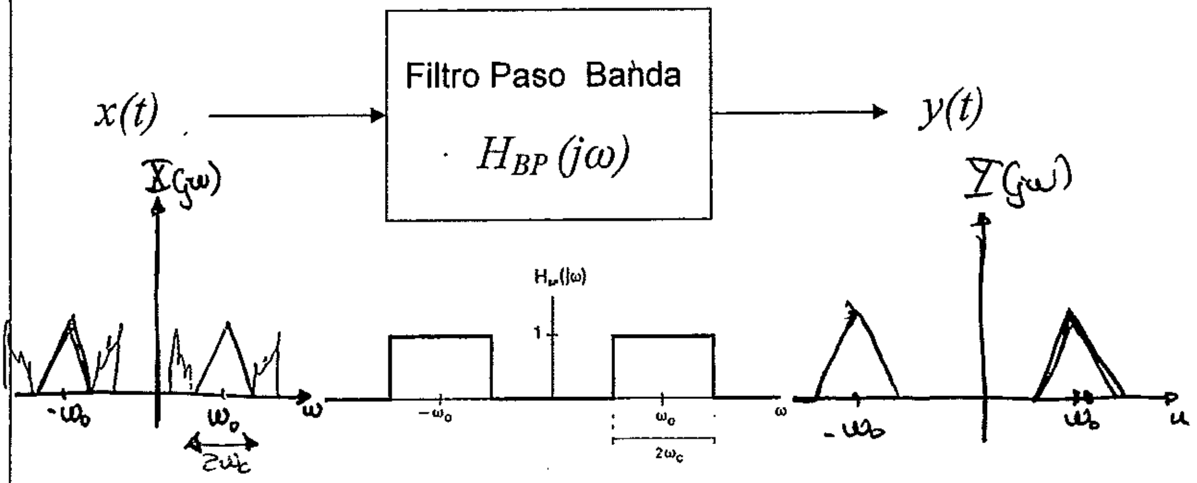




Lo puedes ver en la tabla de transformadas

La respuesta en frecuencia es: $H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 \ , & |\omega| < \omega_c \\ 0 \ , & |\omega| > \omega_c \end{cases}$ por lo que su respuesta al impulso será: $h_{LP}(t) = \dfrac{\text{sen}\, \omega_c t}{\pi t} = \dfrac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \dfrac{\omega_c t}{\pi}$

Filtro paso banda ideal



Fíjate que deja pasar las frecuencias de la señal de entrada dentro de una banda de alrededor de ω₀

BP: band pass

La respuesta en frecuencia la podemos expresar como:

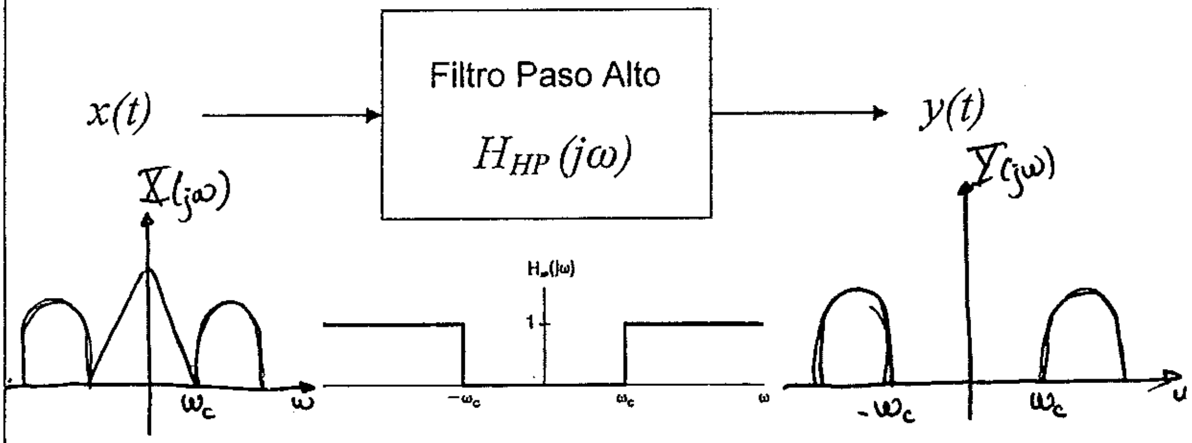
$$H_{BP}(j\omega) = H_{LP}(j(\omega+\omega_0)) + H_{LP}(j(\omega-\omega_0))$$

Aplicando la propiedad de que "desplazar en frecuencia equivale a multiplicar por exponencial en el dominio del tiempo"

por lo que su respuesta al impulso será:

$$h_{BP}(t) = e^{j\omega_0 t} h_{LP}(t) + e^{-j\omega_0 t} h_{LP}(t) = 2\cos(\omega_0 t) h_{LP}(t)$$

Filtro paso alto ideal



Fíjate que sólo deja pasar las altas frecuencias de la señal de entrada.

HP: high pass

La respuesta en frecuencia la podemos expresar como:

$$H_{HP}(j\omega) = 1 - H_{LP}(j\omega)$$

por lo que su respuesta al impulso será:

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - h_{LP}(t)$$

3.7 Propiedad de Modulación

- Al multiplicar una señal paso bajo $x(t)$ por $\cos\omega_0 t$, la convertimos en unas señal paso banda alrededor de ω_0 .A este proceso se le conoce como modulación.
- Para recuperar la señal paso bajo a partir de la señal paso banda, podemos volver a multiplicar esta por $\cos\omega_0 t$, y posteriormente filtrar paso bajo.

Veremos los detalles matemáticos sobre esto al hacer ejercicios.

3.8 Series de Fourier

①at

Importante:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

es la pulsación fundamental de la señal periódica.

Toda señal periódica $x(t)$ de período fundamental T se puede representar mediante un **desarrollo en serie de Fourier** de la siguiente forma (**ecuación de síntesis**):

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}}$$

donde lo único que hay que calcular son los coeficientes a_k, para lo que utilizaremos la siguiente ecuación (**ecuación de análisis**): $a_k = \frac{1}{T} X_p(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk(2\pi/T)t}\, dt}$$

Donde
$x_p(t)$ es solo un
periodo de $x(t)$

Observa que el coeficiente a_0 no es otra cosa que el valor medio de la señal $x(t)$ en un periodo. Por eso se dice que representa la "componente continua" de la señal.

Observación: A la hora de utilizar la anterior ecuación es recomendable hacer el caso $k = 0$ como caso particular, es decir:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$$

ya que, en muchas ocasiones, este resultado no queda recogido en la expresión general de los coeficientes a_k

Relación con la transformada de Fourier

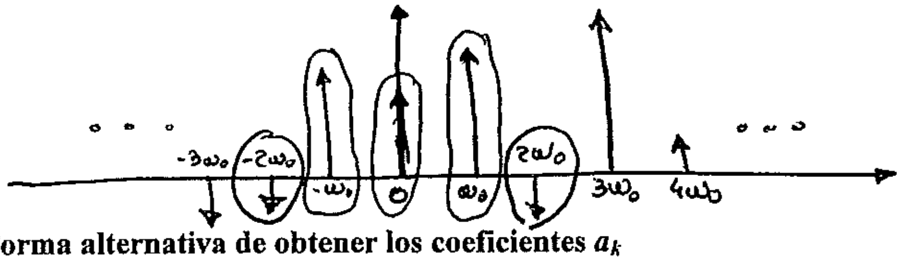
De nuevo remarcamos el concepto de que la transformada de Fourier de una señal periódica es un espectro de deltas.

Como podemos observar en la tabla de pares de transformadas, la transformada de Fourier de un desarrollo en serie de Fourier siempre es:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Observaciones:

La componente obtenida para $k= 0$ está relacionada con el valor medio (o componente continua) de la señal.
A las componentes obtenidas para $k=\pm 1$ se las denomina primer armónico (o fundamental)
A las componentes obtenidas para $k=\pm 2$ se las denomina segundo armónico
...
A las componentes obtenidas para $k=\pm n$ se las denomina enésimo armónico



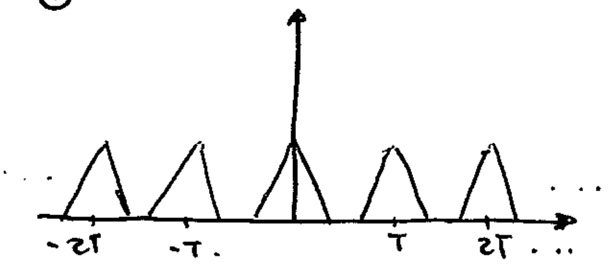
Forma alternativa de obtener los coeficientes a_k

Se puede demostrar que si llamamos $X_p(j\omega)$ a la transformada de Fourier de un sólo periodo de la señal periódica $x(t)$, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ se pueden obtener como:

Esto significa que los a_k de un DSF son las "muestras" equiespaciadas en ω_0 de la TF de un periodo de la señal periódica

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} X_p(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T} X_p(jk\omega_0) = \frac{1}{T} X_p(jk\frac{2\pi}{T})}$$

①



Periodo fundamental:
menor de los posibles
periodos. En el dibujo T.

TEOREMA DE POISSON

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

Por tanto $$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} X(jk\omega_0)\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

TEMA 4: TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO.

4.1 Definición y concepto de transformada de Fourier en tiempo discreto.

Definición de transformada de Fourier

Fíjate que al ser un sumatorio con índice *n*, el resultado va a depender únicamente de ω.

Sea $x[n]$ una señal en tiempo discreto. Se define la **transformada de Fourier** de $x[n]$ como:

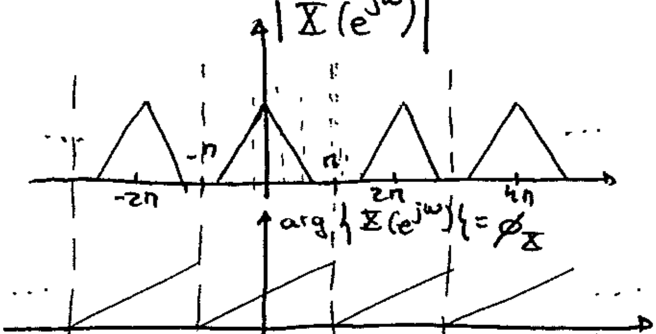
$$\boxed{F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

¡OJO! la ω de la transformada de Fourier en tiempo discreto se mide en rad y no en rad/s como la de tiempo continuo.

- La notación para la TF en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$ para distinguirla de la TF en tiempo continuo $X(j\omega)$ que ya hemos utilizado en el tema anterior.
- **La principal diferencia con la trasformada de Fourier de una señal en tiempo continuo, es que la transformada de Fourier de una señal en tiempo discreto, es una función periódica de periodo 2π.** Por eso la parte realmente importante es la comprendida en el intervalo $\omega \in [-\pi, \pi]$, puesto que en el resto se repite.
- Dentro de dicho intervalo se consideran como "bajas frecuencias" aquellas en torno a $\omega = 0$ y como "altas frecuencias" aquellas en torno a $\omega = \pm\pi$. Si consideramos todo el margen posible de ω, las "bajas frecuencias" serán aquellas en torno a $\omega = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, mientras que las "altas frecuencias" serán aquellas en torno a $\omega = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Esto tiene su importancia a la hora de pensar cómo deben ser los filtros en tiempo discreto.

Veamos un ejemplo gráfico:



Máxima frecuencia
π, 3π, ... y sus
alrededores.

Definición de transformada inversa de Fourier

Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de una señal en tiempo discreto $x[n]$. Se define la transformada inversa de Fourier de $X(e^{j\omega})$ como:

$$\boxed{F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{+j\omega t}\,d\omega}$$

Fíjate que al ser una integral definida en la variable ω, el resultado va a depender únicamente de n.

Observaciones:

- Es importante darse cuenta de que $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{C}$, es decir, $X(e^{j\omega})$ es una función que en general toma valores complejos.
- $X(e^{j\omega})$ estará definida para aquellos valores de ω para los que el sumatorio de la transformada directa converja.
- No para cualquier señal existe su transformada de Fourier. Ahora bien, si existe la transformada de $x[n]$, es única.
- Calcular $X(e^{j\omega})$, nos permite ver la señal temporal $x(t)$ en el dominio de la

	Ec. Síntesis	Ec. Análisis	Cate Periódico
Señales periódicas DSF	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ [Periódica N)	$\exists$ $\sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert < \infty$
Señales no periód.	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega.$	$X[e^{j\omega}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$ (Periód. 2π)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert < \infty$

frecuencia.

- $X(e^{j\omega})$ también se la conoce como **espectro** (de frecuencias) de la señal $x[n]$.
- El espectro de frecuencias de una señal nos da una idea de cómo se distribuye la energía de la señal en sus diferentes componentes frecuenciales. De hecho podemos calcular la energía total de la señal $x[n]$, sin más que aplicar la relación de Parseval:

Observa que aquí la integral sólo se extiende sobre un periodo del espectro, por tratarse de un espectro periódico.

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

Este es el motivo por el que a $|X(e^{j\omega})|^2$ se le denomine *densidad espectral de energía* de la señal $x[n]$, ya que al integrarla sobre un periodo del espectro, se obtiene la energía de la señal $x[n]$.

4.2 Transformadas de Fourier de las señales más importantes.

Utilizaremos directamente la **tabla de pares de transformadas**, que es la que se puede usar en el examen. Merece una atención especial el caso de las señales discretas periódicas, puesto que como veremos posteriormente, toda señal $x[n]$ periódica de periodo N se puede representar mediante su Desarrollo en Serie de Fourier (DSF) de la siguiente manera:

¡OJO! Como luego veremos en más detalle, el DSF de una secuencia periódica, no tiene infinitos coeficientes, sino sólo N distintos.

$$x[n] \;=\; \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Y su transformada de Fourier es:

Este par transformado es el primero de la tabla de transformadas

$$\boxed{x[n] \;=\; \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \;\xleftrightarrow{TF}\; X(e^{j\omega}) \;=\; 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})}$$

Con esto podemos ver que toda señal periódica tiene un espectro compuesto por deltas, por eso se dice que las señales periódicas tienen "espectro de rayas".

4.3 Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

Utilizaremos directamente la **tabla de propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto**, que es la que se puede usar en el examen.

Las propiedades son muy similares a las ya vistas en tiempo continuo. Destacaremos dos de ellas por diferir de manera importante con las vistas en el tema anterior:

1) "Multiplicar en el dominio del tiempo equivale a realizar una convolución **periódica o circular** en el dominio de la frecuencia":

$$x[n]y[n] \;\xleftrightarrow{F}\; \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

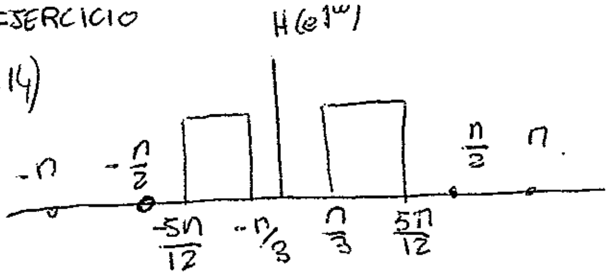
2) La propiedad de "cambio de escala", cambia por:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] \text{ , si n es múltiplo de k} \\ 0 \text{ , si n no es múltiplo de k} \end{cases} \;\xleftrightarrow{F}\; X(e^{jk\omega})$$

EJERCICIO

(3.14)

$H(e^{j\omega})$



b) $x_2(n) = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Downarrow$

$y_2(n) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$

el 1 no pasa por el filtro, al convertirlo es una δ centrada en 0.

Por partes:

$$* \quad 1 \Rightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega + 2\pi l) \rightarrow Y_2(e^{j\omega}) = \sum 2\pi H(e^{j\cdot 0})\,\delta(\omega + 2\pi l) \Rightarrow y(n) = 0$$

$$* \quad \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} e^{j\frac{3\pi}{8}n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j} e^{-j\frac{3\pi}{8}n} \xrightarrow{TF} \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{8} + 2\pi l\right) - \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{8} + 2\pi l\right)$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}\sum \overset{1}{\cancel{H(e^{j\frac{3\pi}{8}})}}\,\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{8} + 2\pi l\right) - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j}\sum \overset{1}{\cancel{H(e^{-j\frac{3\pi}{8}})}}\,\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{8} + 2\pi l\right).$$

c) $x_3[n] = \sum\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k] \Rightarrow$

$$X_3[e^{j\omega}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{4}\right).$$

↳ $\delta \Rightarrow 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$

$N = 4 \Rightarrow a_0, a_1, a_2, a_3$

↳ Tiene 4 armónicos y 4 δ por periodo.

$$Y_3[e^{j\omega}] = \sum 2\pi a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{4}})\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow y_3[n] = 0.$$

d) Calcula los coeficientes de x_3.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$x_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k] =$$

3:K

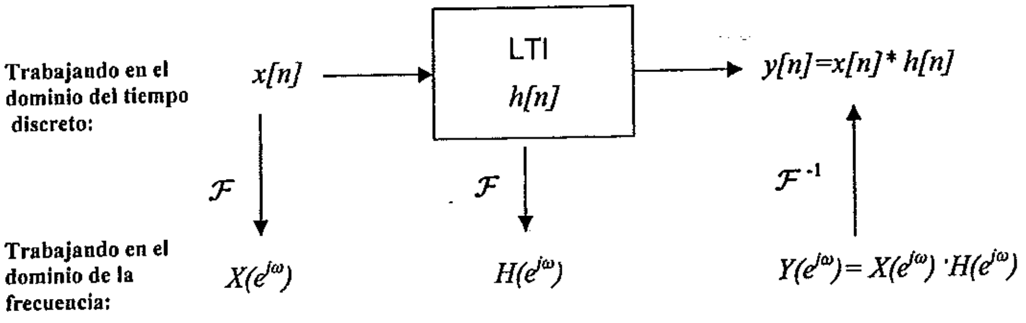
$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1[n-4k] = x_1(n) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\cdot\sum\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

Hemos llegado a la fórmula de Poison.

$$= \sum 2\pi\frac{X_1(e^{j\omega})}{N}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \sum 2\pi\frac{X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})}{N}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

4.4 Transformada de Fourier en los sistemas LTI.

Ahora que conocemos la transformada de Fourier, podemos calcular la salida de un sistema LTI conocida la entrada mediante un procedimiento alternativo al cálculo de la convolución de *x[n]* con *h[n]*. Se trata simplemente de trabajar en el dominio de la frecuencia y aplicar la propiedad de que "convolucionar en el dominio del tiempo equivale a multiplicar en el dominio de la frecuencia". El siguiente gráfico explica el procedimiento:



Recuerda que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema LTI, $H(e^{j\omega})$, recibe el nombre de respuesta en frecuencia del sistema.

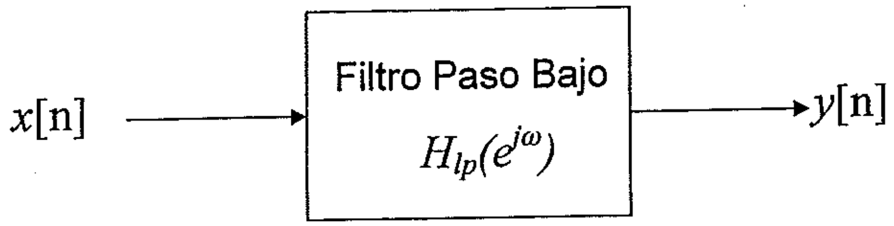
4.5 Filtros

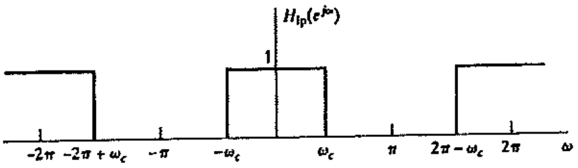
Los filtros están destinados a seleccionar con exactitud o muy aproximadamente algunas bandas de frecuencias y rechazar otras. A continuación veremos ejemplos típicos de filtros ideales en tiempo discreto.

Son ideales porque la las transiciones entre banda de paso y banda eliminada son totalmente verticales. Esto en la práctica es muy difícil de conseguir. En TDSÑ se aprende a diseñar filtros para señales en tiempo discreto mediante algoritmos.

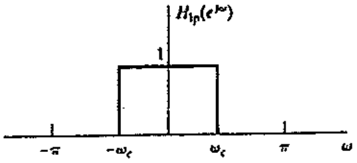
Filtro paso bajo ideal

LP: low pass





Fíjate que sólo deja pasar las bajas frecuencias de la señal de entrada, aquellas en torno a $\omega = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$



Recuerda que basta con conocer el intervalo $\omega \in (-\pi,\pi]$ puesto que la transformada de Fourier en tiempo discreto es periódica de periodo 2π

La respuesta en frecuencia es: $H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1\ , & |\omega| < \omega_c \\ 0\ , & |\omega| > \omega_c \\ Periodo\ 2\pi \end{cases}$ por lo que su respuesta al impulso será: $h_{lp}[n] = \dfrac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n} = \dfrac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\dfrac{\omega_c n}{\pi}$

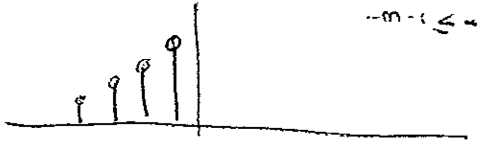
Lo puedes ver en la tabla de transformadas

5.22.

b) $x[m] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} u[-m-1]$.

$\llcorner -m-1 \geq 0$

$-m-1 \leq -1$



cambio $m=-n$

$$\rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum x(m) e^{-j\omega m} = \sum_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^{n}$$

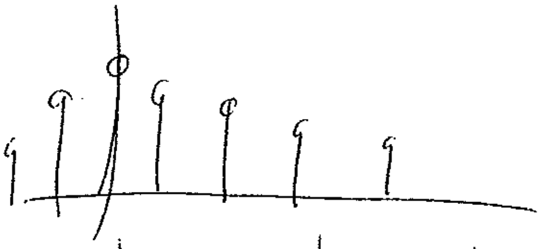
$$= \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

5.21

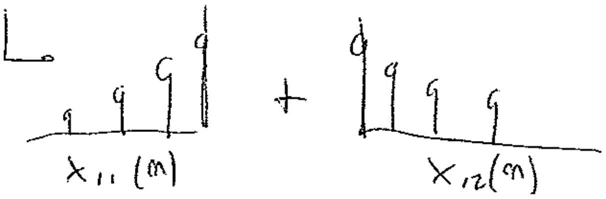
e) $x(m) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}}_{x_1(m)} \cos\left(\frac{\pi}{8}m - \frac{\pi}{8}\right)$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2} x_1(m) e^{j\frac{\pi}{8}m} + \frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}m} X(m)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2} X_1 e^{j(\omega-\frac{\pi}{8})} + \frac{e^{j\pi/8}}{2} X_1\left(e^{j(\omega+\frac{\pi}{8})}\right)$$

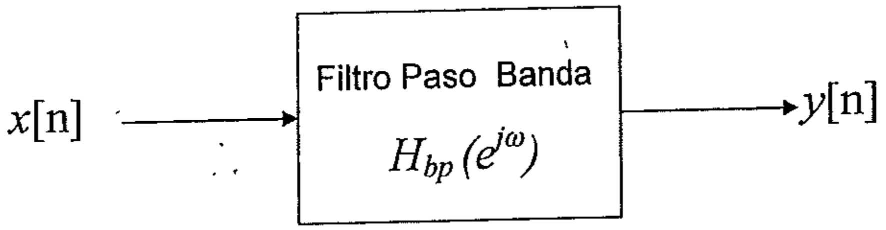


$X_1(e^{j\omega}) = X_{11}(e^{j\omega}) + X_{22}(e^{j\omega})$



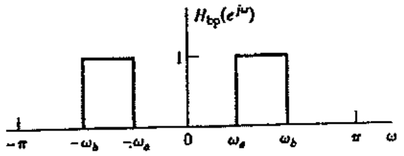
$X_{11}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ $\qquad$ $X_{22}(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$

Filtro paso banda ideal



Fíjate que deja pasar las frecuencias de la señal de entrada dentro de una banda de alrededor de ω_0

Recuerda que basta con conocer el intervalo $\omega \in (-\pi, \pi]$ puesto que la transfomada de Fourier en tiempo discreto es periódica de periodo 2π



La respuesta en frecuencia la podemos expresar como:

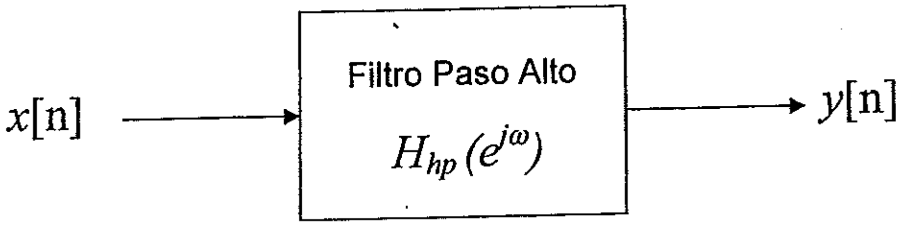
$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega+\omega_0)}) + H_{lp}(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Aplicando la propiedad de que "desplazar en frecuencia equivale a multiplicar por exponencial en el dominio del tiempo"

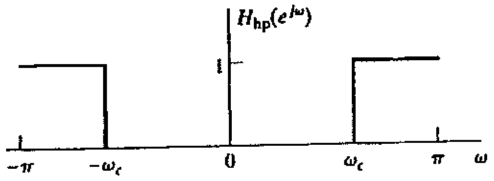
por lo que su respuesta al impulso será:

$$h_{bp}[n] = e^{j\omega_0 n} h_{lp}[n] + e^{-j\omega_0 n} h_{lp}[n] = 2\cos(\omega_0 n) h_{lp}[n]$$

Filtro paso alto ideal



Fíjate que sólo deja pasar las altas frecuencias de la señal de entrada, es decir, aquellas en torno a $\omega = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$



La respuesta en frecuencia la podemos expresar como:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$

por lo que su respuesta al impulso será:

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$$

Importante:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

es la pulsación fundamental de la señal periódica.

Fíjate que el sumatorio sólo tiene N términos en total. Es la principal diferencia con el DSF en tiempo continuo.

4.6 Series de Fourier

Toda señal periódica $x[n]$ de período fundamental N se puede representar mediante un **desarrollo en serie de Fourier** de la siguiente forma (**ecuación de síntesis**):

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}}$$

Fíjate que el sumatorio se extiende a un solo periodo de la señal, típicamente desde la muestra $n=0$ hasta la muestra $n=N-1$.

donde lo único que hay que calcular son los coeficientes a_k, para lo que utilizaremos la siguiente ecuación (**ecuación de análisis**):

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_o n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}}$$

Observa que el coeficiente a_0 no es otra cosa que el valor medio de la señal $x[n]$ en un periodo. Por eso se dice que representa la "componente continua" de la señal.

Observación: A la hora de utilizar la anterior ecuación es recomendable hacer el caso $k=0$ como caso particular, es decir:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]$$

ya que, en muchas ocasiones, este resultado no queda recogido en la expresión general de los coeficientes a_k

---

Solo hay N coeficientes de Fourier distintos ya que:

$$a_k = a_{k+N}$$

Principal diferencia con la serie de Fourier de señales continuas

La serie de Fourier de una señal $x[n]$ periódica de período N es siempre una serie finita con N términos, a diferencia de la serie de Fourier de una señal continua $x(t)$ que se representa siempre por una suma infinita de términos.

Relación con la transformada de Fourier

Como podemos observar en la tabla de pares de transformadas, la transformada de Fourier de un desarrollo en serie de Fourier siempre es:

De nuevo remarcamos el concepto de que la transformada de Fourier de una señal periódica es un espectro de deltas.

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})}$$

Es importante hacer notar en el anterior par transformado que, aunque la serie de Fourier en tiempo discreto es siempre una serie finita con N términos, su transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ es una serie infinita que, por supuesto, representa una función de período 2π .

Forma alternativa de obtener los coeficientes a_k

Se puede demostrar que si llamamos $X_p(e^{j\omega})$ a la transformada de Fourier de un sólo periodo de la señal periódica $x[n]$, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x[n]$ se pueden obtener como:

Esto significa que los a_k de un DSF son las "muestras" equiespaciadas en ω_o de la TF de un periodo de la señal periódica

$$a_k = \frac{1}{N}X_p(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\omega_o} = \frac{1}{N}X_p(e^{jk\omega_o}) = \frac{1}{N}X_p(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$$

4.7 Transformada Z

4.7.1 Definición de transformada de Z

Con la transformada Z tenemos una representación de la señal x[n] en el plano complejo.

La transformada Z se define como una serie infinita que converge o diverge según los valores de *z*.

Sea $x[n]$ una señal en tiempo discreto. Se define la **transformada Z** de $x[n]$ como:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

La transformada de Fourier en tiempo discreto no es más que una particularización de la transformada Z cuando $z = e^{j\omega}$, que geométricamente representa una circunferencia de radio unidad centrada en el origen sobre el plano complejo Z.

4.7.2 Región de convergencia (ROC)

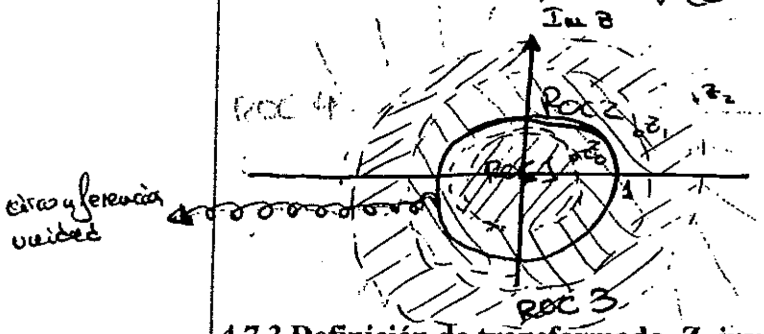
En general la transformada Z de una secuencia lleva asociada una región del plano complejo Z, para la cual $X(z)$ converge. Esta región se conoce como **Región de Convergencia** (abreviadamente **ROC**).

Las distintas posibles regiones de convergencia, vienen delimitadas por los puntos singulares de la función $X(z)$. Es muy importante darse cuenta de que **una misma *X(z)* dependiendo de la ROC con la que trabajemos, estará asociada a distintas señales en el dominio del tiempo discreto. Por tanto, no basta con calcular la *X(z)*, sino que siempre hay que especificar su ROC correspondiente.**

Si la ROC incluye la circunferencia unidad, entonces la transformada de Fourier de $x[n]$ existe porque converge, mientras que si no la incluye, la transformada de Fourier de la señal no existe.

$$X(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2\,(z-z_1)^*(z-z_2)}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$



$X(z)$, ROC 1 $\xleftrightarrow{T_z^{-1}}$ $x_1[n]$, $\nexists\ X_1(e^{j\omega}$

$X(z)$, ROC2 $\xleftrightarrow{T_z^{-1}}$ $x_2[n]$, $\exists\ X_2(e^{j}$

$X(z)$, ROC3 $\xleftrightarrow{T_z^{-1}}$ $x_3[n]$, $\nexists\ X_3(e^{j\omega}$

$X(z)$, ROC4 $\xleftrightarrow{T_z^{-1}}$ $x_4[n]$, $\nexists\ X_4(e^{j}$

↳ q contiene la circunf. unidad

4.7.3 Definición de transformada Z inversa

Fíjate que esta integral puede resolverse aplicando el teorema de los residuos (visto en MMT1), aunque en la práctica la transformada Z inversa se suele hacer mediante descomposición en fracciones simples.

Sea $X(z)$ la transformada Z una señal $x[n]$. Se define la transformada Z inversa de $X(z)$ como:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\oint X(z)\,z^{n-1}\,dz}$$

Donde el círculo sobre el símbolo integral denota la integración alrededor de un contorno circular cerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, centrado en el origen y con radio *r*. El valor de r puede escogerse como cualquier valor para el cual $X(z)$ converge.

4.7.4 Propiedades de la ROC

Propiedad 1. Si $x[n]$ es finita y de energía finita, entonces la ROC es todo el plano complejo excepto quizás $z=0$ y $z=\infty$.

La única señal que converge simultáneamente en $z=0$ y $z=\infty$ es $x[n]=\delta[n]$.

Ok

Propiedad 2. Si $x[n]$ es ilimitada hacia la derecha, entonces la ROC es una corona circular hacia afuera, excepto posiblemente $z=\infty$.

Propiedad 3. Si $x[n]$ es ilimitada hacia la izquierda, entonces la ROC es una corona circular hacia adentro, excepto posiblemente el origen.

Propiedad 4. Si $x[n]$ es ilimitada en ambos sentidos, entonces la ROC (si existe), es una corona circular.

4.7.5 Transformadas Z más importantes

$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>a \\ x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{TZ} X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|<a \end{array}}$$

Fíjate que para dos x[n] diferentes, tenemos la misma X(z), pero no se trata de la mismo puesto que las ROC son diferentes.

$$x[n] = u[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1$$

No es más que una particularización de una de las anteriores. Observa, que de acuerdo con la ROC, estrictamente hablando no existe la transformada de Fourier de u[n], puesto que la ROC no incluye la circunferencia unidad. Por eso, en este caso no se cumple $U(e^{j\omega}) = U(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

4.7.6 Propiedades de la transformada Z más importantes

Dadas:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{TZ} X_1(z), \text{ ROC1}$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{TZ} X_2(z), \text{ ROC2}$$

Se cumple:

Linealidad

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \xleftrightarrow{TZ} X_3(z) = X_1(z) + X_2(z), \text{ ROC3}$$

ROC3 contiene $ROC1 \cap ROC2$ (lo más habitual es que $ROC3 = ROC1 \cap ROC2$)

Convolución

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{TZ} X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z), \text{ ROC3}$$

ROC3 contiene $ROC1 \cap ROC2$ (lo más habitual es que $ROC3 = ROC1 \cap ROC2$)

Desplazamiento temporal (la que más vamos a usar)

$$x_3[n] = x_1[n-n_0] \xleftrightarrow{TZ} X_3(z) = X_1(z) \cdot z^{-n_0}, \text{ ROC3}$$

ROC3=ROC1, excepto quizás $z=0$ y $z=\infty$.

Diferenciación en z

$$x_3[n] = nx_1[n] \xleftrightarrow{TZ} X_3(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz}, \text{ ROC3}$$

ROC3=ROC1

4.7.7 Transformada Z en los sistemas LTI

Dado un sistema LTI donde la entrada es $x[n]$, la salida es $y[n]$ y la respuesta al impulso es $h[n]$, llamaremos **función de transferencia** a la transformada Z de $h[n]$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \text{ Función de transferencia.}$$

Recuerda:
La transformada de Fourier de la respuesta al impulso $h[n]$ se denomina **respuesta en frecuencia**

La respuesta en frecuencia se puede obtener particularizando la función de transferencia en la circunferencia unidad, y sólo existe asociada a la ROC que contenga a la circunferencia unidad, es decir:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}}$$

En los sistemas descritos por ecuaciones en diferencias, la función de transferencia *H(z)* es una función racional (cociente de polinomios de z). Es muy típico construir el diagrama de polos y ceros de la función. Recuerda que los polos son puntos singulares de la función *H(z)*, y delimitan las posibles regiones de convergencia.

Se dice que un sistema es **causal**, cuando su salida depende únicamente del instante actual e instantes pasados, pero no de instantes futuros. Si es LTI, equivale a que $h[n] = 0, \ \forall n < 0$

Se dice que un sistema es **anticausal**, cuando su salida depende exclusivamente de valores en instantes futuros. Si es LTI, equivale a que $h[n] = 0, \ \forall n > 0$

Se dice que un sistema es no causal, cuando su salida depende de instantes pasados, del instante actual, y de instantes futuros.

Propiedades de los sistemas LTI

Causalidad:

Sistemas causales serán aquellos con la ROC hacia fuera del polo más externo.
Sistemas anticausales serán aquellos con la ROC hacia dentro del polo más interno
Sistemas no causales serán aquellos con la ROC en forma de corona.

Estabilidad:

Los sistemas estables serán aquellos cuya ROC incluya la circunferencia unidad.

Invertibilidad:

Dado un sistema con función de transferencia $H(z)$, su sistema inverso será aquel con función de transferencia:

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Observación: los sistemas donde todos los ceros y polos están dentro de la circunferencia unidad, se denominan **sistemas de fase mínima**.

TIEMPO CONTINUO

Transformada de Fourier $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$	Transformada de Fourier inversa $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$
Coeficientes de la serie de Fourier (Ecuación de análisis) $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$	Serie de Fourier (Ecuación de síntesis) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$

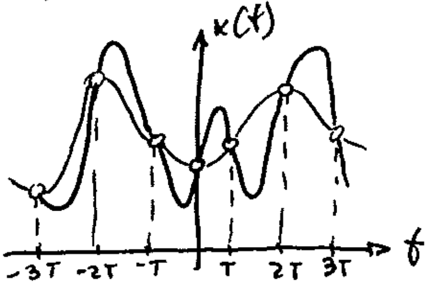
TIEMPO DISCRETO

Transformada de Fourier $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$	Transformada de Fourier inversa $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$
Coeficientes de la serie de Fourier (Ecuación de análisis) $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	Serie de Fourier (Ecuación de síntesis) $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

TEMA 5: MUESTREO

5.1 Introducción

Bajo ciertas condiciones, una señal continua puede reconstruirse por completo partiendo del conocimiento de sus valores o muestras en puntos equiespaciados en el tiempo. Esta propiedad un tanto sorprendente, se deriva de un resultado básico que se conoce como el teorema de muestreo.



Gran parte de la importancia del teorema de muestreo (o de Nyquist) reside en su papel de puente entre las señales continuas y las discretas. Como veremos posteriormente en este tema, el hecho de que, bajo ciertas condiciones, una señal continua se pueda recuperar por completo a partir de una secuencia de sus muestras, proporciona un mecanismo para representar una señal continua mediante una señal discreta.

5.1 Muestreo ideal

El **muestreo ideal** consiste en multiplicar la señal $x(t)$ que se desea muestrear por un tren de deltas separadas cada T segundos. De esta forma conseguimos aislar los valores de la señal $x(t)$ en los instantes de muestreo. A continuación se describe el proceso en el dominio del tiempo (a la izquierda) y en el dominio de la frecuencia (a la derecha).

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \qquad X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$$

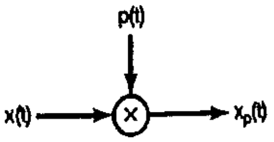
$$x_p(t) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \qquad X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \xrightarrow{} \frac{\pi}{T}$$

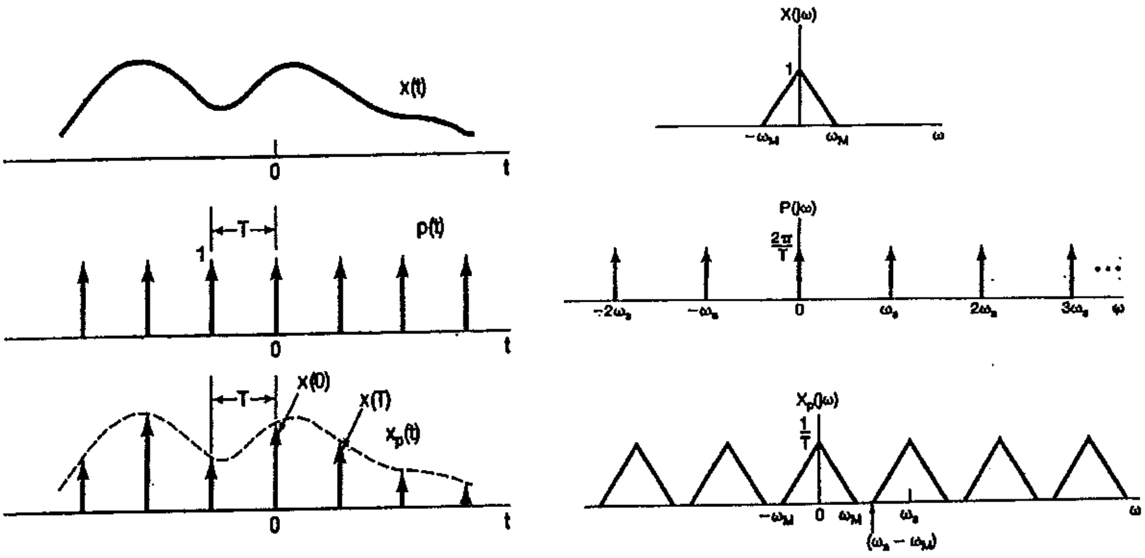
$$\xleftrightarrow{F}$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\delta(t-nT) \qquad X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j\omega)*\delta(\omega-k\omega_s)$$

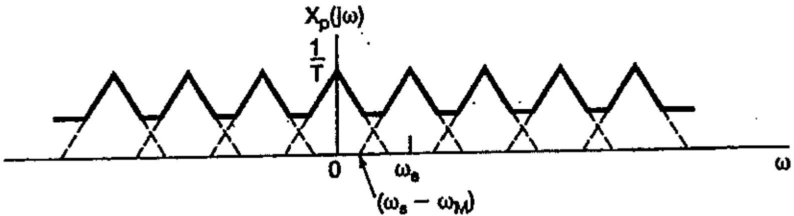
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT) \qquad X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega-k\omega_s))}$$





Como ves, en principio es posible recuperar la señal original mediante un filtro paso bajo adecuado, como veremos en la siguiente página. Sin embargo, es importante darse cuenta de lo que ocurriría si $\omega_s \leq 2\omega_M$. El espectro de la señal resultante sería el de la figura siguiente, siendo imposible recuperar la señal original:



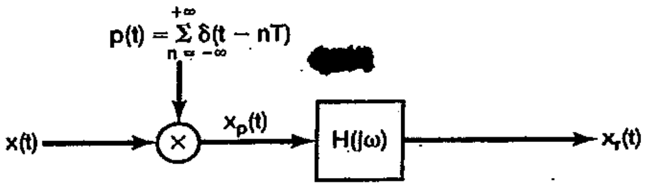
En este caso no se cumple el Teorema de Nyquist y se produce solapamiento espectral o *aliasing*

5.1.1 Reconstrucción de la señal original a partir de su muestreo ideal.

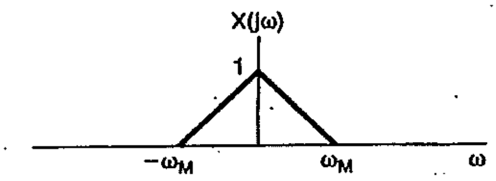
Suponiendo que se cumple $\omega_s > 2\omega_M$.(Teorema de Nyquist) ,es posible recuperar de forma exacta la señal continua original a partir de sus muestras equiespaciadas, sin más que utilizar un filtro paso bajo ideal.

El sistema de muestreo y reconstrucción de la señal es el siguiente:

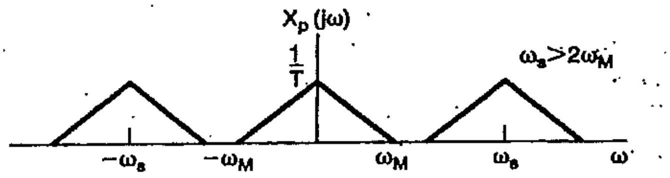
Sistema de muestreo y reconstrucción



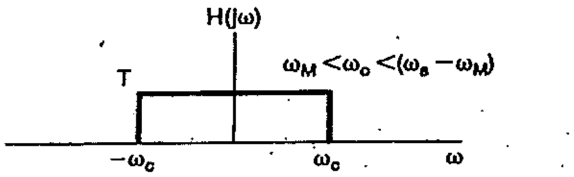
Espectro de $x(t)$



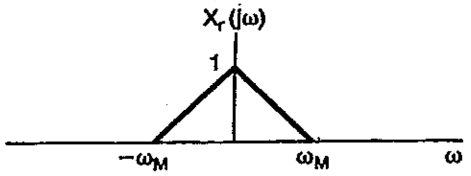
Espectro correspondiente a $x_p(t)$



Filtro paso bajo ideal para recuperar $X(j\omega)$ a partir de $X_p(j\omega)$



Espectro recuperado de la señal



Hemos usado que la transformada inversa de un rectangulo en frecuencia, es una sinc en el tiempo.

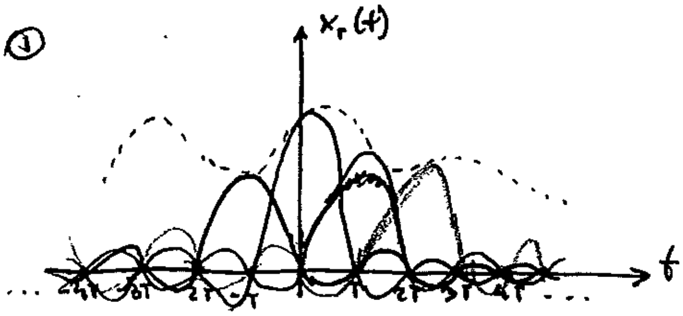
Observa que visto en el dominio del tiempo, la reconstrucción es el siguiente proceso:

$$x_r(t)=x_p(t)*h(t)=h(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot h(t-nT)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot T\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi(t-nT)}=T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi(t-nT)}=x(t)$$ ①

Se trata de una reconstrucción o interpolación mediante funciones *sinc*

①



5.2. Teorema de muestreo o de Nyquist [IMP) solo disclus /.

Como se puede ver claramente en el ejemplo anterior, para que no haya solapamiento espectral es necesario que $\omega_s \geqslant 2\omega_M$, lo cual nos lleva al Teorema de muestreo o de Nyquist.

> Sea $x(t)$ una señal de banda limitada $X(j\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_M$. Entonces $x(t)$ se puede determinar unívocamente a partir de sus muestras en instantes equiespaciados $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ si se cumple que:
>
> $$\omega_s > 2\omega_M \quad \text{donde} \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T}$$

A la mínima frecuencia de muestreo admisible se le llama **frecuencia de Nyquist**:

$$\boxed{\omega_{s\min} = 2\omega_M}$$

t. cont. $\boxed{T < \frac{\pi}{\omega_M}}$

t. discr. $\boxed{\omega_s > 2\omega_M}$

5.3 Muestreo práctico natural

Consiste en multiplicar en el tiempo la señal $x(t)$ por un tren de señales muestreadoras $r(t)$ distintas de las deltas (que en la práctica son imposibles de conseguir).

O sea, sustituimos el tren de deltas del muestreo ideal por un tren de señales $r(t)$ cualesquiera. El proceso es el siguiente:

$$x_p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t) * \delta(t-nT) = x(t)\left(r(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right)$$

y ahora, pasando al dominio transformado queda:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(R(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right) = \frac{1}{T} X(j\omega) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(j\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_s)\right)$$

$$= \frac{1}{T} X(j\omega) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s) \cdot \delta(\omega - k\omega_s)\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s) \cdot X(j(\omega - k\omega_s))$$

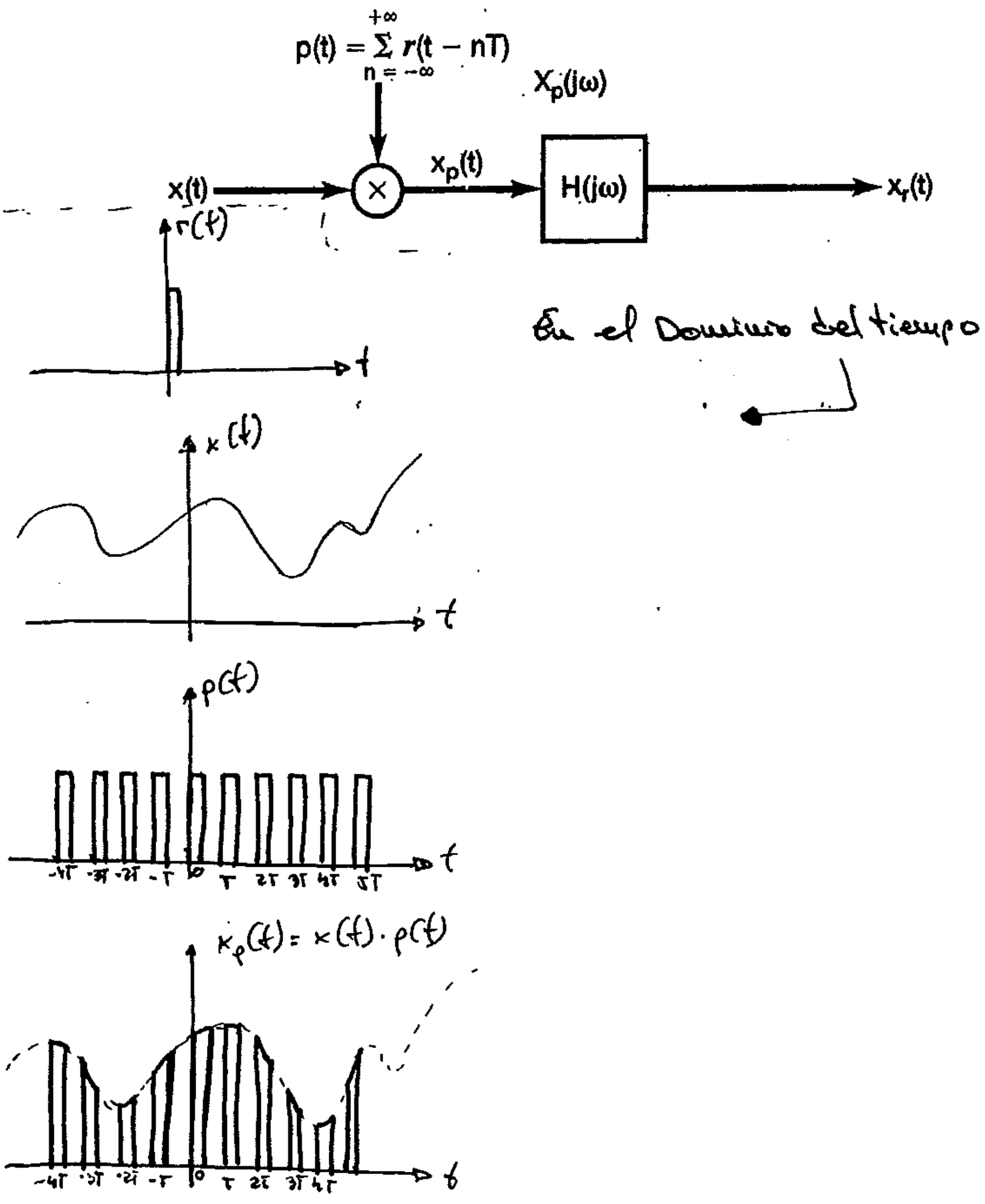
$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s) \cdot X(j(\omega - k\omega_s))}$$

Observación

- Al igual que sucede en el muestreo ideal, el espectro de la señal muestreada $X_p(j\omega)$, contiene replicas del espectro de la señal original $X(j\omega)$, sólo que cada una de esas réplicas aparece repetida pero escalada en amplitud un factor $R(jk\omega_s)$, que es distinto en cada réplica en el caso general.
- Fíjate que la condición de no solapamiento entre replicas, sigue siendo que se cumpla el teorema de Nyquist.

5.3.1 Reconstrucción de la señal original a partir de su muestreo natural.

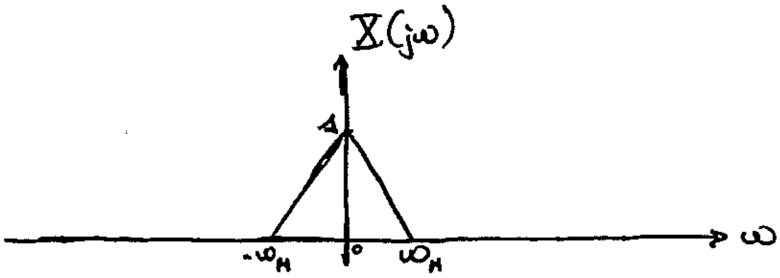
El sistema completo será:

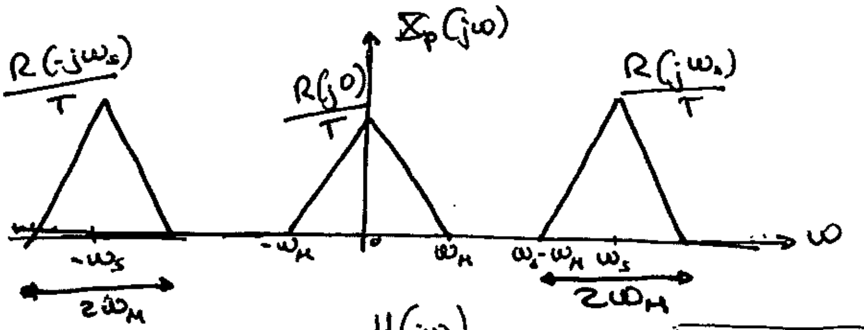


En el Dominio del tiempo

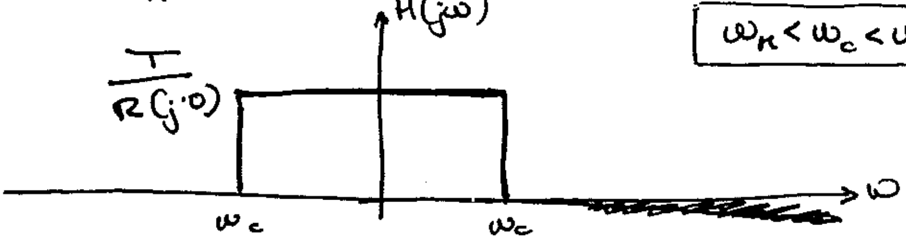
En el dominio de la frecuencia:

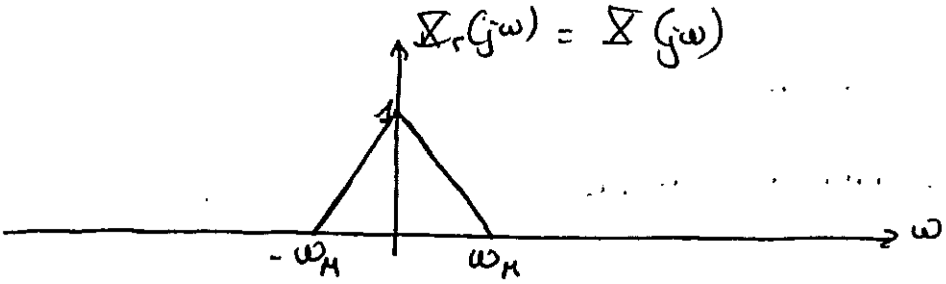
$$\boxed{\omega_s \geq 2\omega_M}$$





$$\boxed{\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M}$$





$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s)\, X(j(\omega - k\omega_s))}$$

$$R(jk\omega_s) = R(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_s} \in \mathbb{C}$$

número cte

5.4 Muestreo práctico instantáneo

diferente del

Este tipo de muestreo se utiliza mucho en la práctica, ya que hay unos circuitos denominados S/H (Sample & Hold), que permiten implementarlo fácilmente, como se verá en ADCT.

En este caso el procedimiento seguido para muestrear es algo distinto a los dos anteriores. Consiste en lo siguiente:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot r(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\big(r(t) * \delta(t-nT)\big) = r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT)$$

$$= r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-nT) = r(t) * \left(x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right)$$

y ahora, pasando al dominio transformado queda:

$$X_p(j\omega) = R(j\omega)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\big(j(\omega-k\omega_s)\big)\right) = \frac{1}{T}R(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\big(j(\omega-k\omega_s)\big)$$

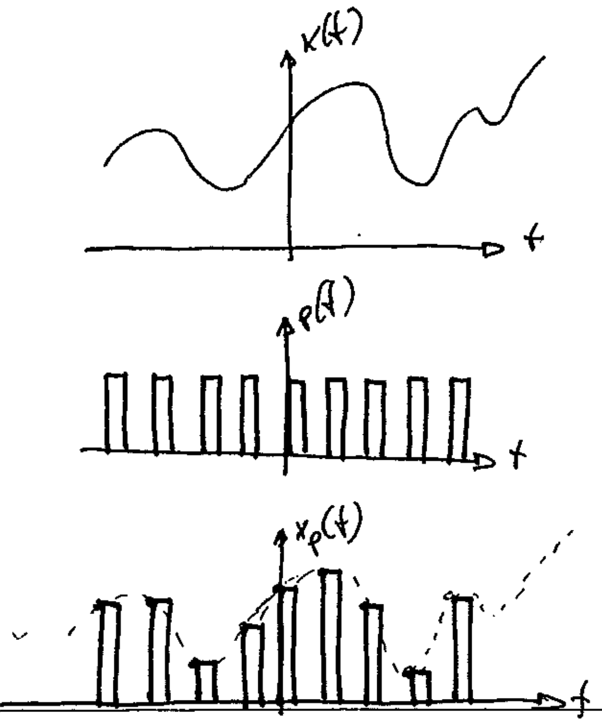
$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T}R(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))}$$

Observaciones

- Observamos que el espectro de la señal muestreada $X_p(j\omega)$ contiene réplicas del espectro de la señal original $X(j\omega)$, pero están deformadas respecto a su aspecto original al ir multiplicadas por una función $R(j\omega)$ que depende de ω.
- Fíjate que la condición de no solapamiento entre replicas, sigue siendo que se cumpla el teorema de Nyquist.

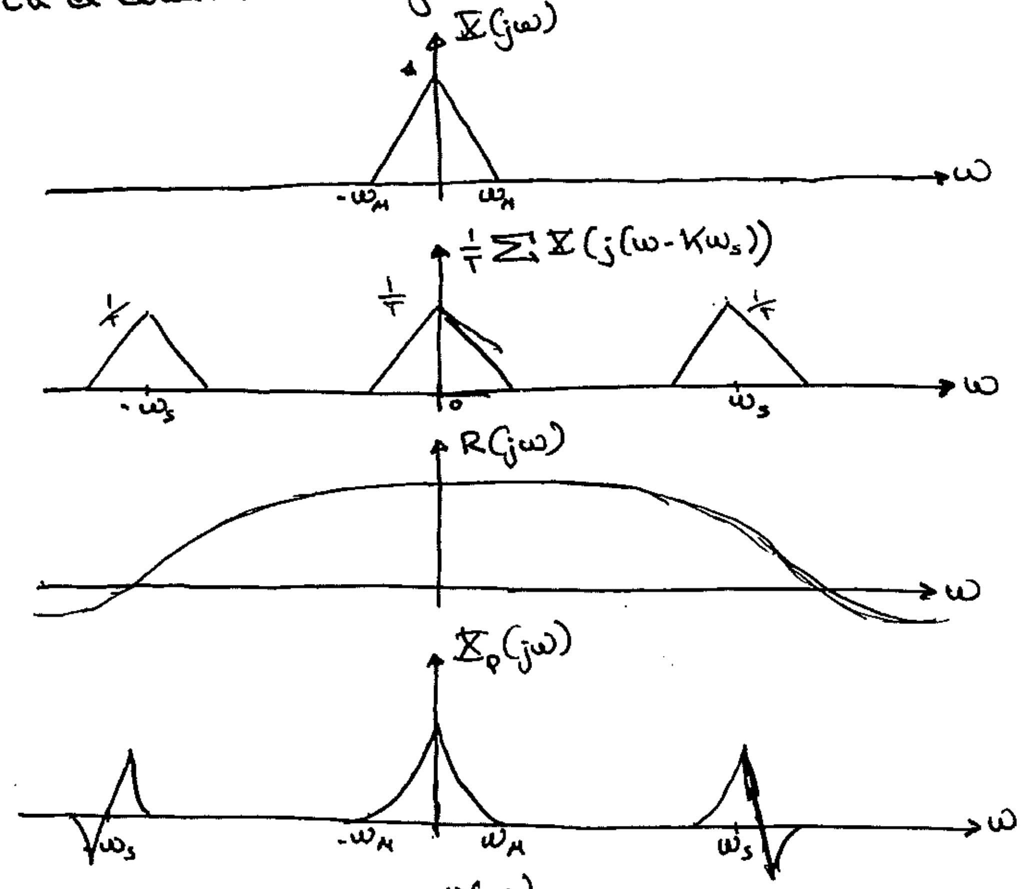
5.4.1 Reconstrucción de la señal original a partir de su muestreo instantáneo.

Lo ocurrido con la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia se ve en las figuras siguientes, de donde se deduce el filtro interpolador que hay que usar para recuperar la señal original.

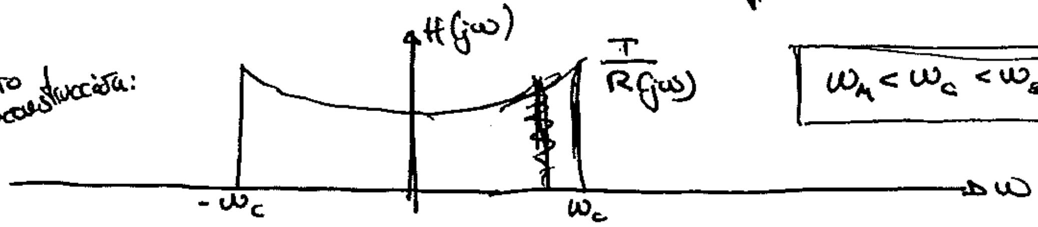


En el dominio del tiempo:

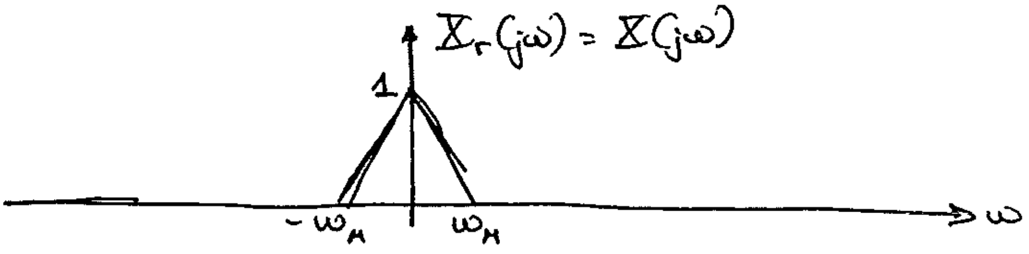
En el dominio de la frecuencia:



Filtro de reconstrucción:



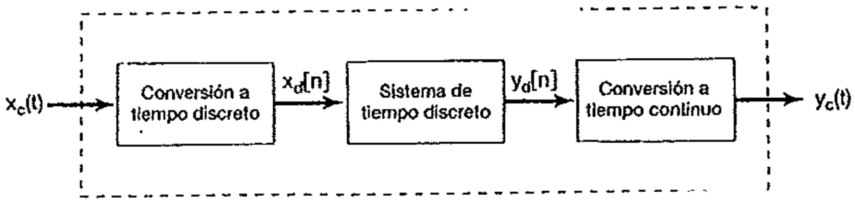
$$\boxed{\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M}$$



5.5 Procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo

En muchas aplicaciones, se puede obtener una ventaja significativa en el procesamiento de una señal continua al convertirla en una señal discreta y, después de procesarla de ese modo, convertirla de nuevo en una señal continua.

En términos generales, este enfoque del procesamiento de señales continuas se pude considerar como la conexión en cascada de tres operaciones, como se indica en la siguiente figura :



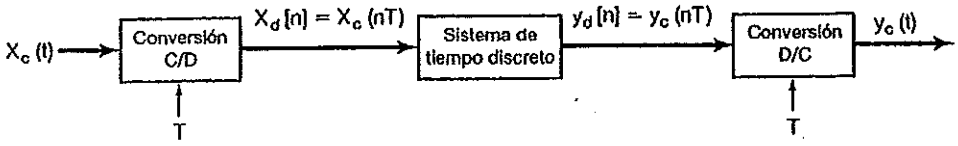
donde $x_c(t)$ e $y_c(t)$ son señales continuas y $x_d[n]$ e $y_d[n]$ son sus señales discretas correspondientes. El sistema total es, un sistema continuo en el sentido de que la entrada y la salida del sistema son señales continuas.

La relación fundamental entre las señales continuas y la señales discretas es:

$$x_d[n] = x_c(nT)$$

$$y_d[n] = y_c(nT)$$

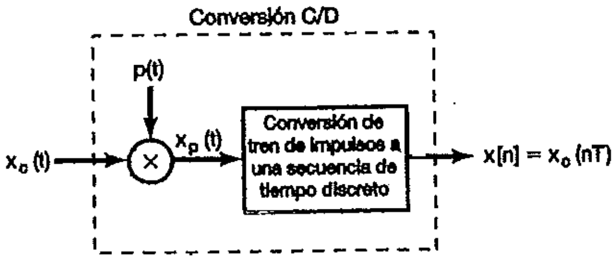
En adelante nos referiremos al primer sistema como *conversión de tiempo continuo a discreto* y se abreviará C/D. La operación inversa correspondiente al tercer sistema de la correspondiente al tercer sistema representa la *conversión de tiempo discreto a tiempo continuo* y se abrevia como D/C. El esquema entonces queda como sigue:



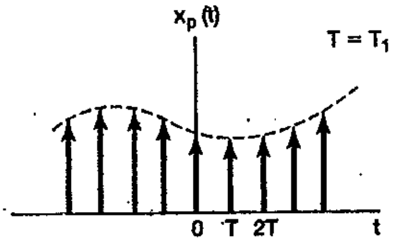
Conversión C/D

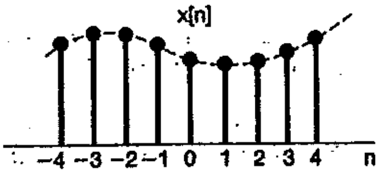
Para comprender mejor la relación entre la señal continua $x_c(t)$ y su representación de tiempo discreto $x_d[n]$, resulta útil representar la conversión C/D como un proceso de muestreo seguido por un *mapeo* (es decir, un cambio) del tren de deltas en tiempo continuo en un tren de deltas en tiempo discreto (es decir, una secuencia).

Estos dos pasos se ilustran en la siguiente figura:



En el primer paso el tren de impulsos $x_p(t)$ corresponde a una secuencia de impulsos cuyas amplitudes corresponden a las muestras de $x_c(t)$ y cuyo espaciamiento en tiempo es igual al período de muestreo T. En la conversión del tren de impulsos a la secuencia de tiempo discreto obtenemos $x_d[n]$, que corresponde a la misma secuencia de muestras de $x_c(t)$ pero con un espaciamiento unitario en términos de la nueva variable independiente n. Así, en efecto, la conversión a partir de la secuencia de muestras del tren de impulsos a la secuencia de muestras en tiempo discreto se puede considerar como una normalización de tiempo. Dicha normalización del eje temporal al convertir $x_p(t)$ en $x_d[n]$ se observa en la siguiente figura:





También resulta conveniente examinar las etapas de procesamiento en el dominio de la frecuencia. Puesto que estaremos utilizando las transformadas de Fourier tanto continua como discreta , únicamente en esta sección haremos una distinción entre las variables de frecuencia, es decir, ω para tiempo continuo y Ω en tiempo discreto. De esta forma las transformada de Fourier de $x_c(t)$ es $X_c(j\,\omega)$ mientras que la transformada de Fourier de $x_p[n]$ es $X_p(e^{j\Omega})$.

Sabemos que con muestreo ideal:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega-k\omega_s))$$

pero también lo podemos expresar de otra manera, simplemente teniendo en cuenta lo siguiente:

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) \xleftrightarrow{F} X_p(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

y como la transformada de Fourier de la secuencia $x_d[n]$ es:

$$x_d[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

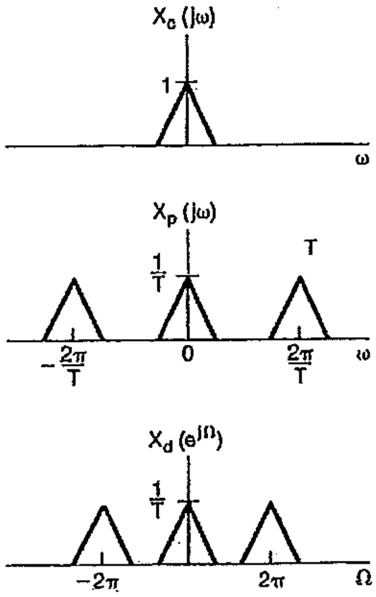
por lo que vemos claramente que:

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\tfrac{\Omega}{T})$$

así que llegamos a la importante conclusión de que la relación fundamental entre las frecuencias en tiempo continuo y en tiempo discreto es la siguiente:

$$\boxed{\Omega=\omega T \;\Leftrightarrow\; \omega=\frac{\Omega}{T}}$$

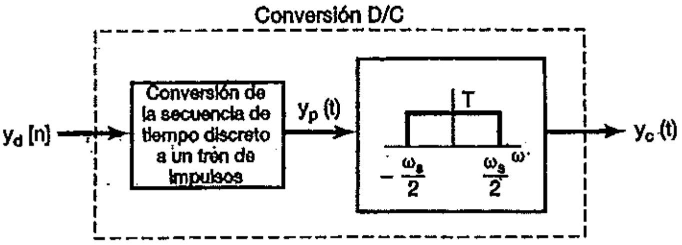
A continuación se representan los espectros de las señales $X_c(j\,\omega)$, $X_p(j\,\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$.



Conversión D/C

Después del procesamiento con un sistema discreto, la secuencia resultante se convierte de nuevo en una señal continua. Este proceso consiste en generar a partir de la secuencia $y_d[n]$ un tren de impulsos continuo $y_p(t)$. La recuperación de la señal continua $y_c(t)$ a partir de este tren de impulsos se logra entonces por medio de un filtro paso bajo.

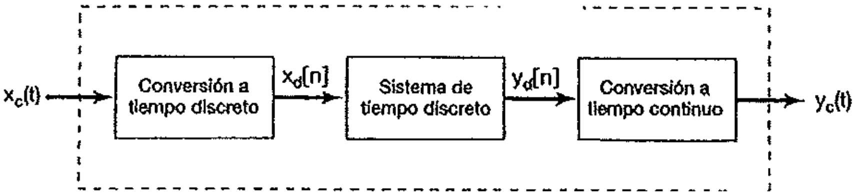
¡OJO! El filtro paso bajo o interpolador que se utiliza para recuperar la señal continua, no siempre es un filtro ideal. En muchos ejercicios verás interpoladores diferentes

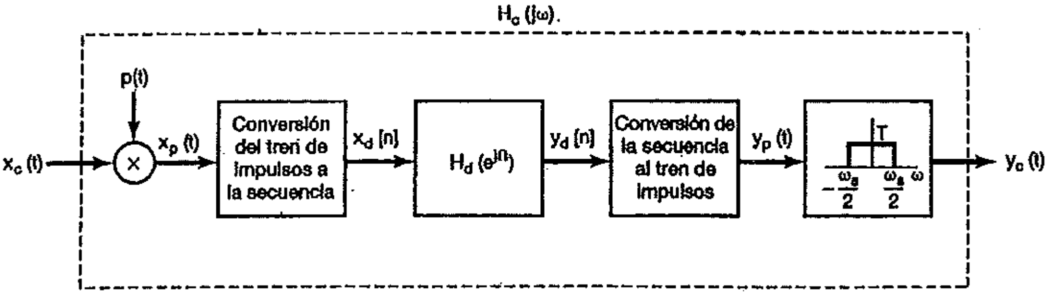


Esquema del sistema completo

En el siguiente esquema se muestra el esquema completo resultante donde ya se han estudiado los bloques C/D y DC.

Este es el mismo esquema que el ya visto en la página T-5.7

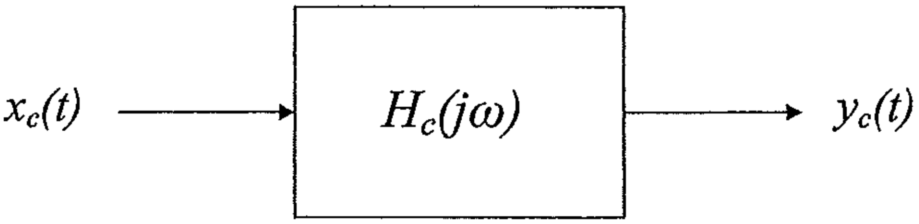




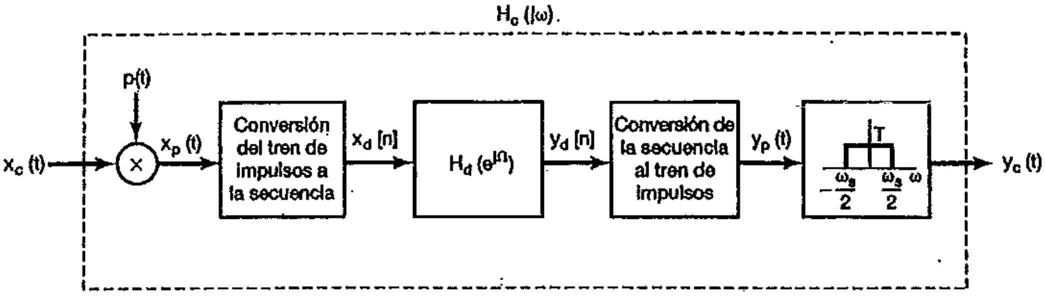
Simulación de sistemas continuos mediante sistemas discretos

A continuación, y como resumen de todo lo dicho hasta ahora en este epígrafe, se indica como resolver un típico ejercicio de examen.

Sea el sistema en tiempo continuo siguiente:



Si deseamos diseñar un sistema que simule el efecto del sistema continuo anterior mediante un sistema discreto el diagrama de bloques será:



- Para simular el sistema continuo mediante el sistema discreto basta que la respuesta en frecuencia del discreto sea:

Para ilustrar este caso estudiar los siguientes ejercicios de examen:
Feb'04-ej4
Sep'02-ej4

$$\boxed{H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = H_c(j\frac{\Omega}{T}) & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódico } 2\pi \end{cases}}$$

- ¿Cuál debe ser la frecuencia de muestreo f_s mínima para poder recuperar $y_c(t)$ a partir de la salida del sistema equivalente en tiempo discreto $y_d[n]$?

  Siempre se debe cumplir el criterio de Nyquist para la señal de mayor ancho de banda que aparezca en cualquier rama del sistema continuo.

  En la práctica se trata de analizar en frecuencia el ancho de banda de todas las señales que aparecen en el sistema continuo y quedarse con la que tenga el mayor ancho de banda, esa señal es la que determina la mínima frecuencia de muestreo.

- También nos pueden hacer la pregunta al contrario. Es decir dado diagrama de bloques anterior, ¿cuál es el sistema continuo equivalente a todo el diagrama de bloques?

  La respuesta es que el diagrama de bloques es equivalente a un sistema continuo con respuesta en frecuencia:

Para ilustrar este caso ver el siguiente ejercicio de examen:
Jun'04-ej4

$$\boxed{H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T} = H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & resto \end{cases}}$$

STLN
Ejercicios de clase

21-4-2008

Dato:
Al fin y al cabo calcular x(t-τ) no es más que invertir x(t) a x(-τ) y desplazar su referencia de t=0 a τ=t.

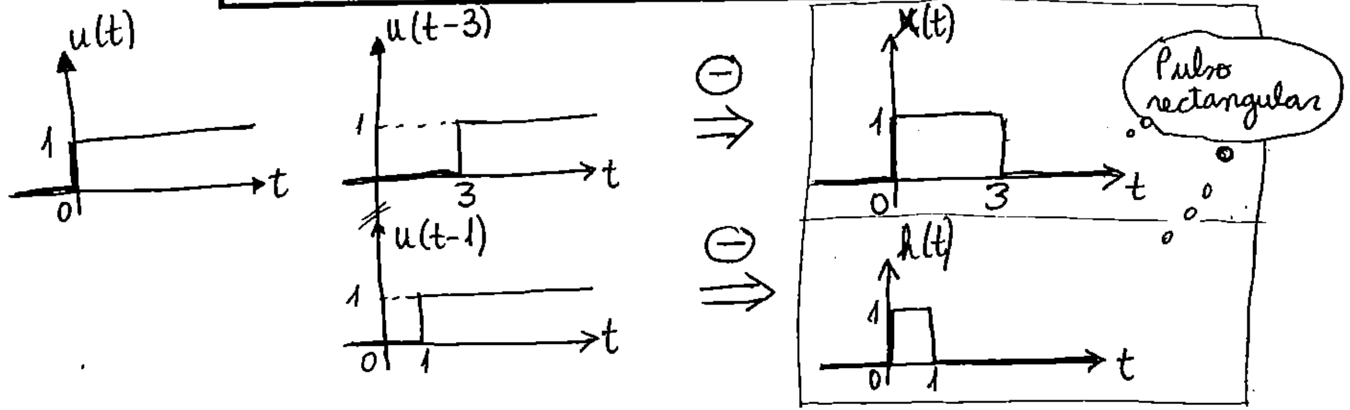
TEMA 1: SEÑALES

Ejercicio 1

Sean las señales $x(t)=u(t)-u(t-3)$ y $h(t)=u(t)-u(t-1)$. Se pide:

a) Calcular la convolución de $x(t)$ y $h(t)$.

b) Calcular la convolución de $x(t)$ y $x(t)$.



---

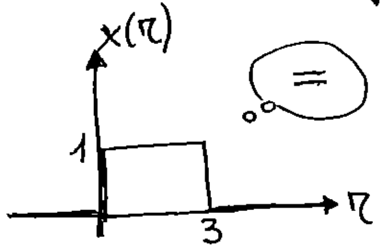
a) $\underline{z(t)} = x(t) * h(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{fija}}\, \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{móvil}}\, d\tau}_{\text{OPCIÓN 1}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)}_{\text{fija}}\, \underbrace{x(t-\tau)}_{\text{móvil}}\, d\tau}_{\text{OPCIÓN 2}}$

¡¡Como los teléfonos!! :) (nemotecnia)

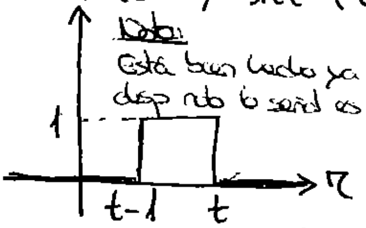
» Por lo gral, moveremos la señal "fácil" ^ dejamos quieta la "difícil" (aunque tb podemos hacerlo de la otra manera, es x facilitar las cosas)

- **En este caso movemos h(t) y dejamos fija x(t) ⇒ ①** — IMP.
- **Pintamos x(τ) y h(t-τ), teniendo en cuenta que τ es el NUEVO EJE TEMPORA**

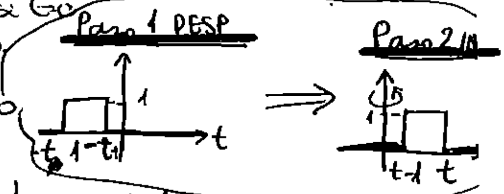
"t" pasa a ser un PARÁMETRO



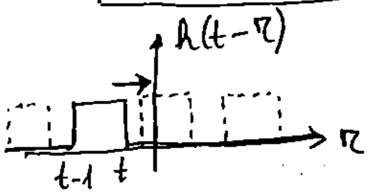
$h(t-\tau) = h(-(\tau-t))$



Dato:
Está bien hecho ya que si [illegible] desp[illegible] la señal es h(t-τ)



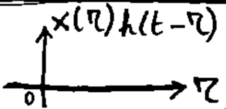
MÉTODO GRÁFICO · Se va moviendo h(t-τ) desde t → -∞ hasta t → ∞



Hay q ver tds los posibles casos según los valores de "t" (situaciones difs)

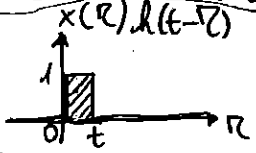
Es x eso x lo q se mueve h(t-τ), xq "t" es 1 parámetro

- **CASO t<0**



$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, d\tau = ($

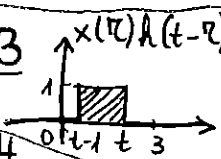
- **CASO** $\left.\begin{matrix} t>0 \\ t-1<0 \end{matrix}\right\}$ $\underline{0<t<1}$



$z(t) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\, d\tau} + \int_{0}^{t} 1\cdot 1\, d\tau + \cancel{\int_{t}^{\infty} 0\, d\tau}$

$= \tau\Big]_0^t = t$ — tb se ve en el dibuj

- **CASO** $\left.\begin{matrix} t-1>0 \\ t<3 \end{matrix}\right\}$ $\underline{1<t<3}$



$z(t) = \int_{t-1}^{t} 1\cdot 1\, d\tau = \tau\Big]_{t-1}^{t} =$

$= t-(t-1) = 1$

- **CASO** $\left.\begin{matrix} t-1<3 \\ t>3 \end{matrix}\right\}$ $\underline{3<t<4}$

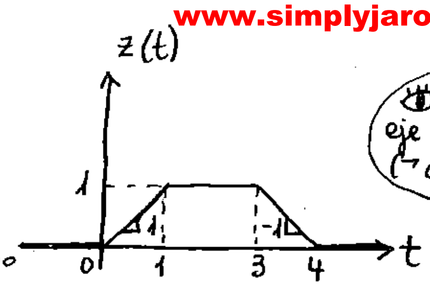
$z(t) = \int_{t-1}^{3} 1\cdot 1\, d\tau = \tau\Big]_{t-1}^{3} =$

$= 3-(t-1) = 4-t$

- **CASO** $t-1>3 \equiv \underline{t>4}$ ⤳ Análogo al 1er caso

» En resumen, recopilando toda la info:

$$z(t)=\begin{cases}0 \text{ ,, } t\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)\\ t \text{ ,, } t\in(0,1)\\ 1 \text{ ,, } t\in(1,3)\\ 4-t \text{ ,, } t\in(3,4)\end{cases}\xrightarrow{\text{REP GRÁFICA}}$$

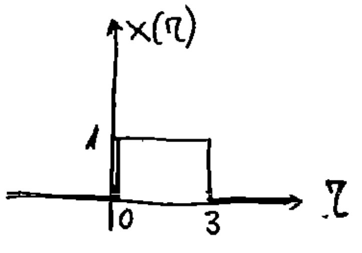


(trapecio...)

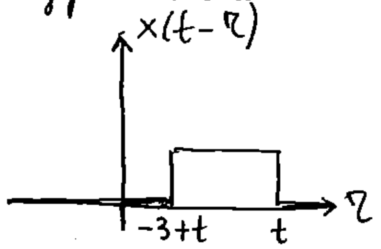
(AHORA SÍ, eje con t (← en τ))

---

b) $z(t)=x(t) * x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{x(\tau)}_{\text{fija}}\,\underbrace{x(t-\tau)}_{\text{móvil}}\,d\tau$ ... (Aquí, uno s l misma señal, sólo ∃ 1 opción)

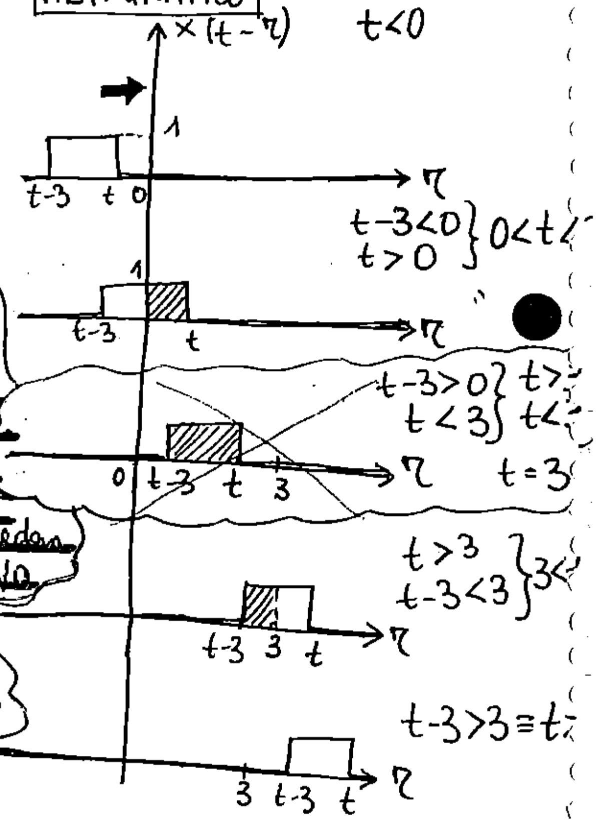


;



;

MÉT. GRÁFICO



- CASO $t<0$ $\quad z(t)=0$
- CASO $0<t<3$

$$z(t)=\int_0^t 1\cdot 1\,d\tau=\tau\Big]_0^t=t$$

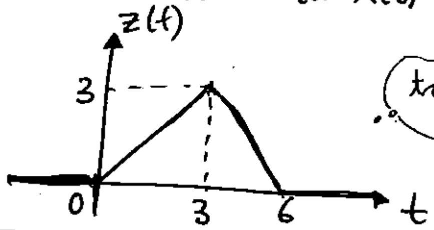
- CASO $3<t<6$

$$z(t)=\int_{t-3}^{3}1\cdot 1\,d\tau=\tau\Big]_{t-3}^{3}=$$
$$=3-(t-3)=6-t$$

- CASO $t>6$ ⇒ Análogo al 1º

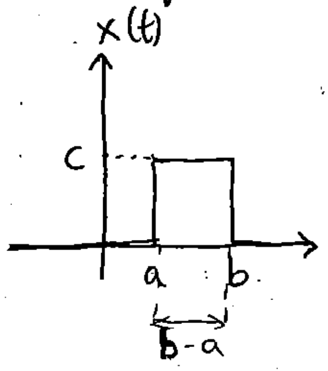
(Es un caso en el que encaja justo con los límites de x(τ). ESTOS CASOS, JUNTO CON LOS IMPOSIBLES (cuando las dos condiciones no puedan darse a la vez) NO APORTAN INFO ADICIONAL (se pueden obviar).)

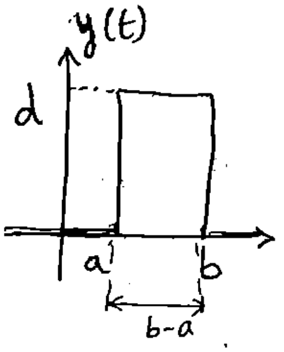
» En resumen: $z(t)=x(t) * x(t)=\begin{cases}0 \text{ ,, } t<0\\ t \text{ ,, } 0<t<3\\ 6-t \text{ ,, } 3<t<6\\ 0 \text{ ,, } t>6\end{cases}$

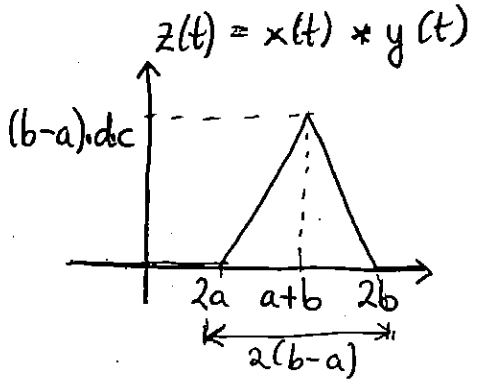


(triángulo)

NOTA | • Generalizamos el último caso: cuando convolucionamos dos pulsos rectangulares de la misma anchura:







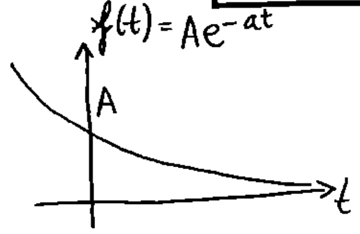
• Útil aprendérselo de memoria, para ir rápido en convoluciones de este tipo

Ejercicio 2

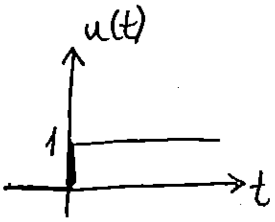
Sean las señales $x(t) = Ae^{-at}u(t)$ y $h(t) = Be^{-bt}u(t)$ siendo A, B, a, b constantes positivas. Se pide:

a) Calcular la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ siendo $a \neq b$.

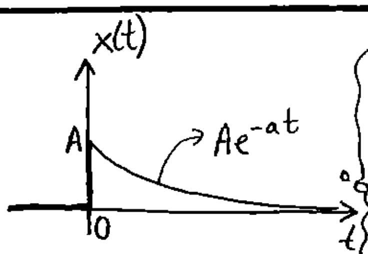
b) Calcular la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ siendo $a = b$.



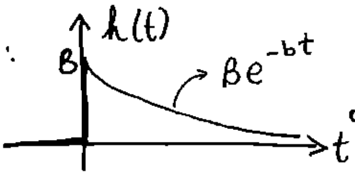
;



$\overset{\odot}{\Longrightarrow}$



Análogamente:



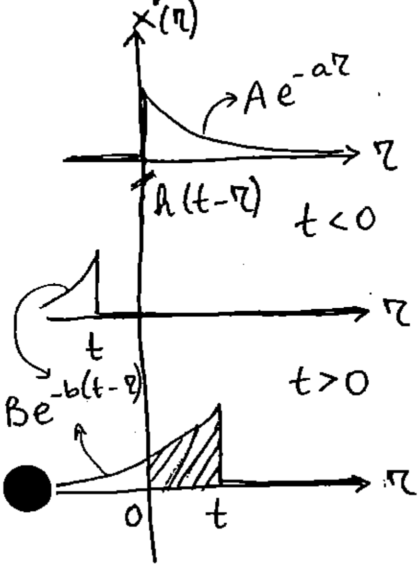
Multiplicar x u(t) es básicamnt anular l parte negativa d l señal original ^ dejar l positiva cmo stá. Aparecerá ste concepto frecuentemnt.

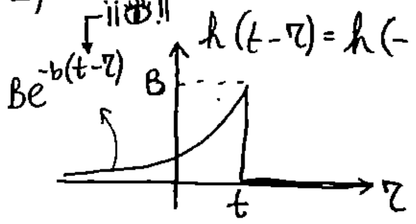
---

a) **Método gráfico** ¡¡a≠b!!

$$z(t) = x(t)*h(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{fija}}{x(\tau)}\, \underset{\text{móvil}}{h(t-\tau)}\, d\tau}_{\text{OPCIÓN ①}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{fija}}{h(\tau)}\, \underset{\text{móvil}}{x(t-\tau)}\, d\tau}_{\text{OPCIÓN ②}}$$

- Escogems ① (xo n ste caso da =)





$h(t-\tau) = h(-(\tau - t))$

- CASO $t<0$ $\quad z(t) = 0$
- CASO $t>0$

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t Ae^{-a\tau}\cdot Be^{-b(t-\tau)}d\tau$$

$$= ABe^{-bt}\int_0^t e^{\tau(b-a)}d\tau = \frac{ABe^{-bt}}{b-a}\left[e^{\tau(b-a)}\right]_0^t$$

$$= \frac{ABe^{-bt}}{b-a}\left[e^{t(b-a)} - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{e^0}}\right] = \frac{AB}{b-a}\left[e^{-at} - e^{-bt}\right]$$

» En resumen: $\boxed{z(t) =}\begin{cases} 0 \,, & t<0 \\ \frac{AB}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \,, & t>0 \end{cases} \equiv \boxed{\frac{AB}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})\cdot u(t)}$

forma compacta de escribir estas señales

---

b) ¡¡a=b!! - Lo + inmediato ^ lógico es sustituir b=a en el resultado dl aptdo anterior

1ª idea $z(t) = \frac{AB}{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{a-a}}}(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{e^{-at} - e^{-at}}}) = \frac{0}{0} \Rightarrow$?? ¡¡Indeterminación!! En este caso no sirve

Estas cosas pasan a menudo, ya q a veces aplicams métodos de integración que son válidos excepto pa algunos parámetros. Lo q hay que hacer entonces es volver atrás ^ volver a integrar. x ej: $\int \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\frac{1}{x^{\alpha-1}} + C$ ¡¡$\forall \alpha \neq 1$!! Si $\alpha = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

2ª vez: Calcular de nuevo la integral

$$\boxed{z(t)} = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t A e^{-a\tau} B e^{-a(t-\tau)} d\tau = AB \int_0^t \cancel{e^{-a\tau}} e^{-at} \cancel{e^{a\tau}} d\tau =$$

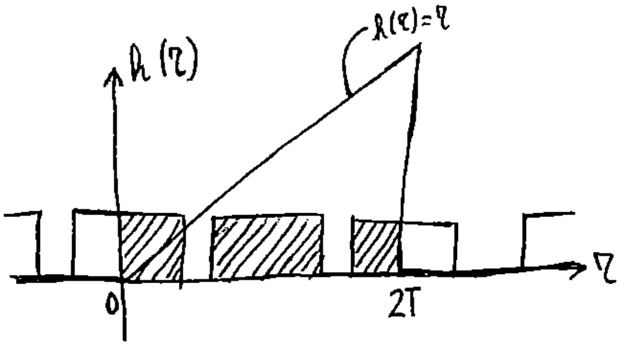
$$= ABe^{-at} [\tau]_0^t = \boxed{ABt\, e^{-at}}$$

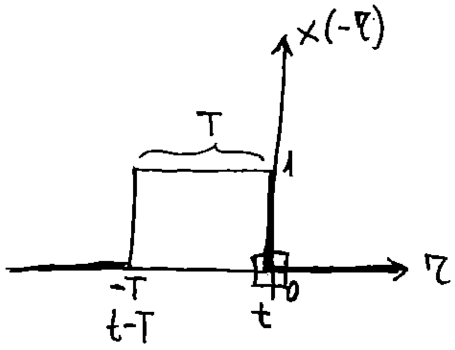
¿He aquí la clave

~20 min

Ejercicio 3

Calcular la convolución de las señales: $x(t) = u(t) - u(t-T)$ y $h(t) = t[u(t)-u(t-2T)]$.



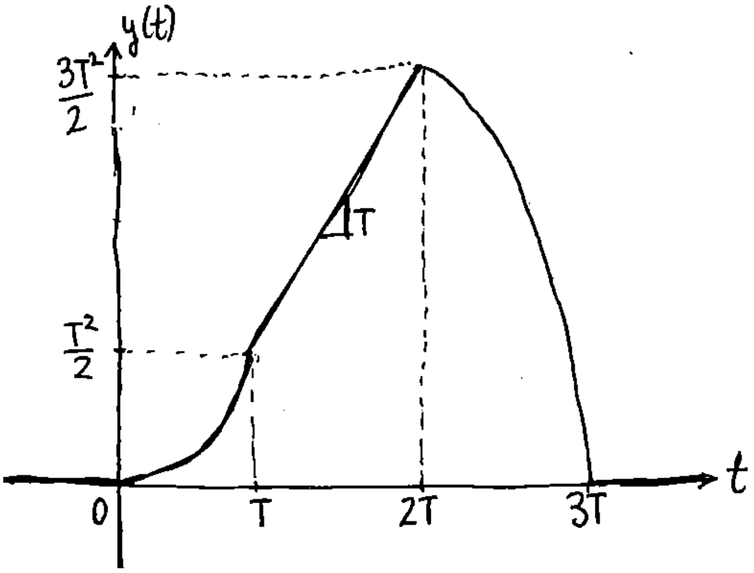


► $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$

- Caso $t<0$: $y(t)=0$
- Caso $\left.\begin{matrix} t>0 \\ t-T<0 \end{matrix}\right\}$ $0<t<T$: $y(t) = \int_0^t 1\cdot\tau\, d\tau = \frac{t^2}{2}$
- Caso $\left.\begin{matrix} t<2T \\ t-T>0 \end{matrix}\right\}$ $T<t<2T$: $y(t) = \int_{t-T}^{t} 1\cdot\tau\, d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} = \frac{\cancel{t^2}-(\cancel{t^2}+T^2-2tT)}{2} = t-\frac{T^2}{2}$
- Caso $\left.\begin{matrix} t>2T \\ t-T<2T \end{matrix}\right\}$ $2T<t<3T$: $y(t) = \int_{t-T}^{2T} 1\cdot\tau\, d\tau = \frac{{}^{2}\cancel{4}T^2}{\cancel{2}} - \frac{(t^2+T^2-2tT)}{2} = \frac{-t^2}{2}+Tt+\frac{3T^2}{2}$
- Caso $t>3T$: $y(t)=0$

» En resumen:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0 \;, & t<0 \\ \frac{t^2}{2} \;, & 0<t<T \\ Tt-\frac{T^2}{2} \;, & T<t<2T \\ -\frac{t^2}{2}+Tt+\frac{3T^2}{2} \;, & 2T<t<3T \\ 0 \;, & t>3T \end{cases}}$$



Ejercicio 4

[illegible]e ejercicio sirve para aprender las particularidades de las transformaciones de variable independiente en las señales de tiempo discreto

Dada la señal en tiempo discreto:

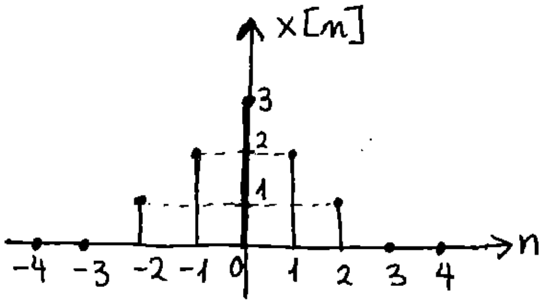
$$x[n]=\begin{cases}1, n=-2\\2, n=-1\\3, n=0\\2, n=+1\\1, n=+2\\0, resto\end{cases}$$

a) Calcular y dibujar $w[n]=x[2n]$

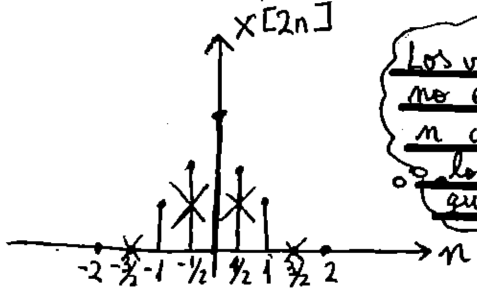
b) Calcular y dibujar $y[n]=\begin{cases}x[n/2], n=\dot{2} \therefore \text{múltiplo de 2} \equiv \text{par}\\0, n\neq\dot{2} \therefore \text{impar}\end{cases}$

c) Calcular y dibujar $v[n]=x[2n-2]$

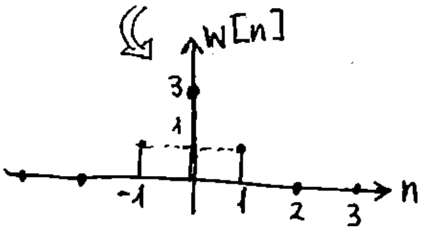
d) Calcular y dibujar $z[n]=x[3n+1]$



a) $w[n] = x[2n]$ "Compresión" por 2



Los valores no enteros de n chirrían, con lo que hay que eliminarlos



ANALÍTICAMENTE:

$$\begin{cases} n=-2, & w[-2]=x[2(-2)]=x[-4]=0\\ n=-1, & w[-1]=x[2(-1)]=x[-2]=1\\ n=0, & w[0]=x[2\cdot 0]=x[0]=3\\ n=1, & w[1]=x[2\cdot 1]=x[2]=1\\ n=2, & w[2]=x[2\cdot 2]=x[4]=0\end{cases}$$

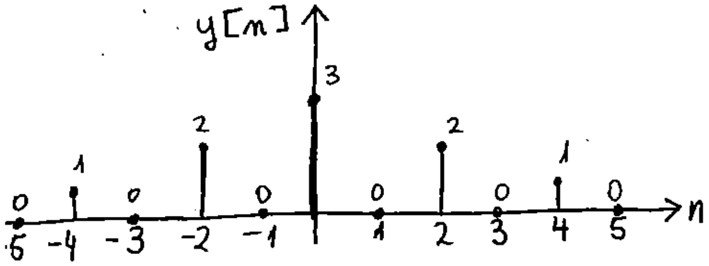
OBS: Tda compresión en T.D. implica 1 pérdida de muestras ^ de info ⇒ se produce 1 DIEZMADO de la señal

b) $y[n]=\begin{cases}x[\frac{n}{2}] & \text{,, } n=\dot{2}\\ 0 & \text{,, } n\neq\dot{2}\end{cases}$

ANALÍTICAMENTE:

$$\begin{cases} n=-4, \text{ par}, & y[-4]=x[-2]=1\\ n=-3, \text{ impar}, & y[-3]=0\\ n=-2, \text{ par}, & y[-2]=x[-1]=2\\ n=-1, \text{ impar}, & y[-1]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} n=0, \text{ par}, & y[0]=x[0]=3\\ n=1, \text{ impar}, & y[1]=0\\ n=2, \text{ par}, & y[2]=x[1]=2\\ n=3, \text{ impar}, & y[3]=0\\ n=4, \text{ par}, & y[4]=x[2]=1 \quad \ldots\end{cases}$$



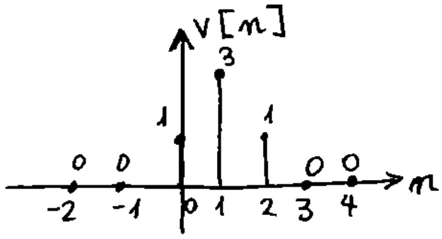
OBS: Toda expansión temporal en T.D conlleva obtener nuevas muestras, en este caso de valor 0

>> Si sólo pidieran $y[n] = x[\frac{n}{2}]$, suponemos POR DEFECTO que las nuevas muestras valdrán 0 (pues $x[\alpha] = 0, \alpha \notin \mathbb{Z}$, suponemos al $\mathbb{Z}$)

c) $v[n] = x[2n-2] = x[2(n-1)]$

1º) Escalamos (diezmado por 2, hecho en "a")

2º) Desplazamos (1 hacia la dcha.)



d) $z[n] = x[3n+1] = x[3(n+\frac{1}{3})]$

1º) Escalar (diezmado por 3)

2º) Desplazar ($\frac{1}{3}$ hacia la izqda... ¿?)

⇒ ¡¡NO SE PUEDE!! ∘∘ Los desplazamientos han de ser enteros en T.D

- Podemos:

1ª idea "Hacerlo a pelo" ∘∘ calculando las muestras

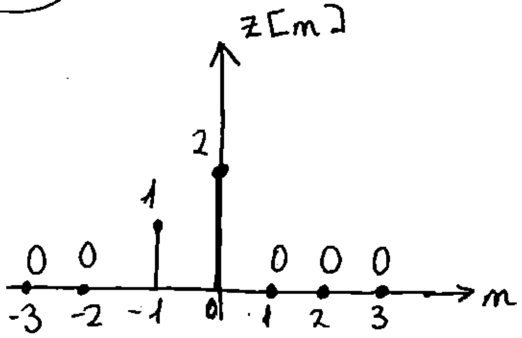
$n = -2, \quad z[-2] = x[3(-2)+1] = x[-5] = 0$

$n = -1, \quad z[-1] = x[3(-1)+1] = x[-2] = 1$

$n = 0, \quad z[0] = x[3 \cdot 0 + 1] = x[1] = 2$

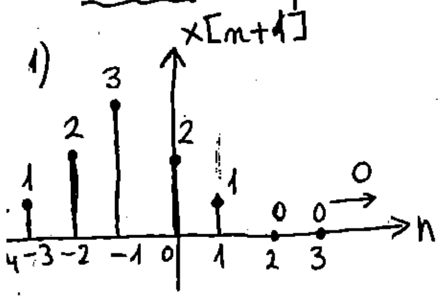
$n = 1, \quad z[1] = x[3 \cdot 1 + 1] = x[4] = 0$

...



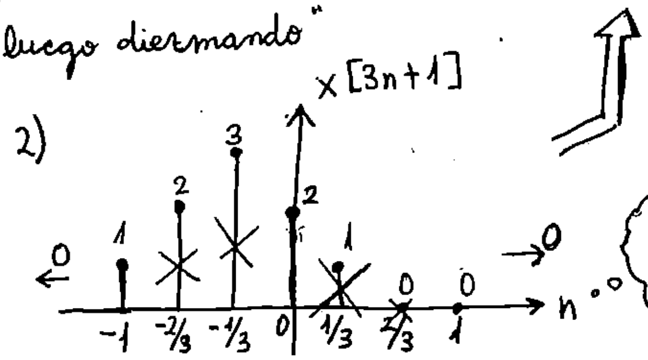
2ª idea "Desplazando 1º y luego diezmando"

1)



;

2)



∘∘ Recolocando queda la figura de arriba

Ejercicio 5

Realizar la convolución de las señales en tiempo discreto:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

$$h[n] = \beta^n u[n]$$

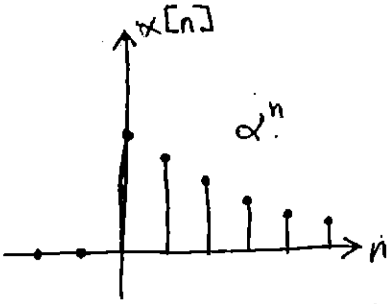
a) Considerando que $\alpha \neq \beta$

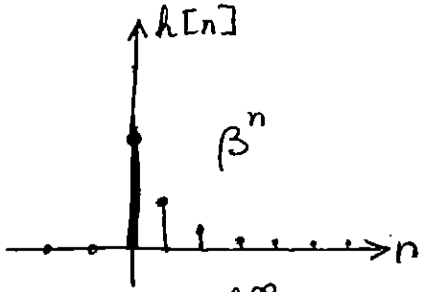
b) Considerando que $\alpha = \beta$

NOTA

Para representarlas vamos a tomar un caso general, pero el proceso no varía para α y β en rangos distintos. En nuestro dibujo:

$0 < \alpha, \beta < 1$





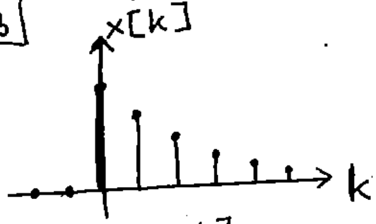
- Como en tiempo continuo (T.C.): $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)$.

- Ahora en tiempo discreto (T.D.): $y[n] = x[n] * h[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{fija} \underbrace{h[n-k]}_{móvil}}_{①} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]}_{fija} \underbrace{x[n-k]}_{móvil}}_{②}$

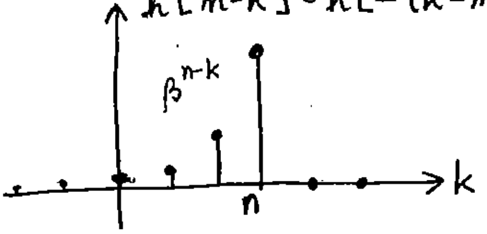
MÉT
RÁFICO

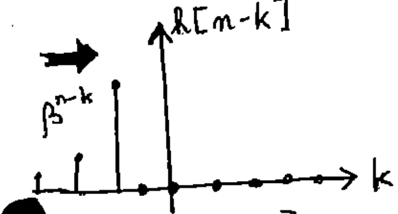
- Escogemos ① pero daría igual

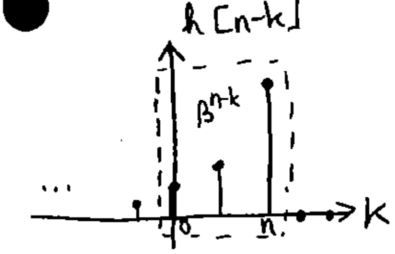
a) $\alpha \neq \beta$



$h[n-k] = h[-(k-n)]$ $\begin{cases} 1^{\circ}) \text{ Reflejar} \\ 2^{\circ}) \text{ Desplazar} \end{cases}$







Caso $n<0 \rightarrow n \leq -1$: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0 = 0$;

Caso $n \geq 0$: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^n \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

>> En resumen: $\boxed{y[n] = \beta^n \cdot \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \cdot u[n]}$

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \forall z \neq 1}$

"Suma de los n primeros términos de una serie"

1ª idea

$$y[n] = \alpha^n \frac{1-1^{n+1}}{1-1} = \frac{0}{0}$$ ¿? INDETERMINACIÓN ⇒ No válido

2ª idea "Recalcular"

Caso $n \leq -1$ Análogo a a)

Caso $n \geq 0$: $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \cancel{\alpha^k} \alpha^n \cancel{\alpha^{-k}} =$$

$$= \alpha^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \alpha^n (n+1)$$

>> En resumen: $\boxed{y[n] = \alpha^n (n+1) \cdot u[n]}$ //

TEMA 3: TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIÈMPO CONTINUO

Ejercicio 1

Calcular la transformada de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$

b) $x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$

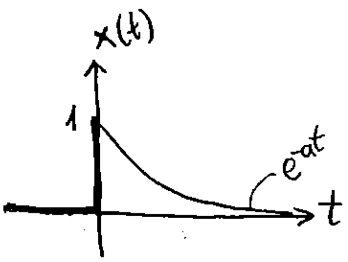
c) $x(t) = \delta(t)$

d) $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$

e) $x(t) = \text{sen}(w_0 t)$

f) $x(t) = \cos(w_0 t)$

a) $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt =$



$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\, e^{-j\omega t}dt}^{\,0} + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt =$$

$$= \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{a+j\omega}\left[\cancel{e^{0}}^{\,1} - \underbrace{\overset{\to 0}{e^{-a\infty}}\, e^{-j\omega\infty}}_{\to 0}\right] = \boxed{\frac{1}{a+j\omega}} \ ¡¡\in \mathbb{C}!!$$

$$|1 \cdot e^{-j\omega\infty}| = 1$$

<u>NOTA</u>: Si $a<0 \rightarrow e^{-a\infty} = \infty$ y la integral no convergería, por lo que la señal no tendría TF.

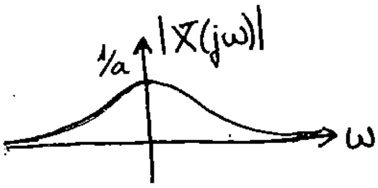
▸ En resumen: $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \dfrac{1}{a+j\omega},\ a>0$

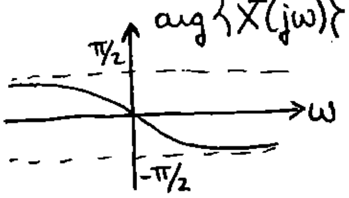
REPRESENTACIÓN

1) <u>Módulo</u>: $|X(j\omega)| = \left|\dfrac{1}{a+j\omega}\right| = \dfrac{|1|}{|a+j\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \in \mathbb{R}^+$

2) <u>Argumento</u>: $\arg\{X(j\omega)\} = \arg\left\{\dfrac{1}{a+j\omega}\right\} = \arg\{1\} - \arg\{a+j\omega\} = 0 - \text{arctg}\left(\dfrac{\omega}{a}\right) = -\text{arctg}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

$\arg\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\}$





$$\boxed{X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\arg\{X(j\omega)\}}}$$
RECORDAR. IMPORTANTE

---

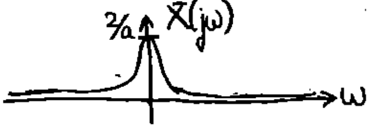
b) $x(t) = e^{-a|t|},\ a>0 = \begin{cases} e^{-at}, & t>0 \\ e^{at}, & t<0 \end{cases}$

<u>1ª idea</u> (Por definición) $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \ldots$

$$\ldots = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a + \cancel{j\omega} + a - \cancel{j\omega}}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\ ¡¡\in \mathbb{R}!!$$

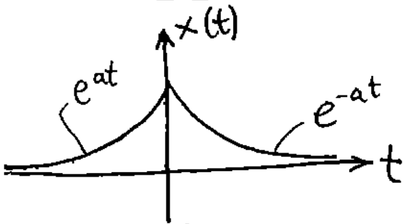
(en este caso particular)

$X: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad \omega \longrightarrow X(j\omega)$ $\Rightarrow$ Podemos representar $X(j\omega)$ directamente



24-10-2006

2ª idea (Usando la tabla de transformadas)



$$x(t) = \underbrace{e^{at}u(-t)}_{x_2(t)} + \underbrace{e^{-at}u(t)}_{x_1(t)}$$

TABLA → $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_2(t)+x_1(t)\} = \mathcal{F}\{x_2(t)\} + \mathcal{F}\{x_1(t)\} = X_2(j\omega) + X_1\ldots$

$x_1(t) = e^{-at}u(t)$, $a>0$ $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ $X_1(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$ (ya visto; tb sale en la tabla)

$x_2(t) = e^{at}u(-t) = x_1(-t)$ $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ $X_2(j\omega) = X_1(-j\omega) = \frac{1}{a-j\omega}$ ⇒ (*)

$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega)$

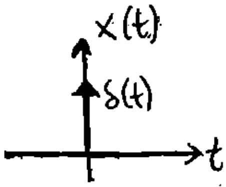
(*) ⇒ $X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \ldots = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

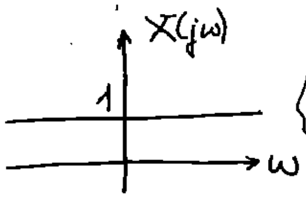
---

c) $x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega 0}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$

área ud.

$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

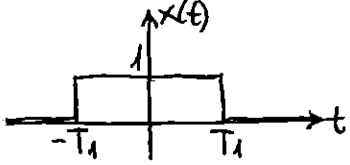




Nota: Las señales "muy estrechas" en el dominio del tiempo son "muy anchas" en el dominio de la frecuencia. Tb se cumple lo recíproco.

---

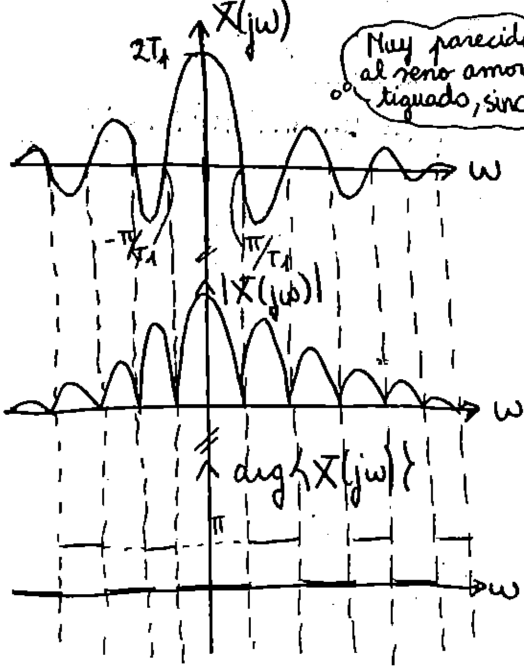
d) $x(t) = \begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -T_1<t<T_1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$



Pulso

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{T_1}^{-T_1} =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}\right] \underset{\times 2}{=} \frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{j\omega T_1}-e^{-j\omega T_1}}{2j} = \frac{2}{\omega}\,\text{sen}(\omega T_1) \text{ ¡¡}\in \mathbb{R}\text{!!}$$



Muy parecido al seno amortiguado, sinc(x)

$\text{sen}(\omega T_1) = 0 \rightarrow \omega T_1 = k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \rightarrow \omega = \frac{k\pi}{T_1}$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{\omega\to 0} X(j\omega) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hôpital}}{=} 2\lim_{\omega\to 0}\frac{\cos(\omega T_1)}{1}T_1 = 2T_1$$

Nota: $\boxed{\text{sinc}\,\theta = \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}}$ en STLN así lo definimos

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega}\,\text{sen}(\omega T_1) = 2T_1\frac{\text{sen}\left(\pi \underbrace{\frac{\omega T_1}{\pi}}_{\theta}\right)}{\pi \underbrace{\frac{\omega T_1}{\pi}}_{\theta}} = 2T_1\,\text{sinc}\left(\frac{\omega}{}\right.$$

27-10-2008

e) $x(t) = \text{sen}\, \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$.

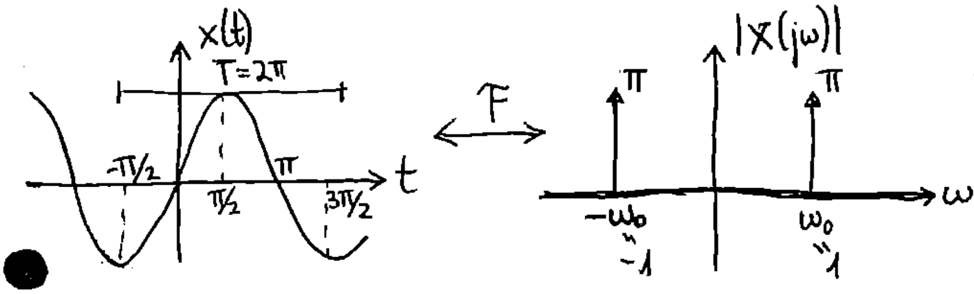
" $\frac{1}{2j}$ no depende de t "

$$\mathcal{F}\updownarrow X(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} - \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}\right] =$$

$$\overset{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{\cancel{2}j}\left[\cancel{2}\pi\,\delta(\omega-\omega_0) - \cancel{2}\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right] = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{j(-\omega_0)t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega-(-\omega_0)) = 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0) \\ e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \end{array}}$$

Vamos a representar el caso particular $\text{sen}\,\omega_0 t = \text{sen}t$ $(T=2\pi;\ \omega_0=1$



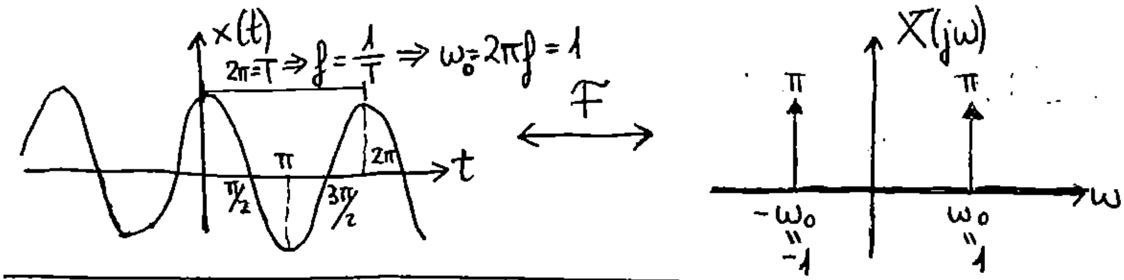
$\arg\{X(j\omega)\} = \text{"}\frac{\pi}{2}\text{"}$

$\omega = \pm\,\omega_0$

No lo representamos

f) $x(t) = \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \overset{\mathcal{F}}{=} \dots = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

Aplicamos los mismos procedimientos que en e)



Hemos representado el caso particular $\cos\omega_0 t = \cos t$ $(T=2\pi;\ \omega_0=1)$

Hemos visto esta propiedad en estas señales

Nota 1: Una señal real temporal tiene su TF "par en ω"; es decir; simétrica respecto al eje de ordenadas en "ω" para el módulo y la parte real o "impar en ω" (simétrica respecto del origen) para la fase y la parte imaginaria

¡¡ IMP!!

Nota 2: Observamos que tanto el seno como el coseno sólo existen para una frecuencia (hay dos deltas, pero simétricas ⇒ en realidad sólo hay una) Esto es lógico; sólo existen en su frecuencia de definición, ω₀.

Nota 3: Otras propiedades que se pueden discernir de estas señales y que son demostrables son:

- Una señal PAR en "t" tiene su TF REAL en "ω"
- Una señal IMPAR en "t" tiene su TF IMAGINARIA PURA en "ω"

- Estas y otras propiedades están en las tablas que se pueden consultar en el examen.

24-10-2008

Ejercicio 2 Calcular la transformada de Fourier de las siguientes señales:

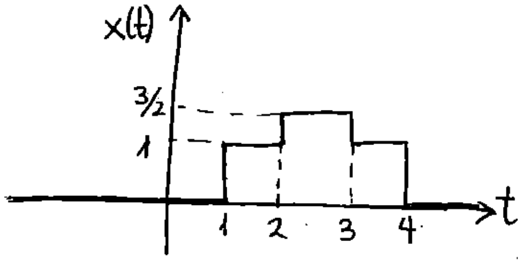
a) $x(t) = u(t-1)+\frac{1}{2}u(t-2)-\frac{1}{2}u(t-3)-u(t-4)$

b) $x(t) = [e^{-at}\cos(w_0 t)]u(t)$

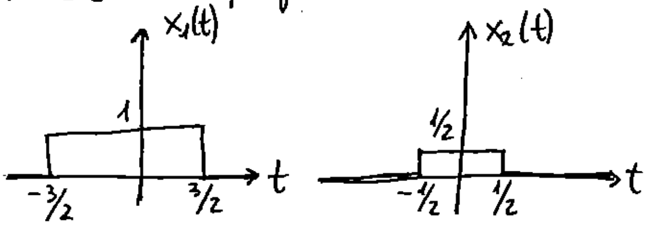
c) $x(t) = e^{-3|t|}\operatorname{sen}(2t)$

d) $x(t) = \begin{cases} 1+\cos(\pi t) & |t|\le 1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$

a)



1ª idea "Descompongo en señales de la tabla"



$$x(t)=x_1(t-5/2)+x_2(t-5/2)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\boxed{X(j\omega)}=\mathcal{F}\{x_1(t-\tfrac{5}{2})\}+\mathcal{F}\{x_2(t-\tfrac{5}{2})\}=$$

$$x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X(j\omega)$$
$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

$$= e^{-j\omega 5/2}X_1(j\omega)+e^{-j\omega\frac{5}{2}}X_2(j\omega)=e^{-j\omega\frac{5}{2}}\left[X_1(j\omega)+X_2(j\omega)\right]$$

$$= e^{-j\omega 5/2}\left[\frac{2\operatorname{sen}(\omega\frac{3}{2})}{\omega}+\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{1}{2})}{\omega}\right]=\boxed{\frac{e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{\omega}\left[\operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\omega)+\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right]}$$

Miramos en la tabla la TF del pulso y la particularizamos para $T_1=\frac{3}{2}$; $A_1=1$; $T_2=\frac{1}{2}$; $A_2=\frac{1}{2}$

2ª idea "Aplico definición"

$$\boxed{X(j\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_1^2 1\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_2^3\frac{3}{2}e^{-j\omega t}dt+\int_3^4 1\cdot e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega 2}-e^{-j\omega 1}+\frac{3}{2}e^{-j\omega 3}-\frac{3}{2}e^{-j\omega 2}+e^{-j\omega 4}-e^{-j\omega 3}\right)=\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega}+\frac{1}{2}e^{-2j\omega}-\frac{1}{2}e^{-3j\omega}-e^{-j\omega}\right]$$

$$=\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega}-e^{-4j\omega}\right]\frac{e^{\frac{5}{2}j\omega}}{e^{\frac{5}{2}j\omega}}+\frac{1}{2j\omega}\left[e^{-2j\omega}-e^{-3j\omega}\right]\frac{e^{\frac{5}{2}j\omega}}{e^{\frac{5}{2}j\omega}}=$$

quiero llegar a lo de antes

$$=2\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{e^{\frac{5}{2}j\omega}}\left[\frac{e^{\frac{3}{2}j\omega}-e^{-\frac{3}{2}j\omega}}{2j}\right]+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{e^{\frac{5}{2}j\omega}}\left[\frac{e^{\frac{1}{2}j\omega}-e^{-\frac{1}{2}j\omega}}{2j}\right]=$$

$$=\boxed{\frac{e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{\omega}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\omega\right)+\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right]}$$

Tal y como nos había salido antes

11-10-2008

b) $x(t)=\left[e^{-at}\cos w_0 t\right]u(t)=e^{-at}\dfrac{e^{jw_0t}+e^{-jw_0t}}{2}u(t)=\frac{1}{2}e^{-(a-jw_0)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-(a+jw_0)t}u(t$

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(a-jw_0)+jw}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(a+jw_0)+jw}=\ldots=\dfrac{a+jw}{a^2+w_0^2-w^2+jw2a}$; $Re(a)>0$

$e^{-at}u(t)$, $Re(a)>0 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{a+jw}$

$\left.\begin{matrix} Re(a-jw_0)>0 \\ Re(a+jw_0)>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow Re(a)>0$

---

c) $x(t)=e^{-3|t|}\operatorname{sen}2t=\begin{cases} e^{3t}\operatorname{sen}2t \ , \ t<0 \\ e^{-3t}\operatorname{sen}2t \ , \ t>0\end{cases}=\underbrace{e^{3t}\operatorname{sen}2t\,u(t)}_{x_1(t)}+\underbrace{e^{-3t}\operatorname{sen}2t\,u(t)}_{x_2(t)}$

$x_2(t)=e^{-3t}\dfrac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}u(t)=\dfrac{1}{2j}e^{-(3-2j)t}u(t)-\dfrac{1}{2j}e^{-(3+2j)t}u(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_2(jw)=\dfrac{1}{2j}\left(\dfrac{1}{3-2j+jw}\right.$

$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\dfrac{1}{a+jw}$

$Re(a)>0$

$\dfrac{1}{3+2j+}$

$\left\{\begin{matrix} Re(3-2j)>0 \\ Re(3+2j)>0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow Re(3)>0 \Leftrightarrow 3>0$ ✓ (sí se puede aplicar)

$=\ldots=\dfrac{2}{-w^2+6jw+13}$;

$x_1(-t)=e^{3(-t)}\operatorname{sen}(-2t)u(-(-t))=e^{-3t}\operatorname{sen}(-2t)u(t)=-e^{-3t}\operatorname{sen}2t\,u(t)=-x_2(t)\Rightarrow x_2(t)=-$

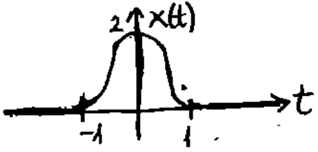
$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$

Por tanto: $\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(jw)=-X_2(-jw)=\dfrac{-2}{-(-w)^2-6jw+13}=\dfrac{-2}{-w^2-6jw+13}$

$\gg \boxed{X(jw)}=X_1(jw)+X_2(jw)=\ldots=\boxed{\dfrac{-24jw}{w^4+10w^2+169}}$

---

d) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t \ , \ |t|\leq 1 \\ 0 \ , \ |t|>1\end{cases}$

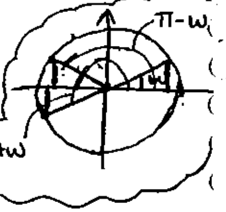


1ª idea "Definición" $\boxed{X(jw)}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}[1+\cos\pi t]e^{-jwt}dt=\int_{-1}^{1}e^{-jwt}\left[1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}\right]dt$

$\ldots=\dfrac{2}{w}\operatorname{sen}w+\dfrac{1}{\pi-w}\operatorname{sen}(\pi-w)+\dfrac{1}{\pi+w}\operatorname{sen}(\pi+w)=\dfrac{2}{w}\operatorname{sen}w+\dfrac{1}{\pi-w}\operatorname{sen}w-\dfrac{1}{\pi+w}\operatorname{sen}w$

$\operatorname{sen}(\pi-w)=\operatorname{sen}w$

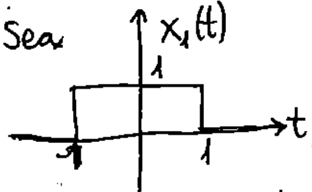
$\operatorname{sen}(\pi+w)=-\operatorname{sen}w$



$=\operatorname{sen}w\left[\dfrac{2}{w}+\dfrac{1}{\pi-w}-\dfrac{1}{\pi+w}\right]=\boxed{\operatorname{sen}w\dfrac{2\pi^2}{w(\pi^2-w^2)}}$

2ª idea "Propiedades, tabla ..."

Sea



$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(jw)=\dfrac{2}{w}\operatorname{sen}w$ $\quad T_1=1$

Entonces: $x(t)=\underbrace{(1+\cos\pi t)}_{x_2(t)}x_1(t)=x_2(t)\,x_1(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X(jw)=\dfrac{1}{2\pi}X_2(jw)*X_1$

$x(t)y(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\dfrac{1}{2\pi}X(jw)*Y(jw)$

Aplicando props $\left.\begin{cases}X_2(jw)=2\pi\delta(w)+\pi[\delta(w+\pi)+\delta(w-\pi)] \\ X_1(jw)=\dfrac{2}{w}\operatorname{sen}w\end{cases}\right\}(*) X(jw)=\dfrac{2\operatorname{sen}w}{w}+\dfrac{\operatorname{sen}(w+\pi)}{w+\pi}+\dfrac{\operatorname{sen}(w-\pi)}{w-\pi}$

aplicamos props convolución, simplificació

sale lo mismo que con 1ª idea $\ldots=\operatorname{sen}w\dfrac{2\pi^2}{w(\pi^2-w^2)}$

11-12-2008

TEMA 4: TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Ejercicio 1

Dado el sistema LTI regido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

a) Calcule la función de transferencia del sistema, dibuje su diagrama de polos y ceros indicando las distintas regiones de convergencia asociadas, y para cada una de ellas obtenga su h[n] correspondiente y estudie su causalidad y estabilidad. ¿Se trata de un sistema de fase mínima?

b) Calcule, en caso de existir, la respuesta en frecuencia del sistema y diga a cual de las regiones de convergencia está asociada.

---

a) $y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)z^{-1}-\frac{5}{2}Y(z)+Y(z)z = X(z)$

$$\boxed{H(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z} = \frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1} = \frac{z^{-1}}{(z^{-1}-2)(z^{-1}-\frac{1}{2})} =$$

Dejamos todo como potencias negativas de "z" (así será más útil después)

Factorizamos:

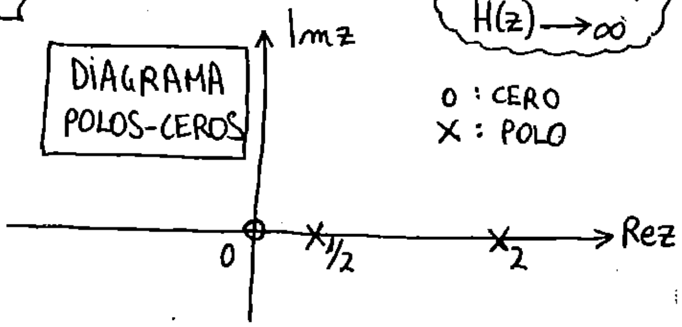
$z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1=0 \Rightarrow z^{-1}=\frac{5/2\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}}{2}$ $\nearrow 2$ $\searrow 1/2$

$$= \frac{z^{-1}}{(z^{-1}-2)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)(-2)}\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)}^{1} = \boxed{\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}$$

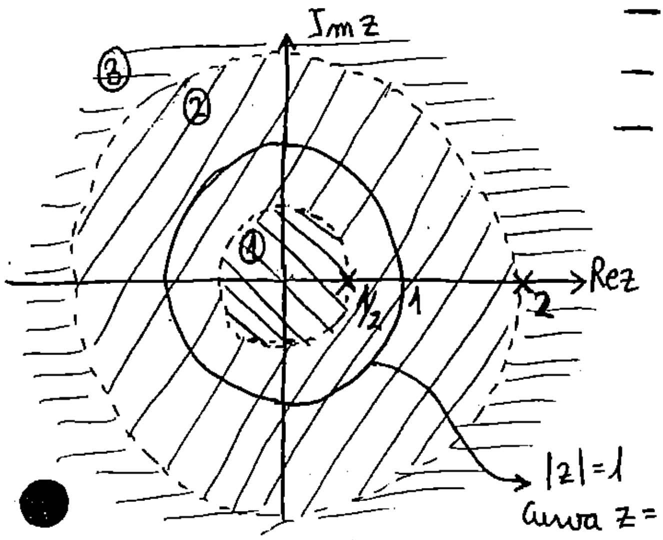
Buscamos términos de la forma $1-az^{-1}$

- Polos:
  - $z=\frac{1}{2}$ • $z=2$
  - Valores de z / $H(z)\longrightarrow\infty$

- Ceros: Valores de z / $H(z)\longrightarrow 0$
  - $z=\infty$ pues $\lim_{z\to\infty} H(z)=\frac{0}{1\cdot 1}=0$
  - $z=0$ pues $\lim_{z\to 0} H(z)=\frac{\infty}{\infty\cdot\infty}=0$



- Regiones de convergencia:



— ROC 1 : $|z|<\frac{1}{2} \equiv 0\leqslant|z|<\frac{1}{2}$; $H(z)\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h_1[n]$ ANTICAUSAL NO ESTABLE

— ROC 2 : $\frac{1}{2}<|z|<2$; $H(z)\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h_2[n]$ NO CAUSAL, ESTABLE

— ROC 3 : $|z|>2 \equiv 2<|z|\leqslant\infty$; $H(z)\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h_3[n]$ CAUSAL, NO ESTABLE

- ¿Son sistemas de fase mínima? ¿Todos los polos están dentro de la circunferencia unidad? → $\boxed{\text{NO}}$

- ¿Respuesta en frecuencia? El único sistema que tiene respuesta en frecuencia es el LTI 2:

SIGUE

11-12-2008

CONTINÚA $\Rightarrow$ $\cdot\ H_2(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-2e^{-j\omega})}$

y su respuesta al impulso será: $h_2[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(e^{j\omega})\}$

- Calculamos la respuesta al impulso de cada uno de los tres sistemas:

$$\cdot\ H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}}$$

Descomposición en fracciones simples

$\text{Res} = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = f(z)(z-z_0)\Big|_{z=z_0}$

Nomenclatura HMT1 ↳ STLN

MMT1

- Se pueden usar las fórmulas de cálculo de residuos de un polo simple para sacar A y B:

$$\boxed{A} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} H_1(z)\left(z-\tfrac{1}{2}\right) = H(z)\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{1-2\cdot 2} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

También se pueden hallar como siempre, pero con fórm las es más rápido

$$\boxed{B} = \lim_{z\to 2} H(z)(z-2) = H(z)\left(1-2z^{-1}\right)\Big|_{z=2} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=2} = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

LTI 1
$|z| < \frac{1}{2}$

$$\boxed{h_1[n]} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{A\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + B\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\} = A\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}}_{|a|=\frac{1}{2}} + B\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\}}_{|a|=2} =$$

Hay que elegir las expresiones que armonicen con la ROC en la que estamos $\longrightarrow$ Cogemos $|z|<\frac{1}{2}$; Cogemos $|z|<2$

$$= A\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\right) + B\left(-2^n u[-n-1]\right) = \boxed{\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n A - 2^n B\right)u[-n-1]} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 2^n\right)u[-n-1] = \boxed{\frac{2}{3}\left(2^{-n}-2^n\right)u[-n-1]}$$

LTI 2
$\frac{1}{2} < |z| < 2$

$$\boxed{h_2[n]} = A\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}}_{|a|=\frac{1}{2};\ \text{Cogemos } |z|>\frac{1}{2}} + B\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\}}_{|a|=2;\ \text{Cogemos } |z|<2} = \boxed{A\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right) + B\left(-2^n u[-n-1\right.}$$

$$= \frac{-2}{3}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]\right) = \boxed{\frac{-2}{3}\left(2^{-n}u[n] + 2^n u[-n-1]\right)}$$

LTI 3
$|z| > 2$

$$\boxed{h_3[n]} = A\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}}_{|a|=\frac{1}{2};\ \text{Cogemos } |z|>\frac{1}{2}} + B\,\mathcal{Z}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\}}_{|a|=2;\ \text{Cogemos } |z|>2} = A\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right) + B\,2^n u[n] =$$

$$= \boxed{\left(A\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + B\,2^n\right)u[n]} = \frac{2}{3}\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)u[n] = \boxed{\frac{2}{3}\left(2^n - 2^{-n}\right)u[n]}$$

<u>OBS</u>: Como vemos, las $h_i[n]$ son distintas a pesar de tener $H(z)$ común

STLN
Problemas de examen

Temas 1 y 2

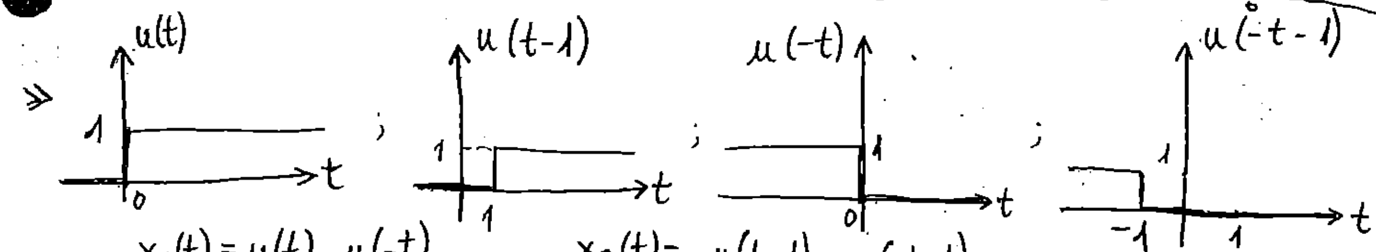
24-1-2008

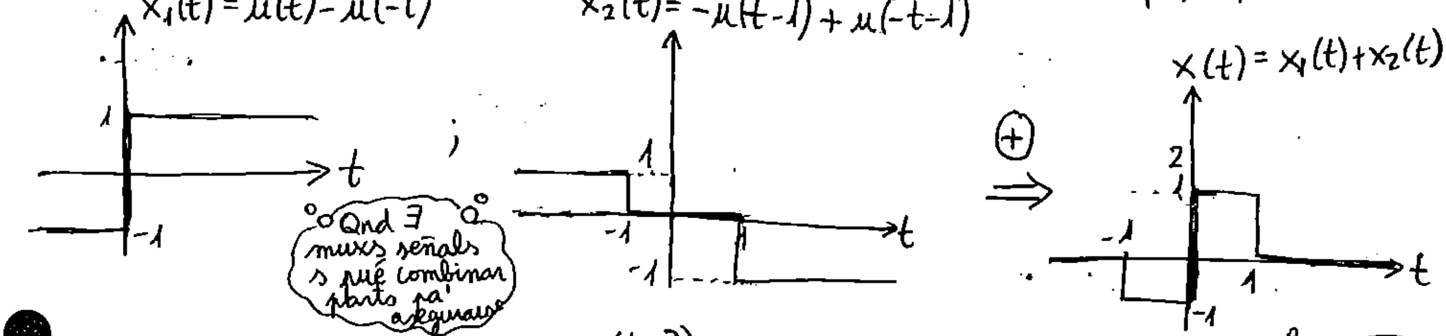
JUNIO 1986

1. Hállese la convolución de las señales

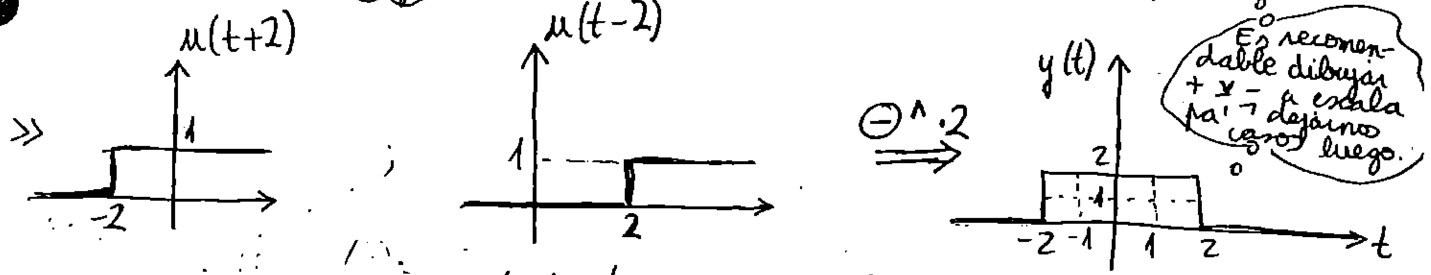
$$x(t) = u(t) - u(t-1) - u(-t) + u(-t-1) \quad \text{y} \quad y(t) = 2[u(t+2) - u(t-2)]$$

INVERTIR u(t-1); NO DESPLAZAR u(t)





Qnd ∃ muxs señals s pué combinar ptarlo pa' asegurarse

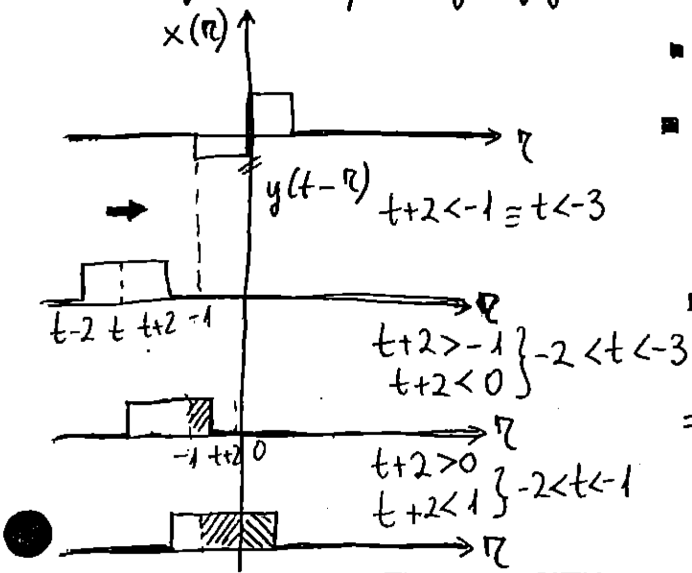


Es recomendable dibujar + y - a escala pa' ¬ dejarnos casos luego.

- Otra manera de sumar/restar/operar con señales es ponerlas en un eje vertical. Así son más visibles las limitaciones (la próxima vez lo haremos así)

$$z(t)=x(t)*y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{fija}} \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{móvil}} d\tau}_{\text{OPCIÓN ①}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)}_{\text{fija}} \underbrace{x(t-\tau)}_{\text{móvil}} d\tau}_{\text{OPCIÓN ②}}$$

» Escogems ① pa' dejar fija l + difícil.



- <u>CASO $t<-3$</u> $z(t)=0$

- <u>CASO $-3<t<-2$</u> $z(t)=\int_{-1}^{t+2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau=$

$$=\int_{-1}^{t+2}(-1)2d\tau=-2[\tau]_{-1}^{t+2}=-2(t+3)=\boxed{-2t-6}$$

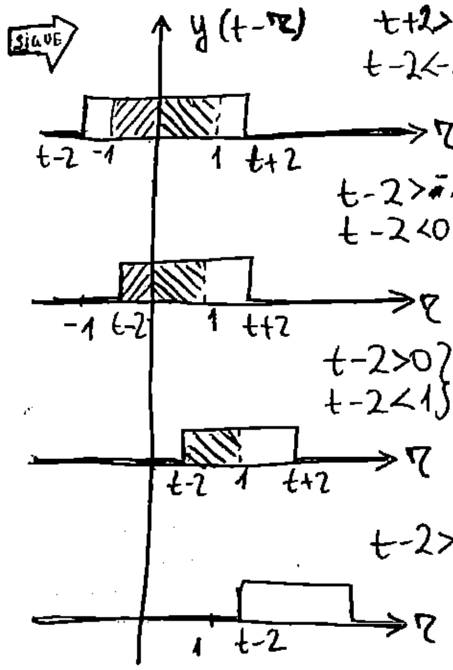
- <u>CASO $-2<t<-1$</u> $z(t)=\int_{-1}^{0}(-1)2d\tau+\int_{0}^{t+2}1\cdot 2d\tau=$

$$=-2[\tau]_{-1}^{0}+2[\tau]_{0}^{t+2}=2(t+2-1)= 2t+2$$

CONTINÚA

SIGUE

29-9-200



$\left.\begin{matrix} t+2>1 \\ t-2<-1 \end{matrix}\right\} -1<t<1$

- CASO $-1<t<1$

$$z(t)=\int_{-1}^{0}(-1)2d\tau+\int_{0}^{1}1\cdot 2\cdot d\tau = 2[\tau]_0^{-1}+2[\tau]_0^{1}=0$$

$\left.\begin{matrix} t-2>-1 \\ t-2<0 \end{matrix}\right\} 1<t<2$

- CASO $1<t<2$

$$z(t)=\int_{t-2}^{0}(-1)2d\tau+\int_{0}^{1}1\cdot 2d\tau = 2[\tau]_0^{t-2}+2[\tau]_0^{1}=2t-2$$

$\left.\begin{matrix} t-2>0 \\ t-2<1 \end{matrix}\right\} 2<t<3$

- CASO $2<t<3$

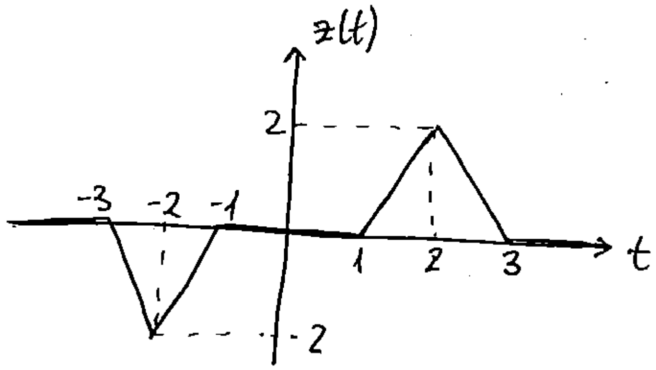
$$z(t)=\int_{t-2}^{1}1\cdot 2\cdot d\tau = 2[\tau]_{t-2}^{1}=2(1-(t-2))=6-2t$$

$t-2>1 \equiv t>3$

- CASO $t>3$ Análogo al 1^er caso

>> En resumen:

$$z(t)=\begin{cases} 0 & t<-3 \\ -2t-6 & -3<t<-2 \\ 2t+2 & -2<t<-1 \\ 0 & -1<t<1 \\ 2t-2 & 1<t<2 \\ 6-2t & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$



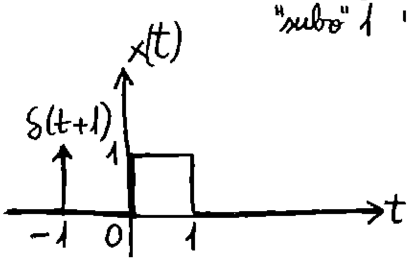
Pa' no equivocarse en rectas, calcular los valores en los extremos de los intervalos de definición y unirlos (la recta se pué construir en 2 ptos)

✓ **SEPTIEMBRE 1987**

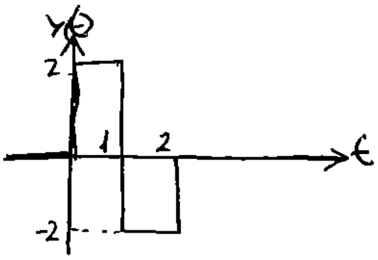
1. Calcule gráficamente la convolución $z(t) = x(t) * y(t)$ donde:

$$x(t) = \delta(t+1) + u(t) - u(t-1) \quad \text{y} \quad y(t) = 2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)$$

$$x(t) = \delta(t+1) + \underbrace{u(t)}_{\substack{\text{En } t=0 \\ \text{"subo" } 1}} - \underbrace{u(t-1)}_{\substack{\text{En } t=1 \\ \text{"bajo" } 1}}$$



$$y(t) = 2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)$$



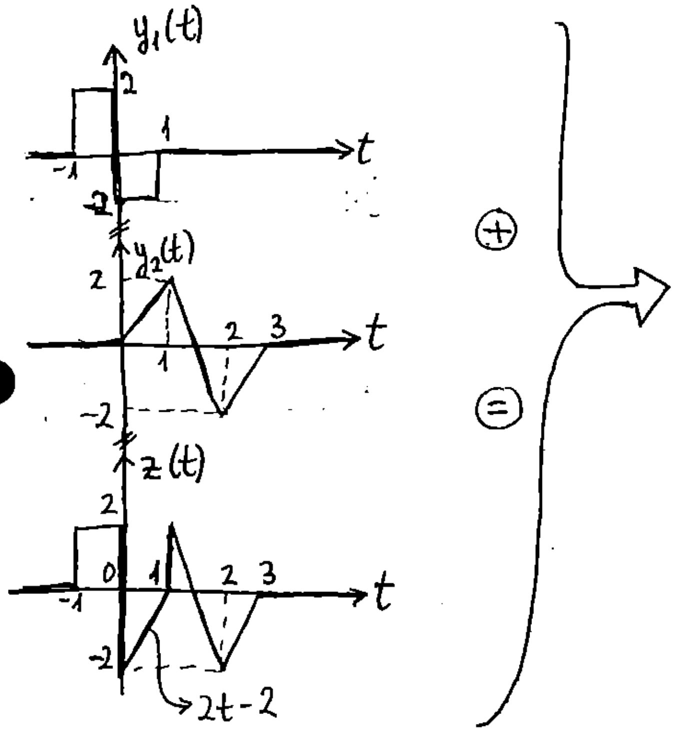
Cuando no hay desplazamientos ni señales raras podemos dibujar directamente la señal. En el caso de la revolución es muy fácil

$$z(t) = x(t) * y(t) = [\underbrace{\delta(t+1)}_{x_1(t)} + \underbrace{u(t) - u(t-1)}_{x_2(t)}] * y(t) = \underbrace{x_1(t) * y(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{x_2(t) * y(t)}_{y_2(t)}$$

- $y_1(t) = y(t) * \delta(t+1) \underset{\text{props } \delta}{=} y(t+1)$ "y(t) desplazada 1 hacia la izda"

Quitamos la delta de en medio

- $y_2(t) = x_2(t) * y(t) = \left[\begin{array}{l}\text{aplicamos método gráfico} \\ \text{Muy parecido a JUN'86}\end{array}\right] = \begin{cases} 2t, & 0<t<1 \\ 6-4t, & 1<t<2 \\ 2t-6, & 2<t<3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$



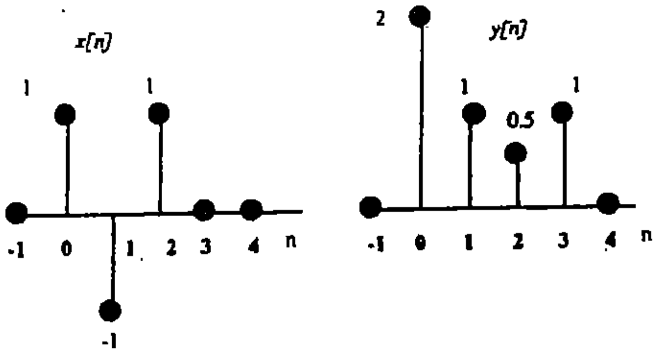
Así que:

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & -1<t<0 \\ 2t-2, & 0<t<1 \\ 6-4t, & 1<t<2 \\ 2t-6, & 2<t<3 \\ 0, & t>3 \end{cases}$$

Cuando se solapan dos señales se calcula analíticamente el resultado y luego se pinta en la señal final, no tiene mayor misterio

JUNIO 1996

3. Dadas las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ que se representan en la figura:



Calcular:

a) La convolución lineal de las dos secuencias.

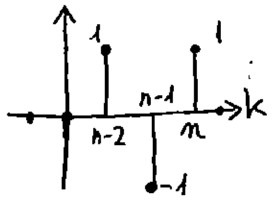
b) La convolución circular o cíclica de ciclo 5. ⟶ No sé si entra.

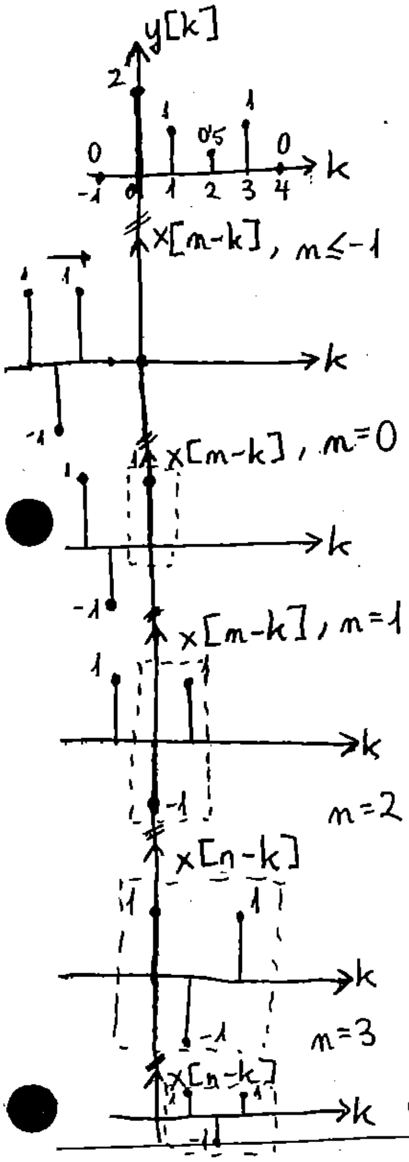
---

a) $z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[n-k] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]\,x[n-k]}_{\text{Cogemos ésta}}$

$x[n-k] = x[-(k-n)]$ $\begin{cases} 1^{\circ}) \text{ Reflejo} \\ 2^{\circ}) \text{ Desplazo "}n\text{"} \end{cases}$

〃





<u>Caso $n\le -1$</u>: $z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0 = 0$

<u>Caso $n=0$</u>: $z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{0} y[k]x[n-k] =$

$= y[0]x[0-0] = y[0]x[0] = 2\cdot 1 = 2$

<u>Caso $n=1$</u>: $z[n] = \sum_{k=0}^{1} y[k]x[n-k] = \underbrace{y[0]x[1-0]}_{k=0} + \underbrace{y[1]x[1-1]}_{k=1}$

$= y[0]x[1] + y[1]x[0] = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 = -1$

▸ Como vemos, se puede hacer formalmente, pero como es un rollo, en la práctica se multiplican las muestras que se solapan en $y[k]$ y $x[n-k]$ para todos los casos posibles. Así uno ahorra tiempo y esfuerzo

<u>Caso $n=2$</u>: $z[n] = 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0'5\cdot 1 = 1'5$

<u>Caso $n=3$</u>: $z[n] = 1\cdot 1 + 0'5(-1) + 1\cdot 1 = 1'5$ …etc (con sino, ni representamos los dibujos)

<u>Caso $n=4$</u>: $z[n] = -0'5$ <u>Caso $n=5$</u>: $z[n] = 1$ <u>Caso $n\ge 6$</u>: $z[n] = 0$

etc.

✓

✓SEPTIEMBRE 2001

1. Sea el siguiente sistema definido por su relación entrada-salida:

$$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

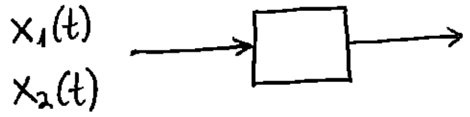
con $T>0$, y siendo ω_0 una constante arbitraria.

a) Estudie la linealidad e invarianza temporal del sistema.
b) Calcule $h(t)$, la respuesta del sistema al impulso $\delta(t)$.
c) Calcule $h_{t_0}(t)$, la respuesta del sistema al impulso $\delta(t-t_0)$.
d) Sea $H(j\omega)$ la transformada de Fourier de $h(t)$ y $X(j\omega)$ la transformada de Fourier de una entrada arbitraria $x(t)$. ¿Podría calcular la salida del sistema $y(t)$ como la transformada inversa de Fourier de $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$? Justifique su respuesta.

Tema 3

---

a). LINEALIDAD



$$y_1(t)=\int_{t-T}^{t}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

$$y_2(t)=\int_{t-T}^{t}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

$x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$

$y_3'(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ ¡¡SI FUERA LINEAL!!

- Veamos qué ocurre en realidad:

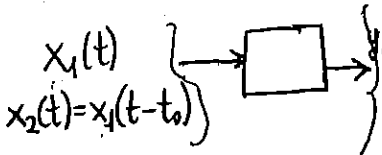
$$\boxed{y_3(t)}\overset{?}{=}\int_{t-T}^{t}x_3(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_3(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau=\int_{t-T}^{t}[\alpha x_1(\tau)+\beta x_2(\tau)]\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(\tau)]\cos(\omega_0\tau)d$$

Props integrales

$$=\underbrace{\alpha\left[\int_{t-T}^{t}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau\right]}_{\alpha y_1(t)}+\underbrace{\beta\left[\int_{t-T}^{t}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\right.}_{\beta y_2(t)}$$

$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)\overset{?}{=}\boxed{y_3'(t)}\Rightarrow\boxed{\text{SIST SÍ LINEAL}}\ \text{cqd}$$

• INVARIANZA TEMPORAL



$$y_1(t)=\int_{t-T}^{t}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

$$y_2'(t)=y_1(t-t_0)=\int_{t-t_0-T}^{t-t_0}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau-\int_{t-t_0}^{t-t_0+T}x_1(\tau)\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

¡¡SI FUERA INVARIANTE!!

- Em realidad:

$$y_2(t)=\int_{t-T}^{t}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}x_2(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau=\int_{t-T}^{t}x_1(\tau-t_0)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}x_2(\tau-t_0)\cos(\omega_0\tau)d$$

- A priori no podemos comparar $y_2'(t)$ con $y_2(t)$, pues los límites de integración y las expresiones subradicales son distintos simultáneamente. Lo que necesitamos es un cambio de variable que iguale alguna de las dos cosas, en este caso por ejemplo busquemos igualar los límites de integración:

(La idea del cambio de variable se va a repetir mucho)

CAMBIO VARIABLE $\quad s=\tau-t_0 \rightarrow \tau=s+t_0$

$d\tau=ds$

$\tau=t-T\Rightarrow s=t-T-t_0$

$\tau=t\Rightarrow s=t-t_0$

$\tau=t+T\Rightarrow s=t+T-t_0$

$$\Rightarrow\ y_2(t)=\int_{t-t_0-T}^{t-t_0}x_1(s)\cos(\omega_0[s+t_0])\,ds-\int_{t-t_0}^{t-t_0+T}x_1(s)\cos(\omega_0[s+t_0])\,ds\ \xRightarrow{\text{Renombr. } s\to\tau}$$

s variable muda

$$\boxed{y_2(t)}=\int_{t-t_0-T}^{t-t_0}x_1(\tau)\cos(\omega_0[\underline{\tau+t_0}])\,d\tau-\int_{t-t_0}^{t-t_0+T}x_1(\tau)\cos(\omega_0[\underline{\tau+t_0}])\,d\tau\ \boxed{\neq y_2'(t)}\ \Longrightarrow\ \boxed{\text{EL SIST NO ES INVARIANTE}}$$

cqd

---

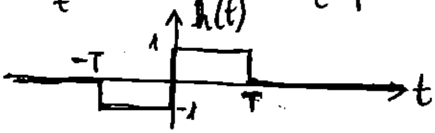
b) $x(t)=\delta(t)\longrightarrow\boxed{\text{LIN}}\longrightarrow y(t)=\boxed{h(t)}=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}\delta(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau=$

(¡¡$h(t)\neq$)

$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$
$x(\tau)\delta(\tau)=x(0)\delta(\tau)$

$$=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\underbrace{\cos(\omega_0\cdot 0)}_{1}d\tau-\int_{t}^{t+T}\ldots=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}\delta(\tau)\,d\tau=u(\tau)\Big]_{t-T}^{t}-u(\tau)\Big]_{t}^{t+T}=u(t)-u(t-T)-u(t+T)+u(t)=$$

$$=\boxed{-u(t-T)+2u(t)-u(t+T)}$$



---

c) $\begin{matrix}\delta(t)\\ \delta(t-t_0)\end{matrix}\longrightarrow\boxed{\text{LIN}}\longrightarrow\begin{matrix}h(t)\\ ¿h_{t_0}(t)?\end{matrix}$ (¡¡$\neq h(t-t_0)$!! (NO INVARIANTE)) (No queda más remedio que calcularlo "a pelo")

$$\boxed{h_{t_0}(t)}=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau-t_0)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}\delta(\tau-t_0)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau-t_0)\cos(\omega_0t_0)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}\delta(\tau-t_0)\cos(\omega_0t_0)d$$

$x(t)=\delta(t-t_0)$
$x(\tau)=\delta(\tau-t_0)$

$f(\tau)\delta(\tau-t_0)=f(t_0)\delta(\tau-t_0)$

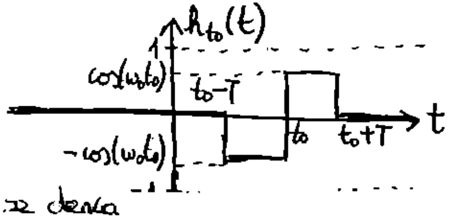
$\cos(\omega_0t_0)=\text{CTE}$

$$=\cos(\omega_0t_0)\left[\int_{t-T}^{t}\delta(\tau-t_0)\,d\tau-\int_{t}^{t+T}\delta(\tau-t_0)\,d\tau\right]=\cos(\omega_0t_0)\left(\left[u(\tau-t_0)\right]_{t-T}^{t}-\left[u(\tau-t_0)\right]_{t}^{t+T}\right)=$$

$$=\cos(\omega_0t_0)\left[u(t-t_0)-u(t-T-t_0)-u(t+T-t_0)+u(t-t_0)\right]=\cos(\omega_0t_0)[-u(t-T-t_0)+\ldots$$

$$\ldots+2u(t-t_0)-u(t+T-t_0)]=\boxed{\cos(\omega_0t_0)\cdot h(t-t_0)}$$

Por ①, b ~~[illegible]~~ será $u(t-t_0)$ ~~[illegible]~~ se desplaza



② ($|\cos(\omega_0t_0)|\leq 1$)

FEBRERO 2002

1. Sea un sistema definido por la siguiente relación entrada-salida:

$$y(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{t-T_1}^{t+T_2} x(\tau)d\tau$$

con $0 < T_1 < \infty$ y $0 < T_2 < \infty$.

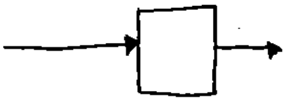
a) ¿Es el sistema lineal? Justifique su respuesta.
b) ¿Es el sistema invariante? Justifique su respuesta.
c) Calcule la respuesta al impulso del sistema.
d) Sea $x(t) = \cos(\omega t)$. Encuentre la relación general entre T_1, T_2 y ω para que la salida sea cero.

---

a) $x_1(t)$

$x_2(t)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$



$$y_1(t) = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_2(t) = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_2(\tau)d\tau$$

$$\boxed{y_3(t) \overset{?}{=} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$$

$$\bullet \boxed{y_3(t)} = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_3(\tau)d\tau = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2}[\alpha x_1(\tau)+\beta x_2(\tau)]d\tau = \underbrace{\frac{\alpha}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_1(\tau)d\tau}_{y_1(t)} + \underbrace{\frac{\beta}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_2(\tau)d\tau}_{y_2(t)}$$

$$= \boxed{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)} \Rightarrow \boxed{\text{LINEAL}} \text{ cqd}$$

---

b) $x_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$$y_1(t) = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_1(\tau)d\tau$$

$$\boxed{y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t-t_0) \overset{?}{=} \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-t_0-T_1}^{t-t_0+T_2} x_1(\tau)d\tau}$$

$$\bullet \boxed{y_2(t)} = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_2(\tau)d\tau = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2} x_1(\underbrace{\tau-t_0}_{s})d\tau = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-t_0-T_1}^{t-t_0+T_2} x_1(s)ds = \boxed{y_1(t-t_0)}$$

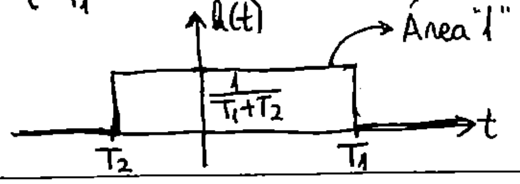
$$\Rightarrow \boxed{\text{INVARIANTE}} \text{ cqd}$$

CAMBIO VARIABLE	$s = \tau - t_0$ $\tau = s + t_0$	$\tau = t+T_2 \Rightarrow s = t-t_0+T_2$ $\tau = t-T_1 \Rightarrow s = t-t_0-T_1$	$ds = d\tau$

---

c)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{h(t)} = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2}\delta(\tau)d\tau = \frac{1}{T_1+T_2}[u(\tau)]_{t-T_1}^{t+T_2} = \boxed{\frac{1}{T_1+T_2}[u(t+T_2)-u(t-T_1)]}$$



d) $x(t)=\cos\omega t \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}LTI\\ h(t)=\frac{1}{T_1+T_2}[u(t+T_2)-u(t-T_1)]\end{array}} \longrightarrow y(t)=0$ ¿ $f=f(\omega,T_1,T_2)$?

- $\boxed{0}=y(t)=\frac{1}{T_1+T_2}\int_{t-T_1}^{t+T_2}\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{1}{T_1+T_2}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega\tau\right]_{t-T_1}^{t+T_2}=\frac{\operatorname{sen}(\omega[t+T_2])-\operatorname{sen}(\omega[t-T_1])}{\omega(T_1+T_2)}$

$\boxed{\operatorname{sen}a=\operatorname{sen}(a+2k\pi)}$

- $0=\operatorname{sen}(\omega[t+T_2])-\operatorname{sen}(\omega[t-T_1]) \Rightarrow \operatorname{sen}(\omega[t+T_2])=\operatorname{sen}(\omega[t-T_1]) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega[t+T_2]=2k\pi+\omega[t-T_1] \Rightarrow 2k\pi=\omega[t+T_2]-\omega[t-T_1]=$

$=\omega[\cancel{t}+T_2-\cancel{t}+T_1] \Rightarrow \boxed{2k\pi=\omega(T_2+T_1)\;\; k\in\mathbb{N}}$

- También se podía razonar así:

- $\int_{t-T_1}^{t+T_2}\cos\omega\tau\,d\tau=0 \Leftrightarrow$ El intervalo de integración es un número entero de veces el periodo del coseno

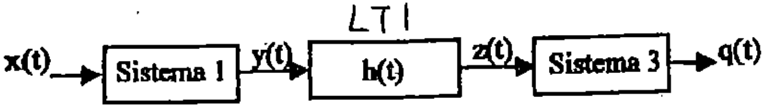
$\Rightarrow \boxed{y(t)=0} \Leftrightarrow \cancel{t}+T_2-(\cancel{t}-T_1)=kT_{\cos} \Leftrightarrow \boxed{T_2+T_1=k\frac{2\pi}{\omega}\;\; k\in\mathbb{N}}$

<u>OBS</u>: $k\in\mathbb{N}$ pues $T_2+T_1>0$ siempre

20-10-2008

FEBRERO 2003

1. Considere el sistema de la figura:



Los bloques denominados "Sistema 1" y "Sistema 3" realizan las siguientes operaciones:

$$y(t) = x(-bt) \quad \boxed{b>1}$$
$$q(t) = z(-t/b)$$

siendo b una constante real y positiva mayor que la unidad. El bloque central representa un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = e^{abt}\cdot u(-b\cdot t) \quad \boxed{a\in\mathbb{R}^+}$$

siendo a una constante real y positiva. Se pide:

a) Suponiendo que $x(t)$ es una señal de energía finita, determine cuál es la energía de la señal $y(t)$. ¿Cuál es la energía de la señal $x(t)$? ¿Cuál es la relación entre la energía de ambas señales?. Comente el significado físico del resultado obtenido.

b) Dada una entrada genérica $x(t)$, determine la salida $q(t)$. A partir de ese desarrollo, obtenga $h_{eq}(t)$, tal que $q(t) = h_{eq}(t) * x(t)$.

c) Suponiendo que $x(t)$ es ahora el escalón unidad, calcule la señal $q(t)$ haciendo uso de la operación convolución.

---

a) Energía total de la señal $x(t)$: $\boxed{E_x} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt}$ //

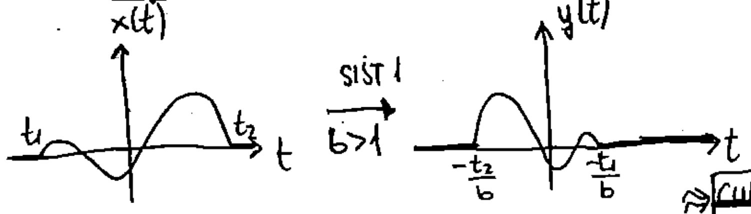
DATO: $x(t)$ señal de energía finita: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$ CONV

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{SIST 1}} \longrightarrow y(t) = x(-bt)\ ,\ \boxed{b>1}$$

$$\boxed{E_y} = \int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|x(-bt)|^2dt = \int_{+\infty}^{-\infty}|x(\tau)|^2\frac{d\tau}{-b} = \boxed{\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|x(\tau)|^2d\tau = \frac{E_x}{b}}\ // \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{E_x}{b}}\ //$$

CAMBIO VARIABLE | $\tau = -bt$
$d\tau = -b\,dt$
$t=-\infty \rightarrow \tau = -b(-\infty) = +\infty$
$t=\infty \rightarrow \tau = -b(+\infty) = -\infty$

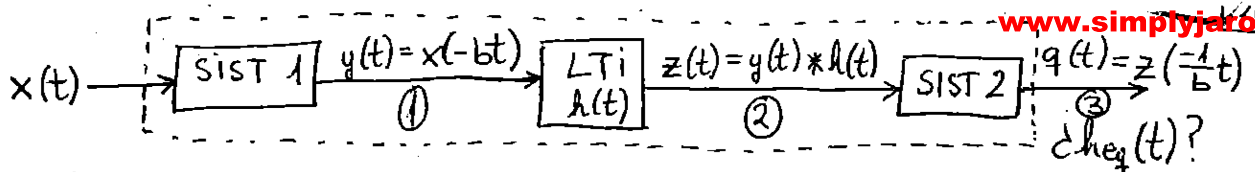
- $b>1 \Rightarrow \boxed{E_y < E_x}$ Significado físico:



- Parece razonable que $E_y < E_x$ pues $y(t)$ es la señal $x(t)$ reflejada (esto no influye) en un instante menor de tiempo (las amplitudes se conservan)

⇒ CUANDO SE COMPRIME UNA SEÑAL, SU ENERGÍA SE COMPRIME PROPORCIONALMENTE

·)



¿$h_{eq}(t)$?

① $y(t) = x(-bt)$

② $z(t) = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-b\tau) h(t-\tau)\, d\tau \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-b\tau) \underbrace{e^{ab(t-\tau)} \cdot u(-b[t-\tau])}_{h(t-\tau)}\, d\tau$

$y(t) = x(-bt)$ $\quad$ $h(t) = e^{abt} u(-bt)$

③ $q(t) = z\left(-\frac{1}{b}t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-b\tau) e^{ab(-\frac{1}{b}t - \tau)} \cdot u\left(-b\left[-\frac{1}{b}t - \tau\right]\right) d\tau \overset{\swarrow}{=}$

$-b\tau \to s$ · cuando "nos fastidia" una cte con τ, hacemos cambio variable

CAMBIO VARIABLE

$s = -b\tau \to \tau = \frac{-s}{b} \to d\tau = -\frac{ds}{b}$

$s = -\infty \to \tau = \frac{-\infty}{-b} \overset{\uparrow}{=} +\infty$

$s = \infty \to \tau = \frac{\infty}{-b} \overset{\downarrow}{=} -\infty$ $\quad$ $b>0$

$= \int_{\infty}^{-\infty} x(s) e^{ab(-\frac{1}{b}t + \frac{s}{b})} \cdot u\left(-b\left[-\frac{1}{b}t + \frac{s}{b}\right]\right) \frac{ds}{-b} =$

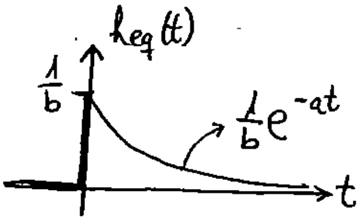
$= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}}(s-t)} \cdot u\left(\frac{-\cancel{b}}{\cancel{b}}[s-t]\right) \frac{1}{b} ds \overset{\text{cambio } s=\tau \text{ (variable muda)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{e^{-a(t-\tau)} u(t-\tau) \frac{1}{b}}_{(*)\, h_{eq}(t-\tau)} d\tau$

-Estábamos buscando una expresión del tipo:

$$q(t) = x(t) * h_{eq}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_{eq}(t-\tau)\, d\tau$$

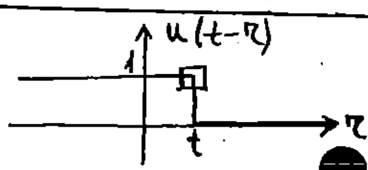
- Por tanto, por analogía: (*) podemos sacar $h_{eq}(t)$

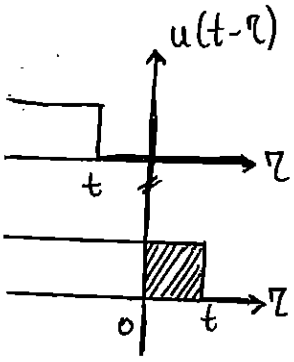
$\gg$ $\boxed{h_{eq}(t) = \frac{1}{b} e^{-at} u(t)}$



OBS: Otra posibilidad para resolver este apartado es particularizar $x(t) = \delta(t)$ y pasar por todas las partes del sistema hasta obtener $q(t)\big|_{x(t)=\delta(t)} = h_{eq}(t)$.

c) · $q(t)\Big|_{x(t)=u(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h_{eq}(t-\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_{eq}(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau}_{\text{Cogemos esta opción}}$





Caso $t<0$: $\quad q(t) = 0$

Caso $t>0$: $q(t) = \int_0^t h_{eq}(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{b} e^{-a\tau} d\tau = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{-a} \int_0^t -a e^{-a\tau} d\tau =$

$= -\frac{1}{ab}\left[e^{-a\tau}\right]_0^t = \frac{1}{ab}\left[1 - e^{-at}\right]$

$\gg$ En resumen: $\boxed{q(t) = \frac{1}{ab}\left[1 - e^{-at}\right] u(t)}$ //

[illegible]-10-2008

✓ **SEPTIEMBRE 2000** ✓

1. Sea un sistema lineal e invariante cuya relación entrada $x(t)$, y salida $y(t)$ viene dada por la siguiente expresión:

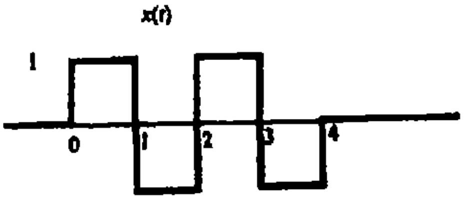
Subrayarlo siempre que lo digan para hacer notar que podemos usar las propiedades de los LTI

$$y(t)=\int_t^\infty x(\tau)e^{t-\tau}d\tau$$

a) Calcule la respuesta al impulso $h(t)$. EXTRA: estudiar causalidad, estabilidad y memoria

b) Calcule la respuesta al escalón unidad $s(t)$.

c) Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ se representa en la figura siguiente. La solución debe darse exclusivamente en función de la respuesta al escalón $s(t)$. (Nota: no es necesario sustituir y se puede hacer aún sin conocer la expresión concreta de $s(t)$).



---

a) 1ª idea: Aplico prop convolución

$$\text{LTI: } y(t)=x(t)*h(t)\overset{\text{enunciado}}{=}\int_t^\infty x(\tau)e^{t-\tau}d\tau$$

Tenemos x(t) en ambos miembros. Habría que "despejar" h(t), lo cual sólo puede hacerse con una convolución genérica, algo complicado sin conocer "t" (habría varios casos). Finalmente, habría que identificar términos en las expresiones subintegrales (costoso)

2ª idea: Def

"Cuando ponemos un impulso a la entrada, a la salida obtenemos la respuesta al impulso"

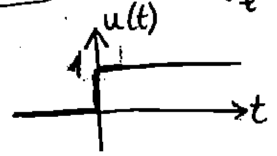
$$x(t)=\delta(t)\Rightarrow y(t)=\int_t^\infty \delta(\tau)e^{t-\tau}d\tau=\int_t^\infty \delta(\tau)\boxed{e^t}e^{-\tau}d\tau=e^t\int_t^\infty e^{-\tau}\delta(\tau)d\tau \overset{f(\tau)\delta(\tau)=f(0)\cdot\delta(\tau)}{=}$$

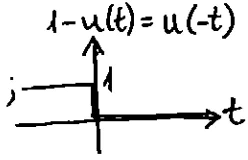
Esto es más directo y más sencillo

$$=e^t\int_t^\infty \cancel{e^{-0}}^{1}\delta(\tau)d\tau=e^t\cdot[u(\tau)]_t^\infty=e^t[\cancel{u(\infty)}^{①}-u(t)]=e^t[1-u(t)]$$

$$u(\infty)=\lim_{t\to\infty}u(t)$$

Además:

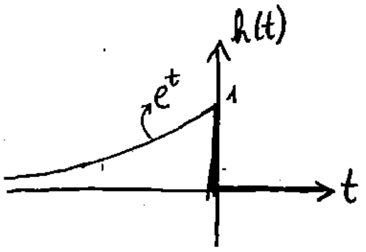




Así que: $\boxed{h(t)=e^t u(-t)}$

EXTRA "Estudiar causalidad, estabilidad y memoria"

- Sist LTI causal $\Leftrightarrow h(t)=0,\ t<0$ NO CAUSAL
- " LTI sin memoria $\Leftrightarrow h(t)=k\,\delta(t)$ CON MEMORIA
- " LTI estable $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$ CONVERGE



$$\gg \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^t u(-t)dt=\int_{-\infty}^{0}e^t dt=e^t\Big]_{-\infty}^{0}=\cancel{e^0}^{1}-\cancel{e^{-\infty}}^{0}=1<\infty \text{ ESTABLE}$$

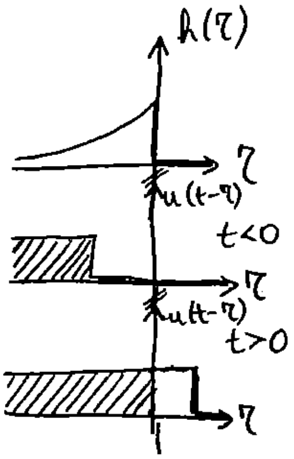
b) 1ª idea: Def enunciado

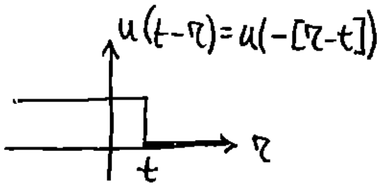
$$s(t)=\int_t^{\infty}x(\tau)e^{t-\tau}d\tau=\int_t^{\infty}u(\tau)e^{t-\tau}d\tau=\begin{cases} t>0: \ \int_t^{\infty}e^{t-\tau}d\tau=\left[-e^{t-\tau}\right]_t^{\infty}=\left[e^{t-\tau}\right]_{\infty}^{t}=\overset{1}{\cancel{e^{0}}}-\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}}=1 \\ t<0: \ \overset{0}{\cancel{\int_t^{0}0\cdot e^{t-\tau}d\tau}}+\int_0^{\infty}e^{t-\tau}d\tau=\left[e^{t-\tau}\right]_{\infty}^{0}=e^{t}-\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}}=e^{t}; \end{cases}$$

Cuando hay parámetros en los límites de integración hay que tener cuidado

2ª idea: Convolución

Por ser LTI: $s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau}_{\text{usamos esta}}$: El exalón es fácil de mover





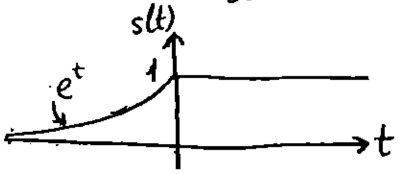
Caso t<0

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\cdot 1\,d\tau=e^{\tau}\Big]_{-\infty}^{t}=e^{t}-\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}}=e^{t};$$

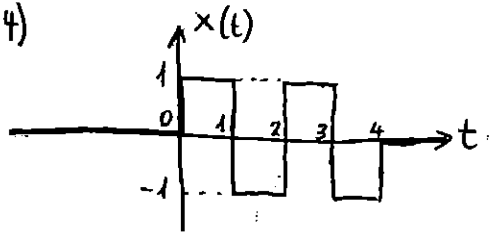
Caso t>0

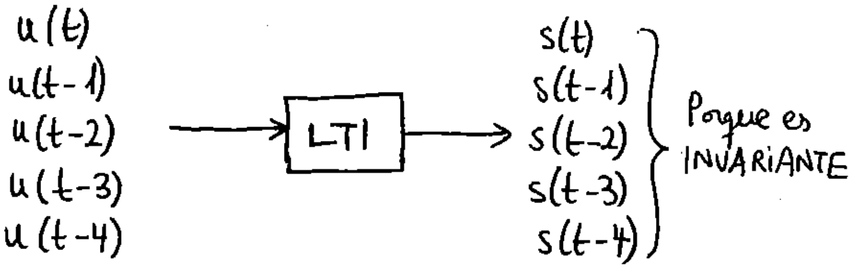
$$s(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}\,1\,d\tau=e^{\tau}\Big]_{-\infty}^{0}=\overset{1}{\cancel{e^{0}}}-\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}}=1;$$

$$\boxed{s(t)=\begin{cases}e^{t}, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}=e^{t}u(-t)+u(t)}$$



c) $x(t)=u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+u(t+4)$





$$x(t)=1u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)\ldots\xrightarrow{LTI}y(t)=1\,s(t)-2s(t-1)+2s(t-2)-2s(t-3)+s(t-4)$$

$$\ldots-2u(t-3)+1u(t+4)$$

Finalmente: $\boxed{y(t)=s(t)-2s(t-1)+2s(t-2)-2s(t-3)+s(t-4)}$

√FEBRERO 2001

1. Sean las tres señales siguientes √

$$x_1(t) = e^{-at}u(t), \qquad a \text{ real y positivo}$$

$$x_2(t) = e^{-bt}u(t), \qquad b \text{ real y positivo, } b \neq a.$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT_0) \qquad T_0 > 2T$$

siendo $p(t)$ la señal

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

a) Dibuje las señales que resultan de aplicar en el eje de tiempos las transformaciones:

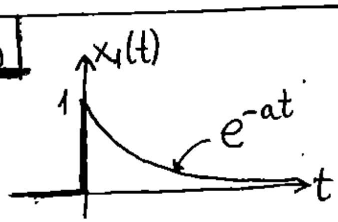
$$y_i(t) = x_i(2t-1), \quad i = 1,2,3$$

Calcule la energía y la potencia media de las señales resultantes, así como la relación de estos parámetros con los correspondientes parámetros de las señales originales. ¿Es periódica alguna de las señales resultantes $y_i(t)$, $i = 1,2,3$? Justifique su respuesta.

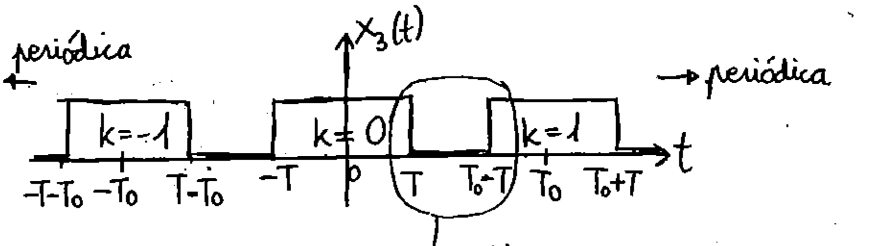
b) Realice en el dominio temporal la convolución de las señales $x_1(t)$ y $p(t)$.

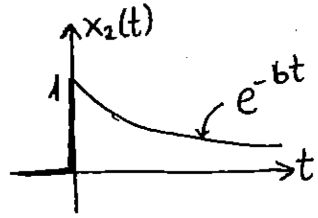
c) Realice en el dominio temporal la convolución de las señales $x_1(t)$ y $x_3(t)$.

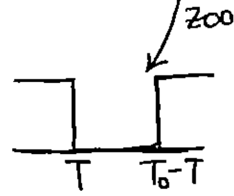
PREVIO



$$x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-kT_0) = \ldots + \underbrace{p(t+T_0)}_{k=-1} + \underbrace{p(t)}_{k=0} + \underbrace{p(t-T_0)}_{k=1} + \ldots$$

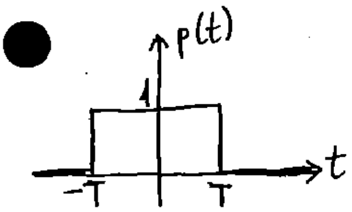






$T_0 - T > T \longrightarrow \boxed{2T > T_0}$

condición dada en el enunciado



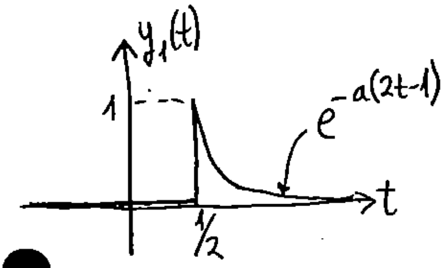
Nota: en este caso las réplicas no se solapan entre sí NUNCA

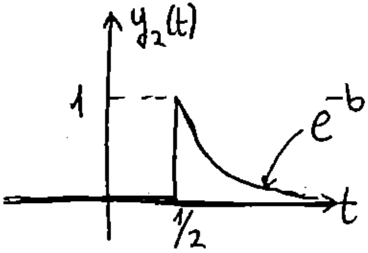
---

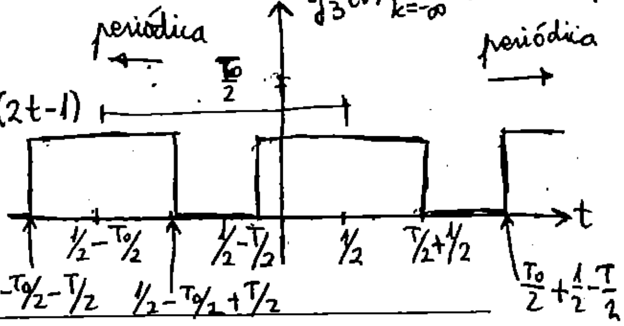
a) $y_i(t) = x_i(2t-1) = x_i(2[t-\frac{1}{2}])$ → Compresión x 2 (1º)
→ Desplazar ½ a la dxa (2º)

$i = 1,2,3$

$$y_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(2t-1-kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(2[t-\tfrac{1}{2}]$$







$\Rightarrow$ y_3 es PERIÓDICA de periodo fundamental $T_3 = \frac{T_0}{2}$

- Calculamos energías:

$$\boxed{E_{y_i}} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |y_i(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(2t-1)|^2 dt \overset{*}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(\tau)|^2 \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(\tau)|^2 d\tau}_{E_{x_i}} = \boxed{\frac{1}{2} E_{x_i}}$$

CAMBIO VARIABLE

$\tau = 2t-1 \longrightarrow t = \frac{\tau+1}{2} \rightarrow dt = \frac{1}{2} d\tau$

$t = -\infty \longrightarrow \tau = 2(-\infty) - 1 = -\infty$

$t = \infty \longrightarrow \tau = 2(\infty) - 1 = \infty$

NOTA: Los desplazamientos no cambian la energía de la señal, pero los escalados distintos de ± 1 (escalados que no sólo invierten) sí que cambian la energía

$\Rightarrow$ Al comprimir la señal se reduce su energía (lógico si le damos sentido físico)

$$\boxed{E_{x_1}} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\underbrace{e^{-at} u(t)}_{\geq 0}|^2 dt = \int_0^{\infty} [e^{-at}]^2 = \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} 2a\, e^{-2at} dt = \left[\frac{-1}{2a} e^{-2at} \right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2a} [\underbrace{\cancel{e^{-\infty}}}_{0} - \underbrace{\cancel{e^{0}}}_{1}] = \boxed{\frac{1}{2a}} \Rightarrow \boxed{E_{y_1}} = \frac{1}{2} E_{x_1} = \boxed{\frac{1}{4a}}$$

Como $x_1(t)$ e $y_1(t)$ tienen energía finita $\Rightarrow$ $\boxed{P_{med,x_1} = P_{med,y_1} = 0}$

Análogamente: $\boxed{E_{x_2} = \frac{1}{2b}}$ $\boxed{E_{y_2} = \frac{1}{4b}}$ $\boxed{P_{med,x_2} = P_{med,y_2} = 0}$

$$\boxed{E_{x_3}} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x_3(t)|^2}_{\geq 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_3^2(t) dt \overset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) dt = \text{área de } x_3(t) = (2T \cdot 1) \cdot \infty = \boxed{\infty}$$

¡¡Energ ∞!!

$$x_3(t) = \begin{cases} 0 \text{ si...} \\ 1 \text{ si..} \end{cases} \Rightarrow x_3^2(t) = \begin{cases} 0^2 = 0 \text{ si...} \\ 1^2 = 1 \text{ si...} \end{cases} = x_3(t)$$

$\Downarrow$

$\boxed{E_{y_3} = \infty}$

$$\boxed{P_{x_3}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x_3(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^{T_0-T} |x_3(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^{T} 1^2 dt = \frac{1}{T_0} 2T = \boxed{\frac{2T}{T_0}}$$

Integral sobre un periodo T_0

NOTA: Para calcular la potencia media de una señal periódica, se integra la potencia instantánea en un periodo y se divide por el periodo.

$$\boxed{P_{y_3}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T_0/2} \int_{T_0/2} |y_3(t)|^2 dt = \ldots = \int_{\frac{1}{2}-\frac{T}{2}}^{\frac{T_0}{2}+\frac{1}{2}-\frac{T}{2}} y_3^2(t) dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{T}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{T}{2}} 1^2 dt = \frac{2}{T_0}\left[\frac{T}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{T}{2}\right)\right] = \frac{2}{T_0} T = \boxed{\frac{2T}{T_0} = P_{x_3}}$$

Análogo al razonamiento de P_{x_3}

Entre $\frac{T}{2}+\frac{1}{2}$ y $T_0/2 + 1/2 - T/2$ la señal vale 0

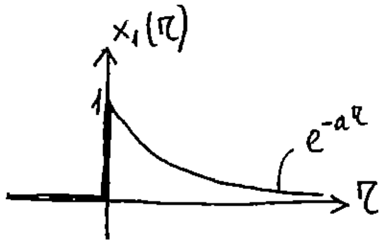
OBS: Es razonable que salga lo mismo ya que aunque la señal está comprimida, tiene también un periodo proporcionalmente comprimido, con lo que al hallar una media, ambas compresiones se compensan.

SIGUE

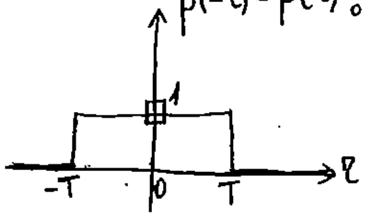
CONTINUA E-7

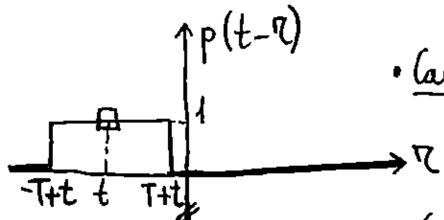
20-10-2008

b) $z(t) = x_1(t) * p(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau}_{\text{cogemos ésta}} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) p(\tau)\, d\tau$

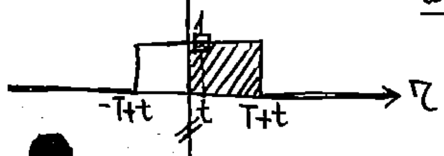


$p(-\tau) = p(\tau)$ ∘ p(t) PAR





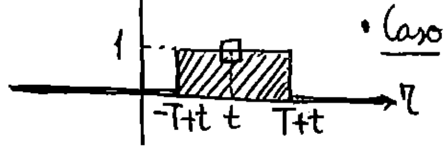
- Caso $T+t<0 \Rightarrow \underline{t<-T}$ ▸ $z(t)=0$



- Caso $\left.\begin{matrix} T+t>0 \\ t-T<0 \end{matrix}\right\}$ $\underline{-T<t<T}$ ▸ $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) p(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{t+T} e^{-a\tau} \cdot 1\, d\tau =$

$$= \frac{-1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_0^{t+T} = \frac{1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_{t+T}^{0} = \frac{1}{a}\left[\overset{1}{\cancel{e^{0}}} - e^{-a(t+T)}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t+T)}\right]$$



- Caso $t-T>0 \Rightarrow \underline{t>T}$

▸ $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) p(t-\tau)\, d\tau = \int_{-T+t}^{t+T} e^{-a\tau} \cdot 1\, d\tau = \frac{-1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_{t-T}^{t+T} =$

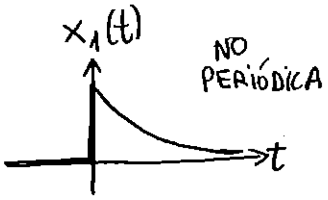
$$= \frac{1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_{t+T}^{t-T} = \frac{1}{a}\left[e^{-a(t-T)} - e^{-a(t+T)}\right] =$$

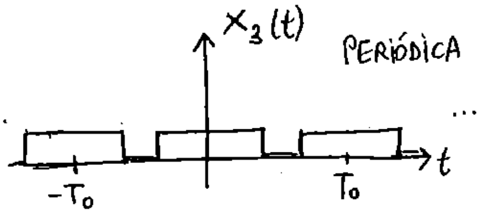
$$= \frac{1}{a}\left[e^{-at} e^{aT} - e^{-at} e^{-aT}\right] = \frac{e^{-at}}{a}\left[e^{aT} - e^{-aT}\right]$$

>> En resumen:

$$\boxed{z(t) = x_1(t) * p(t) = \begin{cases} 0 \;,\; t<0 \\ \frac{1}{a}\left[1-e^{-a(t+T)}\right] \;,\; -T<t<T \\ \frac{e^{-at}}{a}\left[e^{aT} - e^{-aT}\right] \;,\; t<T \end{cases}}$$

c)





Si seguimos la rutina de siempre, nos vamos a topar con un grave problema a la hora de aplicar el método gráfico para convolucionar: al haber una señal periódica, habrá infinitos intervalos de solapamiento y nos haremos un tremendo lío tratando de incluirlos todos. Ante este panorama, podemos no obstante usar propiedades de la convol

- $$\boxed{x_1(t) * x_3(t)} = x_1(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-kT_0) = x_1(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[p(t) * \delta(t-kT_0)\right] =$$

$$= \underbrace{x_1(t) * p(t)}_{z(t)\ \text{aptdo b)}} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) = z(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[z(t) * \delta(t-kT_0)\right] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t-kT_0)}$$

IMPORTANTE

NOTA: Este "toqueteo" de la convolución es la manera más directa (y casi diría que única) de convolucionar una señal periódica con otra no periódica. Es, por tanto, imprescindible tener esta idea en mente.

20-10-2008

✓

FEBRERO 2006

1. Sea una señal compleja $x(t)$ en tiempo continuo, limitada en el tiempo, tal que $x(t) = 0$ para $t < T_1$ y $t > T_2$, con $T_1 < T_2$. Dicha señal es la entrada de un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso es $h(t) = x^*(-t)$. Sea $y(t)$ la señal de salida de dicho sistema. Operando siempre en el dominio del tiempo:

a) Demuestre que $y(0)$ es siempre real ¿Qué representa $y(0)$? Justifique su respuesta.

b) Sea $x(t) = e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-3)]$, siendo $u(t)$ la función escalón unidad. Calcule $y(t)$.

c) Indique, para el caso del apartado b) si el sistema es causal y si es estable. Justifique su respuesta.

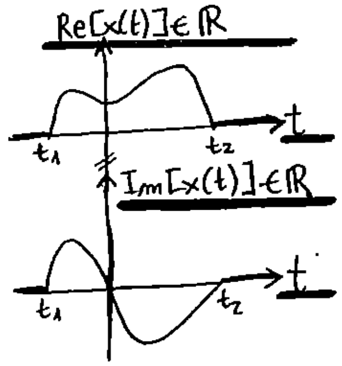
PREVIO | SEÑALES COMPLEJAS | $x(t) \in \mathbb{C}$

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow x(t)$$

¿Cómo los podemos representar?

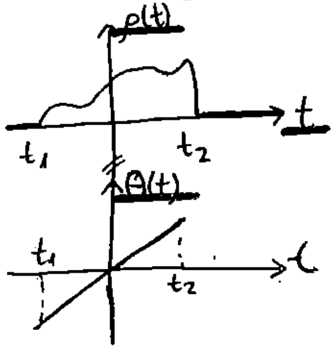
OPCIÓN 1

$x(t) = Re[x(t)] + j\,Im[x(t)]$



OPCIÓN 2

$x(t) = \rho(t)\, e^{j\theta(t)}$, $\rho(t) \geq 0$



---

a) $x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ h(t) = x^*(t) \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

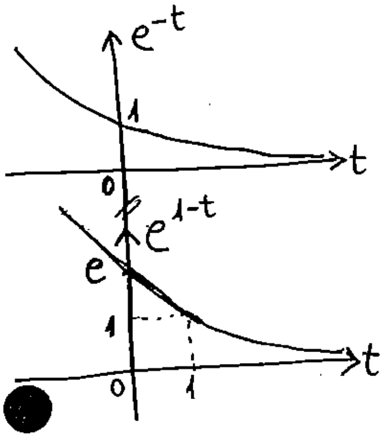
- $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \overset{h(t)=x^*(-t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x^*(-[t-\tau]) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x^*(\tau - t)\, d\tau$

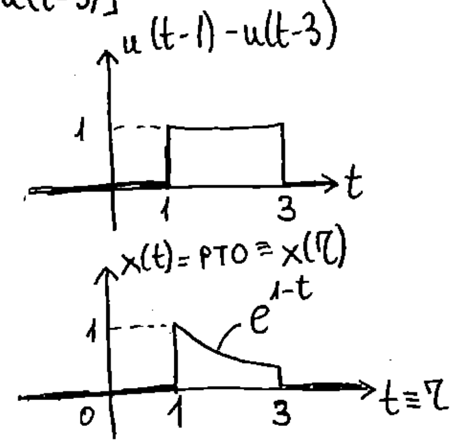
$z \cdot z^* = |z|^2 \ \forall z \in \mathbb{C}$

- $\boxed{y(0)} \overset{?}{=} y(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x^*(\tau - 0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x^*(\tau)\, d\tau = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(\tau)|^2}_{\in \mathbb{R}} d\tau = \underset{\in \mathbb{R}}{E_x}}$ cqd

---

b) $x(t) = e^{1-t} \cdot [u(t-1) - u(t-3)]$





$h(t) = x^*(-t) \overset{!}{=} x(-t)$, $x(t) \in \mathbb{R}$

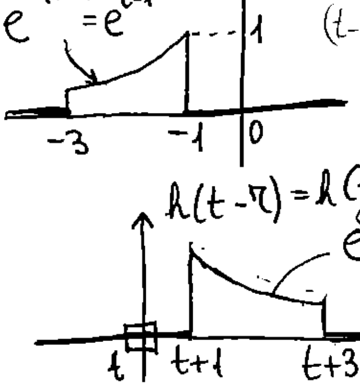
$e^{-(1-t)} = e^{t-1}$

$(t-1) = (\tau-1)$

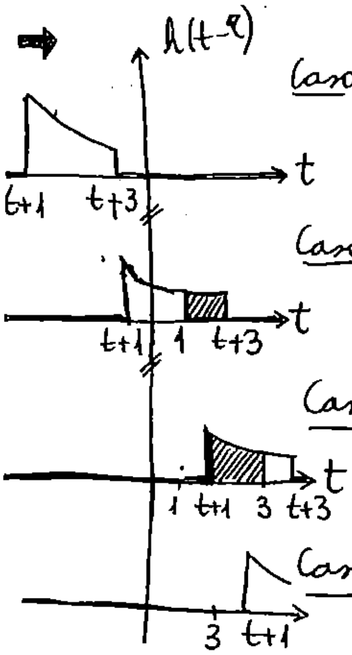
$\Downarrow$

$t - (\tau - 1) = t - \tau + 1$

$h(t-\tau) = h(-[\tau - t]) = e^{t-\tau+1}$



20-10-200



Caso $t+3<1 \rightarrow \underline{t<-2}$: $y(t)=0$

Caso $1<t+3 \rightarrow \underline{-2<t<0}$: $y(t)=\int_1^{t+3} e^{1-\tau} e^{1+t-\tau} d\tau = \ldots = \frac{1}{2}[e^t - e^{4-t}]$

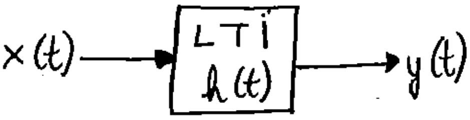
Caso $1<t+1<3 \rightarrow \underline{0<t<2}$: $y(t)=\int_{t+1}^{3} e^{1-\tau} \cdot e^{1+t-\tau} d\tau = \ldots = \frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-t-4}]$

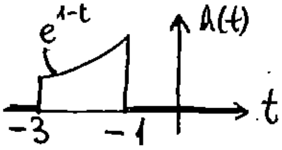
Caso $t+1>3 \longrightarrow \underline{t>2}$: $y(t)=0$

>> En resumen :
$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[e^t - e^{4-t}], & -2<t<0 \\ \frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-t-4}], & 0<t<2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

---

c)





- Sist LTI causal $\Leftrightarrow h(t)=0, t<0$ (NO ES EL CASO) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SIST NO CAUSAL}}$
- Sist LTI estable $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\underset{\geq 0}{h(t)}| dt$ CONV $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$ CONV $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SIST ESTABLE}}$
  " Área señal (finita)

15-10-2008

✓

SEPTIEMBRE 2002

✓

1. Considere un sistema en tiempo continuo (SISTEMA 1) caracterizado por la relación:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$$

donde $x(t)$ es la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida. Se pide

(a) Demuestre que dicho sistema es lineal, no invariante en el tiempo y no estable en sentido BIBO (Bounded Input-Bounded Output). Determine si el sistema es causal o no causal.

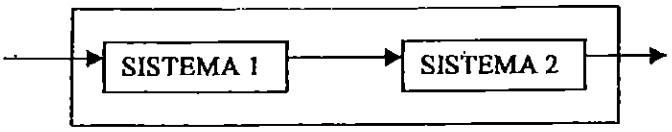
(b) Dada la entrada:

$$x(t)=u(t)+u(t-1)+\text{sen}(t)u(t)$$

determine la correspondiente salida $y(t)$. Sobre el resultado obtenido, verifique las propiedades demostradas en el apartado (a).

(c) Suponga que el sistema dado se pone en serie con un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t)=e^{-at}u(t)$, con $a>0$ y real, que denominaremos SISTEMA 2, como indica la figura:

SISTEMA GLOBAL



Calcule la salida del sistema global cuando la entrada es $\delta(t)$ y cuando la entrada es $\delta(t-1)$. Comente los resultados.

---

a) LINEALIDAD

$$\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \left.\begin{matrix} y_1(t)=\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)d\tau \\ y_2(t)=\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)d\tau \end{matrix}\right\} y_3'(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t) \quad \text{¡¡SI FUERA LIN!!}$$

$x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$

Realmente: $\boxed{y_3(t)}=\int_{\infty}^{2t}x_3(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(\tau)]\,d\tau=\alpha\overbrace{\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)d\tau}^{y_1(t)}+\beta\overbrace{\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)d\tau}^{y_2(t)}=$

$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)=\boxed{y_3'(t)} \quad \text{SÍ LINEAL}$$

INVARIANZA

$$\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t)=x_1(t-t_0) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t)=\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)d\tau$$

$$y_2'(t)=y_1(t-t_0)=\int_{-\infty}^{2(t-t_0)}x_1(\tau)d\tau \quad \text{¡¡SI FUERA INV!!}$$

En realidad:

$$y_2'(t)=\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau-t_0)d\tau=\left[\begin{matrix}\text{CAMBIO:} \\ \boxed{s=\tau-t_0}\rightarrow\tau=s+t_0\rightarrow d\tau=ds \\ \tau=-\infty\longrightarrow s=-\infty-t_0=-\infty \\ \tau=2t\longrightarrow s=2t-t_0\end{matrix}\right]=\int_{-\infty}^{2t-t_0}x_1(s)ds\neq y_1(t-t_0)$$

$2t-t_0 \neq 2(t-t_0)$

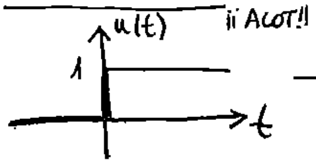
$x_2(t)=x_1(t-t_0)$
~~$x_2(\tau)=x_1(\tau-t_0)$~~

NO INVARIANTE (VARIANTE)

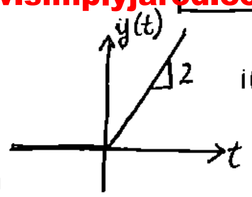
CONTINÚA

ESTABILIDAD

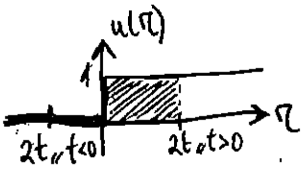
13-10-200



$$\xrightarrow{\quad} \boxed{\text{SIST LIN}} \xrightarrow{\quad} \boxed{y(t)} = \int_{-\infty}^{2t} u(\tau)\,d\tau = \boxed{2t\cdot u(t)}$$



¡¡NO Ac



Caso $2t<0 \rightarrow \underline{t<0}$ $\quad y(t)=\int_{-\infty}^{2t} 0\,d\tau = 0$

Caso $2t>0 \rightarrow \underline{t>0}$ $\quad y(t)=\int_{0}^{2t} 1\,d\tau = [\tau]_0^{2t} = 2t$

NO ESTABLE BIBO

CAUSALIDAD

- Está claro que $\boxed{\text{no es causal}}$ pues para $\underline{t>0}$, $\underline{2t>t}$, y ese valor de "t futur es necesario para calcular la integral y, por ende, la salida en un tiempo anter

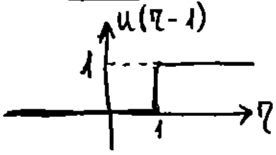
b) Aprovechemos que el sist es lineal para dividir el "troncho" en cachitos, calcular las distintas salidas y luego sumarlas para hallar la definitiva.

$$\begin{matrix} x_1(t)=u(t) & & y_1(t) \\ x_2(t)=u(t-1) & \xrightarrow{\quad} \boxed{\text{LIN}} \xrightarrow{\quad} & y_2(t) \\ x_3(t)=\operatorname{sen} t\, u(t) & & y_3(t) \end{matrix}$$

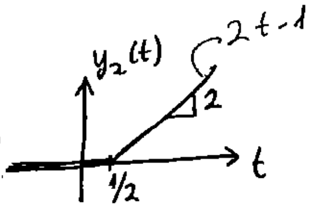
$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$ $\qquad y(t)=y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$

- Calculamos $y_1(t)$: Sabemos de a) que $y_1(t)=2t\,u(t)$

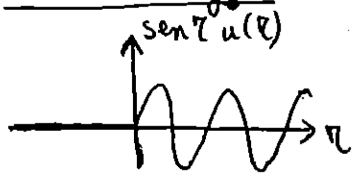
- Calculamos $y_2(t)$: $y_2(t)=\int_{-\infty}^{2t} u(\tau-1)\,d\tau = (2t-1)\,u(t-\tfrac{1}{2})$



- Caso $2t<1 \rightarrow \underline{t<\tfrac{1}{2}}$ $\quad y_2(t)=\int_{-\infty}^{2t} 0\,d\tau = 0$
- Caso $2t>1 \rightarrow \underline{t>\tfrac{1}{2}}$ $\quad y_2(t)=\int_{1}^{2t} 1\,d\tau = 2t-1$



Calculamos $y_3(t)$: $y_3(t)=\int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \operatorname{sen}\tau\, u(\tau)\,d\tau = (1-\cos 2t)\,u(t)$



- Caso $2t<0 \rightarrow \underline{t<0}$ $\quad y_3(t)=0$
- Caso $2t>0 \rightarrow \underline{t>0}$ $\quad y_3(t)=\int_{0}^{2t} \operatorname{sen}\tau\,d\tau = [-\cos\tau]_0^{2t} = [\cos\tau]_{2t}^{0} = 1-\cos$

Así que finalmente: $\boxed{y(t)} = y_1(t)+y_2(t)+y_3(t) = \boxed{2t\,u(t)+(2t-1)\,u(t-\tfrac{1}{2})+(1-\cos 2t)\,u}$

COMPROBACIONES:

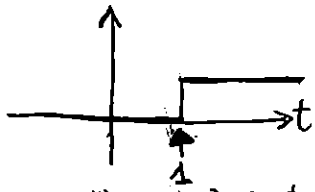
i) $x_1(t)$, $x_2(t)=x_1(t-1)$ $\xrightarrow{\quad} \boxed{} \xrightarrow{\quad}$ $y_1(t)$, $y_2(t) \neq y_1(t-1)$ NO INV

La linealidad no se comprueba porque la hemos supuesto cierta para los cálculos (y facilitarnos la vida con ellos)

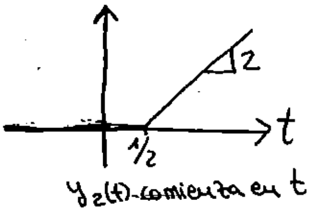
ii) $x_1(t)$ ACOT $\xrightarrow{\quad} \boxed{} \xrightarrow{\quad}$ $y_1(t)$ NO ACOT ⇒ NO EST

iii) $x_2(t)=u(t-1) \xrightarrow{\quad} \boxed{} \xrightarrow{\quad} y_2(t)=(2t-1)\,u(t-\tfrac{1}{2})$ NO CAUSAL

Hay salida ≠0 antes de que la entrada sea ≠0 ⇒ SIST anticipativo no causal



$x_2(t)$ comienza en $t=1$

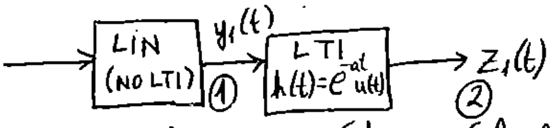


$y_2(t)$ comienza en $t=\frac{1}{2}$

SIGUE EN LA OTRA HOJA

CONTINÚA

c) $x_1(t)=\delta(t)$



- Calculamos primero $y_1(t)$, ya que ésta será la entrada del sist LTI

1] $\boxed{y_1(t)} = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t}\delta(\tau)\,d\tau = [u(\tau)]_{-\infty}^{2t} = u(2t) - \cancel{u(-\infty)}^{0} = u(2t) = \boxed{u(t)}$

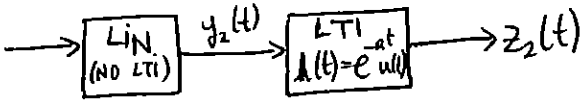
$$\boxed{u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases} \longrightarrow u(2t)=\begin{cases}0, & 2t<0 \Leftrightarrow t<0\\ 1, & 2t>0 \Leftrightarrow t>0\end{cases} = u(t)}$$

2] Por ser LTI el segundo: $z_1(t) = y_1(t) * h(t) = u(t) * e^{-at}u(t) = \ldots =$

Convolución ya hecha en P-2, particularizada con A, B=1; a=0 y b=a (1ª de este ejercicio)

$$\boxed{z_1(t) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t)}$$

c.2) $x_2(t)=\delta(t-1)$



1] $\boxed{y_2(t)} = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t}\delta(t-1)\,d\tau = [u(\tau-1)]_{-\infty}^{2t} = u(2t-1) - \cancel{u(-\infty-1)}^{0} = \boxed{u(t-\frac{1}{2})}$

$$\boxed{u(2t-1)=\begin{cases}0, & 2t-1<0\\ 1, & 2t-1>0\end{cases} = \begin{cases}0, & t<\frac{1}{2}\\ 1, & t>\frac{1}{2}\end{cases} = u(t-\tfrac{1}{2})}$$

2) LTI: $\boxed{z_2(t)} = y_2(t) * h(t) = u(t-\frac{1}{2}) * e^{-at}u(t) = u(t) * \delta(t-\frac{1}{2}) * h(t) =$

$= u(t) * h(t) * \delta(t-\frac{1}{2}) = z_1(t) * \delta(t-\frac{1}{2}) = z_1(t-\frac{1}{2}) = \boxed{\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(t-\frac{1}{2})}\right)u(t-\frac{1}{2})}$

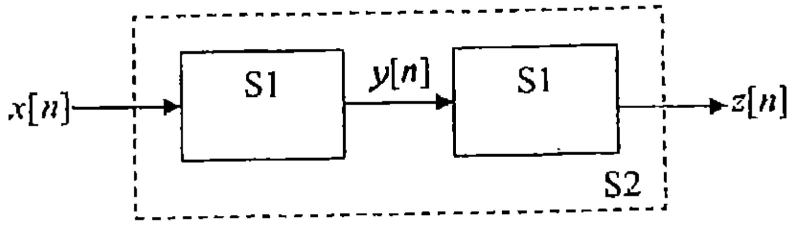
Comentario: $z_2(t) \neq z_1(t-1) \Rightarrow$ EL SISTEMA GLOBAL TAMPOCO ES INVARIANTE

✓ **FEBRERO 2007** ✓

1. Sea un sistema (S1) definido por la siguiente relación entrada-salida (la entrada es $x[n]$ y la salida es $y[n]$):

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

Considere un sistema (S2), formado por la combinación en serie de dos sistemas S1:



(a) Demuestre que el sistema S2 es LTI. Analice si es causal y/o estable
(b) Calcule la respuesta al impulso del sistema S2.
(c) Obtenga la relación entre la entrada $x[n]$ y la salida $z[n]$ del sistema S2.
(d) Demuestre que el sistema inverso al S2 es el definido por la relación entrada-salida:

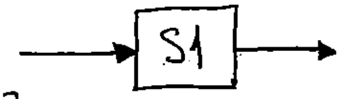
$$x[n]=z[n]-2z[n-1]+z[n-2]$$

---

a) – Al ser S2 una combinación en serie/cascada de dos S1 idénticos, si S1 es LTI necesariamente lo será S2, así que veamos eso primero:

LINEALIDAD

$x_1[n]$
$x_2[n]$
$x_3[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$



$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]$
$y_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_2[k]$
$y_3[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ ¡¡SI FUERA LINEAL!!

- En realidad:

$$\boxed{y_3[n]}=\sum_{k=-\infty}^{n}x_3[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha x_1[k]+\beta x_2[k]=\alpha\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]}_{y_1[n]}+\beta\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n}x_2[k]}_{y_2[n]}=\underbrace{\boxed{\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]}}_{\text{LINEAL cqd}}$$

INVARIANZA TEMPORAL

$x_1[n]$
$x_2[n]=x_1[n-n_0]$

$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]$
$y_2[n]=y_1[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x_1[k]$ ¡¡SI FUERA INVARIANTE!!

SIGUE

- En realidad:

"m" variable muda

$$\boxed{y_2[n]} = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k-n_0] \overset{\uparrow}{=} \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x_1[m] = \boxed{y_1[n-n_0]}$$

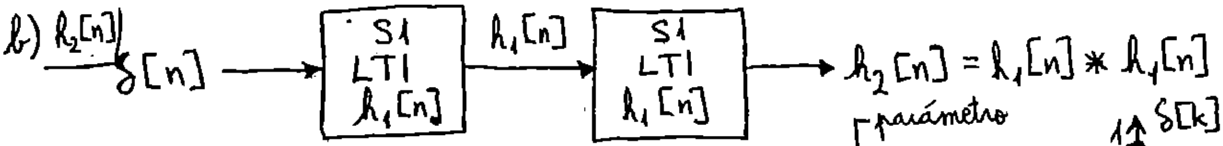
INVARIANTE
cqd//

CAMBIO ÍNDICE	$m = k-n_0 \longrightarrow k = m+n_0$ $k=-\infty \longrightarrow m=-\infty$ $k=n \longrightarrow m=n-n_0$

Buscamos que la función interior $\sum \bigcirc$ sea la que queremos

- Ahora, como S1 es LTI y S2 está compuesto de dos S1 (dos LTI) en cascada $\Rightarrow$ S2 es LTI
- Si S1 no hubiera salido LTI habría que haberlo hecho con el sistema S2 completo
- Para responder a la causalidad y estabilidad hacemos b), aunque no sería necesario

---

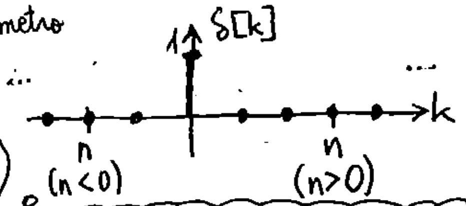
b) 

parámetro

- $h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \cancel{\delta[-\infty]} + \ldots + \delta[n-1] + \delta[n]$:

0

Sólo algún término es una delta quizás

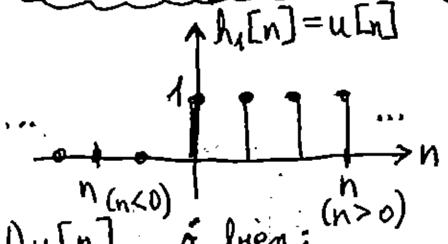


- Caso $n<0$: $h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 0$
- Caso $n \geqslant 0$: $h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 1$

$$\boxed{h_1[n] = u[n]}$$

Sumar los términos de una delta depende de hasta dónde llegues: "0" si no llegas al "0" y "1" si sí llegas. (No confundirse)

NOTA
• $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$ • $\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$

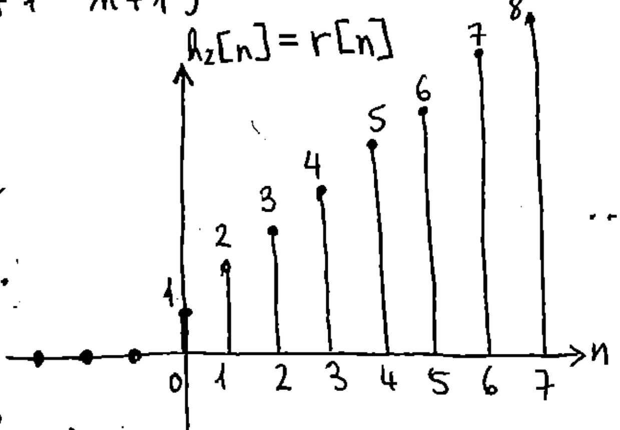


- $h_2[n] = h_1[n] * h_1[n] = u[n] * u[n] = \ldots = (n+1)u[n]$, ó bien:
- $h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = u[-\infty] + \ldots + u[n-1] + u[n]$

"Función RAMPA"

- Caso $n<0$: $h_2[n] = 0$
- Caso $n \geqslant 0$: $h_2[n] = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \underbrace{\ldots}_{n+1} + 1 = n+1$

$$\boxed{h_2[n] = (n+1)u[n] = r[n]}$$



CAUSALIDAD

S2 LTI causal $\Longleftrightarrow h_2[n]=0$, $n<0 \Rightarrow \boxed{\text{CAUSAL}}$//
(También se puede razonar teniendo en cuenta que el sumatorio coge valores de $-\infty$ hasta ... el instante actual, nunca futuros)

ESTABILIDAD

S2 LTI estable $\Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{NO ESTABLE}}$//

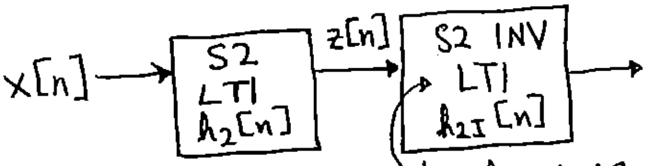
SIGUE

SIGUE E-12

c) $\boxed{z[n]} = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{n} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{k} x[m]}_{y[k]}}$ ∘∘ Variables mudas "k" y "m"

---

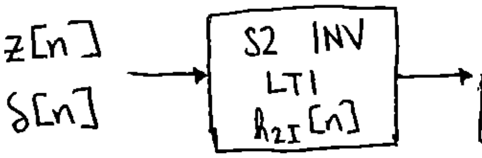
d)



$\rightarrow x[n] = z[n] * h_{2I}[n] = x[n] * \underbrace{h_2[n] * h_{2I}[n]}_{\text{tiene que ser } \delta[n]}$

Lo sabemos por propiedad (ver teoría)

- Hay que demostrar que $h_2[n] * h_{2I}[n] = \delta[n]$. ¿Cómo obtenemos $h_{2I}[n]$?



$x[n] \overset{\text{DATO}}{=} z[n] - 2z[n-1] + z[n-2]$

$\boxed{h_{2I}[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]}$

- Comprobamos:

$\boxed{h_2[n] * h_{2I}[n]} = (n+1)u[n] * (\underline{\delta[n]} - \underline{2\delta[n-1]} + \underline{\delta[n-2]}) =$

$= \underline{(n+1)u[n]} - \underline{2(n-\cancel{1}+\cancel{1})u[n-1]} + \underline{(n-2+1)u[n-2]} =$

$= (n+1)u[n] - 2n\,u[n-1] + (n-1)u[n-2] = (n+1)u[n] - 2n(u[n] - \delta[n]) + \ldots$ Saquemos $\delta[n]$

$\ldots + (n-1)(u[n] - \delta[n] - \delta[n-1]) = u[n]\underbrace{(\cancel{n}+\cancel{1}-2\cancel{n}+\cancel{n}-\cancel{1})}_{0} + 2n\delta[n] - (n-1)\delta[n] - (n-1)\delta[n-1]$

$= 2\cdot 0\,\cancel{\delta[n]} - (0-1)\delta[n] - \cancel{(1-1)\delta[n-1]} = \boxed{\delta[n]}$ cqd

$\boxed{f[n]\,\delta[n-n_0] = f[n_0]\,\delta[n-n_0]}$

Nota

$u(n-1) = u(n) - \delta(n)$

$u(n-2) = u(n) - \delta(n) - \delta(n-1)$

$u(n-k) = u(n) - \delta(n) - \delta(n-1) - \ldots - \delta(n-k+1)$

~~ya que~~ Al querer desplazar u(n) a k vamos restándole a b función esa unidad delta hasta tener u(n)<0 para n<k

31-10-2000

FEBRERO 2000 ✓

1. Considérense las secuencias

$$h[n]=u[n] \qquad x[n]=\sum_{k=1}^{5}\delta[n-3k]$$

a) Represente gráficamente las siguientes secuencias

$$h[n] \qquad h[1-n] \qquad x[n] \qquad x[3n]$$

b) Realice las convoluciones en tiempo discreto siguientes:

$$x[n]*h[n] \qquad x[3n]*h[1-n]$$

mostrando analítica y gráficamente los resultados.

c) Si $h[n]$, $h[1\text{-}n]$ fueran las respuestas al impulso de sistemas LTI (lineales e invariantes en el tiempo), analice la causalidad y estabilidad de dichos sistemas.

d) Definamos la señal en tiempo continuo siguiente:

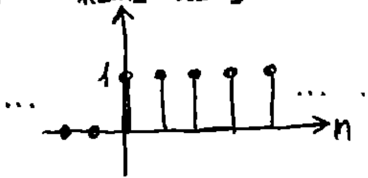
$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\; u(t-n) \qquad \text{siendo} \qquad y[n]=2^{-n}u[n]$$

Represente gráficamente $y(t)$ y calcule su valor en el infinito, $y(\infty)$. Calcule asimismo la siguiente convolución:

$$y(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)$$

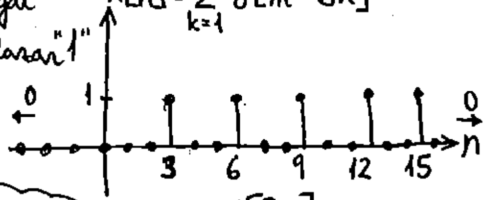
---

a) $h[n]=u[n]$



$h[1-n]=h[-(n-1)]$ ← 1º Reflejar
2º Desplazar "1"

$x[n]=\sum_{k=1}^{5}\delta[n-3k]$

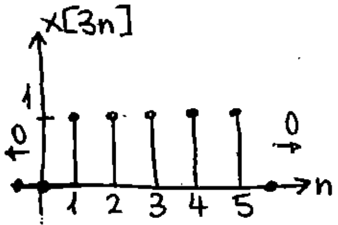


$\cdot\; x[3n]=\sum_{k=1}^{5}\delta[3n-3k]\overset{\uparrow}{=}\sum_{k=1}^{5}\delta[n-k]$

DIEZMADO x3

$\cdot\; \delta[n]=\begin{cases}1\;,\; n=0\\0\;,\; n\neq 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta[3n-3k]}=\begin{cases}1\;,\; 3n-3k=0\\0\;,\; 3n-3k\neq 0\end{cases}=\begin{cases}1\;,\; n=k\\0\;,\; \text{resto}\end{cases}=\boxed{\delta[n-k]}$

$x[3n]$

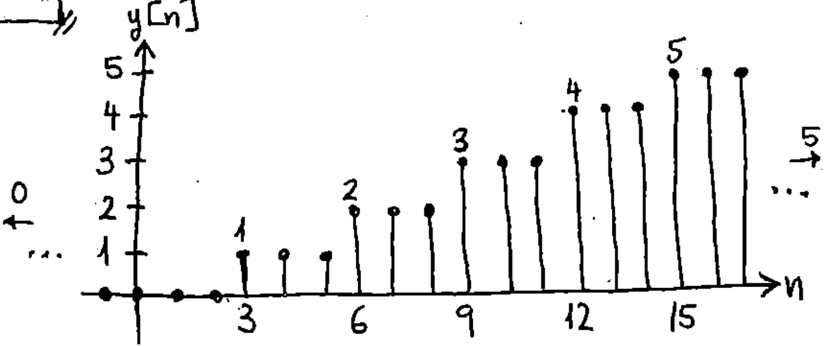


---

b) $\boxed{y[n]}=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=u[n]*\sum_{k=1}^{5}\delta[n-3k]=\sum_{k=1}^{5}\left(u[n]*\delta[n-3k]\right)=$ $\boxed{\begin{array}{c}x[n]*\delta[n-n_0]\\x[n-n_0]\end{array}}$

$=\boxed{\sum_{k=1}^{5}u[n-3k]}=u[n-3]+u[n-6]+u[n-9]+u[n-12]+u[n-15]$

$y[n]$



$\cdot\;\boxed{z[n]}=x[3n]*h[1-n]=\sum_{k=1}^{5}\delta[n-k]*u[1-n]=\sum_{k=1}^{5}u[1-(n-k)]=\boxed{\sum_{k=1}^{5}u[-(n-k-1)]}$

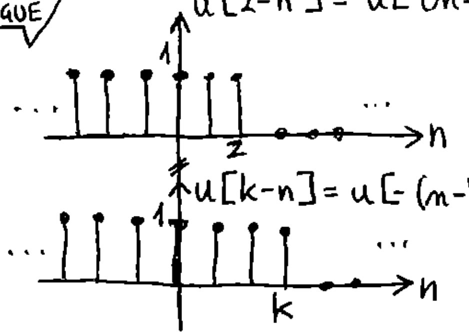
$=u[2-n]+u[3-n]+u[4-n]+u[5-n]+u[6-n]=$

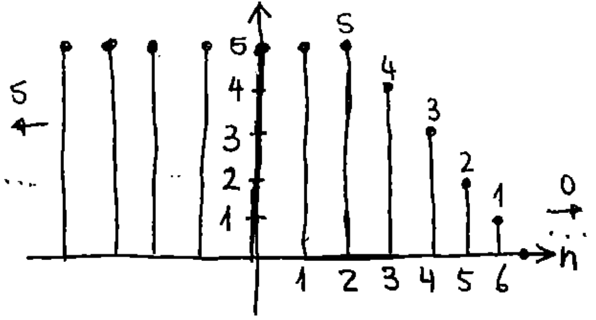
$=u[-(n-2)]+u[-(n-3)]+u[-(n-4)]+u[-(n-5)]+u[-(n-6)]$ SIGUE

SIGUE

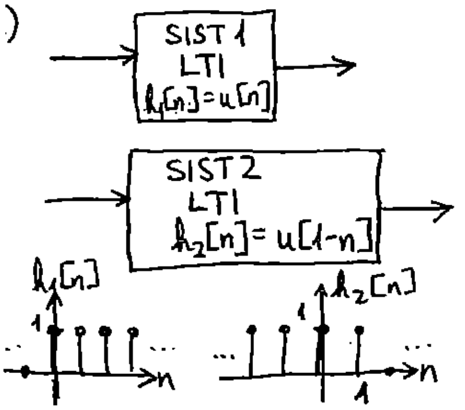
$u[2-n] = u[-(n-2)]$ → 1º Reflejar
↘ 2º Desplazar "2"

$u[k-n] = u[-(n-k)]$





)

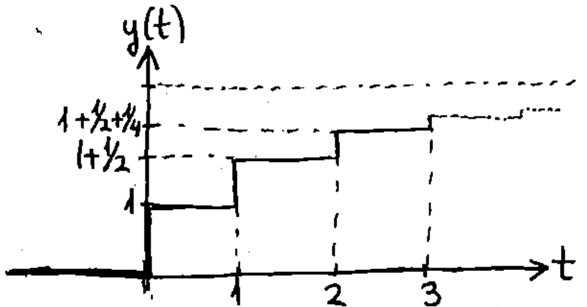


- LTI causal $\overset{Def}{\Longleftrightarrow} h[n]=0 \,,\, \forall n<0$
  - * $\boxed{\text{SIST1 CAUSAL}}$
  - * $\boxed{\text{SIST2 NO CAUSAL}}$
- LTI estable $\overset{Def}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$
  - * $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+\overset{\infty\text{-veces}}{\ldots}+1 = \infty \Rightarrow \boxed{\text{SIST1 NO ESTABLE}}$
  - * $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[1-n]| = \sum_{n=-\infty}^{1} 1 = \infty \Rightarrow \boxed{\text{SIST2 NO ESTABLE}}$

). • $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] u(t-n)$
• $y[n] = 2^{-n} u[n]$

$\boxed{y(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} u[n] u(t-n) \overset{\boxed{u[n]=0 \,,\, n<0}}{=} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(t-n)} =$

$= u(t) + \frac{1}{2} u(t-1) + \frac{1}{4} u(t-2) + \frac{1}{8} u(t-3) + \ldots$



• $\boxed{y(\infty)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \,,\, |z|<1 \,,\, \left|\frac{1}{2}\right| < 1 ✓}$

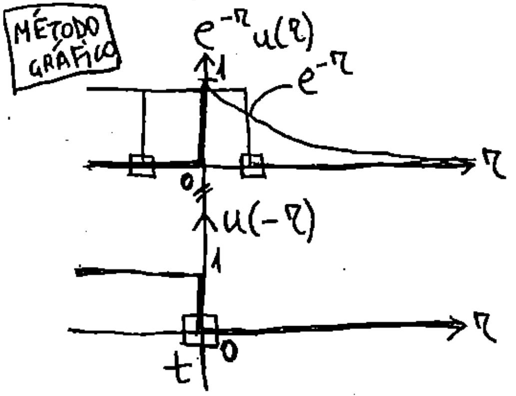
• $\boxed{z(t)} = y(t) * (e^{-t} u(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(t-n) * e^{-t} u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(t) * \delta(t-n) * e^{-t} u(t) =$

La convolución esta es terrible, pues y(t) tiene infinitas ecuaciones, a ver si retocando la cosa...

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(t-n) * \underbrace{u(t) * e^{-t} u(t)}_{w(t)} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} w(t-n)}$ - Sólo falta w(t), una convolución mucho más asequible

• Hallemos $w(t) = e^{-t} u(t) * u(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau)\, d\tau}_{\text{Cogemos ésta}} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$

MÉTODO GRÁFICO



- Caso t<0: $w(t) = 0$. ∄ solapamiento
- Caso t>0: $w(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -\left[e^{-\tau}\right]_0^t = \left[e^{-\tau}\right]_t^0 =$

$= \cancel{e^{0}}^{1} - e^{-t} = 1 - e^{-t}$

• $\boxed{w(t) = (1-e^{-t}) u(t)} \Rightarrow$ Finalmente: $\boxed{z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [1 - e^{-(t-n)} u(t-n)]}$

31-10-2008

SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 1

Considere un sistema discreto cuya secuencia de salida $y[n]$ se obtiene a partir de la secuencia de entrada $x[n]$ (señal real), mediante la expresión siguiente:

$$y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot x[n-k]$$

Se pide:

a) Demuestre si el sistema cumple o no cada una de las siguientes propiedades: linealidad, invarianza temporal, causalidad y estabilidad.

b) Suponiendo que $x[n]=u[n]-u[n-5]$ (siendo $u[n]=1$ si $n\geq 0$, y $u[n]=0$, si $n<0$), determine analíticamente y represente gráficamente la secuencia de salida $y[n]$.

c) Si el valor medio de $x[n]$ es cero, demuestre que el valor medio de $y[n]$ también es cero. Así mismo demuestre la siguiente proposición: si $x[n]$ es antisimétrica (impar), entonces $y[n]$ es simétrica (par).

---

a)

$$x[n]\longrightarrow\boxed{}\longrightarrow y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,x[n-k]$$

LINEALIDAD

$$x_1[n]\longrightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n]\longrightarrow y_2[n]$$
$$ax_1[n]+bx_2[n]=x[n]\longrightarrow y[n]\overset{?}{=}ay_1[n]+by_2[n]$$

$$\bullet\ \boxed{y[n]}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ax_1[k]+bx_2[k])(ax_1[n-k]+bx_2[n-k])=a^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_1[n-k]+$$
$$+b^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_2[k]x_2[n-k]+ab\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[n-k]+ba\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_2[k]x_1[n-k]=\boxed{\text{NO LINEAL}}$$
$$=a^2y_1[n]+b^2y_2[n]+ab(x_1[n]*x_2[n])+ab(x_2[n]*x_1[n])\neq\boxed{a^2y_1[n]+b^2y_2[n]+2ab(x_1[n]*x_2[}$$

INVARIANZA

$$x_1[n]\longrightarrow y_1[n]$$
$$x[n]=x_1[n-n_0]\longrightarrow y[n]\overset{?}{=}y_1[n-n_0]$$

$$\bullet\ \boxed{y[n]}=x[n]*x[n]=x_1[n-n_0]*x_1[n-n_0]=x_1[n]*\delta[n-n_0]*x_1[n]*\delta[n-n_0]=$$
$$=x_1[n]*x_1[n]*\delta[n-2n_0]=y_1[n]*\delta[n-2n_0]\neq\boxed{y_1[n-n_0]}\Rightarrow\boxed{\text{NO INVARIANTE}}$$

CAUSALIDAD

$$\bullet\ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]x[n-k]=\ldots+x[-1]\,x[n+1]+x[0]x[n]+x[1]x[n-1]+\ldots$$

Para $y[n]$ necesito saber al menos $x[n+1]$, o sea "x" en un instante posterior a "n" $\Rightarrow$ **NO CAUSAL**

ESTABILIDAD – Si no es LTI lo más probable es que no sea estable (es muy difícil demostrar que para toda entrada acotada la salida es acotada) así que busquemos un contraejemplo:

$$\boxed{y[n]}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]x[n-k]=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0\\k\neq n}}^{\infty}\underbrace{x[k]}_{1}\underbrace{x[n-k]}_{1}+x[0]\overset{0}{\cancel{x[n]}}+x[n]\overset{0}{\cancel{x[0]}}=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0,n}}^{\infty}1=\boxed{\infty}\ \forall n\Rightarrow\boxed{\text{NO ESTABLE}}$$

$x[n]=1\ \forall n-\{0\}$
$x[0]=0$

• Que no sea periódica o sería convolución circular

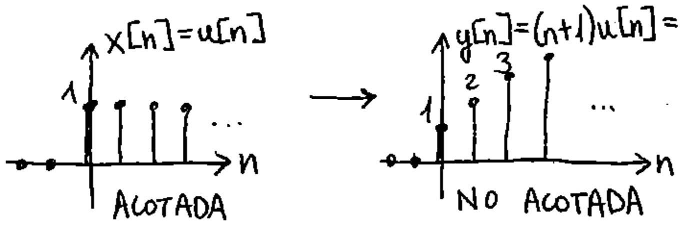
31-10-2008

NOTA: En la solución oficial pusieron el contraejemplo: $x[n]=u[n]$

$$y[n]=u[n]*u[n]=\sum_{k=0}^{n}\underset{1}{u[k]}\,\underset{1}{u[n-k]}\ ,\ n\geq 0=\sum_{k=0}^{n}1=n+1 \text{ con } n\geq 0 \quad \left.\right\} \boxed{y[n]=(n+1)u[n]}$$

$(n\geq 0)$ (T1.12.3)

$$y[n]=0\ ,\ n<0$$



(función rampa) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ESTABLE}}$

NOTA | Si convolucionamos dos señales nulas para $n,t<0$ e ilimitada hacia la derecha con infinitos valores no nulos,

$$y(t)=\left[\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]u(t)$$

$$y[n]=\left(\sum_{k=0}^{n}x_1[k]x_2[n-k]\right)u[n]$$

(Ver MMT1 tb)

-En la solución oficial se les fue la pinza y dijeron que $y[n]=n\,u[n]$ (grave error), así que usaremos este resultado (incorrecto) el resto del ejercicio

---

). $\boxed{y[n]}=x[n]*x[n]=\left(u[n]-u[n-5]\right)*\left(u[n]-u[n-5]\right)=u[n]*u[n]-u[n]*u[n-5]-\ldots$

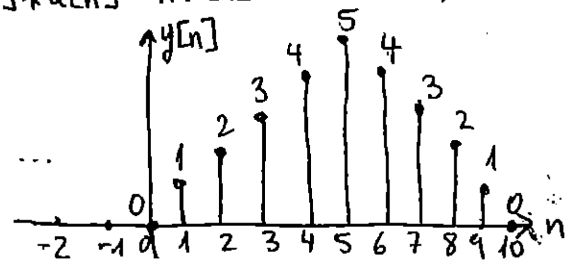
[Lo hacemos analíticamente pero se puede hacer gráficamente]

$$\ldots-u[n-5]*u[n]+u[n-5]*u[n-5]=u[n]*u[n]-2\left(u[n]*u[n]*\delta[n-5]\right)+\ldots$$

$$\ldots+u[n]*u[n]*\delta[n-5]*\delta[n-5]=\boxed{n\,u[n]-2(n-5)u[n-5]+(n-10)u[n-10]}$$

$u[n]*u[n]=n\,u[n]$ (incorrecto, recordemos)

$$y[n]=\begin{cases}0\ ,\ n<0\\ n\ ,\ 0\leq n<5\\ n-2(n-5)=10-n\ ,\ 5\leq n<10\\ n-2(n-5)+n-10=0\ ,\ n\geq 10\end{cases}$$



NOTA: Con $u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$ nos había salido $\tilde{y}[n]=y[n+1]$ (desplazada uno a la izquierda)

:) i) **DATO**: $\overline{x[n]}=\langle x[n]\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x[n]=0$

↳ Recordar: valor de un posible periodo (de -2 a 2 $\Rightarrow N=5$)

- $$\boxed{\overline{y[n]}=\langle y[n]\rangle}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}y[n]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\right)x[n-k]=$$

$$y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]x[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x[n-k]}_{\langle x[n-k]\rangle=\langle x[n]\rangle}\xrightarrow{}0\ =\ 0\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]=\boxed{0}\quad \text{cqd}$$

(Desplazar una señal no afecta a su valor medio).

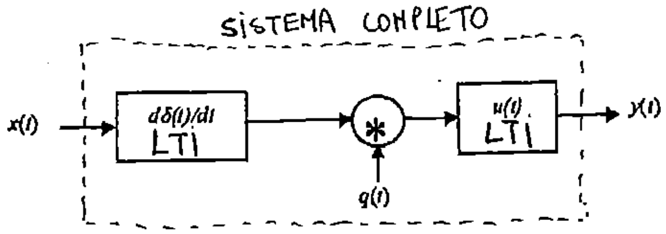
ii) **DATO**: $x[n]=-x[-n]$ (Impar).

-Tengo que demostrar que $y[n]=y[-n]$ (Par)

- $\underset{\text{PAR}}{y[n]}=\underset{\text{IMPAR}}{x[n]}*\underset{\text{IMPAR}}{x[n]}$ (Esto lo sabemos de la teoría, pero vamos a demostrarlo rigurosamente)
- $\boxed{y[-n]}=x[-n]*x[-n]\underset{x[n]\text{ impar}}{=}\left(-x[n]\right)*\left(-x[n]\right)=\overbrace{(-1)(-1)}^{1}x[n]*x[n]=\boxed{y[n]}$ cqd

√ SEPTIEMBRE 2008 √

1) Considere el sistema de la figura:



Donde las señales en los recuadros representan la respuesta impulsiva de dos filtros lineares e invariantes y el asterisco representa la operación de convolución. x(t) e y(t) representan respectivamente la entrada y la salida del sistema. x(t)es una señal de media nula.

Se pide:

a) Halle, utilizando las propiedades de la convolución, la relación entrada-salida del sistema:

$$y(t) = f(x(t), q(t))$$

b) Demuestre si el sistema es lineal o invariante. Si lo anterior es cierto, calcule su respuesta impulsiva. ¿Qué condiciones tiene que cumplir *q(t)* para que el sistema sea estable?

c) Calcule la salida y la entrada $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$ cuando $q(t) = e^{-bt} \cdot u(t)$ (a y b son constantes reales y positivas). Hágalo en el dominio del tiempo.

---

a) $\boxed{y(t)} = \left(x(t) * \frac{d\delta(t)}{dt}\right) * q(t) * u(t) \underset{\text{* conmutativa}}{=} x(t) * q(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} * u(t) = x(t) * q(t) * \delta(t) * \underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\delta(t)} =$

$$\boxed{\frac{dw(t)}{dt} * z(t) = w(t) * \frac{dz(t)}{dt}}$$

$= x(t) * q(t) * \cancel{\delta(t)} * \cancel{\delta(t)} = \boxed{x(t) * q(t)}$ //

---

b) LINEALIDAD

$x_1(t)$

$x_2(t)$

$y_1(t) = x_1(t) * q(t)$

$y_2(t) = x_2(t) * q(t)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ¡¡SI FUERA LINEAL!!

• $\boxed{y_3(t)} = x_3(t) * q(t) = [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] * q(t) = \alpha \underbrace{(x_1(t) * q(t))}_{y_1(t)} + \beta \underbrace{(x_2(t) * q(t))}_{y_2(t)} = \boxed{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$ //

SÍ LINEAL cqd//

INVARIANZA

$x_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t - t_0)$

$y_1(t) = x_1(t) * q(t)$

$y_2(t) = y_1(t - t_0)$ ¡¡SI FUERA INVARIANTE!!

• $\boxed{y_2(t)} = x_2(t) * q(t) = x_1(t - t_0) * q(t) = x_1(t) * \delta(t - t_0) * q(t) = \underbrace{(x_1(t) * q(t))}_{y_1(t)} * \delta(t - t_0) =$

$= y_1(t) * \delta(t - t_0) = \boxed{y_1(t - t_0)}$ // SÍ INVARIANTE cqd//

SIGUE

SIGUE • $\boxed{\text{SIST COMPLETO ES LTI}}$

h(t)

$$(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SIST}\\ \text{COMPLETO}\\ \text{LTI}\end{matrix}} \longrightarrow y(t) = \boxed{h(t)} = \delta(t) * q(t) = \boxed{q(t)}$$

ESTABILIDAD

• $\boxed{\text{SIST COMPLETO es ESTABLE}} \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \Longleftrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |q(t)|\, dt < \infty}$

---

c)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SIST COMPLETO}\\ \text{LTI}\\ h(t) = e^{-bt}u(t)\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \qquad \boxed{a, b > 0}$$

Cálculos: Ya hechos en P-2 ("ej 2 de clase"). Allí nos remitimos.

$a \neq b$ $\boxed{y(t) = \frac{1}{a-b}\left[e^{-bt} - e^{-at}\right]u(t)}$

$a = b$ $\boxed{y(t) = t\,e^{-bt}\,u(t)}$

Tema 3

✓ FEBRERO 1999

✓ ✓

1. Considere la siguiente señal:

$$x(t)=te^{-t}\left(u(t)-u(t-1)\right)$$

a) Calcule su transformada de Fourier $X(j\omega)$.

b) A partir de $x(t)$ se construye la siguiente señal $x_1(t)$:

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-2n)$$

Calcule su transformada de Fourier $X_1(j\omega)$ e identifique a partir de ella los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier de $x_1(t)$. ⟶ los coef. no sé si se obtienen comp. $X(j\omega)$ con $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ [illegible]

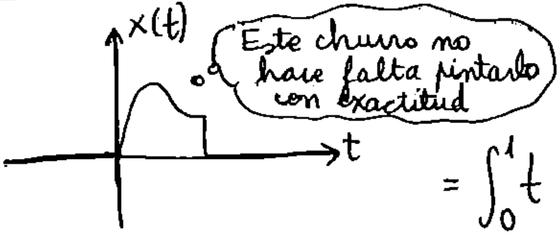
c) A partir de $x(t)$ se construye la siguiente señal $x_2(t)$:

$$x_2(t)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}x(t-2n)$$

Calcule su transformada de Fourier $X_2(j\omega)$ y establezca las similitudes y diferencias de ésta con $X_1(j\omega)$.

---

a)



Este churro no hace falta pintarlo con exactitud

1ª idea "Definición"

$$X(j\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1 te^{-t}e^{-j\omega t}=$$

$$=\int_0^1 t\,e^{-(j\omega+1)t}dt\overset{\uparrow}{=}\dots=\frac{1-(2+j\omega)e^{-(j\omega+1)}}{(j\omega+1)^2}$$

PARTES: $u=t\longrightarrow du=dt$

$\alpha=j\omega+1,\quad dv=e^{-\alpha t}\longrightarrow v=\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}$

2ª idea "Usando la propiedad $\boxed{\begin{array}{l}x_a(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_a(j\omega)\\ t x_a(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}j\dfrac{dX_a(j\omega)}{d\omega}\end{array}}$"

- En este caso: $x_a(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-1)]\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_a(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1 e^{-t}e^{-j\omega t}dt=$

$$\overset{\uparrow}{=}\dots=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$$

ya hecha

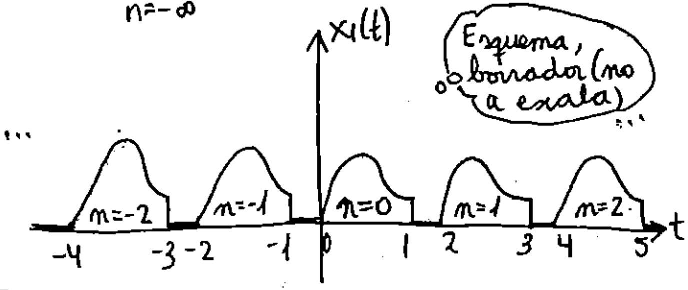
- Así que: $x(t)=t\,x_a(t)$.

$$\boxed{X(j\omega)}=j\frac{dX_a(j\omega)}{d\omega}=j\frac{-(-j)e^{-(j\omega+1)}(j\omega+1)-j[1-e^{-(j\omega+1)}}{(j\omega+1)^2}$$

$$=\boxed{\frac{1-(2+j\omega)e^{-(j\omega+1)}}{(1+j\omega)^2}}//$$

---

b) $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-2n)$



Esquema, borrador (no a escala)

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-2n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)*\delta(t-2n)=$$

$$=x(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

$\boxed{x(t)*y(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}x(t)\cdot y}$

$$X_1(j\omega)=\mathcal{F}\{x_1(t)\}=\mathcal{F}\{x(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)\}\overset{\downarrow}{=}$$

$$=\mathcal{F}\{x(t)\}\cdot\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)\}=\dots$$

SIGUE ⟹

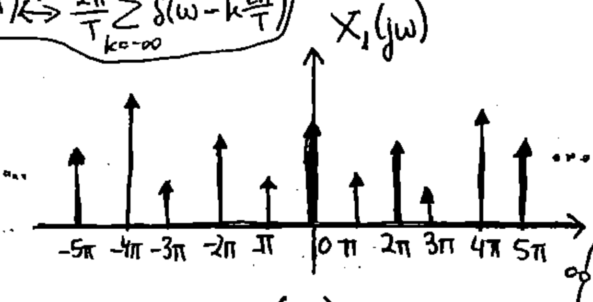
CONTINÚA

13-11-2008

$$\ldots = \boxed{X_1(j\omega)} = X(j\omega)\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{\cancel{2}}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi X(j\omega)\,\delta(\omega-k\pi)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\xleftrightarrow{F}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi X(j\,\textcircled{k\pi})\,\delta(\omega-k\pi)} \rightarrow ⊕$$



NOTA: Las señales periódicas tienen un espectro "rayas" (o de deltas). El espaciado entre las deltas es $\frac{2\pi}{T}$, siendo T el periodo de la señal.

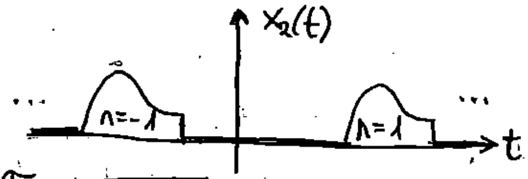
$$\frac{2\cancel{\pi}}{T}=\cancel{\pi}\Rightarrow\boxed{T=2}$$

Da = el esquema, aunque procuremos que $X_1(j\omega)$ sea par pue $x_1(t)$ es re

---

c) $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-2n)$

¡¡$n\neq0$!!



¡¡NO PERIÓDICA!!

$$x_2(t)=x_1(t)-x(t)\xleftrightarrow{F}\boxed{X_2(j\omega)}=F\{x_1(t)-x(t)\}=F\{x_1(t)\}-F\{x(t)\}=X_1(j\omega)-\ldots$$

$$\ldots-X(j\omega)=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi X(jk\pi)\,\delta(\omega-k\pi)-\frac{1-(2+j\omega)\,e^{-(j\omega+1)}}{(1+j\omega)^2}}$$

Nota: $X_2(j\omega)$ no es un espectro puramente de rayas (al no ser $x_2(t)$ periódica no podemos asegurar que lo fuera a ser, aunque existen casos en los que sí saldría un espectro de rayas - pero sería casualidad)

⊕ Al ser 6 será $x_1(t)$ periódica se podrá poner tal que [illegible] $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ y cuya TF sea $X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$ ~~con lo cual~~ Comparando $X(j\omega)$ con $X_1(j\omega)$ [illegible] sacamos a_k (coef. de F), luego:

$a_k=\frac{X(jk\pi)}{2}$ para $x_1(t)$ ~~con lo cual~~ $x_1(t)=\frac{X(jk\pi)}{2}e^{jk\pi t}$

✓ ✓

✓ FEBRERO 2000

2. Sea un sistema LTI (lineal e invariante en el tiempo) cuya relación entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ viene definida por las siguientes expresiones matemáticas:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} z(\tau)d\tau$$

$$\frac{dz(t)}{dt} + az(t) = -\frac{dx(t)}{dt} + ax(t),$$ sistema estable con $x(t)$ entrada y $z(t)$ salida

donde T, a son parámetros arbitrarios reales positivos.

Calcule la respuesta en frecuencia del sistema $H(j\omega)$ que verifica:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\cdot\ y(t) = \int_{t-T}^{t} z(\tau)d\tau \overset{\text{Barrow}}{=} w(t) - w(t-T) \quad \text{siendo} \quad w(t) \underset{\text{Th Fundamental Cálculo}}{=} \int_{-\infty}^{t} z(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} W(j\omega) = \frac{Z(j\omega)}{j\omega} + \pi Z(j0)\delta(\omega)$$

- Hallemos $Z(j\omega)$:

$$\frac{dz(t)}{dt} + az(t) = -\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) \xleftrightarrow{F} j\omega Z(j\omega) + aZ(j\omega) = -j\omega X(j\omega) + aX(j\omega)$$

$$Z(j\omega) = X(j\omega)\left[\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right] \Rightarrow W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega}\left[\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right] + \pi X(j0)\overset{1}{\cancel{\left[\frac{a-0}{a+0}\right]}}\delta(\omega);$$

$$\cdot\ Y(j\omega) = F\{y(t)\} = F\{w(t) - w(t-T)\} = W(j\omega) - W(j\omega)e^{-j\omega T} = W(j\omega)\left[1 - e^{-j\omega T}\right] \overset{\boxed{f(0)\delta(\omega) = f(\omega)\delta(\omega)}}{=}$$

$$= \left(\frac{X(j\omega)}{j\omega}\left[\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right] + \pi X(j\omega)\delta(\omega)\right)\left(1 - e^{-j\omega T}\right) =$$

$$= X(j\omega)\left[\frac{1}{j\omega}\left[\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right] + \pi\delta(\omega)\right]\left(1 - e^{-j\omega T}\right) = X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow$$

$$\cdot\ \boxed{H(j\omega)} = \left[\frac{1}{j\omega}\left[\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right] + \pi\delta(\omega)\right]\left(1 - e^{-j\omega T}\right) \overset{*}{=} \left(1 - e^{-j\omega T}\right)\left[\frac{a-j\omega}{j\omega(a+j\omega)}\right] + \pi\delta(\omega)\overset{0}{\cancel{\left[1 - \underset{1}{e^{0}}\right]}} =$$

$$= \boxed{\left(1 - e^{-j\omega T}\right)\left[\frac{a-j\omega}{j\omega(a+j\omega)}\right]} //$$

NOTA: También se podía haber hecho con Laplace, pero al ser estable usamos Fourier para no liarnos con las ROCs (aunque trabajar con "jω" es más pesado que con "s")

- Desarrollemos H(jω) hasta llegar a la expresión de la solución final:

$$\boxed{H(j\omega)} = e^{-j\omega\frac{T}{2}}e^{j\omega\frac{T}{2}}\left(\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right) = 2e^{-j\omega\frac{T}{2}}\left(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}\right)\frac{1}{\omega}\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega\frac{T}{2})}{\omega}\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}}} // = \cancel{2}\frac{T}{\cancel{2}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}} = \boxed{T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}}} //$$

27-10-2008

SEPTIEMBRE 1999

1. Calcule la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es la siguiente:

$$X(j\omega) = \frac{j\omega \; e^{-(4+2j\omega)}}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$x(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} X(j\omega)$$

1ª idea "Definición" $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega\, e^{-(4+2j\omega)}}{(2+j\omega)(3+j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega = \ldots$

¡¡¡ uffff... !!! Sudaremos tinta para hacer esa integral, si es que podemos hacerla...

2ª idea "Aplicando propiedades"

$$X(j\omega) = \frac{j\omega\, e^{-(4+2j\omega)}}{(2+j\omega)(3+j\omega)} = e^{-4} \overbrace{\frac{j\omega}{(2+j\omega)(3+j\omega)}}^{X_1(j\omega)} \underbrace{e^{-j\omega 2}}_{} = e^{-4} X_1(j\omega)\, e^{-j\omega 2}$$

Este término al final sólo afectará al desplazamiento

$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\omega)$

$x_1(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ "$t_0 = 2$"

$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-4} X_1(j\omega) e^{-j\omega 2}\} = e^{-4}\mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)e^{-j\omega 2}\} = e^{-4} x_1(t-2)$$

- El problema se reduce a hallar $x_1(t)$, que es menos temible:

$$x_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{(2+j\omega)(3+j\omega)}\right\}$$

No vemos en la tabla una transformada parecida pero... ¡idea feliz!

- Descomposición en fracciones simples:

$$X_1(j\omega) = \frac{j\omega}{(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{3+j\omega};$$

$j\omega = A(3+j\omega) + B(2+j\omega)$

$\omega = 3j \mid \; -3 = B(2-3) = -B \Rightarrow \boxed{B=3}$

$\omega = 2j \mid \; -2 = A(3-2) \Rightarrow \boxed{A=-2}$

Otra forma:

$j\underline{\omega} + 0 = 3A + j\underline{\omega}A + 2B + Bj\underline{\omega}$ $\left\{\begin{matrix} \cancel{j}^{1} = \cancel{j}A + \cancel{j}B \\ 0 = 3A + 2B \end{matrix}\right\}$ $\therefore$

$$\gg X_1(j\omega) = -2\frac{1}{2+j\omega} + 3\frac{1}{3+j\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)\} = -2\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\omega}\right\} + 3\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\omega}\right\}$$

$$= -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) = [3e^{-3t} - 2e^{-2t}]u(t)$$

$$\gg \text{Finalmente: } \boxed{x(t) = e^{-4} x_1(t-2) = e^{-4}[-2e^{-2(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]\,u(t-2)}$$

√ ✓ ✓

FEBRERO 2001

2. Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya relación de entrada $x(t)$ a salida $y(t)$ viene descrita por la siguiente ecuación:

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(\int_{t}^{t+t_0} x(\tau)d\tau-\int_{t-t_0}^{t} x(\tau)d\tau\right)$$

donde t_0 es un parámetro arbitrario real y positivo.

a) Demuestre que la respuesta al impulso del sistema, denotada como $h(t)$, viene expresada por la siguiente ecuación:

$$h(t)=\frac{1}{2}\left(u(t+t_0)-2u(t)+u(t-t_0)\right)$$

siendo $u(t)$ la función escalón unidad.

b) Determine la respuesta en frecuencia del sistema, dentada (denotada) como $H(j\omega)$. Represente de forma aproximada el módulo y la fase.

c) Demuestre analíticamente en el dominio de la frecuencia que este sistema elimina cualquier señal periódica de frecuencia:

$$\omega_m=m\frac{2\pi}{t_0},\quad \forall m \text{ entero}$$

---

a) $x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=\frac{1}{2}\left[\int_{t}^{t+t_0} x(\tau)d\tau-\int_{t-t_0}^{t} x(\tau)d\tau\right]$

$\delta(t)$

$$\boxed{h(t)}=\frac{1}{2}\left[\int_{t}^{t+t_0}\delta(\tau)d\tau-\int_{t-t_0}^{t}\delta(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{2}\left(\left[u(\tau)\right]_{t}^{t+t_0}-\left[u(\tau)\right]_{t-t_0}^{t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[u(\tau)\right]_{t}^{t+t_0}+\left[u(\tau)\right]_{t}^{t-t_0}\right)=\frac{1}{2}\left[u(t+t_0)-u(t)-u(t)+u(t-t_0)\right]=$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\left[u(t+t_0)-2u(t)+u(t-t_0)\right]} \quad \text{cqd}$$

---

b) $$\boxed{H(j\omega)}=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left[u(t+t_0)-2u(t)+u(t+t_0)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{u(t+t_0)\}-2\mathcal{F}\{u(t)\}+\mathcal{F}\{u(t-t_0)\}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega t_0}U(j\omega)-2U(j\omega)+e^{-j\omega t_0}U(j\omega)\right]=U(j\omega)\left[\underbrace{\frac{e^{j\omega t_0}+e^{-j\omega t_0}}{2}}_{\cos(\omega t_0)}-2\right]=$$

$$\boxed{x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)}$$

$$=U(j\omega)\left[\cos(\omega t_0)-1\right]=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\left[\cos(\omega t_0)-1\right]=\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\left[\cos(\omega t_0)-1\right]=$$

$$=\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\left[\underbrace{\cos(\overset{1}{\cancel{0}}\cdot t_0)-1}_{0}\right]=\boxed{\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}}$$

$$f(\omega)\delta(\omega)=f(0)\delta(\omega)$$

13-11-2008

MÓDULO

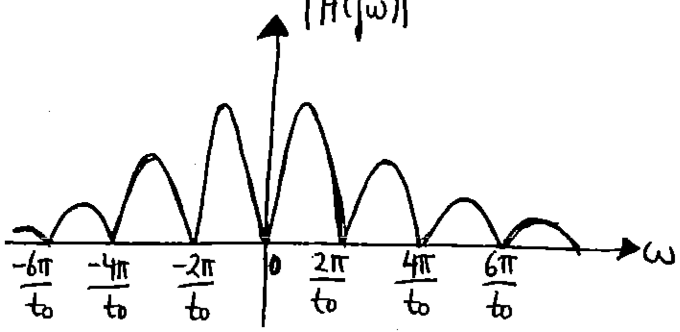
$$\boxed{|H(j\omega)|} = \left|\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}\right| \overset{\uparrow}{=} \frac{|\cos(\omega t_0)-1|}{|j\omega|} \overset{\uparrow}{=} \frac{1-\cos(\omega t_0)}{\underbrace{|j|}_{1}\,|\omega|} = \boxed{\frac{1-\cos(\omega t_0)}{|\omega|}}$$

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(\omega t_0)-1 \in [-2,0] \leq 0 \ \forall \alpha \\ \gg |\cos(\omega t_0)-1| = -1\cdot(\cos(\omega t_0)-1)\end{array}}$$

CASOS: $1-\cos(\omega t_0)=0 \Rightarrow \cos(\omega t_0)=1 \Rightarrow$
$\omega t_0 = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \omega = k\frac{2\pi}{t_0}$

$$\boxed{|H(j\omega)| = \begin{cases}\dfrac{1-\cos(\omega t_0)}{-\omega}, & \omega<0 \\ \dfrac{1-\cos(\omega t_0)}{\omega}, & \omega>0\end{cases} \quad !!\geq 0!!}$$



$$\lim_{\omega\to 0^-} |H(j\omega)| \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\omega\to 0^-} \frac{t_0 \operatorname{sen}(\omega t_0)}{-1} = 0$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{\omega\to 0^+} |H(j\omega)| = \ldots = 0$$

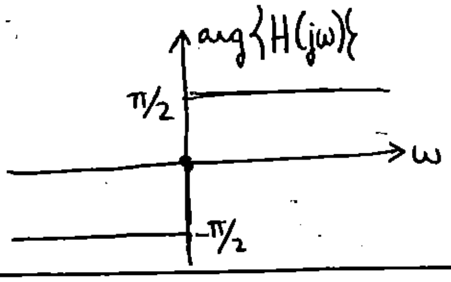
~~Nota~~
arg{ℝ} ~~dado~~ $x \in \mathbb{R}^{+-} \to \arg\{x\} = \mathbb{R}$

FASE

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\left\{\frac{\cos(\omega t_0)-1}{j\omega}\right\} \overset{\uparrow}{=} \arg\{\underbrace{\overset{\leq 0}{\cos(\omega t_0)-1}}_{\in\mathbb{R}^-}\} - \arg\{j\omega\} = \pi - \arg\{j\omega\} = \begin{cases}\pi-\frac{\pi}{2}, & \omega>0 \\ \pi+\frac{\pi}{2}, & \omega<0\end{cases} \overset{\downarrow}{=} \begin{cases}\pi/2, & \omega>0 \\ -\pi/2, & \omega<0\end{cases} =$$

$$\boxed{\arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\}}$$

¡¡Las fases son ángulos!! Y éstas se suelen poner en el intervalo $[-\pi,\pi]$ (aunque no es obligatorio)



$$\boxed{\arg\{H(j\omega)\} = \pi/2 \cdot \operatorname{sig}(\omega)}$$

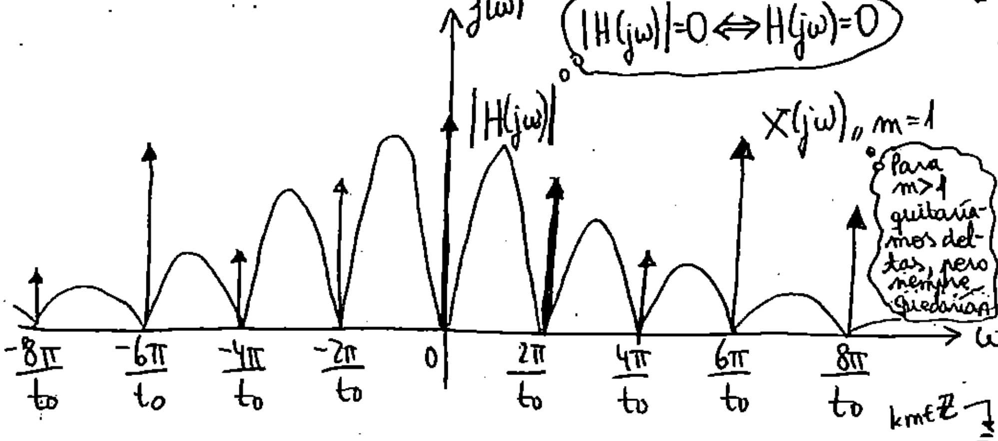
---

c) Sabemos que toda señal periódica se puede expresar mediante su DSF como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_m t}, \quad \omega_m = m\frac{2\pi}{t_0}, \quad m\in\mathbb{Z} \Rightarrow \omega_m = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{m\frac{2\pi}{t_0}} = \frac{t_0}{m}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k\omega_m) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta\left(\omega - km\frac{2\pi}{t_0}\right)$$



- Gráficamente se ve que la salida de este sitema $Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega) = 0$, pues las deltas de $X(j\omega)$ caen en los nulos de $H(j\omega)$ independientemente del valor de "m"
- Analíticamente:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega) = H(j\omega)\,2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega)\,\delta\left(\omega - km\frac{2\pi}{t_0}\right) \overset{\uparrow}{=} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jkm$$

$km\in\mathbb{Z}$ $\overset{\downarrow}{=} 0 \Rightarrow \boxed{y(t)=0}$

$\ldots H(j\omega) = 0$

DIFICIL

5-11-2008

√ √

FEBRERO 2002

2. Considere la siguiente respuesta impulsiva que caracteriza un sistema lineal e invariante (que modela matemáticamente la reverberación que produce un local sobre señales sonoras):

$$h_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot h(t - kT)$$

donde: a y T son números reales positivos.

$h(t)$ es la respuesta impulsiva de un sistema lineal, invariante y causal que responde a la entrada $x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) \cdot u(t)$ con la salida $y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right) \cdot u(t)$.

Determine:

a) La respuesta en frecuencia del sistema completo. ¿Para qué margen de valores de a existe dicha respuesta en frecuencia?

b) La ecuación diferencial que representa la relación entrada-salida del sistema caracterizado por $h(t)$. ¿Cuáles deben ser sus condiciones iniciales?

c) La respuesta en frecuencia y la respuesta impulsiva del sistema inverso de $h_T(t)$.

$h_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot h(t-kT)$

$x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) u(t)$

$y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right) u(t)$

¡¡Hay que interpretar bien el enunciado

$a, T \in \mathbb{R}^+$

---

a) Respuesta en frecuencia del sistema completo:

$$\boxed{H_T(j\omega)} \triangleq \mathcal{F}\{h_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a^k h(t-kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathcal{F}\{h(t) * \delta(t-kT)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathcal{F}\{h(t)\} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k H(j\omega) e^{-j\omega kT} = H(j\omega) \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\omega kT} =$$

$\boxed{\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}}$

$$= H(j\omega) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega T}\right)^k}_{} \triangleq \boxed{H(j\omega) \frac{1}{1 - a e^{-j\omega T}}}$$

falta calcular $H(j\omega)$

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$

• Hay que exigir: $|a e^{-j\omega T}| = |a| \underbrace{|e^{-j\omega T}|}_{1} = |a| < 1 \Leftrightarrow \boxed{0 < a < 1}$

$H(j\omega)$ $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$, $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ ($\neq 0$)

• $x(t) = e^{-t} u(t) + e^{-3t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} = \frac{4 + 2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$;

$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$

• $y(t) = 2e^{-t} u(t) - 2e^{-4t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = 2\frac{1}{1+j\omega} - 2\frac{1}{4+j\omega} = \frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$;

SIGUE

CONTINÚA Así que: $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{6}{\cancel{(1+j\omega)}(4+j\omega)}\cdot\frac{\cancel{(1+j\omega)}(4+j\omega)}{4+2j\omega}=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$

» Finalmente: $\boxed{H_T(j\omega)}=H(j\omega)\frac{1}{1-ae^{-j\omega T}}=\boxed{\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)(1-ae^{-j\omega T})}}$ //

---

b) Se trata del sistema "2":

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\longrightarrow Y(j\omega)(2+j\omega)(4+j\omega)=X(j\omega)\,3\cdot(3+j\omega);$$

$$Y(j\omega)[8+2j\omega+4j\omega+(j\omega)^2]=X(j\omega)[9+3j\omega];$$

$$8Y(j\omega)+6j\omega Y(j\omega)+(j\omega)^2Y(j\omega)=9X(j\omega)+3j\omega X(j\omega)$$

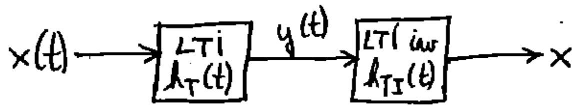
$$\updownarrow\mathcal{F}\leftarrow\boxed{\frac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}j\omega X(j\omega)}$$

$$\boxed{8y(t)+6\frac{dy(t)}{dt}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}=9x(t)+3\frac{dx(t)}{dt}}$$ EDO de 2° orden ⊕ $\boxed{\begin{array}{l}y(0)=0\\ \frac{dy}{dt}(0)=0\end{array}}$ $\boxed{t=1/2}$ // CRI por ser LTI = PVI

NOTA: y(t) es la incógnita (salida) y x(t) es el dato (entrada) ∘ lógico

---

c)



$$x(t)=\underbrace{y(t)}_{x(t)*h_T(t)}*h_{TI}(t)=x(t)*\underbrace{h_T(t)*h_{TI}(t)}_{\delta(t)}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow h_T(t)*h_{TI}(t)=\delta(t)$$ ∘ Esto en el tiempo es costoso, no obstante, si pasamos al dominio de la frecuencia...

$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=X(j\omega)\cdot\underbrace{H_T(j\omega)\cdot H_{TI}(j\omega)}_{1}\Rightarrow H_T(j\omega)\cdot H_{TI}(j\omega)\Rightarrow$$

$$\boxed{H_{TI}(j\omega)}=\frac{1}{H_T(j\omega)}=\frac{1-ae^{-j\omega T}}{H(j\omega)}=\boxed{\frac{(1-ae^{-j\omega T})(2+j\omega)(4+j\omega)}{3(3+j\omega)}}//$$

$$\mathcal{F}\updownarrow$$

$$h_{TI}(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H_{TI}(j\omega)\}=\mathcal{F}^{-1}\{(1-ae^{-j\omega T})\cdot\frac{1}{H(j\omega)}\}=\mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{1-ae^{-j\omega T}}_{①}\}*\mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{\frac{1}{H(j\omega)}}_{②}\}$$

1| $\mathcal{F}^{-1}\{1-ae^{-j\omega T}\}=\mathcal{F}^{-1}\{1\}-a\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega T}\}=\delta(t)-a\delta(t-T)$

2| $\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{H(j\omega)}\}=\mathcal{F}^{-1}\{\frac{(4+j\omega)(2+j\omega)}{3(3+j\omega)}\}=\frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\{\frac{(4+j\omega)(2+j\omega)}{3+j\omega}\}=\frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\{j\omega+3-\frac{1}{j\omega+3}\}$ ↑ SIG

$$E=\frac{(4+j\omega)(2+j\omega)}{3+j\omega}=\frac{8+4j\omega+2j\omega+(j\omega)^2}{3+j\omega}=\frac{8+6j\omega+(j\omega)^2}{3+j\omega}$$

$$\begin{array}{r|l} j\omega^2+6j\omega+8 & j\omega+ \\ \hline -j\omega^2+3j\omega & j\omega+ \\ 3j\omega+8 & \\ -3j\omega+9 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$D=Cd+R\Rightarrow\frac{D}{d}=C+\frac{R}{d}\quad » E=j\omega+3-\frac{1}{3+j\omega}$$

CONTINÚA E-20

$$\ldots = \cancel{\frac{1}{3}\,3}\,\mathcal{F}^{-1}\{1\} + \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\{j\omega \cdot 1\} - \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\omega}\right\} =$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{3}\frac{d\delta(t)}{dt} - \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

¿Qué es esto? TTU
Sin comentarios...

Finalmente: $\mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{1-a e^{-j\omega T}}_{①}\} * \mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{\frac{1}{H(j\omega)}}_{②}\} \Rightarrow$

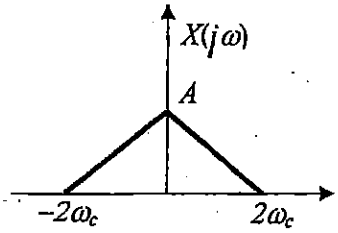
$$\boxed{h_{TI}(t)} = ① * ② = [\delta(t) - a\delta(t-T)] * \frac{1}{3}\left[3\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt} - e^{-3t}u(t)\right] =$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\left[3\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt} - e^{-3t}u(t)\right] - a\,\frac{1}{3}\left[3\delta(t-T) + \frac{d}{dt}\delta(t-T) - e^{-3(t-T)}u(t-T)\right]}$$

SEPTIEMBRE 2004

Se entiende mejor después del TS

2. Considere una señal $x(t)$ cuyo espectro es



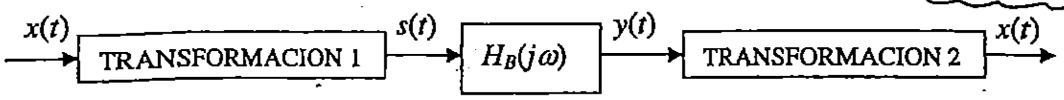
Dicha señal se desea transmitir por un sistema que se puede modelar como un filtro paso banda ideal, cuya respuesta en frecuencia es

La señal original se perdería si se metiera directamente.

$$H_B(j\omega)=\begin{cases}1 & (\omega_0-\omega_c)\le|\omega|\le(\omega_0+\omega_c)\\0 & \text{resto}\end{cases}$$

siendo $\omega_0 > 2\omega_c > 0$. El esquema es el siguiente:

Esquema de un sistema general de comunicaciones



Es decir, el bloque "TRANSFORMACION 1" transforma la señal de entrada $x(t)$ en otra señal $s(t)$, que será la que pasa por el filtro paso banda ideal, cuya salida es la señal $y(t)$. A partir de la señal $y(t)$, el bloque "TRANSFORMACION 2" recupera la señal original $x(t)$.

(a) Indique y justifique qué transformaciones tiene que realizar el bloque "TRANSFORMACION 1" sobre la señal $x(t)$ (y, por tanto, sobre su espectro), para que a partir de la salida del filtro paso banda ideal, $y(t)$, sea posible recuperar de nuevo la señal $x(t)$.

(b) Indique y justifique qué transformaciones tiene que realizar el bloque "TRANSFORMACION 2" sobre la señal $y(t)$ (y, por tanto, sobre su espectro), para recuperar de nuevo la señal $x(t)$.

---

a) • El objetivo es preservar la información espectral de $X(j\omega)$, con lo que podremos comprimir, expandir, desplazar, etc. Pero lo que no debemos hacer es eliminar componentes espectrales o transformarlos de manera que no podamos recuperar la señal original

PASO 1: - Primero comprimimos el espectro a la mitad para que quepa en la banda de paso del filtro paso banda. Para ello aplicamos:

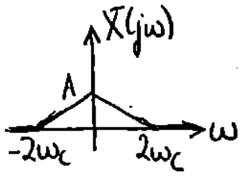
Propiedad: $x(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ "Comprimir en un dominio equivale a expandir en el otro y viceversa."

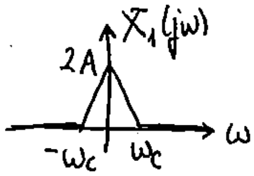
SIG

10-11-2008

CONTINÚA

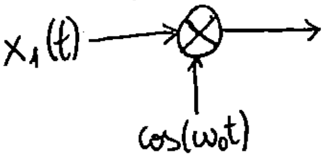
$x_1(t)=x\left(\frac{1}{2}t\right)$





$$x\left(\tfrac{1}{2}t\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|}X\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right)=2X(j\omega)$$

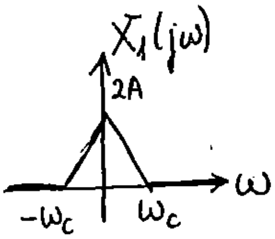
PASO 2: - Hay que colocarlo en el margen de frecuencias que deja pasar el filtro

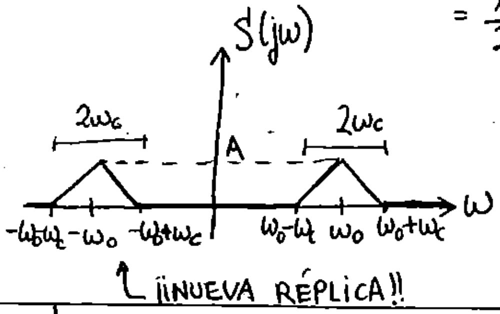


$$s(t)=x_1(t)\cdot\cos(\omega_0t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}S(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*\mathcal{F}\{\cos(\omega_0t)\}=$$

$$=\frac{1}{2\cancel{\pi}}X_1(j\omega)*\cancel{\pi}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)$$

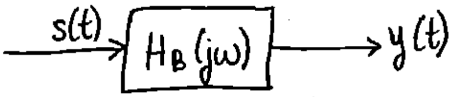
$$=\frac{1}{2}[X_1(j[\omega-\omega_0])+X_1(j[\omega+\omega_0])]$$





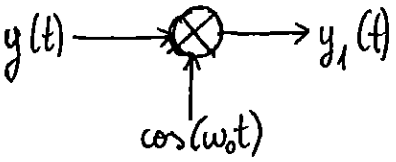
Aparece una réplica simétrica que no interfiere en la información pues pasará bien por el filtro. Podríamos haber multiplicado por exponencial compleja para sólo desplazar pero en la vida real es más factible multiplicar por un coe

PASO 3: - Filtramos paso banda:

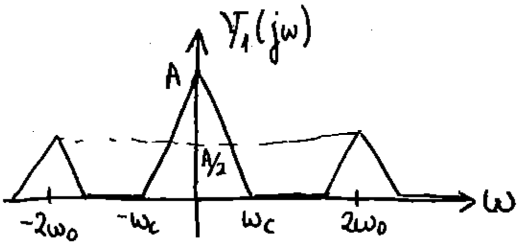


- S(jω) coincide con Y(jω) gracias al sistema "transformación 1" que ya hemos ideado

PASO 4: - Convertimos la señal paso banda en paso bajo.

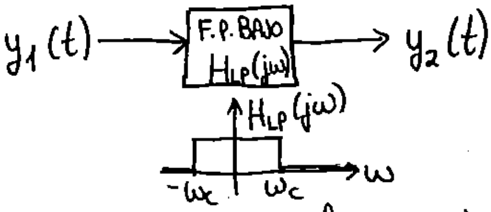


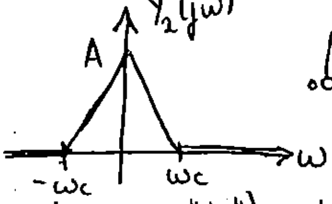
$$Y_1(j\omega)=\frac{1}{2\pi}Y(j\omega)*\mathcal{F}\{\cos(\omega_0t)\}\overset{\text{análogo al paso 2}}{=}\ldots=\frac{1}{2}[Y(j[\omega-\omega_0])+Y(j[\omega$$



- Hemos recuperado bastante de la señal original, pero hay información redundante a frecuencias medias

PASO 5: - Filtramos el espectro de paso banda en paso bajo

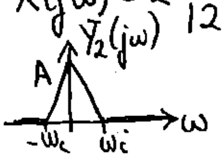


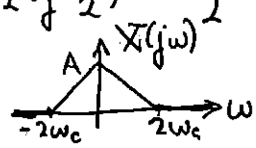


Casi está, la queremos no comprimida

PASO 6: - Expandimos en frecuencia (comprimimos en "t") y duplicamos la señal para que la amplitud quede como queremos

$$x(t)=\underline{2}y_2(2t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=2\frac{1}{|2|}Y_2\left(j\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{1}{2}Y_2\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$





⇒ Ya recuperamos el espectro original tras pasarlo por el filtro

11-10-2008

SEPTIEMBRE 2000 ≡ JUNIO 2007

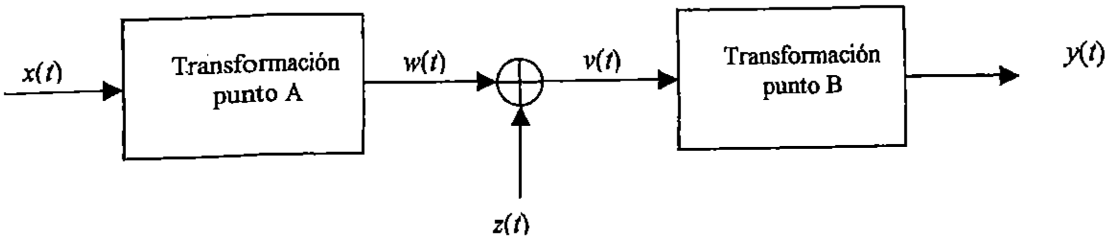
3. Sea un sistema cuya entrada y salida se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$y(t) = x(at)$$

donde a es una constante arbitraria distinta de cero.

a) ¿Es un sistema lineal?.¿Es un sistema invariante en el tiempo?

Supongamos el siguiente esquema:



cascada=serie

donde los bloques 'Transformación punto A y punto B' representan una o varias transformaciones en cascada exclusivamente del tipo escalado temporal o filtro paso bajo ideal. De las señales involucradas en el proceso únicamente se sabe que son reales y de banda limitada ($x(t)$ es paso bajo y $z(t)$ es paso banda) verificando,

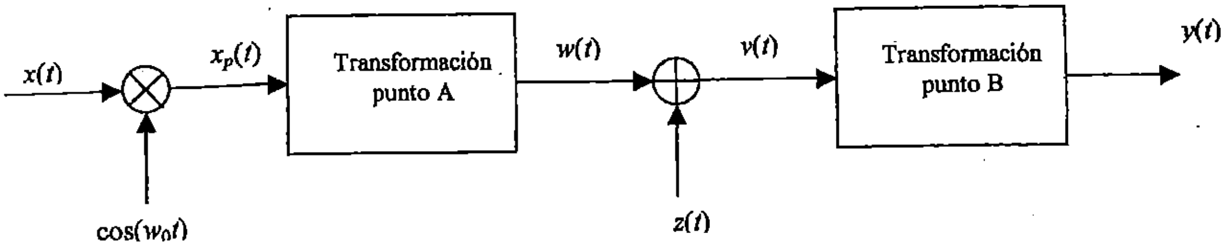
$$X(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \omega_0$$

$$Z(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \omega_0 \;\text{ y }\; |\omega| < \frac{\omega_0}{2}$$

siendo ω_0 un parámetro arbitrario.

b) Diseñe convenientemente las transformaciones de los puntos A y B de forma que se garantice la identidad $y(t) = x(t)$.

c) Supongamos ahora un nuevo esquema como el descrito en la figura:



Diseñe nuevamente las transformaciones en los puntos A y B (en B puede considerar un bloque adicional que multiplique una señal por una sinusoide de frecuencia arbitraria) para garantizar igualmente la identidad $y(t) = x(t)$.

---

a) $x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = x(at)$

LINEALIDAD

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(at)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(at)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = x_3(at) = \alpha \underbrace{x_1(at)}_{y_1(t)} + \beta \underbrace{x_2(at)}_{y_2(t)} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

$\boxed{\text{SÍ LINEAL}}$

INVARIANZA

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(at)$

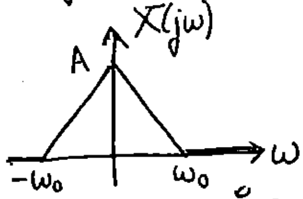
$x_2(t) = x_1(t - t_0) \longrightarrow y_2(t) = x_2(at) = x_1(at - t_0) \not\equiv y_1(t - t_0)$

$\boxed{\text{NO INVARIANTE}}$

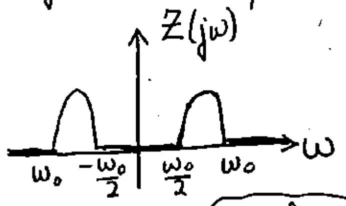
NOTA: $y_1(t - t_0) = x_1(a[t - t_0]) = x_1(at - at_0)$

a≠1 por lo general

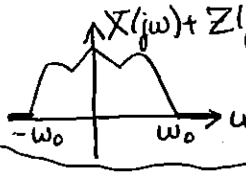
r). Objetivo: preservar la información espectral de $x(t)$



;



Si sumáramos directamente:



¡Se nos solapan los espectros y se nos choja la señal!

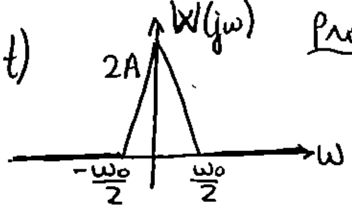
Ejemplos de representación general para ver cómo actuar

interferencia no deseada

1) Comprimimos en frecuencia x2 ⇒ expandir en el tiempo x2

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Expansión } \times 2 \text{ en "}t\text{"}} \longrightarrow w(t) = x\left(\tfrac{1}{2}t\right)$$

$$X(j\omega) \longrightarrow \qquad \longrightarrow W(j\omega)$$

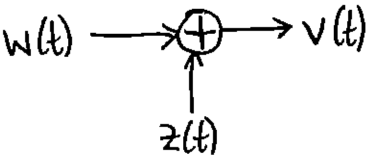


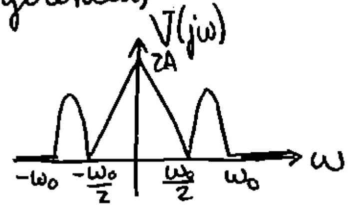
Propiedad:

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right.$$

$$x\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} X\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) = 2$$

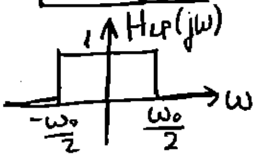
2) Se suma $z(t)$ (interferencia)

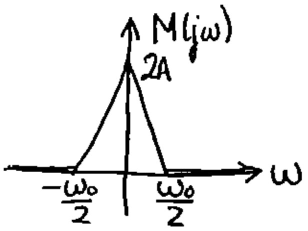




3) Filtramos paso bajo para eliminar la interferencia $z(t)$

$$v(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{FP Bajo}\\ H_{LP}(j\omega)\end{array}} \longrightarrow m(t)$$





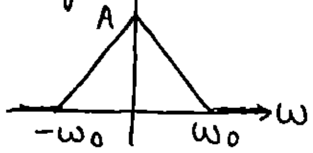
4) Expandimos en frecuencia x2 (comprimimos en "t" por 2)

$$m(t) \longrightarrow \boxed{\text{Compresor } \times 2 \text{ en "}t\text{"}} \longrightarrow y(t) = m(2t)$$

$$M(j\omega) \longrightarrow \qquad \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\ !!$$

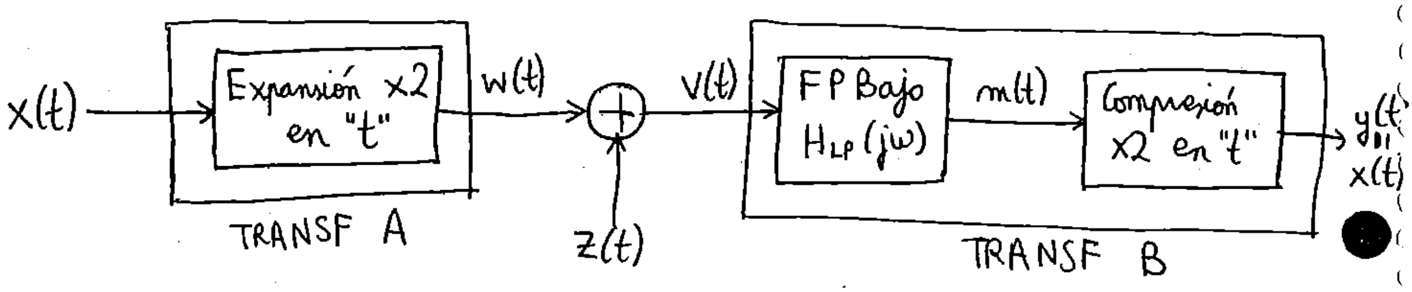
Prop: $x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

$x(2t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} X\left(j\frac{\omega}{2}\right)$



Esta vez no hace falta escalar a parte de expandir la amplitud queda como deseamos

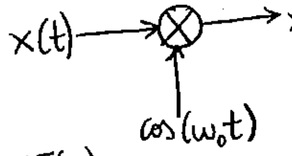
- El sistema completo es:



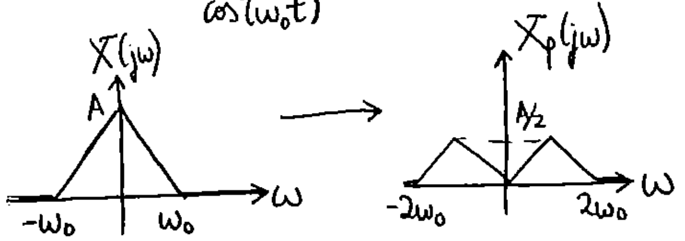
SIGUE

CONTINÚA E-22

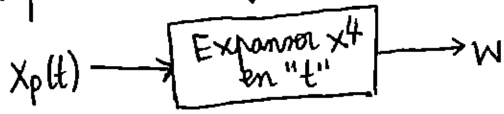
c) ① Pasamos de paso bajo a paso banda:



$$x_p(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_p(j\omega) = \ldots = \frac{1}{2}\left[X(j[\omega-\omega_0]) + X(j[\omega+\omega_0])\right]$$

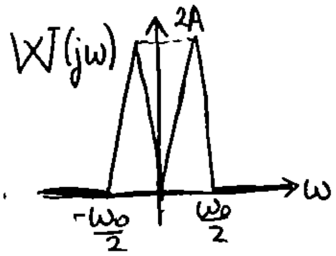


② Comprimimos en frecuencia x4 (expandimos en el tiempo x4)

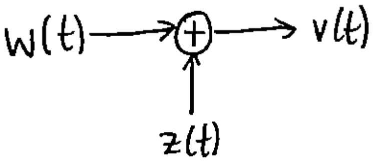


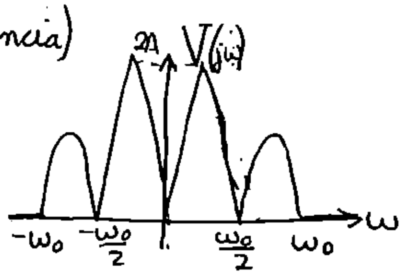
$$w(t) = x_p\left(\frac{1}{4}t\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} W(j\omega) = \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} X\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{4}}\right) = 4X(j4\omega)$$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

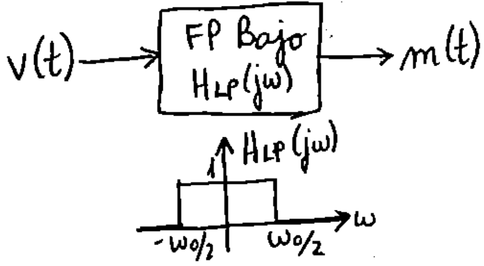


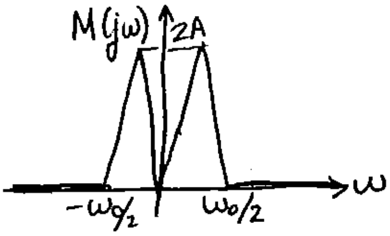
③ Se suma z(t) (interferencia)



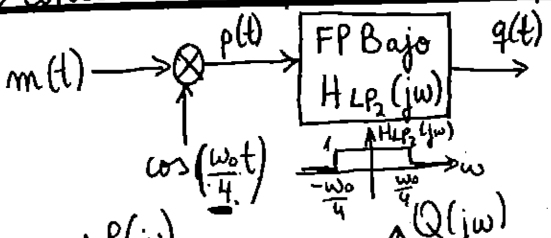


④ Filtramos paso bajo para eliminar la interferencia



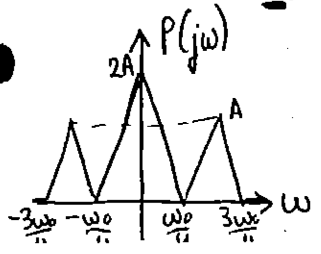


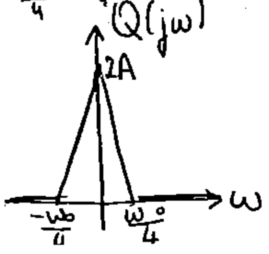
⑤ Convertimos de paso banda a paso bajo (demodulamos)



$$P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} M(j\omega) * \mathcal{F}\left\{\cos\left(\frac{\omega_0}{4}t\right)\right\} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[M\left(j\left[\omega - \frac{\omega_0}{4}\right]\right) + M\left(j\left[\omega + \frac{\omega_0}{4}\right]\right)\right]$$



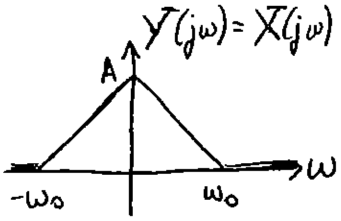


- Nos permiten usar una sinusoide de frecuencia arbitraria, aunque con $\frac{\omega_0}{4}$ nos apañamos para solapar adecuadamente

11-10-2008

⑥ Expandimos en frecuencia x4 y ajustamos la amplitud

$$q(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Compre-}\\ \text{sión x "4t"}\end{array}} \longrightarrow y(t) = \underline{2}\,q(4t)$$

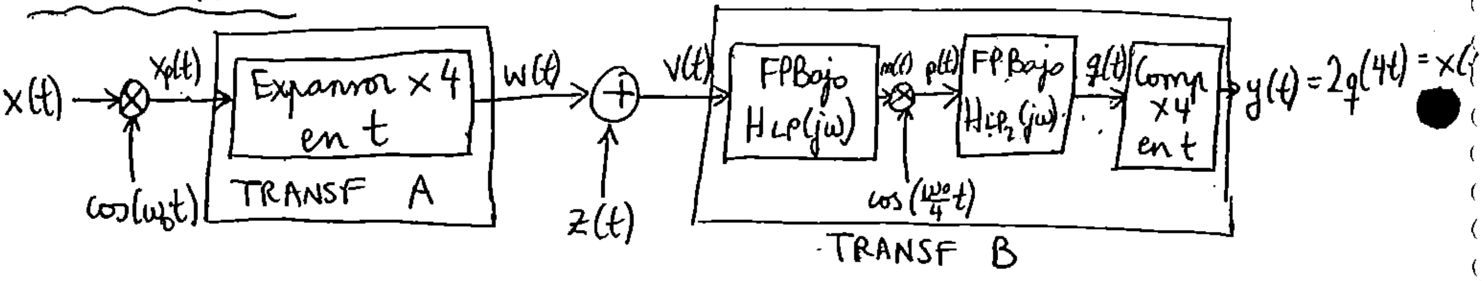


$$y(t) = 2q(4t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = 2\,\frac{1}{4}\,X\!\left(j\,\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{2}\,X\!\left(j\,\frac{\omega}{4}\right)$$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\,X\!\left(j\,\frac{\omega}{a}\right)$$

NOTA: Si invertimos los pasos ⑤ con ⑥, la sinusoide sería $\cos(\omega_0 t)$ y no $\cos(\frac{\omega_0}{4}t)$, lo que en la aplicación práctica es mejor, como veremos en otras asignaturas; pero aquí, como matemáticamente es posible, no hay problema con este método seguido.

- SIST COMPLETO:



10-11-2008

FEBRERO 2003

2. Considere la siguiente señal en tiempo continuo:

$$x(t) = |\operatorname{sen} \pi t|, \quad -\infty < t < \infty$$

La señal $x(t)$ se pasa a través de un sistema LTI cuya salida $y(t)$ se relaciona con la entrada $x(t)$ del siguiente modo

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t)$$

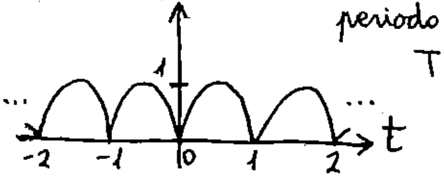
Se pide:

a) Determine los coeficientes del desarrollo de Fourier en serie de Fourier de la señal $x(t)$. Asimismo, determine la transformada de Fourier de $x(t)$.

b) Calcule las constantes a y b para que la salida del sistema $y(t)$ no tenga componentes de frecuencia en el origen ($w = 0$) y conserve los mismos valores del espectro de $x(t)$ cuando w tiende a infinito. Calcule también la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$.

c) Determine la transformada de Fourier de la señal $y(t)$.

$x(t)=|\operatorname{sen}\pi t|$



Periódica de periodo fundamental: $T=1$

- Por ser periódica, $x(t)$ se puede representar mediante su DSF como:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \; ; \text{ siendo } \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

---

a) Calculemos a_k | $1^{\underline{a}}$ idea: ∘∘ Ecuación análisis

$\operatorname{sen}\pi t \geq 0 \,,\, t\in[0,1]$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt \overset{T=1}{\underset{\omega_0=\frac{2\pi}{1}=2\pi}{=}} \frac{1}{1}\int_0^1 |\operatorname{sen}\pi t|\, e^{-jk2\pi t}\,dt = \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)\, e^{-jk2\pi t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{2j}\, e^{-jk2\pi t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{j\pi t(1-2k)}\,dt - \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi t(1+2k)}\,dt = \frac{1}{2j}\,\frac{1}{(1-2k)j\pi}\Big[\underbrace{e^{\overset{(1-2k)j\pi}{\text{impar}}}}_{=-1} - 1\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2j}\,\frac{1}{(1+2k)j\pi}\Big[\underbrace{e^{-\overset{(1+2k)}{\text{impar}}j\pi}}_{=-1} - 1\Big] = \frac{1}{2j}\,\frac{1}{(1-2k)j\pi}(-2) + \frac{1}{2j}\,\frac{1}{(1+2k)j\pi}(-2) =$$

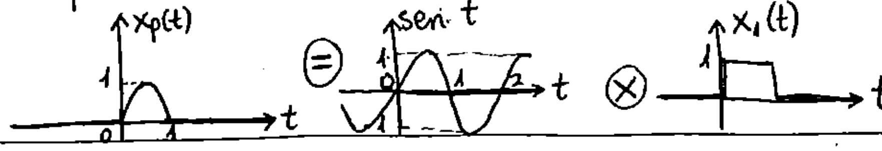
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{1+\cancel{2k}+1-\cancel{2k}}{(1-2k)(1+2k)} = \boxed{\frac{2}{\pi(1-4k^2)}}\ \boxed{\forall k\in\mathbb{Z}}$$

∘∘ Si hubiese algún valor entero de k para el que a_k sale ∞ o una indet. ésta hay que calcularla aparte

$2^{\underline{a}}$ idea:

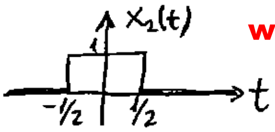
- $a_k = \frac{1}{T}\underbrace{X_p(j\omega)}_{\text{TF sobre un periodo de } x(t)}\Big|_{\omega=k\omega_0} \underset{T=1 \,,\, \omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi}{=} X_p(j2k\pi)$

- Hallemos ahora $X_p(j\omega)$



∘∘ Tomamos un periodo fácil y lo descomponemos en señales cuyas TF estén en la tabla (una idea)

$x_p(t) = \text{sen}\pi t \cdot x_1(t) = \text{sen}\pi t \cdot x_2(t-\tfrac{1}{2})$



$x_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tfrac{1}{2} \\ 0, & |t| > \tfrac{1}{2} \end{cases}$

$\mathcal{F} \updownarrow$

$\text{sen}\,\omega_2 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega_2 - \omega_2) + \delta(\omega$

- $X_p(j\omega) = \mathcal{F}\{\text{sen}\pi t \cdot x_2(t-\tfrac{1}{2})\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\text{sen}\pi t\} * \mathcal{F}\{x_2(t-\tfrac{1}{2})\} \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\cancel{2\pi}}\frac{\cancel{\pi}}{j}[\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi$

$\ldots * X_2(j\omega)e^{-j\omega\frac{1}{2}} = \frac{1}{2j}\left[X_2(j[\omega-\pi])e^{-j(\omega-\pi)\frac{1}{2}} - X_2(j[\omega+\pi])e^{-j(\omega+\pi)\frac{1}{2}}\right] \overset{\uparrow}{=}$

$$\boxed{X_2(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}\frac{\omega}{2}}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}j}\left[\frac{2\,\text{sen}(\frac{\omega-\pi}{2})}{\omega-\pi} \cdot e^{-j(\omega-\pi)\frac{1}{2}} - \frac{\cancel{2}\,\text{sen}(\frac{\omega+\pi}{2})}{\omega+\pi} \cdot e^{-j(\omega+\pi)\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{j}}e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[\frac{\text{sen}(\frac{\omega-\pi}{2})}{\omega-\pi}\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{=\cancel{j}} - \frac{\text{sen}(\frac{\omega+\pi}{2})}{\omega+\pi}\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{=-\cancel{j}}\right] = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[\frac{\text{sen}(\frac{\omega-\pi}{2})}{\omega-\pi} - \frac{\text{sen}(\frac{\omega+\pi}{2})}{\omega+\pi}\right.$$

Finalmente: $\boxed{a_k} = X_p(j2k\pi) = e^{-j\frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}}}\left[\frac{\text{sen}(\frac{2k\pi-\pi}{2})}{2k\pi-\pi} - \frac{\text{sen}(\frac{2k\pi+\pi}{2})}{2k\pi+\pi}\right] =$

$$= \underbrace{e^{-jk\pi}}_{=(-1)^k}\left[\frac{\overbrace{\text{sen}[(2k-1)\tfrac{\pi}{2}]}^{=(-1)^{k+1}}}{(2k-1)\pi} + \frac{\overbrace{\text{sen}[(2k+1)\tfrac{\pi}{2}]}^{=(-1)^k}}{(2k+1)\pi}\right] = (-1)^k\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} + \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\right] =$$

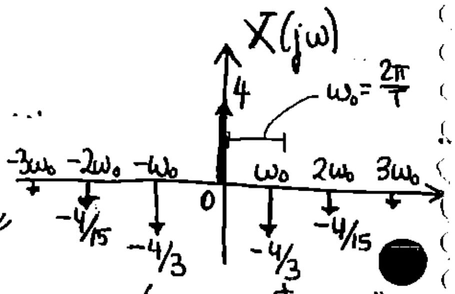
$$= \cancel{(-1)^{2k}}^{\,1}\left[\frac{-1}{(2k-1)\pi} + \frac{1}{(2k+1)\pi}\right] = \frac{-2}{\pi(4k^2-1)} = \boxed{\frac{2}{\pi(1-4k^2)}}\ \boxed{\forall k \in \mathbb{Z}}$$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{\pi(1-4k^2)}}_{a_k} e^{jk2\pi t};$

$\mathcal{F} \updownarrow$

$\boxed{X(j\omega)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega - k\omega_0) = \boxed{2\cancel{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\cancel{\pi}(1-4k^2)}\delta(\omega-k2\pi)}$

$\omega_0 = 2\pi$



— Componente continua

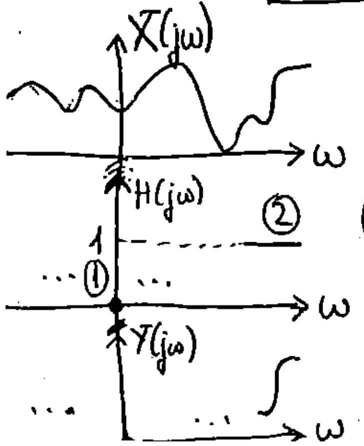
— Componente fundam

— Primer armónico (ó 2

El DSF será: $\boxed{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4k^2)}e^{jk2\pi t}}$

---

b) $x(t) \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{LTI} \quad h(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) \quad [\diamond] \end{array}}$ $\longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$



Condiciones:

① $Y(0) = 0 \Rightarrow H(0) = 0$

② $Y(\infty) = X(\infty) \Rightarrow H(\infty) = 1$

- De la EDO marcada con $[\diamond]$: $\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n} = (j\omega)^n X($

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega Y(j\omega) + Y(j\omega) = aj\omega X(j\omega) + bX(j\omega)$

$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{aj\omega + b}{1 + j\omega}$

① $H(j\omega)\big|_{\omega=0} = 0 \rightarrow H(j0) = 0$

② $\lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = 1$

CONTINÚA

17-11-2008

E-23

SIGUE

$$\begin{cases} ① \; \dfrac{aj0+b}{1+j0} = 0 \Rightarrow \boxed{b=0} \\ ② \; \lim\limits_{\omega\to\infty} H(j\omega) = \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{aj\omega+b}{j\omega+1} = a = 1 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

$$\boxed{h(t)} \overset{!}{=} \mathcal{F}^{-1}\left\{H(j\omega)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{1+j\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1+j\omega-1}{1+j\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\cancel{1+j\omega}^{\,1}}{\cancel{1+j\omega}} - \frac{1}{1+j\omega}\right\} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\} \overset{!}{=} \boxed{\delta(t) - e^{-t}u(t)}$$

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

$$e^{-at}u(t),\; a>0 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}$$

---

c) $\boxed{Y(j\omega)} \overset{!}{=} X(j\omega)H(j\omega) = H(j\omega)\, 2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega-k2\pi) = 2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega)\, \delta(\omega-k2\pi) \overset{f(\omega)\delta(\omega-\omega_0) \,=\, f(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)}{=}$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk2\pi)\,\delta(\omega-k2\pi) \overset{!}{=} \boxed{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)}\cdot\frac{jk2\pi}{1+jk2\pi}\,\delta(\omega-2k\pi)}$$

- **OBS**: Conocer la TF aporta realmente la misma información que conocer los a_k de su DSF (De hecho es lo mismo escrito de otra manera)

d) EXTRA ⊛ Calculemos el DSF de $y(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = 2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta(\omega-k\omega_0)$

- Identificando: $c_k = a_k H(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} \overset{\omega_0=2\pi}{=} a_k H(jk2\pi) = \dfrac{2}{\cancel{\pi}(1-4k^2)}\cdot\dfrac{jk2\cancel{\pi}}{1+jk2\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{j4k}{(1-4k^2)(1+jk2\pi)}}_{c_k} e^{jk\underset{\omega_0}{2\pi}t}}$$

11-11-2008

√ **FEBRERO 2006**

2. Sabiendo que las siguientes señales $x_1(t)$, $X_1(j\omega)$ forman un par de transformadas de Fourier,

$$x_1(t)=\frac{1}{jt-\alpha}\overset{TF}{\longleftrightarrow}X_1(j\omega)=-2\pi e^{-\alpha\omega}u(\omega);\qquad \alpha>0 \text{ y } \alpha \text{ real}$$

i.e. $\alpha\in\mathbb{R}^+$

donde $u(\omega)$ es la función escalón unidad:

$$u(\omega)=\begin{cases}1, & \omega>0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

(a) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$, denotada como $X(j\omega)$ siendo

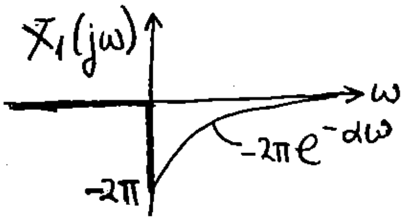
$$x(t)=\frac{\cos t}{(jt-3)(jt-1)}$$

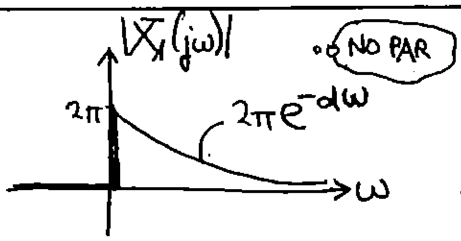
Suponga ahora un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso $h(t)$ es periódica de periodo 2π definida en un periodo como

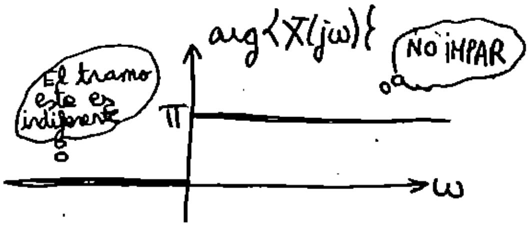
$$h(t)=\begin{cases}\cos t & |t|<\pi/2\\ 0 & \pi/2\le|t|<\pi\end{cases}$$

(b) Calcule los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $h(t)$ denotados como a_k.

(c) Si la señal $x(t)$ es la entrada del sistema anterior, calcule la expresión de la salida $Y(j\omega)$, expresando el resultado en función de $X(j\omega)$ y a_k.







a) $$x(t)=\frac{\cos t}{(jt-3)(jt-1)}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=\mathcal{F}\left\{\overset{x_2(t)}{\boxed{\frac{1}{(jt-3)(jt-1)}}}\cdot\cos t\right\}=\mathcal{F}\{x_2(t)\cdot\cos t\}=\frac{1}{2\pi}X_2(j\omega)*\mathcal{F}\{\cos t\}$$

$$\boxed{\cos\omega_0 t\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]}=\frac{1}{2\cancel{\pi}}X_2(j\omega)*\cancel{\pi}[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]=\frac{1}{2}[X_2(j[\omega-1])+X_2(j[\omega+1])]$$

- $$X_2(j\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(jt-3)(jt-1)}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{jt-3}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{jt-1}\right\}=-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi e^{-3\omega}u(\omega)+\frac{1}{2}2\pi e^{-\omega}u(\omega)=$$

$$=\pi[e^{-\omega}-e^{-3\omega}]u(\omega)$$

SIGUE

DESCOMPONEMOS EN FRACCIONES SIMPLES:

$$x_2(t)=\frac{1}{\cancel{(jt-3)}\cancel{(jt-1)}}=\frac{A}{(jt-3)}+\frac{B}{(jt-1)}=\frac{A(jt-1)+B(jt-3)}{\cancel{(jt-3)}\cancel{(jt-1)}}\Rightarrow 0jt+1=(A+B)jt-(A+3B)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}A+B=0\\ A-3B=1\end{matrix}\right\}\boxed{A=\frac{1}{2}}\ \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

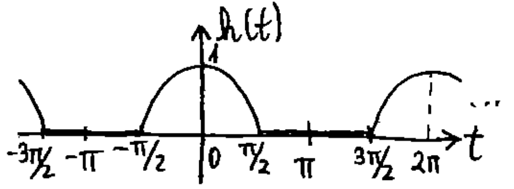
SIGUE » Finalmente: $\boxed{X(j\omega)} = \frac{1}{2}\left[X_2(j[\omega-1]) + X_2(j[\omega+1])\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi\left(e^{-(\omega-1)}u(\omega-1) - e^{-3(\omega+1)}u(\omega-1)\right) + \pi\left(e^{-(\omega+1)}u(\omega+1) - e^{-3(\omega+1)}u(\omega+1)\right)\right] =$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2}\left(\left[e^{-(\omega-1)} - e^{-3(\omega-1)}\right]u(\omega-1) + \left[e^{-(\omega+1)} - e^{-3(\omega+1)}\right]u(\omega+1)\right)}$$

---

b) $h(t) = \begin{cases} \cos t & , |t| < \pi/2 \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < |t| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$



$T = 2\pi$

1ª idea ⟶ Ec análisis

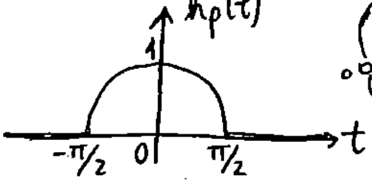
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

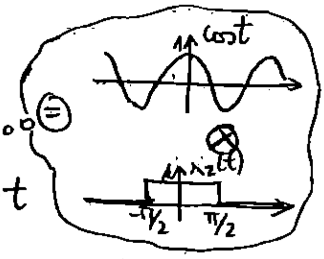
$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} h(t)\, e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-jkT}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, e^{-jkt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}e^{-jkt}$$

$$= \ldots \boxed{= \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi(1-k^2)}}$$

2ª idea ⟶ Particularizar la TF

$$a_k = \frac{1}{T}H_p(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{2\pi}H_p(jk)$$





- $h_p(t) = \cos t \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_p(j\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\cdot\cos t\} = \frac{1}{\cancel{2\pi}}X_2(j\omega) * \cancel{\pi}[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)] =$

$\omega_0 = 1$
$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

$$= \frac{1}{2}\left[X_2(j[\omega-1]) + X_2(j[\omega+1])\right]$$

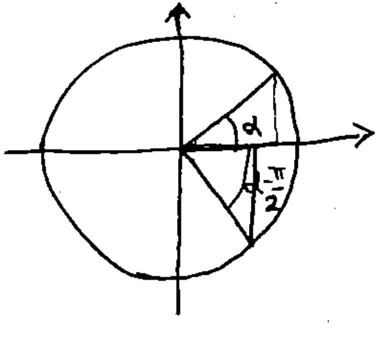
$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{\omega}$$

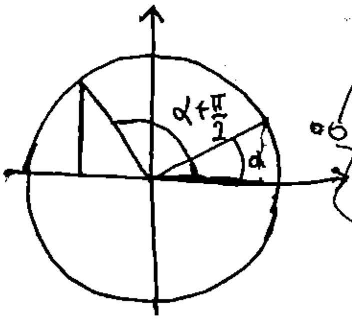
- $H_p(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X_2(j[\omega-1]) + X_2(j[\omega+1])\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{[\omega-1]\pi}{2}\right)}{\omega-1} + \frac{\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{[\omega+1]\pi}{2}\right)}{\omega+1}\right]$

Finalmente: $\boxed{a_k} = \frac{1}{2\pi}H_p(jk) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{[k-1]\pi}{2}\right)}{k-1} + \frac{\text{sen}\left(\frac{[k+1]\pi}{2}\right)}{k+1}\right]$ ¡¡$\forall k \neq 1$!! $=$

Se puede aquí separar en pares e impares o bien...

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{k-1} + \frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{k+1}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k-1} + \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k+1}\right] = \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi}\left[\frac{\cancel{k}-1-\cancel{k}-1}{k^2-1}\right]$$





Sacamos:
$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$
$\cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{= \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(1-k^2)}} \text{ ¡¡}\forall k \neq 1\text{!!}$$

SIGUE

17-11-2008

CONTINÚA E-24

- El DSF de $h(t)$ será: $\boxed{h(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{\omega_0=1}{=} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq \pm 1}}^{\infty} \frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{\pi(1-k^2)} e^{jkt} + \underbrace{\frac{1}{4}[\overset{(k=1)}{e^{jt}} - \overset{(k=}{e^{-j}}}_{\frac{j}{2}\,\mathrm{sen}t}$

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k2\pi)$$

- Hemos de calcular aparte a_1 y a_{-1} pues la expresión de a_k genéricos no sirve para estos caso

$\underline{k=1)}$ $\boxed{a_1} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} h(t) e^{-j1\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, e^{-jt} dt = \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-jt}+e^{jt}}{2} e^{-jt} dt =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{-2jt} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} dt = \cancel{\frac{-1}{8\pi j}\left[e^{-2jt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}} \xrightarrow{} 0 + \frac{1}{4\cancel{\pi}}[\cancel{\pi}/2 + \cancel{\pi}/2] = \boxed{\frac{1}{4}}$

$\underline{k=-1)}$ $\boxed{a_{-1}} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} h(t) e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, e^{jt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{2jt} dt \ldots$

$\ldots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} dt = \cancel{\frac{1}{8\pi j}\left[e^{2jt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}} \xrightarrow{} 0 + \frac{1}{4\cancel{\pi}}\left[\frac{\cancel{\pi}}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \ldots = \boxed{\frac{1}{4}}$

---

c) $\boxed{Y(j\omega)} = X(j\omega) H(j\omega) = X(j\omega)\, 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k) = \boxed{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(a_k X(jk))}_{c_k} \delta(\omega - k)}$

- **EXTRA:** DSF de $y(t)$. Identificando en $Y(j\omega)$:

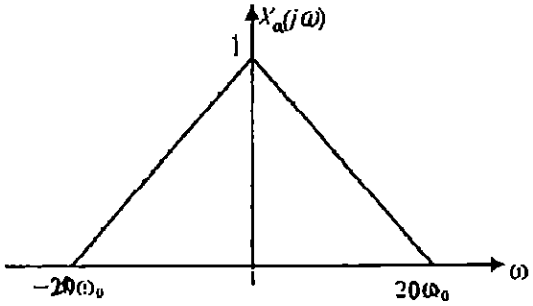
$$c_k = a_k X(jk) \Rightarrow \boxed{y(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(jk) e^{jkt}}$$

FEBRERO 2007

2. Sea la señal $x(t)$ cuyo espectro es el siguiente:

$$X(j\omega)=\left\{\sum_{k=-20}^{20} X_a(jk\omega_0)\cdot\delta(\omega-k\omega_0)\right\}*\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-l\cdot 40\cdot\omega_0)\right\}$$

Donde $X_a(j\omega)$ es el espectro de banda limitada representado en la figura y ω_0 vale $\frac{2\pi}{T}$.



Se pide:

a) Dibuje $X(j\omega)$ y justifique la **periodicidad de $x(t)$**.

b) Calcule la señal $x(t)$

c) Considere un filtro lineal e invariante con la siguiente respuesta impulsiva:

$$h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$

Calcule su respuesta en frecuencia. Dibuje su modulo.

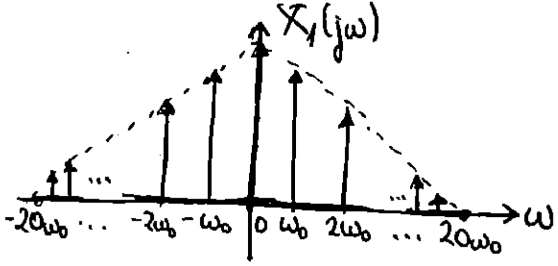
d) Calcule la señal de salida del sistema del apartado c) cuando la entrada es $x(t)$.

---

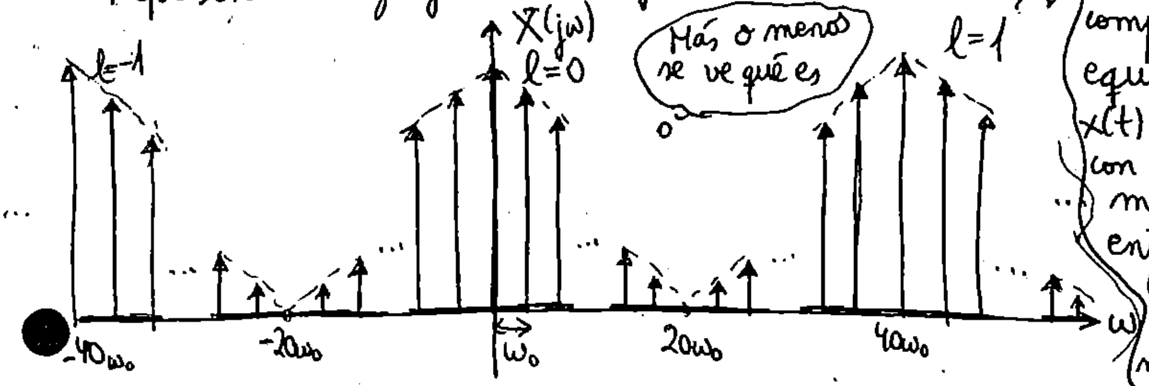
a). Sea $X_1(j\omega)=\sum_{k=-20}^{20}X_a(jk\omega_0)\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$.

- Entonces: $X(j\omega)=X_1(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-l40\omega_0)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_1(j[\omega-l40\omega_0])$$



- Representación gráfica de $X(j\omega)$ es:



Se trata de un espectro compuesto por deltas equiespaciadas ⇒ $x(t)$ es periódica con frecuencia fundamental el espectro entre deltas, es decir $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ siendo T el periodo fundamental de la señal $x(t)$:

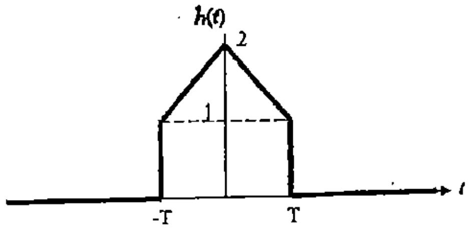
► $\boxed{x(t)=x(t+T)=x(t\pm kT),\ k\in\mathbb{Z}}$

5-12-2008

SEPTIEMBRE 2007

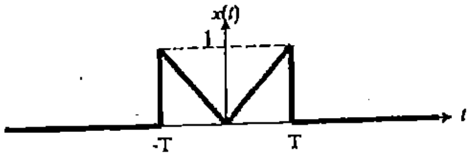
Ejercicio 2

Considere la siguiente respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante:



a) Calcule la transformada de Fourier de $h(t)$.

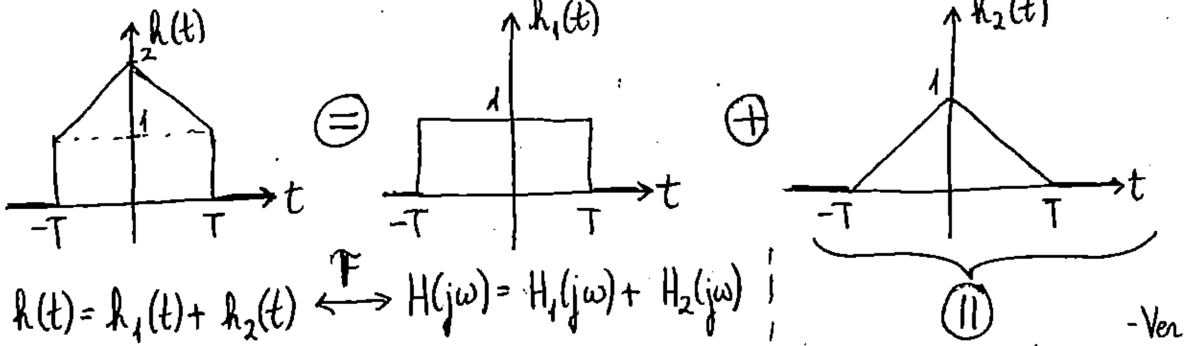
b) Sea la señal $x(t)$ representada a continuación. Calcule $Y(j\omega)$, donde $y(t)=x(t)*h(t)$.



c) Considere la señal $x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-KT)$. Calcule la señal $y_p(t)=x_p(t)*h(t)$.

---

a)



- $h(t)=h_1(t)+h_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)=H_1(j\omega)+H_2(j\omega)$

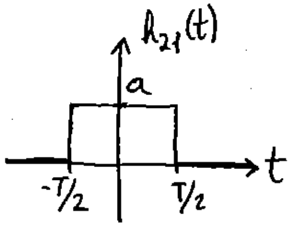
- $h_1(t)=\begin{cases}1, & |t|<T\\ 0, & \text{resto}\end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega)=\dfrac{2\,\text{sen}\,\omega T}{\omega}$

- $h_2(t)=h_{21}(t)*h_{22}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_2(j\omega)=H_{21}^2(j\omega)=\dfrac{4\,\text{sen}^2(\omega\frac{T}{2})}{\omega^2 T}$

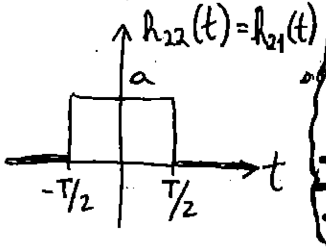
- $h_{21}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{T}}, & |t|<\dfrac{T}{2}\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$

$$H_{21}(j\omega)=\frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{T}{2})}{\omega\sqrt{T}}$$

- Finalmente: $\boxed{H(j\omega)=\dfrac{2\,\text{sen}\,\omega T}{\omega}+\dfrac{4\,\text{sen}^2(\omega\frac{T}{2})}{\omega^2 T}}$ //



$*$



-Ver T-1.10

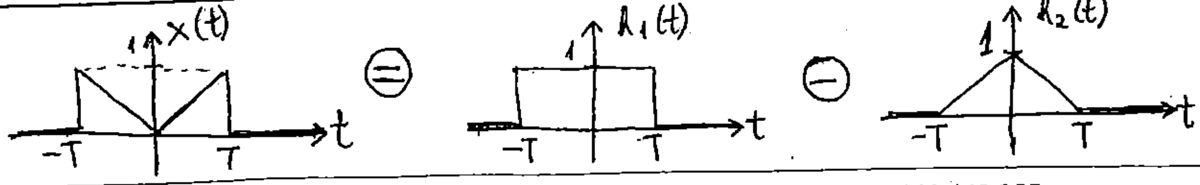
$T\cdot a\cdot a=1$,

$a^2=\frac{1}{T}$,

$\boxed{a=\frac{1}{\sqrt{T}}}$

Siempre que haya que descompones un triángulo que sea pulsos de la misma amplitud para facilitar las cosas

b)



SIGUE

SIGUE

15-11-2008

- $y(t) = x(t) * h(t) = [h_1(t) - h_2(t)] * [h_1(t) + h_2(t)]$

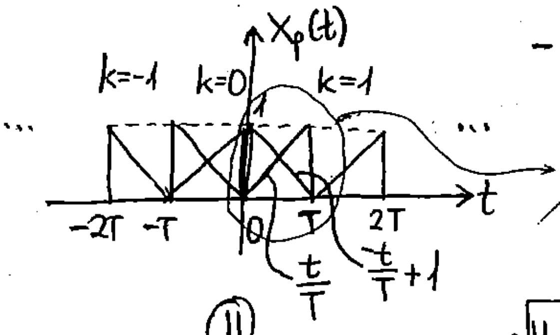
$\updownarrow \mathcal{F}$

- $\boxed{Y(j\omega)} = X(j\omega)H(j\omega) = [H_1(j\omega) - H_2(j\omega)] \cdot [H_1(j\omega) + H_2(j\omega)] = H_1^2(j\omega) - H_2^2(j\omega) =$

$$= \boxed{\frac{4\,\text{sen}^2\omega T}{\omega^2} - \frac{16\,\text{sen}^4(\omega\frac{T}{2})}{\omega^4 T^2}}$$

---

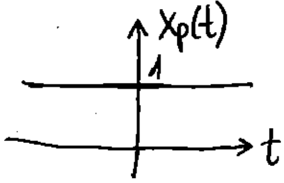
c) $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Vemos claramente que habrá solapamiento, pues hay réplicas cada T, y la longitud de $x(t)$ es 2T



- Del propio dibujo se ve que $x_p(t)$ es la función constante "1", pero por ser rigurosos y hacer cálculos:

$\frac{\cancel{t}}{\cancel{T}} - \frac{\cancel{t}}{\cancel{T}} + 1 = 1$ Ídem en las demás zonas

⑪



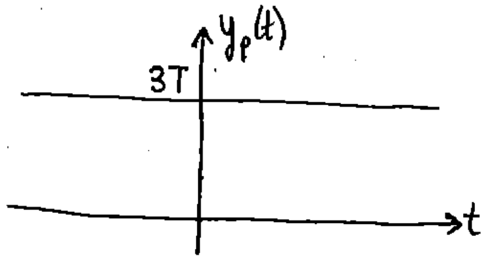
- $\boxed{y_p(t)} = x_p(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\underbrace{x(t-\tau)}_{1}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,d\tau =$

miramos directamente el área de $h(t)$

$= 2T + \frac{2T}{2} = \boxed{3T}\ \forall t$

área cuadrado

área triángulo



FEBRERO 2008 ✓

Ejercicio 2

Considere el sistema en tiempo continuo, definido por la relación siguiente

$$y(t) = \pi^2 \cdot x(t) + \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida. Suponiendo que

$$x(t) = (1 + \cos(\pi t)) \cdot (u(t+1) - u(t-1))$$

Se pide:

a) Determinar la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la señal $x(t)$. Representar gráficamente $X(j\omega)$.

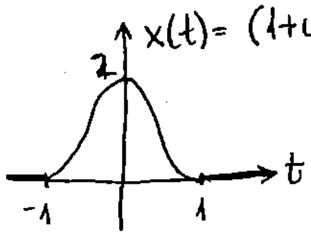
b) Determinar la transformada de Fourier $Y(j\omega)$ de la señal $y(t)$, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema y de $X(j\omega)$, simplificando el resultado.

c) Calcular la señal de salida $y(t)$.

---

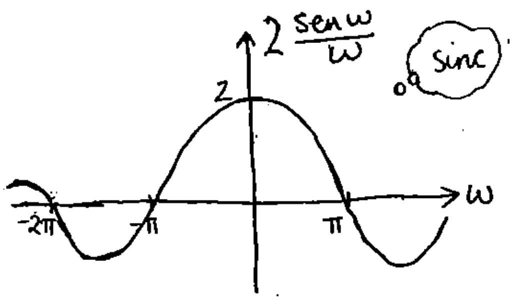
a)

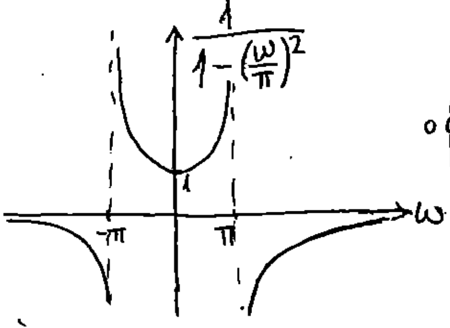
$$x(t) = (1+\cos\pi t)\,[u(t+1) - u(t-1)] = \begin{cases} 1+\cos\pi t \;,\; |t|<1 \\ 0 \;,\; |t|>1 \end{cases}$$



→ Hecho en P-7, aptdo d) (Ej 2 de Clase, T3)

$$\boxed{X(j\omega)} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} + \frac{\mathrm{sen}(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\mathrm{sen}(\omega+\pi)}{\omega+\pi} = \ldots = \boxed{\frac{2\pi^2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)} = 2\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega}\;\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2}} \in \mathbb{R}$$





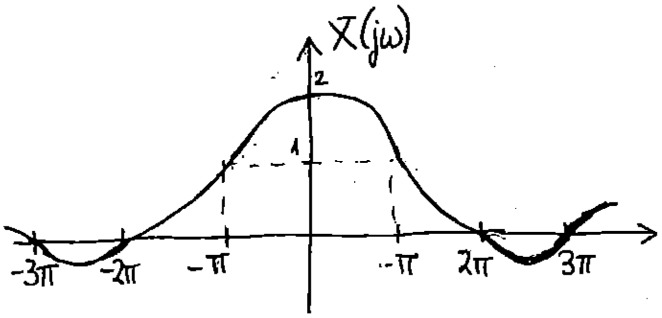
Es útil acordarse de la gráfica de esta función

CEROS: $\mathrm{sen}\,\omega = 0$, $\omega = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Asíntotas en $-\pi$ y π

$$\lim_{\omega\to 0} 2\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} = \{l'H\} = \lim_{\omega\to 0} \frac{2\cos\omega}{1} = 2$$

En $\omega = \pm\pi$ tengo indeterminación $[0\cdot\infty]$



$$\lim_{\omega\to\pi} X(j\omega) = \lim_{\omega\to\pi} \frac{2\pi^2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)} = \frac{2\pi^2}{1} \lim_{\omega\to\pi} \frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)}$$

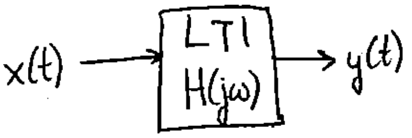
$$= \{l'H\} = 2\pi^2 \lim_{\omega\to\pi} \frac{\cos\omega}{\pi^2-3\omega^2} = \frac{\cancel{2\pi^2}\,(-1)}{-\cancel{2\pi^2}} = 1$$

Válido también para $\omega \to -\pi$

NOTA: Si en el examen nos liamos al representar ¡¡no perdamos tiempo y al siguiente apart

---

b)



No dicen que sea LTI pero en el enunciado dice que expresemos $Y(j\omega)$ como función de $X(j\omega)$ y $H(j\omega)$... Lo suponemos LTI, pero en caso de duda lo demostramos (es fácil en este caso)

SIGUE

15-12-2008

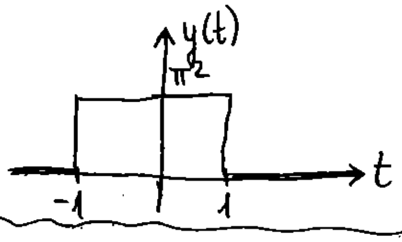
SIGUE $y(t)=\pi^2x(t)+\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)=\pi^2X(j\omega)+(j\omega)^2X(j\omega)\underset{\text{LTI}}{=}X(j\omega)H(j\omega)$

- $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\pi^2-\omega^2$
- $\boxed{Y(j\omega)}=X(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{2\pi^2\operatorname{sen}\omega}{\omega\cancel{(\pi^2-\omega^2)}}\cancel{(\pi^2-\omega^2)}=\boxed{\pi^2\dfrac{2\operatorname{sen}\omega}{\omega}=2\pi^2\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)}$ //

---

c) 1ª idea → "La lógica"

- $\boxed{y(t)}=\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}=\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right\}=\pi^2\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}=\begin{cases}\pi^2, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}=\boxed{\pi^2[u(t+1)-u(t-1)]}$



2ª idea → No nos ha salido el aptdo a) o no estamos seguros... ¡No arrastramos el error!

- $y(t)=\pi^2x(t)+\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$, $x(t)=(1+\cos\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]$
- $\dfrac{dx(t)}{dt}=(-\pi\operatorname{sen}\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]+(1+\cos\pi t)[\delta(t+1)-\delta(t-1)]=$

$$=(-\pi\operatorname{sen}\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]+\underbrace{(1+\cos\pi t)\delta(t+1)}_{(1+\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1})\cancel{\delta(t+1)}\to 0}-\underbrace{(1+\cos\pi t)\delta(t-1)}_{(1+\underbrace{\cos\pi}_{-1})\cancel{\delta(t-1)}\to 0}=$$

$$=-\pi\operatorname{sen}\pi t[u(t+1)-u(t-1)]$$

- $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=-\pi^2\cos\pi t[u(t+1)-u(t-1)]-\pi\operatorname{sen}\pi t[\delta(t+1)-\delta(t-1)]=$

$$=-\pi^2\cos\pi t[u(t+1)-u(t-1)]-\underbrace{\pi\operatorname{sen}\pi t\,\delta(t+1)}_{\pi\underbrace{\operatorname{sen}(-\pi)}_{0}\cancel{\delta(t+1)}\to 0}+\underbrace{\pi\operatorname{sen}\pi t\,\delta(t-1)}_{\pi\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0}\cancel{\delta(t-1)}\to 0}=$$

$$=-\pi^2\cos\pi t[u(t+1)-u(t-1)]$$

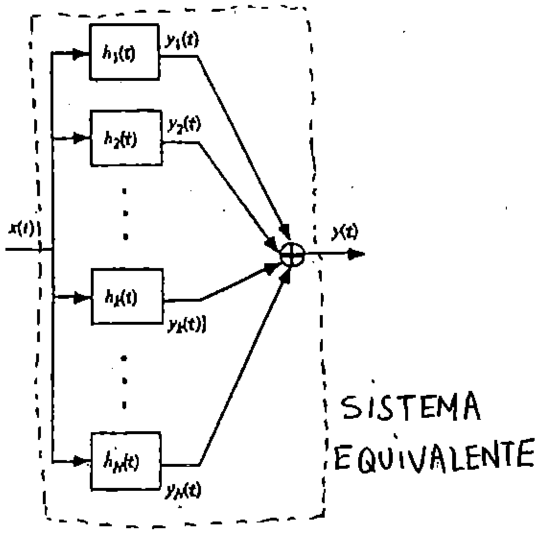
- Finalmente: $\boxed{y(t)}=\pi^2(1+\cancel{\cos\pi t})[u(t+1)-u(t-1)]-\cancel{\pi^2\cos\pi t[u(t+1)-u(t-1)]}=$

$$=\boxed{\pi^2[u(t+1)-u(t-1)]}$$ //

5-12-2008

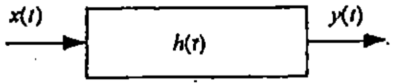
SEPTIEMBRE 1999

1. Suponga un sistema lineal e invariante que posee la siguiente estructura:



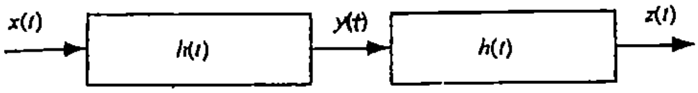
siendo $h_i(t)=\begin{cases}1 & (i-1)t_1 \le t < it_1 \\ 0 & \text{resto}\end{cases}$, $i=1, 2, \dots, N$

a) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema equivalente $h(t)$ expresando el resultado en función de N y t_1. Represente su módulo.



b) Calcule $y(t)$ cuando la entrada es $x(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$, a real

c) Dado el esquema de la figura siguiente, demuestre que cuando la entrada es $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi}{Nt_1}t\right)$, la señal de salida $z(t)$ toma un valor constante. Determine dicha constante en función de los coeficientes A_n, de N y t_1.



---

a) • $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_k(t) + \dots + y_N(t) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t) + \dots + x(t) * y_N(t) =$

$$= x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t)\right) = x(t) * h(t)$$

- El sistema equivalente es LTI, pues su salida se puede expresar como la convolución de la entrada con otra señal genérica $h(t)$, la respuesta al impulso:

$$\boxed{h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)}$$ Respuesta al impulso del sistema equivalente

- Si tenemos en cuenta que:

$$h_i(t) = \begin{cases} 1 \text{ ,, } (i-1)t_1 \le t < it_1 \\ 0 \text{ ,, resto} \end{cases}$$ y lo representamos:

SIGUE

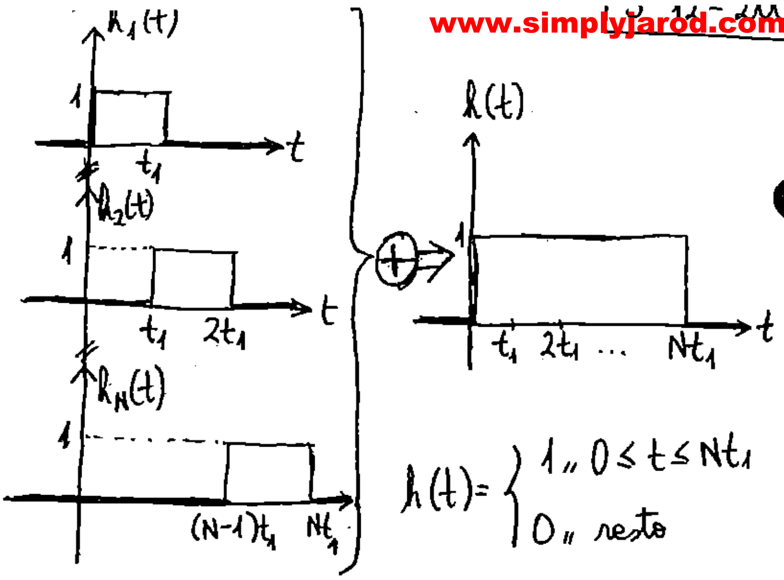
SIGUE

$$h_1(t)=\begin{cases}1 \,,\; 0\le t\le t_1\\ 0\,,\; \text{resto}\end{cases}$$

$$h_2(t)=\begin{cases}1 \,,\; t_1\le t\le 2t_1\\ 0\,,\; \text{resto}\end{cases}$$

...

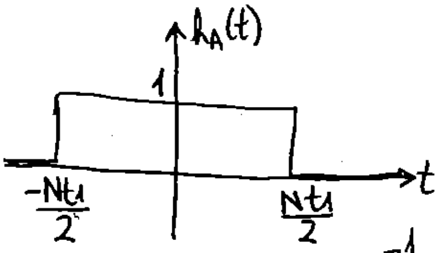
$$h_N(t)=\begin{cases}1 \,,\; (N-1)t_1\le t\le Nt_1\\ 0\,,\; \text{resto}\end{cases}$$



$$h(t)=\begin{cases}1 \,,\; 0\le t\le Nt_1\\ 0\,,\; \text{resto}\end{cases}$$

- La TF de un pulso es muy sencilla:

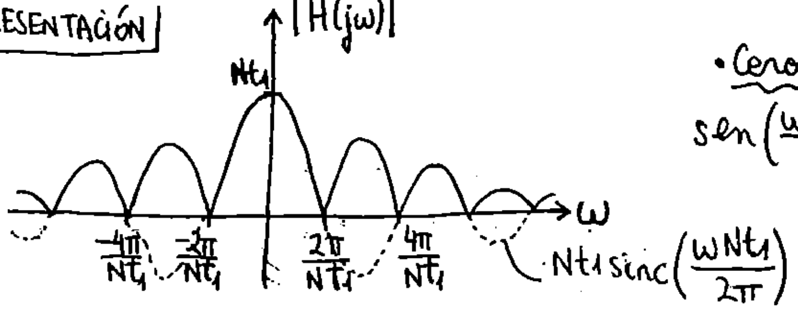
· Sea: $h_A(t)=\begin{cases}1 \,,\; |t|\le \frac{Nt_1}{2}\\ 0\,,\; \text{resto}\end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_A(j\omega)=\frac{2\,\text{sen}(\omega\frac{NT_1}{2})}{\omega}=NT_1\,\text{sinc}\left(\frac{NT_1}{2\pi}\omega\right)$



$$\cdot\, h(t)=h_A\left(t-\frac{Nt_1}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \boxed{H(j\omega)}=H_A(j\omega)e^{-j\omega\frac{Nt_1}{2}}=\boxed{\frac{2e^{-j\omega\frac{Nt_1}{2}}\,\text{sen}(\omega\frac{Nt_1}{2})}{\omega}=Nt_1 e^{-j\omega\frac{Nt_1}{2}}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega Nt_1}{2\pi}\right)}$$

$$\cdot\,\boxed{|H(j\omega)|}=\cancel{\left|e^{-j\omega\frac{Nt_1}{2}}\right|}^{1}\left|2\,\frac{\text{sen}(\omega\frac{Nt_1}{2})}{\omega}\right|=\boxed{2\left|\frac{\text{sen}(\omega\frac{Nt_1}{2})}{\omega}\right|=Nt_1\left|\text{sinc}\left(\frac{\omega Nt_1}{2\pi}\right)\right|}$$

REPRESENTACIÓN



· Ceros:

$$\text{sen}\left(\frac{\omega NT_1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\omega Nt_1}{2}=k\pi \Leftrightarrow \omega=\frac{2k\pi}{Nt_1}\,,$$

$$k\in\mathbb{Z}-\{0\}$$

---

b) $x(t)=e^{-at}u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$, $a>0$

$$X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega} \qquad H(j\omega) \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)\,H(j\omega)$$

($x(t)\downarrow\mathcal{F}\; X(j\omega)$; $h(t)\downarrow\mathcal{F}\; H(j\omega)$; $y(t)\uparrow\mathcal{F}^{-1}\; Y(j\omega)$)

1ª idea . "Dominio frecuencia"

$$\cdot\, Y(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}\cdot\frac{2e^{-j\omega\frac{Nt_1}{2}}\,\text{sen}(\omega\frac{Nt_1}{2})}{\omega}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}(\ldots)$$

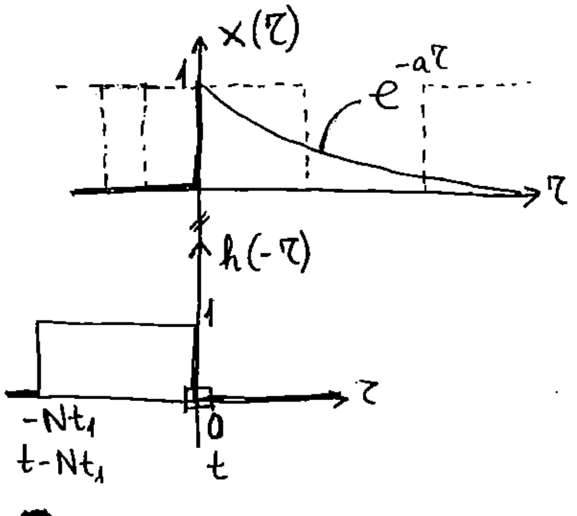
Esta transformada inversa no es nada fácil de hallar... Mejor buscamos otra manera ...

CONTINÚA

CONTINÚA E-28

2ª idea: "Dominio tiempo"

$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow$ CONVOLUCIÓN MÉTODO GRÁFICO



- Caso $t<0$ $y(t)=0$
- Caso $\left.\begin{matrix} t>0 \\ t-Nt_1<0 \end{matrix}\right\}$ $0<t<Nt_1$: $y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau=\frac{-1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_0^t=$

$$=\frac{1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_t^0=\frac{1}{a}\left[\cancel{e^0}^{1}-e^{-at}\right]=\frac{1}{a}\left[1-e^{-at}\right]$$

- Caso $t-Nt_1>0 \Leftrightarrow t>Nt_1$: $y(t)=\int_{t-Nt_1}^{t_1}e^{-a\tau}d\tau=$

$$=\frac{1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_t^{t-Nt_1}=\frac{1}{a}\left[e^{-a(t-Nt_1)}-e^{-at}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}e^{-at}\left[e^{aNt_1}-1\right]$$

» En resumen:

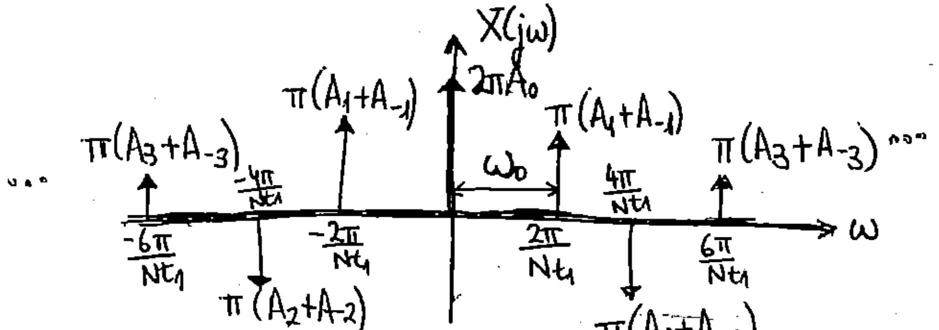
$$\boxed{y(t)=\begin{cases} 0\ ,\ t<0 \\ \frac{1}{a}[1-e^{-at}]\ ,\ 0<t<Nt_1 \\ \frac{1}{a}e^{-at}[e^{aNt_1}-1]\ ,\ t>Nt_1 \end{cases} = \frac{1}{a}[1-e^{-at}](u(t)-u(t-Nt_1))+\ldots \\ \ldots+\frac{1}{a}e^{-at}[e^{aNt_1}-1]\,u(t-Nt_1)}$$

c)

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{2n\pi}{Nt_1}t\right)\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}LTI\\h(t)\end{matrix}}\xrightarrow{y(t)}\boxed{\begin{matrix}LTI\\h(t)\end{matrix}}\longrightarrow z(t)=x(t)*h(t)*h(t)$$

- $Z(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)\cdot H(j\omega)=X(j\omega)\cdot H^2(j\omega)$
- $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\boxed{X(j\omega)}=\mathcal{F}\{x(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\cdot\mathcal{F}\left\{\cos\left(\frac{2\pi n}{Nt_1}t\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\pi\left[\delta\left(\omega+n\frac{2\pi}{Nt_1}\right)+\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{Nt_1}\right)\right]$

$$=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\pi\,\delta\left(\omega+n\frac{2\pi}{Nt_1}\right)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\pi\,\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{Nt_1}\right)}$$



NOTA: $X(j\omega)$ es un espectro de deltas equiespaciadas $\Rightarrow$ $x(t)$ es periódica: $\frac{\cancel{2\pi}}{Nt_1}=\frac{\cancel{2\pi}}{T}\Rightarrow \boxed{T=Nt_1}$

SIGUE

15-12-2008

SIGUE $\Rightarrow$ $Z(j\omega) = X(j\omega)\, H^2(j\omega)$; Del aptdo a) sabemos que $H(j\omega)$ tiene sus ceros en $\frac{2k\pi}{Nt_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, justo donde $X(j\omega)$ tiene sus deltas, a excepción de la componente continua

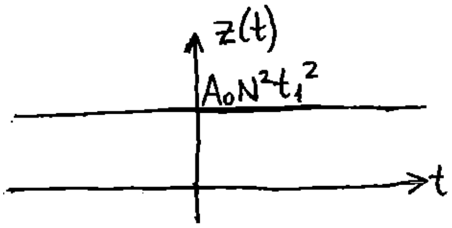
Ver dibujos

$$\gg Z(j\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega) \cdot H^2(j\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega) \cdot H^2(j0) = 2\pi A_0 N^2 t_1^2 \delta(\omega) \; ;$$

$f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$

$\downarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$\cdot \boxed{z(t)} = \mathcal{F}^{-1}\{Z(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi A_0 N^2 t_1^2 \delta(\omega)\} = A_0 N^2 t_1^2 \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\{2\pi \delta(\omega)\}}_{1} = \boxed{A_0 N^2 t_1^2} \,//$$



SEPTIEMBRE 2003

IMPORTANTE

2. Considere una señal $x(t)$ definida mediante la siguiente expresión:

$$x(t) = \begin{cases} |t| & |t| < T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde T_0 es un parámetro real y positivo arbitrario.

a) Calcule la expresión de la su transformada de Fourier $X(jw)$.

b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $y(t)$, $Y(jw)$, si $y(t)$ está definida como:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - T_0 - kT_1)$$

donde $T_1 >> T_0$ es un parámetro real y positivo. Calcule los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier denotados como $\{a_k\}$. Exprese el resultado en función de $X(jw)$. (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (a)).

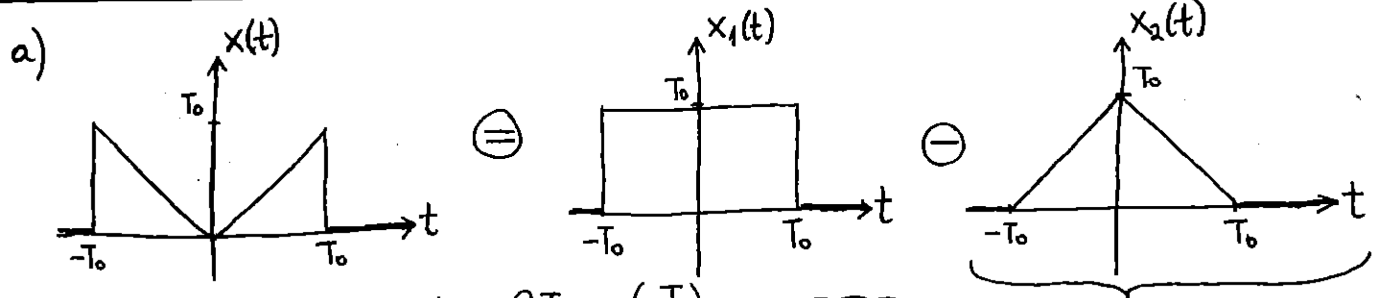
c) Si dicha señal pasa por un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}\right)$$

donde W es un parámetro positivo arbitrario. Determine la relación que deben cumplir T_1 y W para que se anulen todos los armónicos de orden superior al segundo. Calcule la expresión de los coeficientes no nulos $\{b_k\}$ $k = -2, -1, 0, 1, 2$, expresándolos en función de los coeficientes de la entrada $\{a_k\}$ (Nota: no es necesario sustituir el resultado de (b)).

---

a)



- $X_1(j\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = \dfrac{2T_0\,\text{sen}(\omega T_0)}{\omega}$;

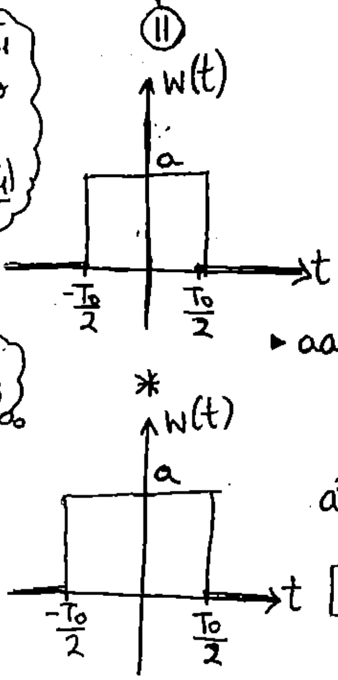
- $X_2(j\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\{w(t) * w(t)\} =$

$$= W(j\omega)\cdot W(j\omega) = W^2(j\omega) =$$

$$= \left[\frac{2\,\text{sen}\left(\omega\frac{T_0}{2}\right)}{\omega}\right]^2 = \frac{4\,\text{sen}^2\left(\omega\frac{T_0}{2}\right)}{\omega^2};$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ ,, } |t| < T_1 \\ 0 \text{ ,, resto} \end{cases} \quad \updownarrow \mathcal{F} \quad X(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

Ver T 1.12.2; P-1



$$\blacktriangleright\ aa\left(\frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right)\right) = T_0 \Downarrow a^2 \cancel{T_0} = \cancel{T_0} \Downarrow \boxed{a = 1}$$

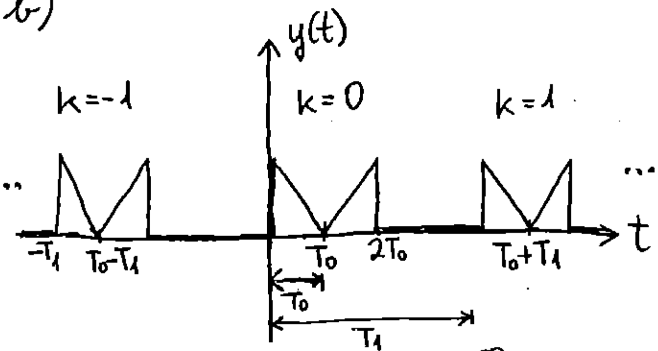
- Finalmente:

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\boxed{X(j\omega)} = X_1(j\omega) - X_2(j\omega) = \boxed{\frac{2T_0\,\text{sen}(\omega T_0)}{\omega} - \frac{4\,\text{sen}^2\left(\omega\frac{T_0}{2}\right)}{\omega^2}} //$$

b)



• $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-T_0-kT_1)$, $T_1 >> T_0$

• y(t) periódica de periodo T_1

• $\boxed{Y(j\omega)} = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-T_0-kT_1)\} = \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-T_0) * \delta(t-kT_1)\} =$

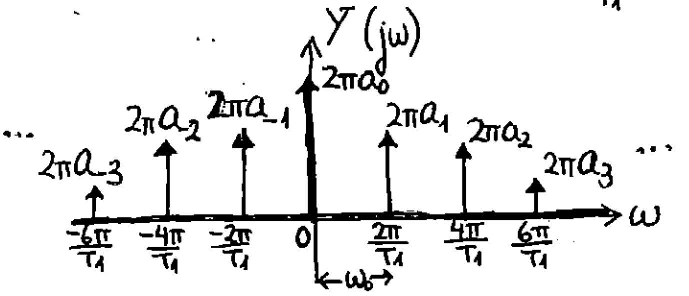
$$= \mathcal{F}\{x(t-T_0) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_1)\} = \mathcal{F}\{x(t-T_0)\}\cdot\mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_1)\} =$$

$$= X(j\omega)\cdot e^{-j\omega T_0}\cdot\frac{2\pi}{T_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{X(j\omega)e^{-j\omega T_0}}{T_1}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}) =$$

$$\boxed{= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{X(j\frac{2\pi}{T_1}k)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_0}}{T_1}}_{a_k}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_1}) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_1})}$$

$\underline{\text{DSF}}$. $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \underset{\omega_0=\frac{2\pi}{T_1}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_1}t}$

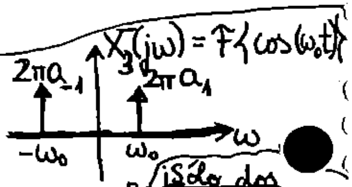
• $\boxed{a_k = \frac{X(j\frac{2\pi}{T_1}k)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_0}}{T_1}}$



- Espaciado entre las deltas: $\frac{2\pi}{T_1}$

OJO: La TF de una señal periódica es siempre un conjunto de deltas equiespaciadas

NOTA: Si una TF tiene alguna(s) de sus deltas con amplitud "0" no significa que no sea la TF de una señal periódica EJ →



¡Sólo dos deltas, pero x(t) periódica!

---

c) **RECORDATORIO**

k=0 COMPONENTE CONTINUA ; k=±1 COMPONENTE FUNDAMENTAL/ PRIMER ARMÓNICO ; k=±2 SEGUNDO ARMÓNICO ; k=±3 TERCER ARMÓNICO ...

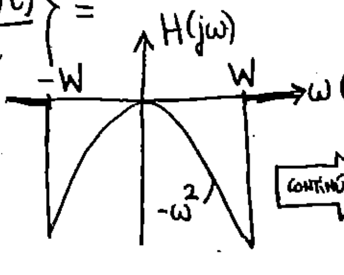
$$y(t)\longrightarrow\boxed{h(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{sen(Wt)}{\pi t}\right]}\longrightarrow$$

$z(t) = y(t) * h(t)$

$Z(j\omega) = Y(j\omega)\cdot H(j\omega)$ $\mathcal{F}$

• $\boxed{H(j\omega)} = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{sen(Wt)}{\pi t}\right]\} = (j\omega)^2\mathcal{F}\{\frac{sen(Wt)}{\pi t}\} =$

$$= (-\omega^2)\cdot\begin{cases}1 , |\omega|<W\\ 0 , \text{resto}\end{cases} = \boxed{\begin{cases}-\omega^2 , |\omega|<W\\ 0 , \text{resto}\end{cases}}$$



CONTINÚA

CONTINÚA → E-29

- Está claro por el dibujo de $Y(j\omega)$ y $H(j\omega)$ que para que se eliminen los armónicos a partir de $k=\pm 3$ pero se conserven los anteriores ha de cumplirse: $\boxed{\frac{4\pi}{T_1} < W < \frac{6\pi}{T_1}}$

- Además sea cual sea W este sistema se "carga" la componente continua, pues $H(j\omega)\big|_{\omega=0} = 0$

- $Z(j\omega) = Y(j\omega)H(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T_1}) \cdot H(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(a_k H(jk\frac{2\pi}{T_1})\right)}_{b_k \text{ del DSF de } z(t)} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T_1})$

- $\boxed{b_k} = a_k H(jk\frac{2\pi}{T_1}) = a_k(-\omega^2)\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{T_1}} = \boxed{a_k\left(-\frac{4\pi^2 k^2}{T_1^2}\right)} \quad \boxed{k=\{\pm 1, \pm 2\}}$

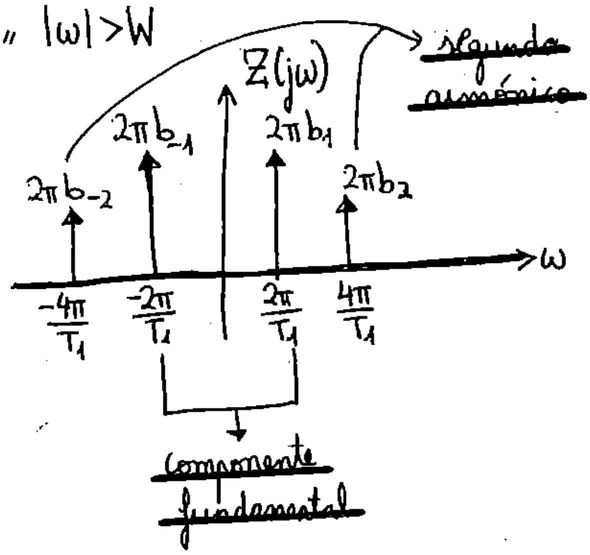
$$H(j\omega) = \begin{cases} -\omega^2 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

- $\boxed{b_0} = a_0 \underbrace{H(j0)}_{0} = \boxed{0}$

- OBS $\begin{Bmatrix} b_1 = b_{-1} \\ b_2 = b_{-2} \end{Bmatrix}$ si $\begin{Bmatrix} a_1 = a_{-1} \\ a_2 = a_{-2} \end{Bmatrix}$

$$\Updownarrow$$

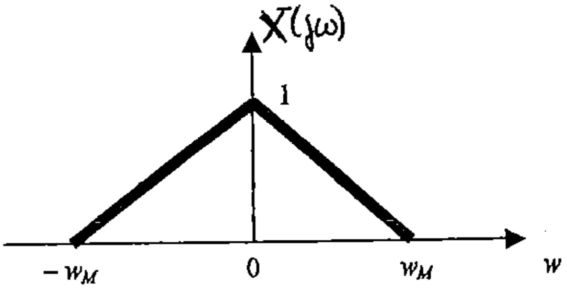
$x(t) \in \mathbb{R}$



SEPTIEMBRE 2002

✓ (Se entiende aún mejor después de ver muestreo en T5)

2. Considere una señal x(t), cuyo espectro X(jw) es la función triangular de la figura:



a) Razonando en el dominio del frecuencia, y explicando claramente los pasos seguidos, demuestre la siguiente igualdad, calculando asimismo el valor necesario de K para que la igualdad se cumpla:

$$x(t) = K\left[x(t)\cos^2(w_0 t)\right] * \left[\frac{\text{sen}(w_1 t)}{\pi t}\right]$$

siendo $w_0 > 2w_M$ y $w_1 = 2w_M$.

Indique también el margen de valores que puede tener, en general, w_1 para que se siga cumpliendo la igualdad anterior.

b) Suponga que la igualdad que se plantea ahora es:

$$x(t) = K\left[x(t)\cos^2(w_0 t)\right] * h_1(t) * \left[\frac{\text{sen}(w_1 t)}{\pi t}\right] * h_2(t)$$

siendo $w_0 > 2w_M$ y $w_1 = 2w_M$, y $h_1(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ y real.

Obtenga el valor de K, la respuesta en frecuencia $H_2(jw)$ y su correspondiente respuesta al impulso $h_2(t)$ para que se cumpla la igualdad anterior.

---

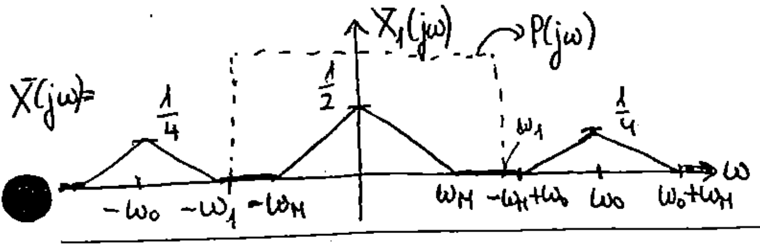
a) $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{K[x(t)\cos^2(\omega_0 t)] * \left[\frac{\text{sen}\,\omega_1 t}{\pi t}\right]\right\} = K\underbrace{\mathcal{F}\{x(t)\cos^2\omega_0 t\}}_{X_1(j\omega)} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{\text{sen}\,\omega_1 t}{\pi t}\right\}}_{P(j\omega)} \stackrel{\bullet}{=}$

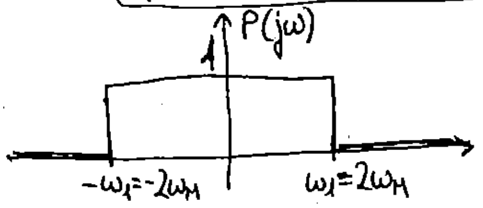
$\boxed{X_1(j\omega)} \stackrel{\bullet}{=} X(j\omega) * \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} * \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1\cancel{\pi^2}}{4\cancel{\pi^2}} X(j\omega) * [\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] * \ldots$

$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$\ldots * [\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{4} X(j\omega) * [\delta(\omega+\omega_0) * \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) * \delta(\omega-\omega_0) + \ldots$

$\ldots + \delta(\omega-\omega_0) * \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) * \delta(\omega-\omega_0)] \stackrel{\bullet}{=} \boxed{\frac{1}{4} X(j\omega) * [\delta(\omega+2\omega_0) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega-2\omega_0)]}$





$$= \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

SIGUE

SIGUE ⟩ Estamos filtrando paso bajo la señal $x_1(t)$. Nos interesa quedarnos con el triángulo de en medio y escalarlo por 2 para recuperar la señal original $X(j\omega)$. A estas alturas queda clara la igualdad y sólo queda determinar "K" y la condición de filtrado:

- $\boxed{K=2}$ Pues hay que escalar x2 para recuperar la amplitud original
- ZOOM

Ha de cumplirse: $\omega_1 = 2\omega_H < \omega_0 - \omega_H \Rightarrow \boxed{\omega_0 > 3\omega_H} = \frac{3}{2}\omega_1$

→ El triángulo no puede traspasar el filtro por la izquierda $\Rightarrow \boxed{\omega_1 < \frac{2}{3}\omega_0}$ - Para filtrar correctamente (Al ser la señal simétrica el triángulo izquierdo tampoco "entrará" en el filtro si se cumple esta condición)

---

b) $x(t) = K\{x(t)\cos^2\omega_0 t\} * h_1(t) * \left[\frac{\text{sen}\,\omega_1 t}{\pi t}\right] * h_2(t) = \underbrace{K\{x(t)\cos^2\omega_0 t\} * \left[\frac{\text{sen}\,\omega_1 t}{\pi t}\right]}_{K\frac{x(t)}{2}\text{ por el aptdo a)}} * h_1(t) * h_2($

$$= \frac{K}{2}\, x(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right) = \frac{\cancel{K}}{\cancel{2}}\, x(t) * \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{K}}\,\delta(t)\right) = x(t)$$

Para que se cumpla la igualdad.

- Dando el valor a $\boxed{K=2}$, nos queda que:

- $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega)\, H_2(j\omega) = 1 \Rightarrow \boxed{H_2(j\omega) = \frac{1}{H_1(j\omega)} = a + j\omega}$

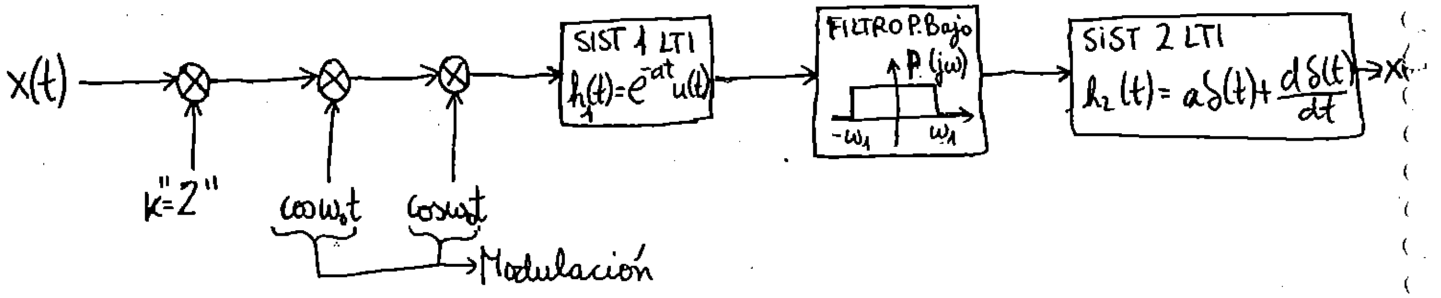
$e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$

- $\boxed{h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(j\omega)\} = a\mathcal{F}^{-1}\{1\} + \mathcal{F}^{-1}\{j\omega \cdot 1\} = a\,\delta(t) + \frac{d\,\delta(t)}{dt}}$

NOTA 1: No nos escandalicemos por la $\frac{d\,\delta(t)}{dt}$, es una función rara ("DOBLETE UNIDAD") pero que no tenemos que saber nada de ella (y puede salir).

NOTA 2: $h_2(t)$ es la respuesta al impulso del sistema INVERSO al que tuviera a $H_1(j\omega)$ como su respuesta en frecuencia (ambos LTI).

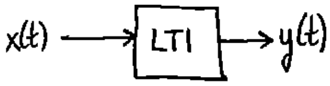
NOTA 3: El esquema real probable de esta sucesión de sistemas sería:



FEBRERO 2004 ✓

2. Sea el sistema en tiempo continuo lineal e invariante definido por la siguiente ecuación:

$$y(t)+Ay(t-n)=x(t)-A^2x(t-2n)$$



siendo n un valor entero y A un valor arbitrario real. $n\in\mathbb{Z}$ $A\in\mathbb{R}$

(a) Calculando la respuesta en frecuencia, demuestre que el sistema anterior es equivalente a éste:

$$y(t)=x(t)-Ax(t-n)$$

Calcule también su respuesta al impulso.

(b) A partir del resultado obtenido en el apartado (a), demuestre razonando en el dominio de la frecuencia, que para un valor determinado de A (que deberá calcular), la salida del sistema para las señales de entrada de la forma:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{n}t}$$

es $y(t)=0$.

Obtenga otro valor de A de forma que la salida para la misma entrada $x(t)$ sea $y(t)=-x(t)$.

(c) Para la entrada $x(t)$ definida en el apartado (b), encuentre la relación general existente entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$. Exprese la relación exclusivamente en función de $x(t)$ (y no de sus versiones retardadas o adelantadas), $y(t)$ y A.

---

a) $y(t)+Ay(t-n)=x(t)-A^2x(t-2n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)+Ae^{-j\omega n}Y(j\omega)=X(j\omega)-A^2e^{-j\omega 2n}X(j\omega);$

- $\boxed{H(j\omega)}=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\dfrac{1-A^2e^{-j\omega 2n}}{1+Ae^{-j\omega n}}\underset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}{=}\dfrac{\cancel{(1+Ae^{-j\omega n})}(1-Ae^{-j\omega n})}{\cancel{1+Ae^{-j\omega n}}}=\boxed{1-Ae^{-j\omega n}}$

- $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=X(j\omega)[1-Ae^{-j\omega n}]=X(j\omega)-Ae^{-j\omega n}X(j\omega);$

  $\updownarrow\mathcal{F}^{-1}$ $\uparrow\mathcal{F}^{-1}$

  $\boxed{y(t)=x(t)-Ax(t-n)}$ cqd//

- $\boxed{h(t)}=\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}=\underset{\text{también}}{y(t)\big|_{x(t)=\delta(t)}}=\boxed{\delta(t)-A\delta(t-n)}$

DSF de $x(t)$ periódica: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{n}t}$; $\frac{2\pi}{n}=\omega_0$; $n=$ periodo de $x(t)$; $X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega-k\frac{2\pi}{n})$

i) Queremos: $\boxed{y(t)=0} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)=0$;

$f(\omega)\,\delta(\omega-\omega_1)=f(\omega_1)\,\delta(\omega-\omega_1)$

$$\boxed{0}\overset{\text{DATO}}{=}Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\tfrac{2\pi}{n})\cdot\left[1-Ae^{-j\omega n}\right]\overset{\downarrow}{=}$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\tfrac{2\pi}{n})\left[1-A\underbrace{e^{-jk\frac{2\pi}{\cancel{n}}\cancel{n}}}_{1}\right]=\boxed{\underbrace{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\tfrac{2\pi}{n})}_{\neq 0 \left(\substack{\text{en general}\\ X(j\omega)\neq 0}\right)}[1-A]}\Rightarrow\boxed{A=1}$$

[*]

ii) Queremos: $\boxed{y(t)=-x(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)=-X(j\omega)$;

$[*]\Rightarrow \boxed{-X(j\omega)}=Y(j\omega)=\boxed{X(j\omega)\,[1-A]}\Rightarrow 1-A=-1\Rightarrow\boxed{A=2}$

---

c) ¿ $f=f(x,y,A)$? ($x(t)$ a secas, sin versiones adelantadas ni retardadas)

$[*]\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)\,[1-A]\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}\boxed{y(t)=x(t)\,[1-A]}$

JUNIO 2004

2. Considera el sistema LTI y causal definido por la relación:

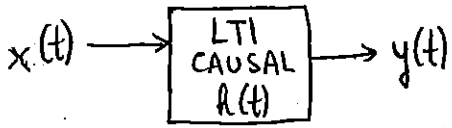
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

donde $x(t)$ es la señal de entrada e $y(t)$ es la señal de salida.

(a) Determine la respuesta en frecuencia del sistema. Calcule y dibuje las respuestas en amplitud y en fase.
(b) Determine la respuesta al impulso.
(c) Si $x(t)$ es una señal periódica de periodo T, cuyos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son $a_k, k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$ determine la señal de salida $y(t)$ y su potencia media.

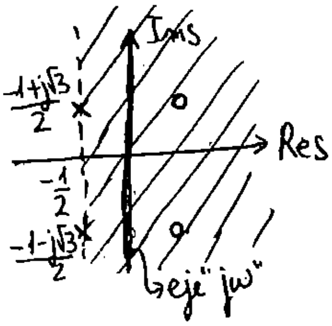
---

a) Al pedir $H(j\omega)$ se supone que ésta existe, pero usemos Laplace para practicar:



- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s)+sY(s)+Y(s)=s^2X(s)-sX(s)+X(s)$
- $\boxed{H(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \boxed{\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1}} = \left\{\begin{matrix}\text{FUNCIÓN}\\ \text{TRANSFERENCIA}\end{matrix}\right\} = \frac{\left(s-\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s+\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)}$ • Ceros: $s=\frac{1\pm j\sqrt{3}}{2}$ • Polos: $s=\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{Re}\{\text{POLOS}\} = \frac{-1}{2} = a$

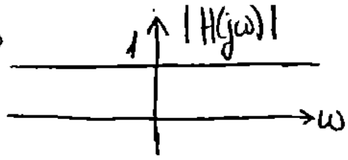


- Posibles ROC:
  - $\mathrm{Re}[s] < \frac{-1}{2}$ Sist anticausal, no estable
  - $\boxed{\mathrm{Re}[s] > \frac{-1}{2}}$ Sist causal, estable
- La ROC incluye el eje "jω" ⇒ sist estable ⇒ ∃ TF que cumple: $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ (como ya digo, nos podríamos haber ahorrado palabrería y haber calculado $H(j\omega)$ directamente)

- $\boxed{H(j\omega)} = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{(j\omega)^2-j\omega+1}{(j\omega)^2+j\omega+1} = \boxed{\frac{-\omega^2-j\omega+1}{-\omega^2+j\omega+1}}$ — $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$
- $|H_1(j\omega)| = +\sqrt{(1-\omega^2)^2+(-\omega)^2} = +\sqrt{1+\omega^4-2\omega^2+\omega^2} = +\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}$
  $|H_2(j\omega)| = +\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2} = +\sqrt{1+\omega^4-\omega^2}$
  $\Bigg\}\ \boxed{|H(j\omega)|} = \left|\frac{H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)}\right| = \frac{|H_1(j\omega)|}{|H_2(j\omega)|} = \boxed{1}$
- $\arg\{H_1(j\omega)\} = \mathrm{arctg}\frac{-\omega}{1-\omega^2} = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{1-\omega^2}$ ← arctg IMPAR ("tg" es impar, las inversas de impares son impares)
  $\arg\{H_2(j\omega)\} = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{1-\omega^2}$
  $\Bigg\}\ \arg\{H(j\omega)\} = \arg\left\{\frac{H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)}\right\} = \arg\{H_1(j\omega)\} - \arg\{H_2(j\omega)\} = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{1-\omega^2} - \mathrm{arctg}\frac{\omega}{1-\omega^2} = \boxed{-2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{1-\omega^2}}$

SIGUE ⇒

SIGUE



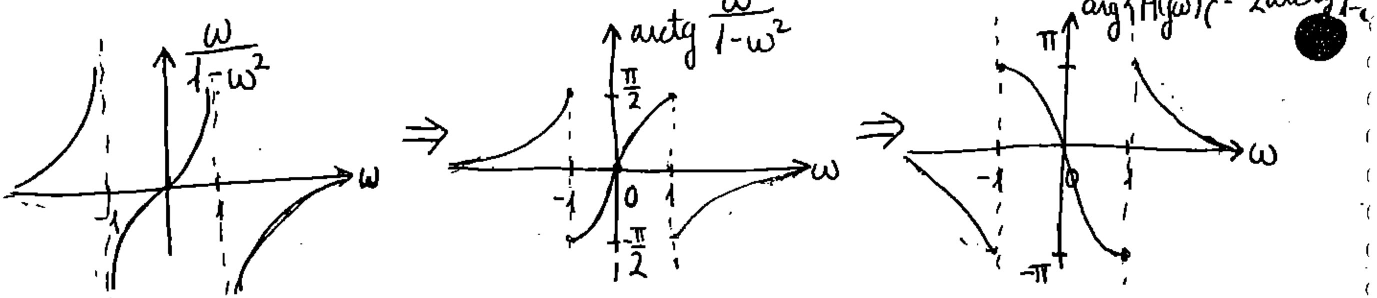
$\therefore \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = \infty \Leftrightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

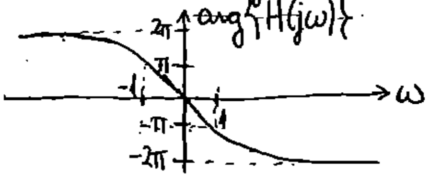
$\Rightarrow \operatorname{arctg} 0 = 0$

$\operatorname{arctg} \infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ o

$\operatorname{arctg} x \in (-\pi, \pi]$



– NOTA: parece que hay saltos o discontinuidades en $\omega = \pm 1$ pero esto es debido a la definición del argumento entre $(-\pi, \pi]$. En realidad, en esos puntos está claro que $H(j\omega)$ es un número real negativo (de hecho, -1), y su argumento vale tanto π^- como $-\pi^+$. No existe, por tanto, tal discontinuidad en el argumento. De hecho, si no limitamos el argumento entre $(-\pi, \pi]$, la gráfica de $\arg\{H(j\omega)\}$ sería la de la derecha: (se observa claramente que no hay discontinuidad)



$$b)\ h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-\omega^2 - j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 1}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\omega^2}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\} + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\omega}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{-\omega^2 + j\omega +}\right.$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{\omega^2} & \omega^2 - j\omega - 1 \\ \ominus\ \cancel{\omega^2} \quad -j\omega - 1 & 1 \\ \hline \quad j\omega + 1 & \end{array}$$

$D = Cd + R$

$\Downarrow$

$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$

$$\overset{*}{=} \mathcal{F}^{-1}\left\{1 + \frac{j\omega + 1}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\} + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\omega}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{\omega^2 - j\omega -}\right.$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{1\} + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\omega}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\cancel{\frac{1}{\omega^2 - j\omega - 1}}\right\} + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\omega}{\omega^2 - j\omega}\right.$$

$$\ldots + \mathcal{F}^{-1}\left\{\cancel{\frac{-1}{-\omega^2 + j\omega + 1}}\right\} = \delta(t) + 2j\,\mathcal{F}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{\omega}{\omega^2 - j\omega - 1}\right\}}_{H_3(j\omega)} = \delta(t) + 2j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}} + \frac{j\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}} + \ldots\right.$$

$$\omega^2 - j\omega - 1 = \left(\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\omega = \frac{j \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{j \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega + \frac{j-\sqrt{3}}{2}} - \frac{j\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}}\right\} =$$

$$H_3(j\omega) = \frac{\omega}{\left(\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{A}{\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}} + \frac{B}{\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}}$$

$$A = \left(\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}\right)H_3(j\omega)\Big]_{\omega = \frac{j+\sqrt{3}}{2}} = \frac{j+\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{j}+\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{j}-\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{j+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3+j\sqrt{3}}{6}$$

$$B = \left(\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}\right)H_3(j\omega)\Big]_{\omega = \frac{j-\sqrt{3}}{2}} = \frac{j-\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{j}-\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{j}+\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{j-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{3-j\sqrt{3}}{6}$$

~~$= \delta(t) + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - \frac{j+\sqrt{3}}{2}}\right\} + j\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - \frac{j-\sqrt{3}}{2}}\right\} =$~~

~~$= \delta(t) + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j}{j\omega + \underbrace{\boxed{\frac{1-j\sqrt{3}}{2}}}_{a_1}}\right\}\left[j - \frac{\sqrt{3}}{3}\right] + \left[j + \frac{\sqrt{3}}{3}\right]\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j}{j\omega + \underbrace{\boxed{\frac{1+j\sqrt{3}}{2}}}_{a_2}}\right\} = \delta(t) + \ldots$~~ ~~$\operatorname{Re}\{a_1\}, \operatorname{Re}\{a_2\}$~~

~~$\ldots + j\left[j - \frac{\sqrt{3}}{3}\right]e^{-\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)t}u(t) + j\left[j + \frac{\sqrt{3}}{3}\right]e^{-\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)t}u(t) = \delta(t) + \left[-1 - j\frac{\sqrt{3}}{3}\right]e^{-t/2}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}u(t) + \ldots$~~

~~$\ldots + \left[-1 + j\frac{\sqrt{3}}{3}\right]e^{-t/2}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}u(t) = \delta(t) + e^{-t/2}u(t)\left[-\left(e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}j\left(-e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)\right] = \ldots$~~

CONTINÚA

~~$= \dots = h(t) = \delta(t) - e^{-t/2}u(t)\left[2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + j\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2j\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$;~~

~~$2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = 2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \cos\sqrt{3}\right.$~~

$\boxed{z} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{\pi}{6}}}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{12}{36}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\arg z = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{1}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

CONTINÚA E-32

$$\boxed{h(t)} = \dots = \delta(t) + 2j\left(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - j\frac{+\sqrt{3}}{2}}\right\} + 2j\left(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - j\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right\} =$$

$$= \delta(t) + 2j\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{\pi}{6}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j}{j\omega + \frac{1-j\sqrt{3}}{2}}\right\} + 2j\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j}{j\omega + \frac{1+j\sqrt{3}}{2}}\right\} =$$

$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} = \dots$
$\dots = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}}$

$$= \delta(t) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left[e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)t}u(t) + e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}\right)t}u(t)\right] =$$

$$= \delta(t) - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}u(t)\left[\underbrace{e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}_{e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}_{e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}}\right] = \quad \cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

$$= \delta(t) - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}u(t)\left[2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \boxed{\delta(t) - \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)u(t)}$$

---

c)

$$\begin{tikzcd} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \boxed{\begin{matrix}LTI\\ h(t)\end{matrix}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"] & y(t) = x(t) * h(t) \\ X(j\omega) = 2\pi\sum_{k=\infty}^{\infty} a_k\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) & H(j\omega) & Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \arrow[u, "\mathcal{F}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$

o ¡¡Por supuesto no vamos por este camino!!

$X(j\omega) = 2\pi\sum_{k=\infty}^{\infty} a_k\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$; $H(j\omega)$; $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$; $H(j\omega) = \frac{-\omega^2 - j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 1}$

$$\boxed{Y(j\omega)} = X(j\omega)H(j\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k}\delta(\omega - k\omega_0) = \boxed{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(\frac{-k^2\omega_0^2 - jk\omega_0 + 1}{-k^2\omega_0^2 + jk\omega_0 + 1}\right)\delta(\omega - k\omega_0)}$$

$f(\omega)\delta(\omega - \omega_0) = f(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$

$$\boxed{y(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(\frac{-k^2\omega_0 - jk\omega_0 + 1}{-k^2\omega_0^2 + jk\omega_0 + 1}\right)e^{jk\omega_0 t}} \quad \text{con} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{P_y} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|y(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|^2\,\cancel{|e^{jk\omega_0 t}|^2}^{1}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|^2\frac{1}{T}\underbrace{\int_{\langle T\rangle}dt}_{T} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|^2\frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2\underbrace{|H(jk\omega_0)|^2}_{\substack{1 \\ \text{(ver aptdo a)}}} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2}$$

15-12-2008

SEPTIEMBRE 2008

ÚNICO HASTA LA FECHA QUE PEDÍAN EXCLUSIVAMENTE LAPLACE ✓

2) Sea un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal caracterizado por su respuesta al impulso h(t) y su función de transferencia H(s) del cual se sabe que cuando la entrada es $x(t)=t\cos(\omega_0 t)u(t)$, la salida es $y(t)=\cos(\omega_0 t)u(t)$.

a) Calcule la transformada de Laplace de y(t) denotada como Y(s) especificando su región de convergencia.
b) Calcule la transformada de Laplace de x(t) denotada como X(s) especificando su región de convergencia. (Se recomienda usar el resultado de a) y aplicar propiedades)
c) Calcule H(s) especificando su región de convergencia y su correspondiente transformada inversa h(t).
d) Calcule la función g(t) como la transformada de Fourier inversa de $H(j\omega)$. Justifique por qué esta respuesta al impulso no coincide con h(t).

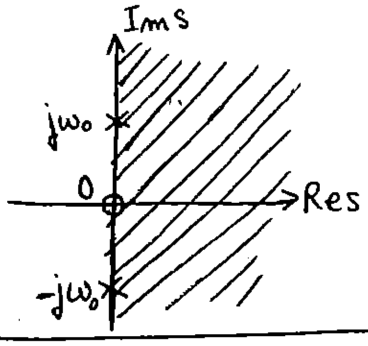
$$x(t)=t\cos(w_0t)u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI causal}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=\cos(w_0t)u(t)$$

a) $y(t)=\cos(w_0t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \boxed{Y(s)} = \mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{\cos(w_0t)u(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{jw_0t}+e^{-jw_0t}}{2}u(t)\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\overset{-a\Rightarrow a=-jw_0}{jw_0t}}u(t)\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\overset{-a\Rightarrow a=jw_0}{-jw_0t}}u(t)\} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s-jw_0}}_{\boxed{Re(s)}>Re(-a)=Re(jw_0)=\boxed{0}}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s+jw_0}}_{\boxed{Re(s)}>Re(-a)=Re(-jw_0)=\boxed{0}}=\frac{s+\cancel{jw_0}+s-\cancel{jw_0}}{2(s^2+w_0^2)}=\boxed{\frac{s}{s^2+w_0^2}}\ \boxed{\begin{matrix}ROC:\\ Re(s)>0\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\\ Re(a)<Re(s)\end{matrix}}$$

(1)



NOTA: como y(t) es ilimitada hacia la derecha, tiene ROC hacia la derecha

Polos: ±jw₀ (simples)
Cero: 0

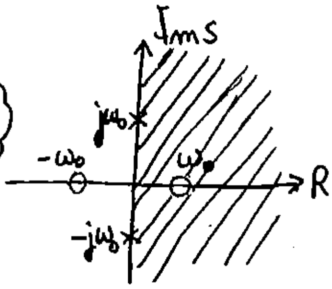
---

b) $x(t)=t\cos(w_0t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \boxed{X(s)} = -\frac{dY(s)}{ds}=\frac{2s\cdot s-(s^2+w_0^2)}{(s^2+w_0^2)^2}=\frac{s^2-w_0^2}{(s^2+w_0^2)^2}=\boxed{\frac{(s+w_0)(s-w_0)}{(s+jw_0)^2(s-jw_0)}}$

$$\boxed{tf(t)\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow}-\frac{dF(s)}{ds}}$$

- Polos: $z=\pm jw_0$ (DOBLES) No influyen en determinación de la ROC
- Ceros: $z=\pm w_0$

$$\boxed{ROC: Re(s)>0}$$

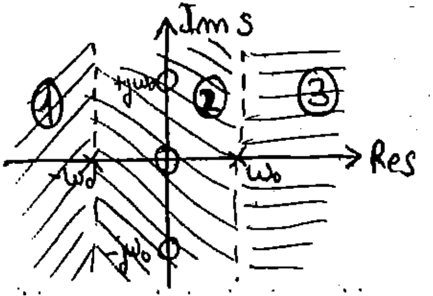


NOTA: como x(t) es ilimitada hacia la derecha, tiene la ROC hacia la derecha

---

c)

$$\boxed{H(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\dfrac{s}{\cancel{(s+jw_0)(s-jw_0)}}}{\dfrac{(s+w_0)(s-w_0)}{(s+jw_0)^{\cancel{2}}(s-jw_0)^{\cancel{2}}}}=\boxed{\frac{s(s+jw_0)(s-jw_0)}{(s+w_0)(s-w_0)}}$$



CONTINUA

ROC 1 „ $Re(s) < -\omega_0$; $h_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$, ANTICAUSAL, NO ESTABLE ; $\nexists H_1(j\omega)$

$h_2(t)$; ROC 2 „ $-\omega_0 < Re(s) < \omega_0$ ✻ $|Re(s)| < \omega_0$; $H(s)$, NO CAUSAL, ESTABLE ; $\exists H_1(j\omega)$

$$\boxed{\text{ROC3 „ } Re(s) > \omega_0 \text{ ; } h_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) \text{ CAUSAL, NO ESTABLE ; } \nexists H_1(j\omega)}$$

$H_2(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Calculamos respuestas al impulso:

$$h_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s^2+\omega_0^2)}{s^2-\omega_0^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2}\right\} \overset{\uparrow}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{s + \underbrace{\frac{2\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2}}_{\to H_1(s)}\right\} \quad [I]$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{s^3} \quad + \omega_0^2 s & s^2-\omega_0^2 \\ \ominus\ \cancel{s^3} \quad -\omega_0^2 s & s \\ \hline \quad 2\omega_0^2 s & \end{array}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

$$D = Cd + R \Rightarrow \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

- Descomponemos en fracciones simples $H_1(s)$:

$$\cdot H_1(s) = \frac{2\omega_0^2 s}{s^2-\omega_0^2} = \frac{2\omega_0^2 s}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)} = \frac{A}{s+\omega_0} + \frac{B}{s-\omega_0} \overset{\uparrow}{=} \frac{\omega_0^2}{s+\omega_0} + \frac{\omega_0^2}{s-\omega_0} \quad [II]$$

También puede hacerse perfectamente por descomposición en fracciones simples pero así es más rápido

Podemos utilizar fórmulas de polos simples (HMT1)

$$\begin{cases} A = H_1(s)(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = \dfrac{2\omega_0^2 s}{s-\omega_0}\Big|_{s=-\omega_0} = \dfrac{\cancel{-2}\omega_0^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{-2\omega_0}} = \omega_0^2 \\ B = H_1(s)(s-\omega_0)\Big|_{s=\omega_0} = \ldots = \omega_0^2 \end{cases}$$

Así que:

$$h_i(t) \overset{[I]}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{s + \underbrace{\left(\omega_0^2\frac{1}{s+\omega_0} + \omega_0^2\frac{1}{s-\omega_0}\right)}_{[II]\ H_1(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{s\} + \omega_0^2\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega_0}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\omega_0}\right\}\right.$$

ROC 1 | $Re(s) < -\omega_0$

$$\boxed{h_1(t)} \overset{!}{=} \mathcal{L}^{-1}\{s\cdot 1\} + \omega_0^2\,\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{s+\omega_0}\right\}}_{\left[\begin{smallmatrix} a=\omega_0 \\ Re(s)<-\omega_0\end{smallmatrix}\right]} + \omega_0^2\,\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{s-\omega_0}\right\}}_{\left[\begin{smallmatrix} a=-\omega_0 \\ Re(s)<Re(\omega_0)\end{smallmatrix}\right]} = \frac{d\delta(t)}{dt} - \omega_0^2\left[\underbrace{e^{\omega_0(t)} + e^{-\omega_0 t}}_{\sim\ \text{¡¡COSENO HIPERBÓLICO!!}}\right]u(-t) \overset{!}{=} \boxed{\frac{d\delta(t)}{dt} - 2\omega_0^2 Ch(\omega_0 t)u(-t)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\,X(s)$$

Todo concuerda

NOTA: Se cumple que $h_1(t) = 0$ „ $t > 0$ como corresponde a un sistema anticausal

ROC 2 | (Análogamente)... $\left[\begin{matrix} a=\omega_0 \\ Re(s)>-\omega_0\end{matrix}\right]$ ... $\left[\begin{matrix} a=-\omega_0 \\ Re(s)<Re(\omega_0)=\omega_0\end{matrix}\right]$

$$\boxed{h_2(t)} \overset{!}{=} \frac{d\delta(t)}{dt} + \omega_0^2 e^{\omega_0 t}u(t) - \omega_0^2 e^{-\omega_0 t}u(-t) \overset{!}{=} \boxed{\frac{d\delta(t)}{dt} + \omega_0^2\left[e^{\omega_0 t}u(t) - e^{-\omega_0 t}u(-t)\right]}$$

ROC 3 | (Análogamente)... $\left[\begin{matrix} a=\omega_0 \\ Re(s)>-\omega_0\end{matrix}\right]$ ... $\left[\begin{matrix} a=-\omega_0 \\ Re(s)>\omega_0\end{matrix}\right]$ ...

$h(t)=0$ „ $t<0$ SIST CAUSAL

$$\boxed{h(t)} = \boxed{h_3(t)} \overset{!}{=} \frac{d\delta(t)}{dt} + \omega_0^2\left[e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}\right]u(t) \overset{!}{=} \boxed{\frac{d\delta(t)}{dt} + 2\omega_0^2 Ch(\omega_0 t)u(t)}$$

---

d). En este apartado nos pedían la respuesta al impulso del sistema causal: $\boxed{h(t)=h_3(t)}$

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{s(s^2+\omega_0^2)}{s^2-\omega_0^2}\Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega^2+\omega_0^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{g(t)=h_2(t)}$$

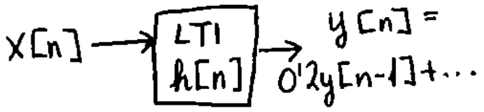
Efectivamente es diferente a $h_3(t)$, como

Tema 4

JUNIO 2003

3. Un sistema LTI causal tiene su entrada $x[n]$ relacionada con la salida $y[n]$ mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 0{,}2y[n-1] + 0{,}8x[n] + 0{,}3x[n-1]$$



a) Determine la respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j\omega})$

b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

c) Demuestre que el sistema es estable.

d) Si se introduce la señal $x_1[n] = u[n-5] - u[n-27]$, y la salida correspondiente es $y_1[n]$, calcule $X_1(e^{j\omega})$ e $Y_1(e^{j\omega})$.

---

a) $\cdot\ Y(e^{j\omega}) \underset{\uparrow}{=} 0'2e^{-j\omega 1}Y(e^{j\omega}) + 0'8X(e^{j\omega}) + 0'3e^{-j\omega 1}X(e^{j\omega}).$

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

$\cdot\ \boxed{H(e^{j\omega})} = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \boxed{\dfrac{0'8+0'3e^{-j\omega}}{1-0'2e^{-j\omega}}}$ RESPUESTA EN FRECUENCIA

---

b) $\boxed{h[n]} = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = F^{-1}\left\{\dfrac{0'8+0'3e^{-j\omega}}{1-0'2e^{-j\omega}}\right\} = 0'8F^{-1}\Big\{\underbrace{\dfrac{1}{1-0'2e^{-j\omega}}}_{H_1(e^{j\omega})}\Big\} + 0'3F^{-1}\Big\{\underbrace{\dfrac{1}{1-0'2e^{-j\omega}}}_{H_1(e^{j\omega})}e^{-j\omega}\Big\}$

$\boxed{x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})}\ \boxed{a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$

$\underset{\downarrow}{=} 0'8h_1[n] + 0'3h[n-1] \underset{\downarrow}{=} \boxed{0'8\cdot(0'2)^n u[n] + 0'3(0'2)^{n-1}u[n-1]}$ //

---

c) LTI estable $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ CONV

$\cdot\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\underbrace{0'8(0'2)^n u[n] + 0'3(0'2)^{n-1}u[n-1]}_{\geqslant 0}| = 0'8\sum_{n=-\infty}^{\infty}(0'2)^n u[n] + 0'3\sum_{n=-\infty}^{\infty}(0'2)^{n-1}u[n-1] =$

$= 0'8\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(0'2)^n + \frac{0'3}{0'2}\sum_{n=1}^{\infty}(0'2)^n \underset{\uparrow}{=} 0'8\frac{1}{1-0'2} + \frac{0'3}{\cancel{0'2}}\,\frac{\cancel{0'2}}{1-0'2} = 1'375$ (CONV) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{LTI ESTABLE}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \frac{1}{1-z},\ |z|<1 \quad \cdot\ |0'2|<1\ ✓ \\ \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^n = \frac{z}{1-z},\ |z|<1 \quad \cdot\ |0'2|<1\ ✓ \end{array}}$

---

d) $\cdot\ \boxed{X_1(e^{j\omega})} = F\{u[n-5]-u[n-27]\} = F\{u[n-5]\} - F\{u[n-27]\} \underset{\uparrow}{=} U(e^{j\omega})e^{-j\omega 5} - U(e^{j\omega})e^{-j\omega 27}$

$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

$u[n] \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\,\delta(\omega-2k\pi)$

$= U(e^{j\omega})[e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}] \underset{\downarrow}{=} \left[\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\,\delta(\omega-2k\pi)\right][e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}] =$

$= \dfrac{e^{-j\omega 5}-e^{-j\omega 27}}{1-e^{-j\omega}} + \pi\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}(e^{-j\omega 5}-e^{-j\omega 27})\delta(\omega-2k\pi) \underset{\uparrow}{=} \ldots$ $\quad f[\omega]\,\delta[\omega-\omega_0] = f[\omega_0]\,\delta[\omega-\omega_0]$

SIGUE ⇒

$$y_2[n] + b\,y_2[n-2] = x[n] \xleftrightarrow{F} Y_2(e^{j\omega}) + b\,Y_2(e^{j\omega})e^{-j\omega 2} = X(e^{j\omega})$$

$$\boxed{H_2(e^{j\omega})} = \ldots = \boxed{\frac{1}{1+be^{-j\omega 2}}}$$

·SIST 3|

$$z[n] = w[n] + a\,w[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) + a e^{-j\omega} W(e^{j\omega})$$

$$\boxed{H_3(e^{j\omega})} = \frac{Z(e^{j\omega})}{W(e^{j\omega})} = \boxed{1+ae^{-j\omega}}$$

» Finalmente, de [I] ⇒ $\boxed{H(e^{j\omega})} = \left[\frac{1}{1+ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1+be^{-j\omega 2}}\right](1+ae^{-j\omega}) = \ldots = \boxed{\frac{2+be^{-2j\omega}+ae^{-j\omega}}{1+be^{-2j\omega}}}$

RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL SISTEMA EQUIVALENTE

)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Sist equiv}\\ H(e^{j\omega})\end{matrix}} \longrightarrow z[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \ldots$$

$$\ldots \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}); \quad H(e^{j\omega}) = \frac{Z(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$; Así que:

$$\frac{Z(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2+be^{-2j\omega}+ae^{-j\omega 1}}{1+be^{-j\omega 2}} \Rightarrow Z(e^{j\omega}) + b\,Z(e^{j\omega})e^{-j\omega 2} = 2X(e^{j\omega}) + bX(e^{j\omega})e^{-j\omega 2} + \ldots$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$\ldots + a X(e^{j\omega}) e^{-j\omega 1}$$

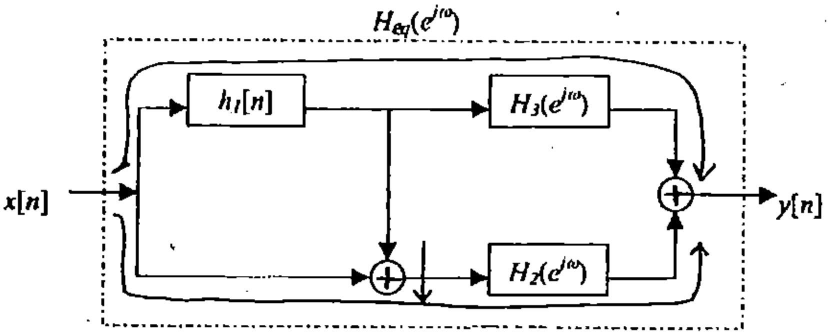
$$\Big\downarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$\boxed{z[n] + b\,z[n-2] = 2\,x[n] + b\,x[n-2] + a\,x[n-1]}$$

ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DEL SISTEMA EQUIVALENTE

SEPTIEMBRE 2002 ✓

3. En la figura siguiente se muestra una asociación de sistemas LTI cuya respuesta global se representa mediante $H_{eq}(e^{j\omega})$.



Donde

$$h_1[n]=\delta[n]-\frac{\mathrm{sen}\left(n\pi/2\right)}{n\pi} \qquad H_2(e^{j\omega})-\begin{cases}\frac{4}{\pi}|\omega|, & |\omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\omega|<\pi\end{cases}$$

$$H_3(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{4\omega}{\pi}, & 0\le\omega<\pi\\ 8-\frac{4\omega}{\pi}, & \pi\le\omega<2\pi\end{cases}$$

(a) Represente $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, y $H_3(e^{j\omega})$. Exprese analíticamente $H_{eq}(e^{j\omega})$ en función de $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, y $H_3(e^{j\omega})$, justificando que se verifica que $H_{eq}(e^{j\omega})=H_3(e^{j\omega})$.

(b) Calcule la expresión de la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n]=(1)^n+(-1)^n$.

(c) Calcule la expresión de la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n]=\delta[n]$.

---

a) $y[n] = x[n] * h_1[n] * h_3[n] + \left(x[n] + x[n]*h_1[n]\right) * h_2[n]$

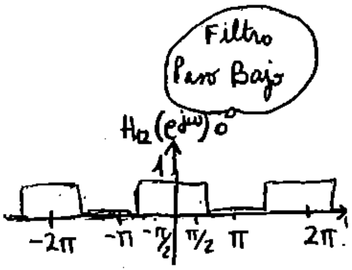
– En el sistema equivalente: $y[n] = x[n] * h_{eq}[n]$. Tratemos de llegar a algo parecido

$\cdot\; y[n] = x[n]*h_1[n]*h_3[n] + x[n]*h_2[n] + x[n]*h_1[n]*h_2[n] =$

$= x[n] * \underbrace{\left(h_1[n]*h_3[n] + h_2[n] + h_1[n]*h_2[n]\right)}_{h_{eq}[n]}$;

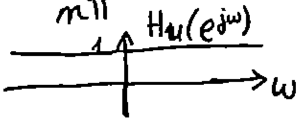
$\cdot\; h_{eq}[n] = h_1[n]*h_3[n] + h_2[n] + h_1[n]*h_2[n]$

$\xrightarrow{F}$ $\boxed{H_{eq}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\cdot H_3(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})}$ //



$\boxed{H_1(e^{j\omega})}$ $h_1[n] = \delta[n] - \frac{\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi} = h_{11}[n] - h_{12}[n]$

$\cdot\; h_{11}[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$



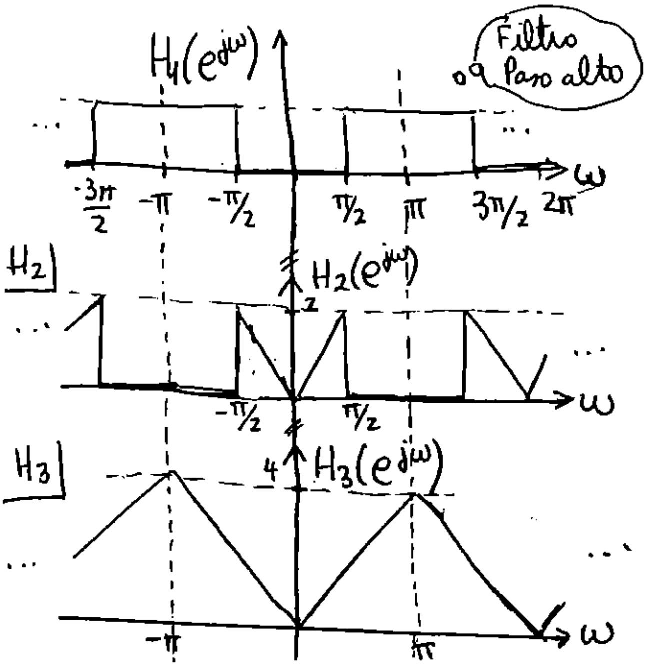
$\cdot\; h_{12}[n] = \frac{\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 \;, & 0<|\omega|<\pi/2 \\ 0 \;, & \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi \end{cases}$

Periódica 2π

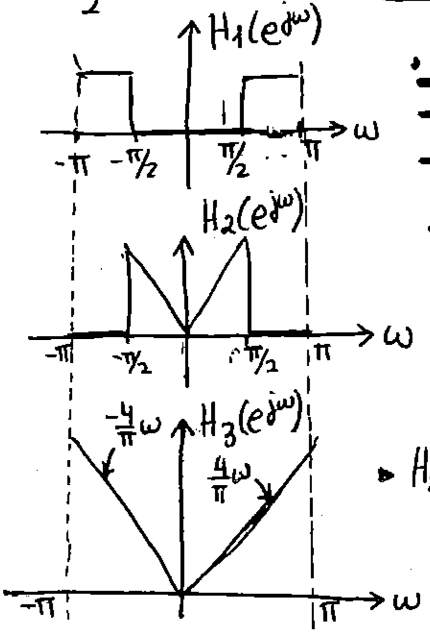
SIGUE

CONTINÚA $H_1(e^{j\omega}) = H_{11}(e^{j\omega}) - H_{12}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 \text{ "} & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ "} & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases}$ Periódica 2π

Filtro Paso alto



≡



- ~~Podemos representarlo sólo en un periodo más cómodo (así lo haremos a partir de ahora)~~

Gráficamente

▸ $H_2(e^{j\omega}) = [1 - H_1(e^{j\omega})] \cdot H_3($

- $\boxed{H_{eq}(e^{j\omega})} \overset{!}{=} H_1(e^{j\omega})\, H_3(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) + \underbrace{H_1(e^{j\omega})\, \cancel{H_2(e^{j\omega})}}_{0 \text{ (gráficamente)}} =$

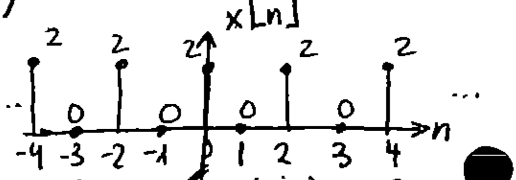
$= \cancel{H_1(e^{j\omega})\, H_3(e^{j\omega})} + [1 - \cancel{H_1(e^{j\omega})}]\, H_3(e^{j\omega}) \overset{!}{=} \boxed{H_3(e^{j\omega})}$ cqd//

---

b)

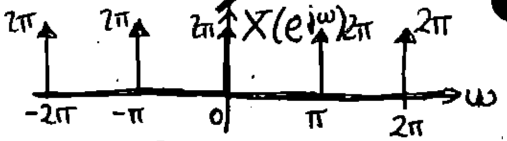
$$\begin{tikzcd} x[n] \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Sist equiv LTI}\\ h_{eq}[n]\end{array}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"] & y[n] \\ X(e^{j\omega}) & H_{eq}(e^{j\omega}) & Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H_{eq}(e^{j\omega}) \arrow[u, "\mathcal{F}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$x[n] = \overset{\text{"}1}{1^n} + (-1)^n = \begin{cases} 2 & ; \text{"n" par} \\ 0 & ; \text{"n" impar} \end{cases} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$



$\updownarrow \mathcal{F}$ tabla N=2

$X(e^{j\omega}) = \cancel{2}\frac{2\pi}{\cancel{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{\cancel{2}}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi)$



$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_{eq}(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi) \cdot H_{eq}(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{eq}(e^{jk\pi}) \cdot \delta(\omega - k\pi)$

- $H_{eq}(e^{jk\pi}) = \begin{cases} 0 \,; & \text{"k" par} \\ 4 \,; & \text{"k" impar} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} H_{eq}(e^{j2k\pi}) = 0 \\ H_{eq}(e^{j(2k-1)}) = 4 \end{cases}$

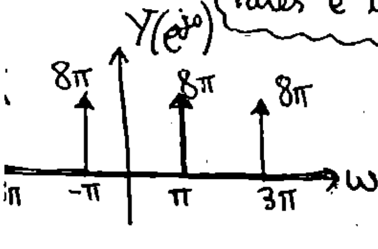
Lo separamos en dos sumatorios: $Y(e^{j\omega}) = \cancel{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overbrace{H_{eq}(e^{j2k\pi})}^{0}} \cdot \delta(\omega - 2k\pi) +$

Pares e impares FMT4

$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H_{eq}(e^{j[2k-1]\pi})}_{4} \cdot \delta(\omega - [2k-1]\pi) =$

$Y(e^{j\omega}) \updownarrow ¿\mathcal{F}?\; y[n]$

$= 8\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - [2k-1]\pi)$



En la tabla hay un $\frac{2\pi k}{N}$ ⇒ salen cosas fraccionarias no válidas en T.D.

SIGUE EN LA OTRA HOJA

CONTINÚA E-36

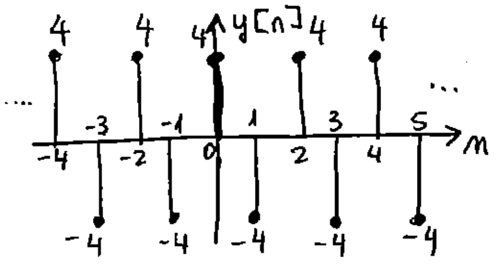
- Finalmente, hallemos y[n] aplicando la definición (no queda otra)

$$\boxed{y[n]} = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\int_0^{2\pi} 8\cancel{\pi}\,\delta(\omega-\pi)e^{j\omega n}d\omega \overset{*}{=}$$

$f(\omega)\delta(\omega-\omega_0) = f(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$

$$= 4\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\pi)\underbrace{e^{j\pi n}}_{-1} = 4\cdot(-1)^n\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\pi)\,d\omega = \boxed{4\cdot(-1)^n}$$

NOTA Si hubiéramos escogido el intervalo de integración $[-\pi,\pi]$ habría dos deltas, pero en realidad la delta en $-\pi$ y la delta en π son la misma porque la TF de T.D. es periódica $2\pi \Rightarrow$ sólo habría que considerar una de ellas, así que el intervalo sería $(-\pi,\pi]$ ó $[-\pi,\pi)$



---

c) $x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = 1$;

$Y(e^{j\omega}) = \cancel{X(e^{j\omega})}\,H_{eq}(e^{j\omega}) = H_{eq}(e^{j\omega})$. Hallamos $y[n] = \overset{h_3[n]}{\overset{\shortparallel}{h_{eq}[n]}}$ aplicando la definición:

$$\boxed{y[n]} = h_{eq}[n] = h_3[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_{eq}(e^{j\omega})\} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} H_{eq}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{eq}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{4\omega}{\pi}\right)e^{j\omega n}d\omega + \int_0^{\pi}\frac{4\omega}{\pi}e^{j\omega n}d\omega\right] =$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\pi^2}\left[\int_0^{\pi}\omega e^{j\omega n}d\omega - \int_{-\pi}^{0}\omega e^{j\omega n}d\omega\right] \overset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi^2}\left(\left[e^{j\omega n}\left(\frac{\omega}{jn}+\frac{1}{n^2}\right)\right]_0^{\pi} + \left[e^{j\omega n}\left(\frac{\omega}{jn}+\frac{1}{n^2}\right)\right]_0^{-\pi}\right) =$$

$I = \int \omega e^{j\omega n}d\omega$	PARTES $u = \omega \Rightarrow du = d\omega$ $dv = e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow v = \frac{1}{jn}e^{j\omega n}$	$I = \frac{\omega}{jn}e^{j\omega n} - \int\frac{1}{jn}e^{j\omega n}d\omega$; ¡¡$\forall n \neq 0$!!

$$I = \int\omega e^{j\omega n}d\omega = \frac{\omega}{jn}e^{j\omega n} - \frac{1}{jn}\left(\frac{1}{jn}e^{j\omega n}\right) = e^{j\omega n}\left[\frac{\omega}{jn} \cancel{-} \frac{1}{\cancel{j^2}n^2}\right] = e^{j\omega n}\left[\frac{\omega}{jn}+\frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left(\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n}\left[\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{j}n}+\frac{1}{n^2}\right] - \cancel{e^0}\left[\frac{1}{n^2}\right] + \underbrace{e^{-j\pi n}}_{(-1)^n}\left[\frac{-\cancel{\pi}}{\cancel{j}n}+\frac{1}{n^2}\right] - \cancel{e^0}\left[\frac{1}{n^2}\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2}\right] = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \boxed{\begin{cases} 0 & ; \text{"}n\text{" par} \\ -\frac{8}{\pi^2 n^2} & ; \text{"}n\text{" impar}\end{cases} \quad \text{¡¡}\forall n \neq 0\text{!!}}$$

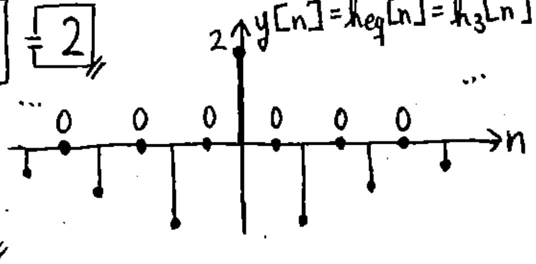
- Como el resultado sale indefinido para n = 0, hay que calcularlo a parte:

$$\boxed{y[0]} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} Y(e^{j\omega})\underbrace{\cancel{e^{j\omega 0}}}_{1}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\frac{4\omega}{\pi}d\omega + \int_0^{\pi}\frac{4\omega}{\pi}d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\pi}\left(\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_0^{-\pi} + \left[\frac{\omega^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\cancel{\pi^2}}\left[\frac{\cancel{\pi^2}}{2}+\frac{\cancel{\pi^2}}{2}\right] = \boxed{2}$$

>> Finalmente:

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 2 & ; \ n = 0 \\ 0 & ; \ n \neq \dot{2} \\ \frac{-8}{\pi^2 n^2} & ; \ n = \dot{2} \wedge n \neq 0 \end{cases} = h_{eq}[n] = h_3[n]}$$



JUNIO 2003 Este ejercicio bien podría ser del tema 1 ✓

1. Sea un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t) & 0 \le t \le 0.5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

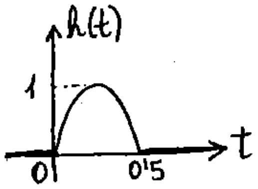
a) Calcule la respuesta al escalón $u(t)$ denominándola $s(t)$.

b) Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = u(t) - u(t-0.5)$, realizando el operador de convolución. Exprese dicha solución en función de $s(t)$.

c) Suponiendo que ahora definimos $h_1(t)$ como una versión periódica de $h(t)$ de periodo 1, e igualmente $x_1(t)$ como una versión periódica de $x(t)$ del mismo periodo, calcule la expresión de la convolución circular de ambas señales, expresando el resultado en función de $y(t)$. Describa razonadamente el fenómeno que ocurriría si el periodo de las versiones periódicas fuera inferior a 1.

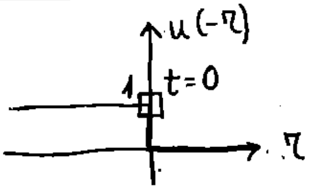
---

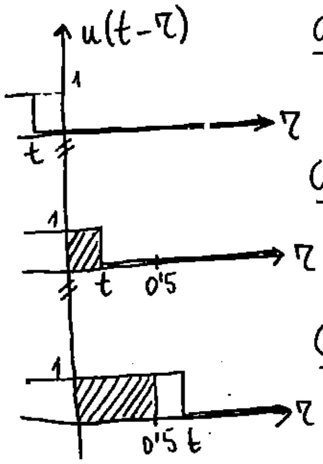
a)



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} LTI \\ h(t) \end{array}} \longrightarrow s(t) = u(t) * h(t)$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$





Caso $t<0$: ∄ solapamiento : $s(t)=0$;

Caso $0<t<0'5$: $s(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau = \int_0^t \text{sen}(2\pi\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi\tau)\right]_t^0 =$

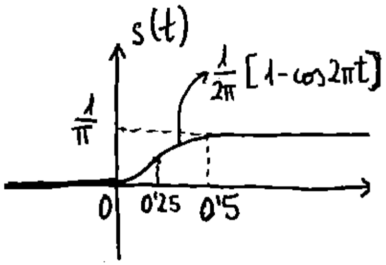
$= \frac{1}{2\pi}\left[\overset{1}{\cancel{\cos 0}} - \cos(2\pi t)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[1 - \cos(2\pi t)\right]$;

Caso $t>0'5$: $s(t) = \int_0^{0'5} \text{sen}\, 2\pi\tau\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi\tau)\right]_{0'5}^0 =$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\overset{1}{\cancel{\cos 0}} - \overset{-1}{\cancel{\cos \pi}}\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} = \frac{1}{\pi}$;

» En resumen:

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t<0 \\ \frac{1}{2\pi}[1-\cos(2\pi t)] & ; \ 0<t<0'5 \\ \frac{1}{\pi} & ; \ t>0'5 \end{cases}}$$

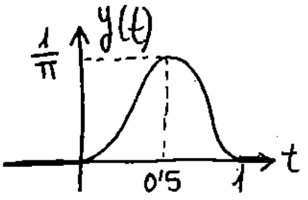


---

b) $x(t) = u(t) - u(t-0'5) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} LTI \\ h(t) \end{array}} \longrightarrow \boxed{y(t)} = x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-0'5)] *$

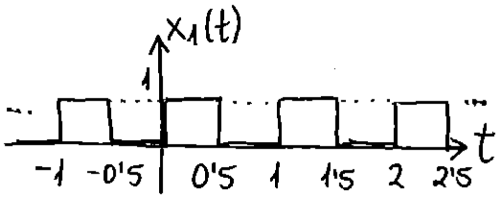
$= \underbrace{u(t) * h(t)}_{s(t)} - u(t) * \delta(t-0'5) * h(t) = \boxed{s(t) - s(t-0'5)} = \begin{cases} 0 & ; \ t<0 \\ \frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi t) & ; \ 0<t<0'5 \\ \frac{1}{2\pi}\left(1+\cos[2\pi(t-0'5)]\right) & ; \ 0'5<t<1 \\ 0 & ; \ t>1 \end{cases}$

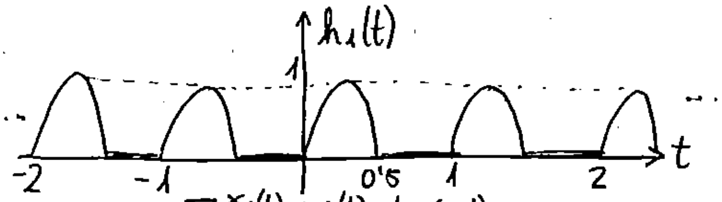
s(t)



24-11-2008

c) $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$, $T=1$; $h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT)$, $T=1$

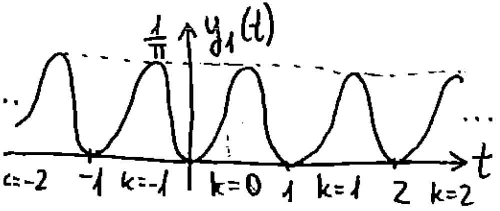




$$\boxed{y_1(t)} \triangleq x_1(t) \circledast h_1(t) = \int_{<T>} x_1(\tau) h_1(t-\tau)\,d\tau \overset{x_1(t)=x(t),\ t\in(0,1)}{=} \int_0^1 x(\tau)\, h_1(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_1(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h_1$$

$$= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT) = x(t) * h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t-kT) \overset{T=1}{=} \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t-k)} //$$

- El resultado es periódico del mismo periodo que las señales convolucionadas.



- Si $T<1$ las réplicas de $y_1(t)$ se solaparían //

FEBRERO 2003

3. Sea una señal en tiempo discreto x[n] cuyo espectro en $|w| < \pi$ es

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} |w|, & |w| < \pi/8 \\ 0, & \pi/8 < |w| < \pi \end{cases}$$

$\boxed{\text{Periódica } 2\pi}$ → Luego con saber cómo es la señal en $|w|<\pi$ nos vale

Se forma la señal en tiempo discreto $x_p[n] = x[n] \cdot p[n]$, siendo $p[n]$ el tren de impulsos en tiempo discreto:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - Nk], \quad \text{con} \quad N = 4$$

a) Obtenga la expresión de $X_p(e^{jw})$ en función de $X(e^{jw})$.

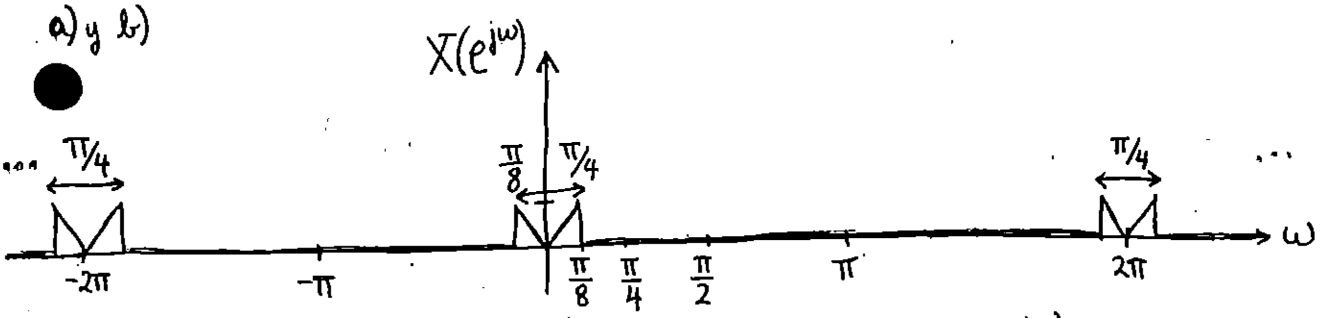
b) Dibuje razonadamente $X_p(e^{jw})$, el espectro de $x_p[n]$.

c) Determine la respuesta en frecuencia del filtro que permite recuperar $x[n]$ a partir de $x_p[n]$.

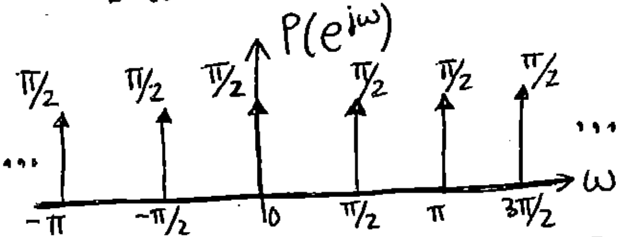
d) ¿Cuál es el máximo valor de N que permite realizar el apartado (c)?.

---

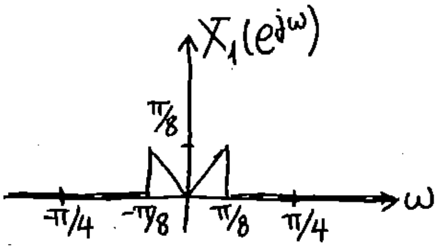
a) y b)



- $x_p[n] = x[n] \cdot p[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega})$
- $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - Nk]$, $N=4 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \overset{N=4}{=} \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$



;

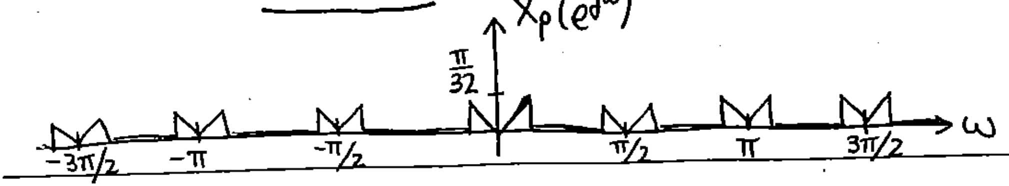


- Así que: 1ª idea $\boxed{\text{Cojo un periodo de } X(e^{j\omega})}$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * P(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} X_1(e^{j\omega}) * \frac{\cancel{\pi}}{2} \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right) =$$

Nos quedamos con un solo periodo de $X(e^{j\omega})$, por ejemplo el que está entre $\omega \in (-\pi, \pi]$. Con éste convolucionamos linealmente con $P(e^{j\omega})$

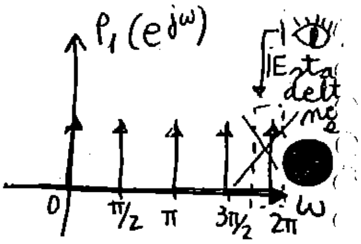
$$= \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(e^{j(\omega - k\frac{\pi}{2})}\right)$$



2ª idea: (Cojo un periodo de $P(e^{j\omega})$)

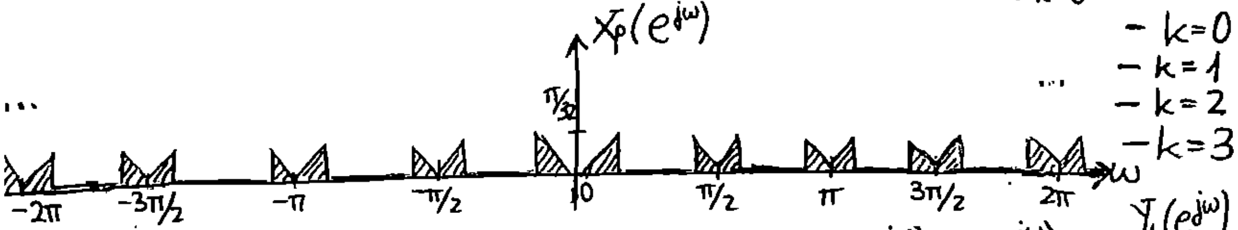
$$\cdot\ X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega}) \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * P_1(e^{j\omega}) =$$

Nos quedamos con un periodo de $P(e^{j\omega})$ y convolucionamos linealmente con $X(e^{j\omega})$. $P_1(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega})$, $\omega \in [0, 2\pi]$



$$= \frac{1}{2\cancel{\pi}} X(e^{j\omega}) * \frac{\cancel{\pi}}{2}\left[\delta(\omega) + \delta(\omega - \tfrac{\pi}{2}) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - \tfrac{3\pi}{2})\right] = \frac{1}{4}\left[X(e^{j\omega}) + \dots\right.$$

$$\left.\dots + X(e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})}) + X(e^{j(\omega - \pi)}) + X(e^{j(\omega - \frac{3\pi}{2})})\right] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(e^{j(\omega - k\frac{\pi}{2})})$$

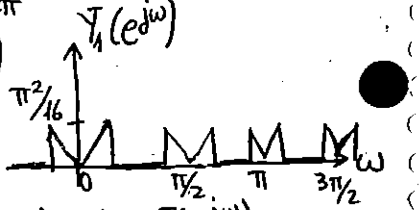


Sale lo mismo pero de otra manera (que algo más li

3ª idea: (Convoluciono los dos periodos)

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * P_1(e^{j\omega})$$

$$\cdot\ X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega}) \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_1(e^{j(\omega - k2\pi)}) \overset{\downarrow}{=}$$



Nos quedamos con un periodo de $X(e^{j\omega})$ y con un periodo de $P(e^{j\omega})$, y el resultado se hace periódico 2π

$$= \frac{1}{2\cancel{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[X_1(e^{j(\omega - k2\pi)}) * \frac{\cancel{\pi}}{2} \sum_{i=0}^{3} \delta(\omega - k2\pi - i\tfrac{\pi}{2})\right] = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{3} X_1(e^{j(\omega - i\frac{\pi}{2} - k2\pi)})$$

y sale, otra vez, lo mism (aunque es aún más pesado)

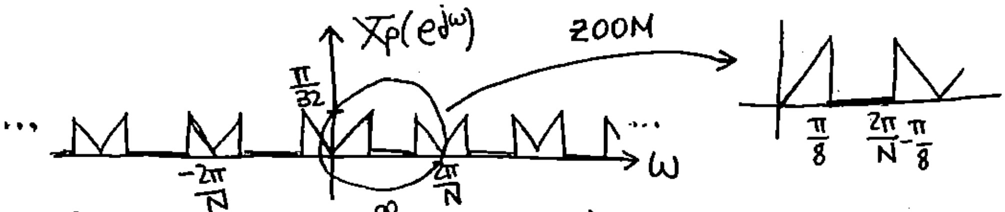
---

c) Necesitamos un filtro paso bajo: $\boxed{H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4 \ ; & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 \ ; & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}}$ con $\omega_c \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right]$

Periódica 2π

---

d)



$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{N})$$

$$X_p(e^{j\omega})\Big|_{N=4} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - k\frac{2\pi}{N})})\Bigg|_{N=4} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} X(e^{j(\omega - k\frac{\pi}{2})})$$

- Para que no haya solapamiento entre las réplicas del espectro:

$$\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi}{8} \geq \frac{\pi}{8} \longrightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{N} \geq \frac{2\cancel{\pi}}{8} \longrightarrow N \leq 8$$

- En conclusión: $\boxed{\text{Si } N > 8 \text{ ya no se puede recuperar } X(e^{j\omega}) \text{ mediante filtrado}}$ //

SEPTIEMBRE 2004

3. Considere las tres secuencias $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ relacionadas del siguiente modo

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{2}\right] & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad z[n] = \frac{1}{2}z[n-1] + y[n] - y[n-1]$$

Se pide:

a) Determine la transformada de Fourier $Y(e^{jw})$ y $Z(e^{jw})$ de $y[n]$ y $z[n]$, respectivamente, en función de la transformada de Fourier de $X(e^{jw})$ de $x[n]$.

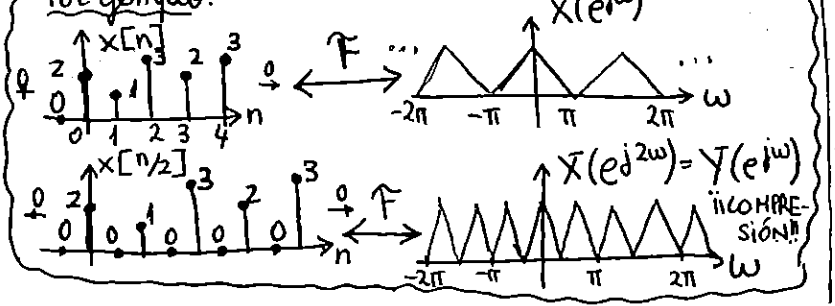
b) Si $x[n] = 1 + \delta[n] + (-1)^n$, calcule $X(e^{jw})$, $Y(e^{jw})$ y $Z(e^{jw})$.

c) Determine las secuencias $y[n]$ y $z[n]$, que corresponden al apartado b).

---

a). $\boxed{Y(e^{j\omega})} = \mathcal{F}\{y[n]\} = \boxed{X(e^{j2\omega})}$ //

Por ejemplo:



$$\cdot\, Z(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{z[n]\} = \frac{1}{2}e^{-j\omega 1}Z(e^{j\omega})\ldots$$

$$\ldots + Y(e^{j\omega}) - e^{-j\omega 1}Y(e^{j\omega});$$

$$Z(e^{j\omega})\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right] = Y(e^{j\omega})\left[1-e^{-j\omega}\right]$$

$$\boxed{Z(e^{j\omega})} = Y(e^{j\omega})\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} =$$

$$= \boxed{X(e^{j2\omega})\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} //$$

---

b) $x[n] = 1 + \delta[n] + (-1)^n$

$$\mathcal{F}\ \boxed{X(e^{j\omega})} = \mathcal{F}\{1+\delta[n]+(-1)^n\} = \mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\delta[n]\} + \mathcal{F}\{(-1)^n\} =$$

$$\boxed{1 \longleftrightarrow 2\pi\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - i2\pi i)}$$

$$\boxed{\delta[n] \longleftrightarrow 1}$$

$$\boxed{e^{jk\pi} = (-1)^k}$$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k) + 1 + \mathcal{F}\{e^{j\pi n}\} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k) + 1 + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi) =$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi i)}$$

$$= 1 + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\delta(\omega-2\pi k)}_{\text{Múltiplos Pares de }\pi} + \underbrace{\delta(\omega-\underbrace{\pi-2k\pi}_{(2k+1)\pi})}_{\text{Múltiplos impares de }\pi}\Big] = \boxed{1 + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)} //$$

– Del apartado anterior tenemos las relaciones necesarias:

$$\circ\ \boxed{Y(e^{j\omega})} = X(e^{2j\omega}) = 1 + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2\omega-k\pi) = 1 + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(2\left[\omega-k\frac{\pi}{2}\right]\right) = 1 + \cancel{2}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cancel{2}}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$

$$\boxed{\delta\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\right) = \Omega\,\delta(\omega-\omega_0)}$$

$$= \boxed{1 + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{f(\omega)\delta(\omega-\omega_0) = f(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)}$$

$$\cdot\ Z(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \left[1+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{1-e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{2}}}\right) = \boxed{\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1-(-j)^k}{1-\frac{1}{2}(-j)^k}\right)} //$$

24 - 11 - 200

c) $\boxed{y[n]} \doteq \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{\pi}{2}) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} + \pi \mathcal{F}^{-1}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{\pi}{2})\} =$

$= \delta[n] + 2\mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{4})\} \doteq \boxed{\delta[n] + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]}$

$\frac{2\pi}{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\frac{2\pi}{N}),\ \underline{N \in \mathbb{Z}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta[n - qN]$

Mejor poner esta expresión y aplicar propiedades que poner el tocho de $Z(e^{j\omega})$

- $\boxed{z[n]} \doteq \mathcal{F}^{-1}\{Z(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega}) \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\} = y[n] * \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\} =$

$= y[n] * [\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\} - \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} e^{-j\omega 1}\}] \overset{*}{=}$

$\begin{cases} a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - a e^{-j} \\ x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e \end{cases}$

$= y[n] * [(\frac{1}{2})^n u[n] - (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]] =$

$= (\delta[n] + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]) * ((\frac{1}{2})^n u[n] - (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]) =$

$\doteq \boxed{(\frac{1}{2})^n u[n] - (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1] + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\frac{1}{2})^{n-4k} u[n-4k] - (\frac{1}{2})^{n-4k-1} u[n-4k-1]}$

SEPTIEMBRE 1999

2. Sean dos secuencias $x_1[n]$, $y_1[n]$ definidas como:

$$x_1[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$
$$y_1[n] = u[n] - u[n-3]$$

A partir de ellas generamos otras dos señales de periodo N=4:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-kN] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-kN]$$

a) Calcule la convolución lineal de las dos señales $x_1[n]$, $y_1[n]$:

$$z_1[n] = x_1[n] * y_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot y_1[n-m]$$

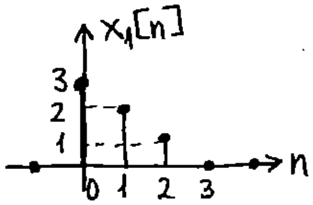
b) Calcule el Desarrollo en Serie de Fourier de $w[n]$:

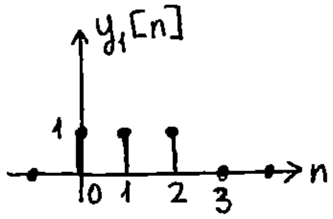
$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-kN]$$

c) Calcule la convolución circular de las señales $x[n]$, $y[n]$, definida mediante la siguiente expresión:

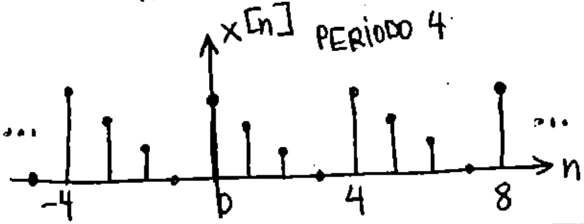
$$z[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \; y[n-m]$$

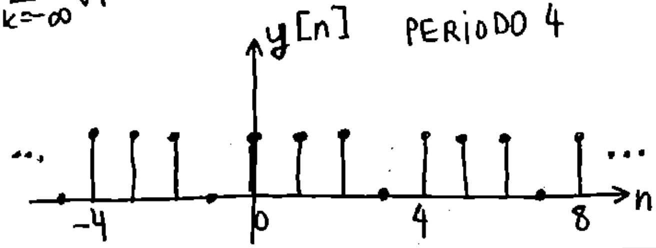
d) Calcule el Desarrollo en Serie de Fourier de $z[n]$. Comente los resultados de los apartados b) y d).





$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[m-kN] \qquad \boxed{¡¡N=4!!} \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-kN]$$

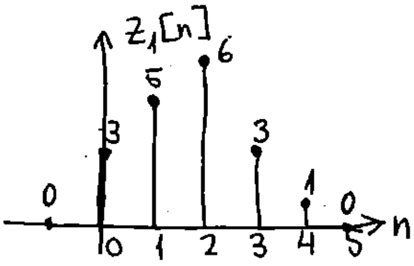




---

a) $z_1[n] = x_1[n] * y_1[n] = (3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) * (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) = \ldots$

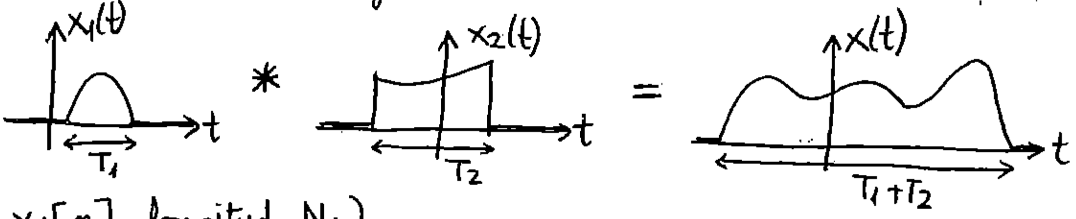
$\ldots = 3\delta[n] + 5\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4]$



1-12-201

NOTA TEÓRICA:

T.C.} $x_1(t)$ longitud T_1, $x_2(t)$ longitud T_2 } $x_1(t) * x_2(t) = x(t)$ longitud $T_1 + T_2$



T.D.} $x_1[n]$ longitud N_1, $x_2[n]$ longitud N_2 } $x_1[n] * x_2[n] = x[n]$ longitud N_1+N_2-1

→ En este caso: $x_1[n]$ longitud 3, $y_1[n]$ longitud 3 } $z_1[n]$ longitud $5 = 3+3-1$

---

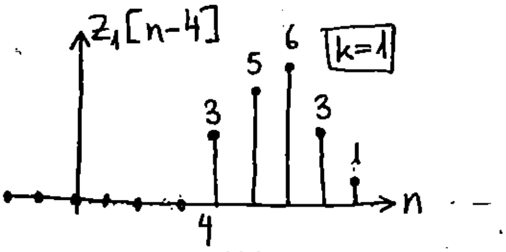
c) $z[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} x[k]\, y[n-k] = \sum_{\boxed{k=0}}^{\boxed{N-1}} x[k]\, y[n-k]$ ... (y seguir con la convolu

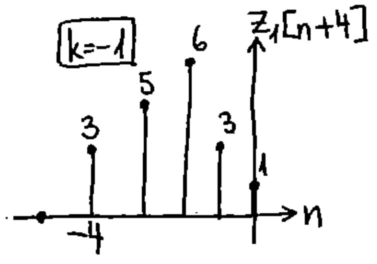
→ también puede ser de $k=1$ hasta "N" (mientras sumen los índices "N-1", está bie

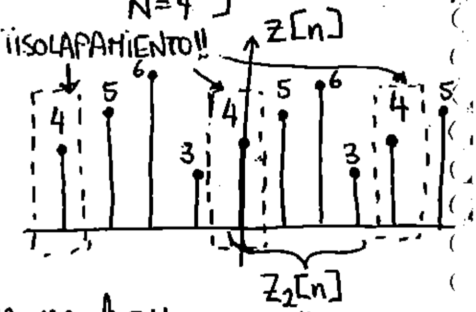
- De manera más práctica:

$$\boxed{z[n]} = x[n] \circledast y[n] = \underset{\text{un periodo de } x[n]}{x_1[n]} * y[n] = x_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-kN] = x_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n] * \delta[n-kN] =$$

$$= \underbrace{x_1[n] * y_1[n]}_{z_1[n]} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] = z_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-kN] \overset{N=4}{=} \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-4k]}$$







Dibujo: $\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_2[n-4k]}$ // Así queda mejor porque no hay solapamiento al sumar repeticiones ⇒ señal periodo de $z[n]$

---

b) $w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[n-kN] = z[n]$ (del apartado c)

1ª idea ⚬ ("Ecuación análisis")

$\boxed{N=4}\ \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} w[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} w[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[w[0]\overset{1}{\cancel{e^{0}}} + w[1]e^{-jk\frac{\pi}{2}} + w[2]e^{-jk\pi} + w[3]e\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 + 5\underbrace{\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}_{-j}^{k} + 6\underbrace{\left(e^{-j\pi}\right)}_{-1}^{k} + 3\underbrace{\left(e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right)}_{e^{j\frac{\pi}{2}}=j}^{k}\right] = \boxed{\frac{1}{4}\left[4+5(-j)^k+6(-1)^k+3j^k\right]}$$

2ª idea ⚬ (Ecuación "forma alternativa") ⚬ (la TF de un periodo da sus a_k)

- $w[n] = z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_2[n-kN]$ „ $z_1[n] = 4\delta[n] + 5\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$ ⚬ (Dibu

- $$\boxed{a_k} = \frac{1}{N} Z_2(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\omega_0} \overset{N=4}{\underset{\omega_0=\pi/2}{=}} \frac{1}{4}\left[4 + 5\underbrace{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}_{(-j)^k} + 6\underbrace{e^{-2jk\frac{\pi}{2}}}_{(-1)^k} + 3\underbrace{e^{-3jk\frac{\pi}{2}}}_{j^k}\right] = \frac{1}{4}\left[4+5(-j)^k+6(-1)^k+\right.$$

$$Z_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{z_2[n]\} = \mathcal{F}\{4\delta[n]+5\delta[n-1]+6\delta[n-2]+3\delta[n-3]\} = 4+5e^{-j\omega 1}+6e^{-j\omega 2}+3e^{-j}$$

CONTINÚA

SIGUE t-40

[illegible]

3ª idea : TF de una señal periódica e identificar

$$W(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{w[n]\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_2[k-Nk]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_2[n] * \delta[n-kN]\right\} =$$

$$= \mathcal{F}\left\{z_2[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right\} = \mathcal{F}\{z_2[n]\}\cdot\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right\} =$$

$$= \underbrace{Z_2(e^{j\omega})}_{(2^{a}\ \text{idea})}\cdot\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right) \overset{N=4}{\downarrow}= \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_2(e^{jk\frac{\pi}{2}})\,\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overset{a_k\ (\text{Tabla})}{\boxed{\frac{Z_2(e^{jk\frac{\pi}{2}})}{4}}}\,\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right) \rightsquigarrow \boxed{\frac{Z_2(e^{jk\frac{\pi}{2}})}{4} = a_k}$$

: Como vemos, todas las técnicas vienen a ser lo mismo

- Damos valores a "k", recordando que sólo hay N=4 coeficientes de Fourier distintos

$k=0$	$a_0 = \frac{9}{2}$
$k=1$	$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$
$k=2$	$a_2 = \frac{1}{2}$
$k=3$	$a_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$

- Si quisiéramos calcularlos, veríamos que

$a_4 = a_0$

$a_5 = a_1$

$a_6 = a_2$

$a_7 = a_3$

(etc) $\Rightarrow$ Aunque hay infinitos coeficientes, sólo hay "N" distintos. Se cumple:

$$\boxed{a_k = a_{k\pm qN} \quad , q\in\mathbb{Z}}$$

---

d) Hecho en b) pues $z[n] = w[n]$: apartado para ver si estás atento o que sabes lo que haces =S

SEPTIEMBRE 2005

3. Considere las siguientes secuencias

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-4m] \quad ; \quad f[n] = 2^{-|n|}$$

a) Determinar la transformada de Fourier $F(e^{jw})$ de $f[n]$. Represente gráficamente el módulo y la fase de $F(e^{jw})$ en función de w.

b) Demostrar que $x[n]$ es una secuencia periódica y determinar los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.

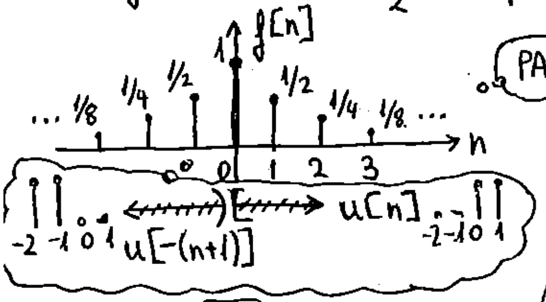
Considere ahora el sistema LTI definido por la siguiente ecuación en diferencias donde $x[n]$ es la señal de entrada e $y[n]$ la señal de salida:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-2]$$

c) Obtenga la respuesta en frecuencia de dicho sistema. Para la secuencia $x[n]$, dada al principio del ejercicio, determinar la señal de salida $y[n]$.

---

a) $f[n] = 2^{-|n|} = \frac{1}{2^{|n|}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & ; n<0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & ; n\geq 0 \end{cases} \overset{\uparrow}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{x_1[n]} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \boxed{-1\delta[n]}}_{\text{ó bien } \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-(n+1)]}$ [*]



PAR

miremos el dibujo y se nos vendría alguna "idea feliz"

$$\Downarrow$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-(n+1)]}_{x_2[n]} \quad [**]$$

1ª idea [*]

- $\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = X_1(e^{j\omega})}$
- $\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[n]\right\} = X_1(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$
- $\mathcal{F}\{\delta[n]\} = 1$

Aplicamos linealidad de la TF $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Con lo que: $\boxed{F(e^{j\omega})} = \mathcal{F}\{x_1[n] + x_1[-n] - \delta[n]\} = X_1(e^{j\omega}) + X_1(e^{-j\omega}) - \mathcal{F}\{\delta[n]\} =$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} = \dots \text{(a)}$$

(Sigue en la otra página)

2ª idea [**] + difícil, interesante por la "idea feliz"

$$\boxed{X_2(e^{j\omega})} = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n+k]\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \mathcal{F}\{\delta[n+k]\} =$$

Toda señal en T.D. es un sumatorio de deltas

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{j\omega k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^k = \boxed{\frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}} ;$$

$$\boxed{\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0}}$$

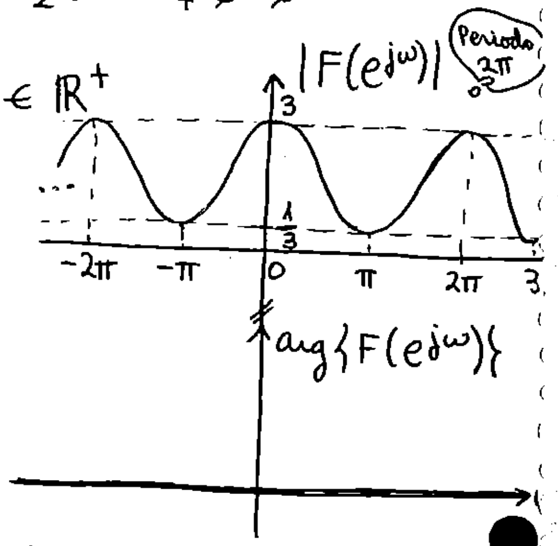
$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}, \forall z \in \mathbb{C} / |z|<1 \qquad \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \checkmark$$

1-12-200

- Finalmente: $\boxed{F(e^{j\omega})} \doteq X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} = (\circledcirc)$ Aquí nos quedamos en la 1ª idea

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}) + (1-\frac{1}{2}e^{j\omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}e^{j\omega}} - \frac{1}{4}\cancel{e^{j\omega}}\cancel{e^{-j\omega}} + 1 - \cancel{\frac{1}{2}e^{j\omega}}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{4}\cancel{e^{j\omega}}\cancel{e^{-j\omega}}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega} \doteq \boxed{\frac{3}{5-4\cos\omega}} \in \mathbb{R}^+$$



- Así que: $\left\{ \begin{array}{l} |F(e^{j\omega})| = \left| \frac{3}{5-4\cos\omega} \right| = \frac{3}{5-4\cos\omega} \\ \arg\{F(e^{j\omega})\} = 0 \end{array} \right\}$ $\in [\frac{1}{3}, 3]$

$\cos\omega = -1 \Rightarrow |F(e^{j\omega})| = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $\omega = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos\omega = 1 \Rightarrow |F(e^{j\omega})| = 3$; $\omega = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

---

b) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-4m]$ ∘ A ojo se ve, pero vamos a ser rigurosos

x[n] periódica de periodo N ⟺ $X(e^{j\omega})$ son deltas equiespaciad

$$\boxed{X(e^{j\omega})} \doteq \mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-4m]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n] * \delta[n-4m]\right\} = \mathcal{F}\left\{f[n] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-4m]\right\} =$$

$$= F(e^{j\omega}) \cdot \mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-4m]\right\} = F(e^{j\omega}) \frac{2\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{F(e^{jk\frac{\pi}{2}})}{4}}_{a_k} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right) \doteq \boxed{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)}$$

DELTAS EQUIESPACIADAS ⇒ x[n] periódi N=4

- $\boxed{a_k} \doteq \frac{F(e^{jk\frac{\pi}{2}})}{4} \doteq \boxed{\frac{1}{4} \frac{3}{5-4\cos(k\frac{\pi}{2})} \quad \forall k}$

$a_0 = \frac{3}{4}$ $\qquad a_4 = a_0$

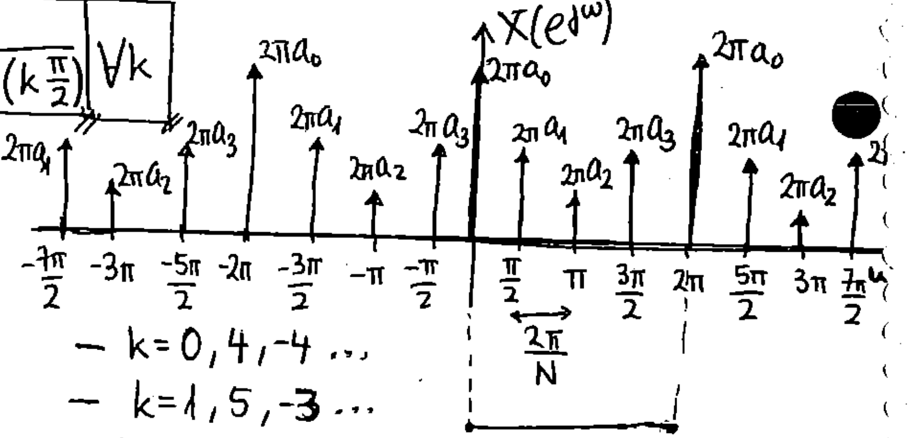
$a_1 = \frac{3}{20}$ $\qquad a_5 = a_1$ $\qquad$ (etc)

$a_2 = \frac{1}{12}$ $\qquad a_6 = a_2$

$a_3 = \frac{3}{20}$ $\qquad a_7 = a_3$

⋮

$a_k = a_{k \pm 4q}$, $q \in \mathbb{Z}$



— k=0, 4, -4 ...

— k=1, 5, -3 ...

— k=2, 6, -2 ...

— k=3, 7, -1 ...

CONTINÚA

SIGUE E-41 c)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]+x[n-2]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+X(e^{j\omega})+e^{-j\omega 2}X(e^{j\omega})$$

- Por ser LTI: $y[n]=x[n]*h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})}=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\cancel{X(e^{j\omega})}^{1}+e^{-j\omega 2}\cancel{X(e^{j\omega})}}{\cancel{X(e^{j\omega})}\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]}=\boxed{\frac{1+e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}}//$$

- $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)\cdot\frac{1+e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\frac{1+e^{-jk\frac{\pi}{\cancel{2}}\cancel{2}}}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{2}}}\cdot\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{a_k\frac{1+(-1)^k}{1-\frac{1}{2}(-j)^k}}_{b_k}\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

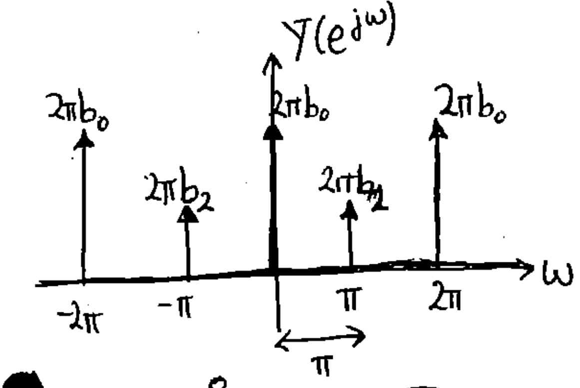
b_k: coeficientes del DSF de $y[n]$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}\boxed{y[n]}=\sum_{k=\langle N\rangle}b_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=0}^{3}b_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=b_0\cancel{e^{j0}}+b_1e^{j\frac{\pi}{2}n}+b_2e^{j\pi n}+b_3e^{j\frac{3\pi}{2}n}=$$

$b_0=3$ $\quad$ $b_2=\frac{1}{9}$

$b_1=b_3=0$

$$=3+\frac{1}{9}(e^{j\pi})^n=\boxed{3+\frac{1}{9}(-1)^n}//$$

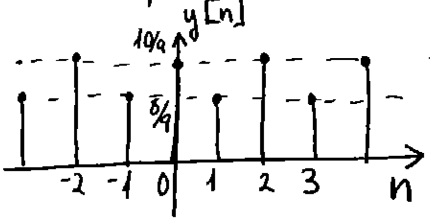


- En este caso el espaciado entre deltas es:

$$\frac{2\pi}{N_2}=\pi\Rightarrow\boxed{N_2=2}//$$

- Así que $y[n]$ es periódica de periodo $N_2=2$

$$y[n]=\boxed{\begin{cases}\frac{10}{9}\ ; & n=\dot{2}\\ \frac{8}{9}\ ; & n\neq\dot{2}\end{cases}}//$$



Ha habido un filtrado

1-12-2008

FEBRERO 2001

3. Considérese un sistema discreto lineal, invariante en el tiempo y causal, caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-3]=x[n]-x[n-2]$$

donde $x[n]$ es la secuencia de entrada e $y[n]$ es la secuencia de salida. Suponiendo que $x[n]$ es la secuencia periódica siguiente:

$$x[n]=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)+2\cos\pi n$$

Determine:

a) El periodo de $x[n]$ y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.

b) La respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j\omega})$ y la transformada de Fourier de la señal de salida, $Y(e^{j\omega})$.

c) La secuencia de la salida $y[n]$.

---

a) $x[n]=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)+2\cos(\pi n)=1+\cancel{2}\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{\cancel{2}}+\cancel{2}\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}-e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{\cancel{2}j}+\ldots$

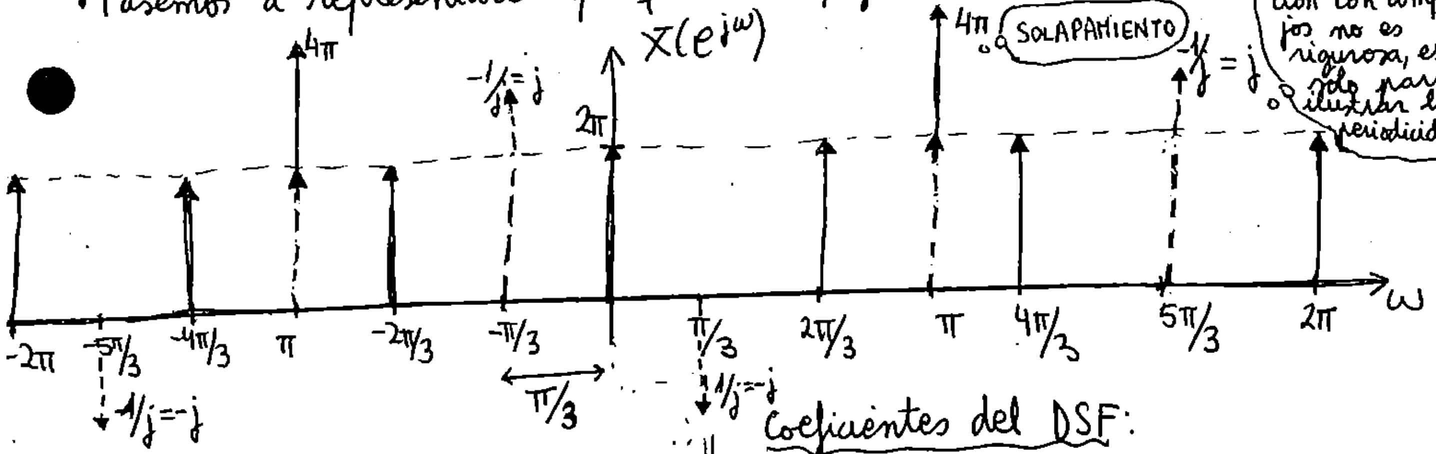
$\ldots+\cancel{2}\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{\cancel{2}}=1+e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{1}{j}e^{j\frac{\pi}{3}n}-\frac{1}{j}e^{-j\frac{\pi}{3}n}+e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}$

$$\mathcal{F}\updownarrow\quad \boxed{e^{j\omega_0 n}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)}$$

$$X(e^{j\omega})=\underbrace{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)}+\underbrace{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{3}-2k\pi\right)}+\underbrace{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{j}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}-2\pi k\right)-\frac{1}{j}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}-2\pi k\right)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2\pi k)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\pi-2k\pi)$$

- Pasemos a representarla porque se simplificará la cosa:



La representación con complejos no es rigurosa, es sólo para ilustrar la periodicidad

$X(e^{j\omega})$ es un espectro de deltas equiespaciadas cada $\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{N}\Rightarrow\boxed{N=6}$

$\boxed{x[n]\text{ periódica de periodo }N=6}$

Coeficientes del DSF:

$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)\Longrightarrow$$

$a_0=1$	$a_2=1$	$a_4=1$
$a_1=\frac{1}{j}=-j$	$a_3=2$	$a_5=-\frac{1}{j}=j$

(Seis coefic. al ser N=6)

b) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-3]=x[n]-x[n-2] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})+\frac{1}{2}e^{-j\omega 3}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})-e^{-j\omega 2}X(e^{j\omega})$ [illegible]

- $Y(e^{j\omega})[1+\frac{1}{2}e^{-j3\omega}]=X(e^{j\omega})[1-e^{-2j\omega}] \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})}=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\boxed{\frac{1-e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-3j\omega}}}$

– Ahora: $y[n]=x[n]*h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

$x[n]=\sum_{n=0}^{5}a_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{6})$

– Así que: $\boxed{Y(e^{j\omega})}=H(e^{j\omega})\cdot 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{6})=\boxed{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{a_k H(e^{jk\frac{\pi}{3}})}_{b_k \text{ coef del DSF de } y[n]}\delta(\omega-k\frac{\pi}{3})}$

---

c) $Y(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\delta(\omega-\frac{\pi}{3}k) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} y[n]=\sum_{k=0}^{5}b_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

– Calculemos: $\boxed{b_k}=a_k H(e^{jk\frac{\pi}{3}})=a_k\frac{1-e^{-2jk\frac{\pi}{3}}}{1+\frac{1}{2}e^{-3jk\frac{\pi}{3}}}=a_k\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi k}}=\boxed{a_k\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1+\frac{1}{2}(-1)}}$

$\underline{k=0}$ $\boxed{b_0}=a_0\frac{1-\cancel{e^{0}}^{1}}{1+\frac{1}{2}}=\boxed{0}$

$\underline{k=1}$ $\boxed{b_1}=a_1\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1-\frac{1}{2}}=-j\frac{1-e^{j\frac{4\pi}{3}}}{1/2}=-2j[1-(\cos\frac{4\pi}{3}+j\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{3})]=-2j[1-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)]=$

$=-2j(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)=-3j-\sqrt{3}j^2=\boxed{\sqrt{3}-3j}$

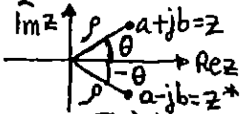
$\underline{k=2}$ $\boxed{b_2}=a_2\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{1+\frac{1}{2}}=1\cdot\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{3}}}{3/2}=\frac{2}{3}[1-(\cos\frac{2\pi}{3}+j\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3})]=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)]=\boxed{1-\frac{\sqrt{3}}{3}j}$

· Haciendo cuentas análogas: $\underline{k=3}$ $\boxed{b_3=0}$ $\underline{k=4}$ $\boxed{b_4=1+\frac{\sqrt{3}}{3}j=b_2^*}$ $\underline{k=5}$ $\boxed{b_5=\sqrt{3}+3j=b_1^*}$

· Así que: $\boxed{y[n]}=\sum_{k=0}^{5}b_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}=\cancel{b_0 e^{0}}^{0}+b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}+b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}+\cancel{b_3e^{j\pi n}}^{0}+b_4e^{j\frac{4\pi}{3}n}+b_5e^{j\frac{5\pi}{3}n}=$

$=b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}+b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}+b_2^*e^{j\frac{4\pi}{3}n}+b_1^*e^{j\frac{5\pi}{3}n}=b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}+b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}+b_2^*(e^{j\frac{2\pi}{3}n})^*+b_1^*(e^{j\frac{\pi}{3}n})^*=$

$\boxed{b_4=b_2^*}$
$\boxed{b_5=b_1^*}$



$\boxed{e^{j\frac{4\pi}{3}n}=e^{-j\frac{2\pi}{3}n}=(e^{j\frac{2\pi}{3}n})^*}$ $\boxed{e^{j\frac{5\pi}{3}n}=e^{-j\frac{\pi}{3}n}=(e^{j\frac{\pi}{3}n})^*}$

$=b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}+(b_1e^{j\frac{\pi}{3}n})^*+b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}+(b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n})^*=2\,\mathrm{Re}\{b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}\}+2\,\mathrm{Re}\{b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}\}=$

$z_1^*z_2^*=(z_1z_2)^*$

$z+z^*=2\,\mathrm{Re}\,z$

► $\mathrm{Re}\{b_1e^{j\frac{\pi}{3}n}\}=\mathrm{Re}\{(\sqrt{3}-3j)[\cos\frac{\pi}{3}n+j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}n]\}=\mathrm{Re}\{\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}n)+3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}n)+j(\ldots)\}=$

$=\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}n)+3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}n)$

► $\mathrm{Re}\{b_2e^{j\frac{2\pi}{3}n}\}=\mathrm{Re}\{(1-\frac{\sqrt{3}}{3}j)[\cos(\frac{2\pi}{3}n)+j\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}n)]\}=\mathrm{Re}\{\cos(\frac{2\pi}{3}n)+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}n)+j(\ldots)\}=$

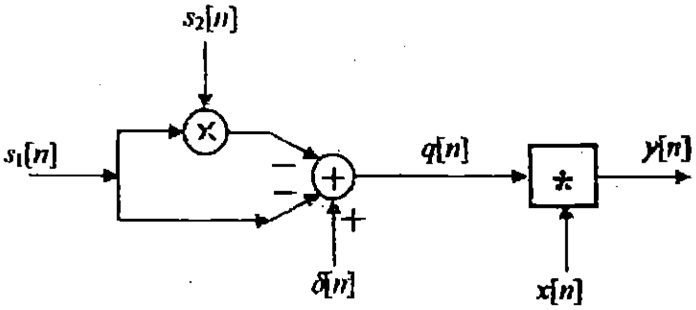
$=\cos(\frac{2\pi}{3}n)+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}n)$

$=\boxed{2[\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}n)+3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}n)+\cos(\frac{2\pi}{3}n)+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}n)]}$

10-12-2008

JUNIO 2004

3. Sea el siguiente sistema en tiempo discreto:



Donde el asterisco (*) representa la operación de convolución. Dadas las señales:

$$s_1[n]=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$$

$$s_2[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

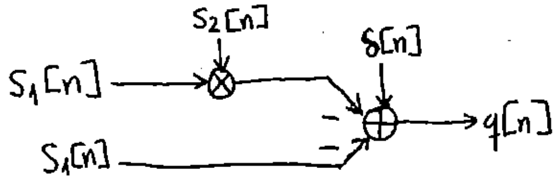
(a) Obtenga $Q(e^{j\omega})$ y represéntela gráficamente.

(b) Calcule $y[n]$ si $x[n]=1+\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

(c) Calcule $y[n]$ si $x[n]=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

---

a)



$S_1[n]=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$; $S_2[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

- $q[n]=\delta[n]-S_1[n]\,S_2[n]-S_1[n]$

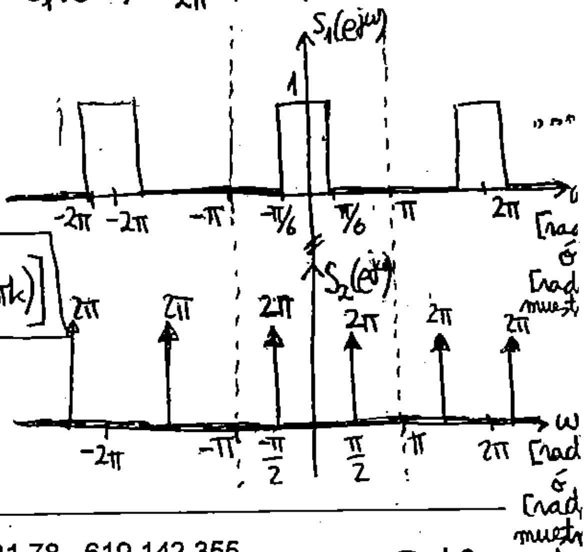
$\updownarrow\mathcal{F}$

- $Q(e^{j\omega})=\mathcal{F}\{\delta[n]\}-\mathcal{F}\{s_1[n]\,S_2[n]\}-\mathcal{F}\{S_1[n]\}=1-S_1(e^{j\omega})-\frac{1}{2\pi}S_1(e^{j\omega})\circledast S_2(e^{j\omega})$;

- $\boxed{S_1(e^{j\omega})}=\mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}\right\}=\boxed{\begin{cases}1 \text{ ,, } |\omega|\leq\frac{\pi}{6}\\ 0 \text{ ,, } \pi/6<|\omega|<\pi\\ \text{PERIÓDICA } 2\pi\end{cases}}$

- $\boxed{S_2(e^{j\omega})}=2\mathcal{F}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}=\boxed{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right]}$

(También periódica 2π)



SIGUE

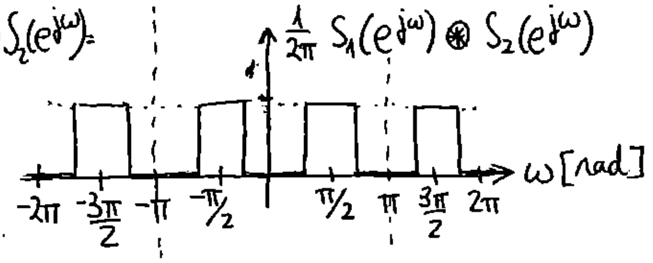
SIGUE

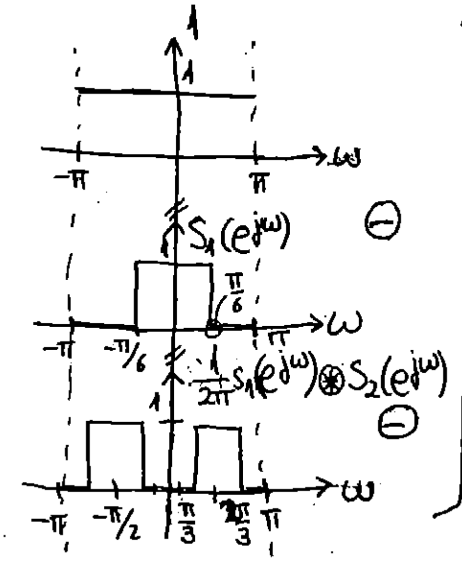
Hacemos ahora: $\boxed{S_1(e^{j\omega}) \circledast S_2(e^{j\omega})} = \boxed{S_{2p}(e^{j\omega})} * S_1(e^{j\omega}) = 2\pi\left[\delta(\omega-\frac{\pi}{2})+\delta(\omega+\frac{\pi}{2})\right] * S_1(e^{j\omega}) =$ → un periodo de

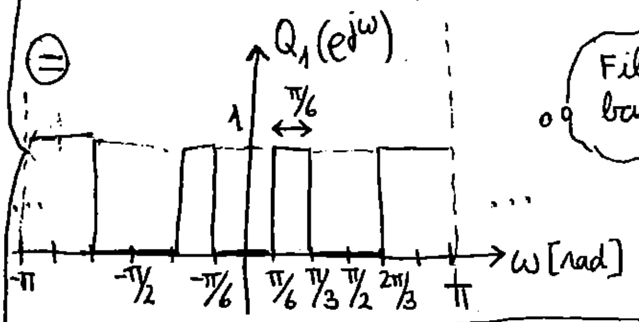
$$= \boxed{2\pi\left[S_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}) + S_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})\right]}$$ ∘ Periódica 2π

- **Finalmente**: $\boxed{Q(e^{j\omega})} = 1 - S_1(e^{j\omega}) - \frac{1}{2\pi} S_1(e^{j\omega}) \circledast S_2(e^{j\omega}) =$

$$= \boxed{1 - S_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}) - S_1(e^{j\omega}) - S_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})}$$





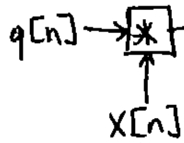


∘ Filtro de bandas eliminadas

$$\boxed{Q(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi/6 < |\omega| < \pi/3 \text{ ó } 2\pi/3 < |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| < \pi/6 \text{ ó } \pi/3 < |\omega| < 2\pi/3 \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}}$$

---

b)



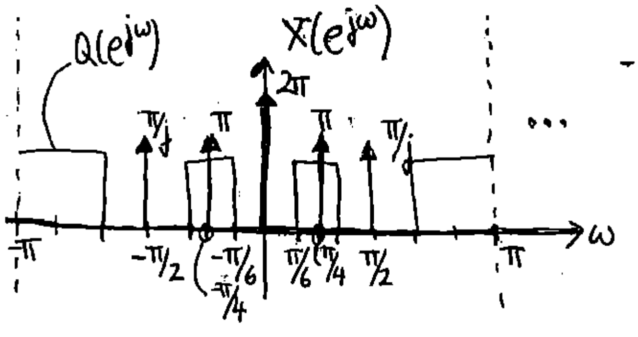
$y[n] = q[n] * x[n]$

$\updownarrow \mathcal{F}$

$Y(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

∘ NOTA: $\not\approx$ $q[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ x[n]=h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n] = q[n] * x[n]$

- $x[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{4}n) + \text{sen}(\frac{\pi}{2}n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \underbrace{\mathcal{F}\{1\}}_{X_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\mathcal{F}\{\cos(\frac{\pi}{4}n)\}}_{X_2(e^{j\omega})} + \underbrace{\mathcal{F}\{\text{sen}(\frac{\pi}{2}n)\}}_{X_3(e^{j\omega})}$
- $X_1(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \begin{cases} 2\pi\delta(\omega) \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$
- $X_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\cos(\frac{\pi}{4}n)\} = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k)\right] = \begin{cases} \pi[\delta(\omega-\frac{\pi}{4}) + \delta(\omega+\frac{\pi}{4}) \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$
- $X_3(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\text{sen}(\frac{\pi}{2}n)\} = \frac{\pi}{j} \sum_{k=\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) - \delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi k)\right] = \begin{cases} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\frac{\pi}{2}) + \delta(\omega+\frac{\pi}{2})] \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$



- Gráficamente vemos que: $\boxed{Y(e^{j\omega})} = X(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}) = \boxed{X_2(e^{j\omega})}$

$\updownarrow \mathcal{F}$

$$\boxed{y[n]} = x_2[n] = \boxed{\cos(\frac{\pi}{4}n)}$$

CONTINÚA

16-12-2008

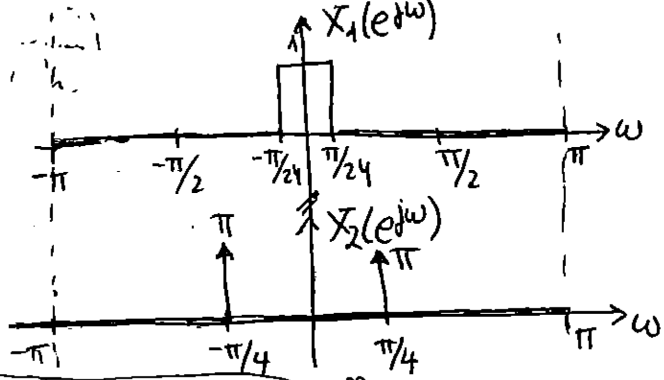
CONTINÚA E-43

c) $x[n] = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{24}n)}{\pi n} \cos(\frac{\pi}{4}n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} F\left\{\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{24}n)}{\pi n}\right\} \circledast F\left\{\cos(\frac{\pi}{4}n)\right\} =$

$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega})$, siendo:

$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{24} \\ 0 \ , \ \frac{\pi}{24} < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \text{Periódica } 2\pi$$

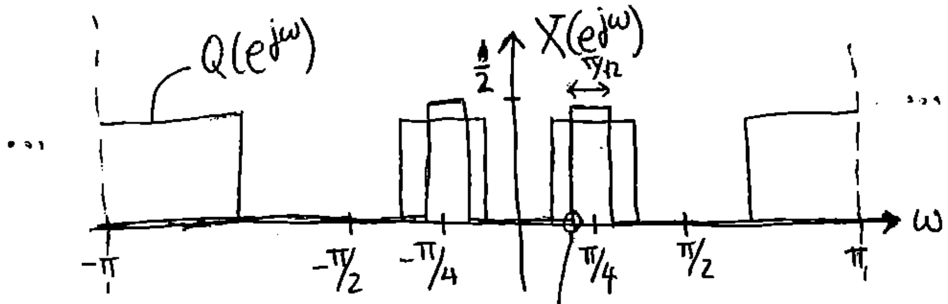
$$X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} \pi[\delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4})] \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$



- $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\boxed{X_{p_1}(e^{j\omega}) * X_{p_2}(e^{j\omega})}}_{Z_p(e^{j\omega})} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) =$

$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_p(e^{j(\omega - 2k\pi)})$

- $Z_p(e^{j\omega}) = X_{p_1}(e^{j\omega}) * X_{p_2}(e^{j\omega}) = \pi\left[X_{p_1}(e^{j(\omega - \frac{\pi}{4})}) + X_{p_1}(e^{j(\omega + \frac{\pi}{4})})\right]$



$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24} = \frac{5\pi}{24} > \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$

Gráficamente se ve que $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Q(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$

$\boxed{y[n]} = x[n] = \boxed{\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{24}n)}{\pi n} \cos(\frac{\pi}{4}n)}$ $\xleftrightarrow{F}$

10-12-2008

FEBRERO 2008

Ejercicio 1

Sea una señal $x[n]$ arbitraria que se expresa como una combinación lineal de otra función $g[n]$ y de sus versiones desplazadas:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k g[n-k]$$

donde c_k son los coeficientes. Dicha señal atraviesa un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ -1 & n<0\end{cases}$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{c_k}_{\text{coeficientes}}g[n-k]\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}}\longrightarrow y[n]$$

obteniéndose una señal a su salida denotada como $y[n]$.

a) Suponiendo que $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, calcule la secuencia que representa a los coeficientes $c[n]=c_n$ en función de $x[n]$, asumiendo ésta conocida. Resuélvalo en el dominio de la frecuencia.

b) Calcule la respuesta del sistema, que denominaremos $d[n]$, a la señal $g[n]=a^n u[n]$, $0<a<1$, operando exclusivamente en el dominio del tiempo. Halle la respuesta $y[n]$ a la entrada $x[n]$ en función de $c[n]$ y $d[n]$, supuestas conocidas.

c) Suponiendo que $g[n]=e^{j\omega_0 n}$ siendo ω_0 un parámetro real arbitrario, calcule la expresión de la salida $y[n]$ expresada en función de $C(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$, asumiendo que son conocidas.

---

a) $C_n=C[n]\Leftrightarrow C_k=C[k]$

$$\cdot\ X(e^{j\omega})=\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,g[n-k]\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,\mathcal{F}\{g[n-k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,G(e^{j\omega})e^{-j\omega k}=G(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty}C[k]e^{-j\omega k}=$$

$$=G(e^{j\omega})\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}C[n]e^{-j\omega n}}_{\text{¡¡Definición de }C(e^{j\omega})!!}=G(e^{j\omega})C(e^{j\omega})\overset{\uparrow}{=}C(e^{j\omega})\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\Rightarrow$$

$g[n]=a^n u[n]\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ " $a\in(0,1)$

$$C(e^{j\omega})=(1-ae^{-j\omega})X(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})-a\,X(e^{j\omega})e^{-j\omega}\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}\boxed{c[n]=x[n]-ax[n-1]}$$

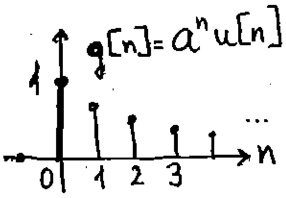
- **Alternativa**: $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,g[n-k]=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}C[k]\,g[n-k]}_{\text{¡¡Definición de convolución!!}}=c[n]*g[n]\xrightarrow{\mathcal{F}}$

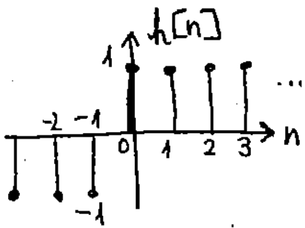
$$\xrightarrow{\mathcal{F}}X(e^{j\omega})=C(e^{j\omega})G(e^{j\omega})=C(e^{j\omega})\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\Rightarrow\ldots\Rightarrow c[n]=x[n]-ax[n-1]$$

---

b) $$x[n]=g[n]=a^n u[n]\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}}\longrightarrow y[n]=d[n]=g[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,g[n-k]$$

¡Qué desgraciados que son con la nomenclatura! ¬¬U



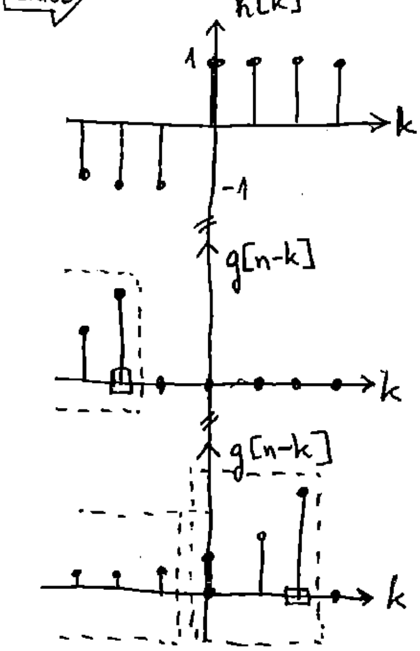


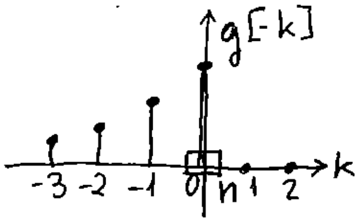
g[n] es finita por la izquierda, luego es más fácil de "desplazar"

SIGUE

SIGUE

16-11-2008





- **Caso $n<0$** $d[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]g[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)a^{n-k}u[n-k]=$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{n}a^{n}a^{-k}=-a^{n}\sum_{k=-\infty}^{n}a^{-k}\overset{\uparrow}{=}-a^{n}\sum_{m=-n}^{\infty}a^{m}=-a^{n}\left[\sum_{m=0}^{\infty}a^{m}+\sum_{m=-n}^{-1}a\right.$$

CAMBIO VARIABLE
$m=-k$
$k=-\infty\Rightarrow m=\infty$
$k=n\Rightarrow m=-n$

CAMBIO VARIABLE
$p=-m$
$m=-1\Rightarrow p=1$
$m=-n\Rightarrow p=n$

$$=-a^{n}\left[\sum_{m=0}^{\infty}a^{m}+\sum_{p=1}^{n}a^{-p}\right]=-a^{n}\left[\frac{1}{1-a}+\frac{a^{-1}(1-a^{-n})}{1-a^{-1}}\right]=\quad |a|<1\ ✓$$

$$=-a^{n}\left[\frac{1}{1-a}+\frac{1-a^{-n}}{a-1}\right]=-a^{n}\left[\frac{\cancel{1}}{1-a}+\frac{a^{-n}-\cancel{1}}{1-a}\right]=$$

$$=\frac{-\cancel{a^{n}a^{-n}}}{1-a}=\frac{1}{a-1}$$

- **Caso $n\geq 0$** $d[n]=\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)a^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}=-a^{n}\sum_{k=-\infty}^{-1}a^{-k}+a^{n}\sum_{k=0}^{n}a^{-k}=-a^{n}\sum_{m=1}^{\infty}a^{m}+a^{n}\sum_{k=0}^{n}($

$$=a^{n}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{a}{1-a}\right]=a^{n}\left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{n}-a}{1-a}-\frac{a}{1-a}\right]=\frac{\cancel{a^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}}-2a^{n+1}}{1-a}=\frac{2a^{n+1}-}{a-}$$

$$\gg\boxed{d[n]}=\begin{cases}\frac{1}{a-1} & 〃\ n<0\\ \frac{2a^{n+1}-1}{a-1} & 〃\ n\geq 0\end{cases}\quad=\boxed{\frac{1}{a-1}\left\{(2a^{n+1}-1)u[n]+u[-n-1]\right\}}$$

- Y ahora: $\boxed{y[n]}=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,g[n-k]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C[k]\,g[n-k]*h[n]=$

$$=c[n]*\underbrace{g[n]*h[n]}_{!!d[n]!!}=\boxed{c[n]*d[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,d[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d[k]\,C[n-k]}$$

---

c) $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,g[n-k]\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\h[n]\end{matrix}}\longrightarrow y[n]=c[n]*g[n]*h[n]\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}Y(e^{j\omega})=C(e^{j\omega})G(e^{j\omega})H(e$

$$g[n]=e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{\mathcal{F}}G(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

▸ $Y(e^{j\omega})=C(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\,2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-(\omega_0+2k\pi))=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}C(e^{j(\omega_0+2k\pi)})H(e^{j(\omega_0+2k\pi)})\,\delta(\omega-(\omega_0+$

$$\overset{\uparrow}{=}2\pi H(e^{j\omega_0})C(e^{j\omega_0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)\ \rceil\mathcal{F}^{-1}$$

TF en tiempo discreto es periódica 2π
$C(e^{j\omega_0}\underbrace{e^{j2k\pi}}_{1})=C(e^{j\omega_0})$

¡números, no funciones!

$$\boxed{y[n]}=\mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}=\boxed{C(e^{j\omega_0})H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}}$$

$$=\boxed{C(e^{j\omega_0})H(e^{j\omega_0})\,g[n]}$$

<u>NOTA</u>: g[n] es una AUTOFUNCIÓN del sistema (sale ella misma con un escalado a la salida)

FEBRERO 1999

2. Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$$

$x[n] \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y[n]$

a) Determine su respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso.

b) Suponga que la señal de entrada a dicho sistema es:

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Calcule la expresión de la salida $y[n]$.

c) Descomponga el sistema descrito en el apartado a) utilizando exclusivamente en su diseño una conexión de subsistemas cuya respuesta al impulso sea de la forma general:

$$h_s[n]=K\,a^{n-n_0}\,u[n-n_0]$$

---

a) $y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})-e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+\frac{1}{4}e^{-j\omega 2}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})-\frac{1}{4}e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$

$$\boxed{H(e^{j\omega})}=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\boxed{\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j\omega 2}}}=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{\frac{1}{4}(e^{-j\omega}-2)^2}=\boxed{\frac{4-e^{-j\omega}}{(2-e^{-j\omega})^2}};$$

Ahora hallemos $h[n]$

Para una ec 2º grado
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
x_1, x_2 raíces

$$e^{-j\omega}=\frac{1\pm\sqrt{1-1}}{1/2}=2\text{, doble}$$

$\boxed{(a-b)^2=(b-a)^2}$

→ aptdo c)

1ª idea $H(e^{j\omega})=\frac{2}{(2-e^{-j\omega})^2}+\frac{\cancel{2-e^{-j\omega}}^{\,1}}{(2-e^{-j\omega})^{\cancel{2}}}\overset{[\sim]}{=}2\frac{1}{(2-e^{-j\omega})^2}+\frac{1}{2-e^{-j\omega}}\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}$

$$\boxed{h[n]}=\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}=2\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2-e^{-j\omega})^2}\right\}+\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2-e^{-j\omega}}\right\}=\cancel{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1/\cancel{4}^{\,2}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}\right\}+\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2)u[n]}\quad [I]$$

$\left|\frac{1}{2}\right|<1$ ✓

2ª idea: Solución oficial

→ aptdo b)

$$H(e^{j\omega})=\frac{4-e^{-j\omega}}{4(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}\overset{[\Diamond]}{=}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}$$

$$\boxed{h[n]}=\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\underbrace{\frac{1}{4}}_{=(\frac{1}{2})^2}([n-\cancel{1}]+\cancel{1})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=$$

$$=\boxed{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n-1]}\quad [II]$$

- Demostremos que son la misma expresión: $u[n]=\delta[n]+u[n-1]$

$[II]\rightarrow \cancel{(0+1)\left(\frac{1}{2}\right)^0}\delta[n]+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]-\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]=\delta[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]+\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

$=\delta[n]+\left(1+\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]=\delta[n]+(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2)u[n]\rightarrow[I]$

$\boxed{(0+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}=1}$

cqd

b) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$; $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ ✓

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\cancel{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}}_{} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

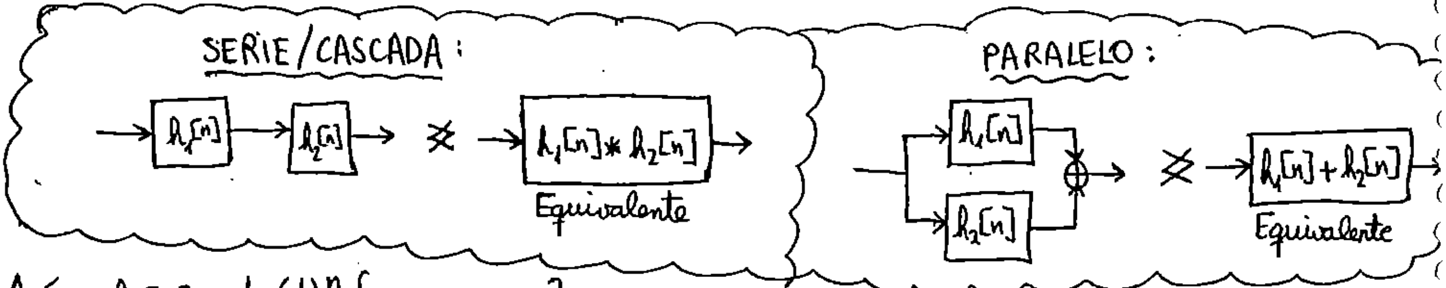
Mirar en [◊] en el aptdo anterior

$$\boxed{y[n] = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

NOTA: Aunque x[n] y h[n] ambas están multiplicadas por u[n], no es recomendable hacer la convolución en el dominio del tiempo, pues va a quedar un sumatorio chungo de calcular, $\sum_{k=0}^{n} k2^k$ o similar, que si no te acuerdas bien de FMT2 lo llevas claro... Además, en el dominio de la frecuencia este apartado es muy sencillito...

---

c) Hemos de descomponer el LTI con $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2)u[n]$ en subsistemas con $h_i[n] = K_i\, a_i^{n-n_i}\, u[n-n_i]$. Para ello es conveniente recordar la asociación de LTIs:



Así: $h[n] \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{u[n] * u[n]\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{??}{=} \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n}$

$\boxed{u[n] * u[n] = (n+1)u[n] \quad \text{Ver E-14}}$

¡¡NO!! ¡¡No nos inventemos propiedades!!

¡¡ $f[n]\cdot\left\{\tilde{x}[n] * g[n]\right\} \neq f[n]\tilde{x}[n] * f[n]g[n]$ (por lo general)

- Las operaciones de deconvolución son muy complicadas. Pero si tenemos en cuenta que $H_i(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{h_i[n]\right\} = K_i\, e^{-j\omega n_i} \frac{1}{1-a_i e^{-j\omega}}$ siempre que $|a_i| < 1$, podemos trabajar en el dominio de la frecuencia con $H(e^{j\omega})$, a ver si llegamos a algo:

$$\cdot\; H(e^{j\omega}) = 2\frac{1}{(2-e^{-j\omega})^2} + \frac{1}{2-e^{-j\omega}} = \frac{1}{2-e^{-j\omega}}\left[\frac{2}{2-e^{-j\omega}} + 1\right] = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1-\frac{1}{2}e^{-}}{1-\frac{1}{2}e}\right.$$

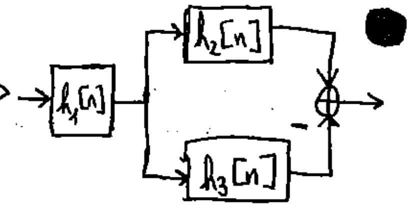
No queremos ese 1^2

No queremos $\delta[n]$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\left[2\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

¡¡Ahora sí!! Un desplazamiento no nos importa

$$\cdot\;\boxed{h[n] = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h_1[n]} * \left[\underbrace{2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h_2[n]} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]}_{h_3[n]}\right]} \Rightarrow$$



FEBRERO 2002

3. Sea un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n]-a^2y[n-2]=x[n-2]-a^2x[n]$$

donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ es la salida y a es un parámetro real tal que $0<a<1$.

a) Calcule la función de transferencia del sistema. Represente su diagrama de polos y ceros.

b) Demuestre que el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema vale 1 para todo ω.

c) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, detallando el valor de la función para n par e impar.

d) Suponiendo que la entrada $x[n]$ es una secuencia finita de energía unidad, calcule la energía de la secuencia de salida $y[n]$.

---

a) Aunque en el enunciado pide $H(z)$ directamente, en ejercicios de ecuaciones en diferencias conviene usar TZ en vez de TF ya que, a menos que lo especifiquen o pidan $H(e^{j\omega})$, no sabemos si el LTI es estable o no.

$$y[n]-a^2y[n-2]=x[n-2]-a^2x[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)-a^2z^{-2}Y(z)=z^{-2}X(z)-a^2X(z)$$

$$\boxed{H(z)} \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{z^{-2}-a^2}{1-a^2z^{-2}}}$$

NOTA

$$\frac{1}{(1-az^{-1})(1+bz^{-1})} \quad \text{Polos en } z=a, z=-b$$

- Diagrama de polos y ceros
  - POLOS: valores de z que hacen que $H(z)=\infty$
  - CEROS: " " " " " " $H(z)=0$

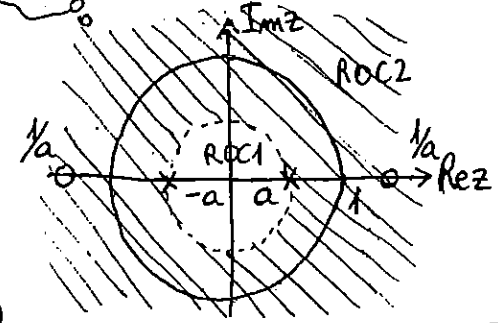
$$H(z)=\frac{z^{-2}-a^2}{1-a^2z^{-2}}=\frac{(z^{-1}+a)(z^{-1}-a)}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}=\left(\frac{z^{-1}+a}{a}\right)a\left(\frac{z^{-1}-a}{-a}\right)(-a)\frac{1}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}=$$

¡OJO que $0<a<1$!

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{a}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)}{(1+az^{-1})(1-az^{-1})}(a^2)$$

$$\begin{cases}\boxed{\text{Polos: } z=\pm a} \\ \boxed{\text{Ceros: } z=\pm\frac{1}{a}}\end{cases}$$

CAUSAL ≡ hacia fuera del polo más externo



ROC 1: $|z|<a$: Anticausal, No estable

$$\boxed{\text{ROC 2} \; \boxed{|z|>a} \; \text{Causal, estable}}$$

DATO

- No es de fase mínima
- Ahora sabemos que $\exists$TF y además $H(e^{j\omega})=H(z)\big]_{z=e^{j\omega}}$

Si hubieran dicho anticausal, $\nexists H(e^{j\omega})$ pues la ROC de $H(z)$ no incluiría la circunferencia unidad

b) $H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}}$

$$\bullet\ \boxed{|H(e^{j\omega})|^2} \overset{\uparrow}{=} H(e^{j\omega})\,H^*(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}}\cdot\frac{e^{2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{2j\omega}} = \frac{1-a^2e^{-2j\omega}-a^2e^{2j\omega}+a^4}{1-a^2e^{2j\omega}-a^2e^{-2j\omega}+a^4} = \boxed{1}$$

$\boxed{z\cdot z^*=|z|^2}$ $\boxed{(z_1+z_2)^* = z_1^*+z_2^*}$ $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}}$

$\Rightarrow \boxed{|H(e^{j\omega})|} = \sqrt{1} = \boxed{1}$ cqd.

Un poco de idea feliz pero a la próxima se nos tiene que ocurrir

---

c) $$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{1-a^2e^{-2j\omega}} = \frac{e^{-2j\omega}-a^2}{(1+ae^{-j\omega})(1-ae^{-j\omega})} = e^{-2j\omega}\underbrace{\frac{1}{(1+ae^{-j\omega})(1-ae^{-j\omega})}}_{H_1(e^{j\omega})} - a^2\underbrace{\frac{1}{(1+ae^{-j\omega})(1-ae^{-j\omega})}}_{H_1(e^{j\omega})}$$

$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2j\omega}H_1(e^{j\omega})\} - a^2\mathcal{F}^{-1}\{H_1(e^{j\omega})\} = h_1[n-2]-a^2h_1[n];$$

$$= \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1+ae^{-j\omega}} \overset{\uparrow}{=} \frac{1/2}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1/2}{1+ae^{-j\omega}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

SISTEMA	POLOS
$1 = A(1+ae^{-j\omega}) + B(1-ae^{-j\omega})$ $\Downarrow$ $\begin{cases} 0 = aA - aB \rightarrow A = B \\ 1 = A + B \rightarrow \boxed{A=B=\frac{1}{2}} \end{cases}$	$A = (1-ae^{-j\omega})H(e^{j\omega})\Big\rvert_{e^{j\omega}=a} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $B = (1+ae^{-j\omega})H(e^{j\omega})\Big\rvert_{e^{j\omega}=-a} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_1[n] = \frac{1}{2}a^n u[n] + \frac{1}{2}(-a)^n u[n] = \frac{1}{2}[1+(-1)^n]a^n u[n]$$

$a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

- Finalmente: $$\boxed{h[n]} = h_1[n-2]-a^2h_1[n] = \boxed{\frac{1}{2}[1+\overbrace{(-1)^{n-2}}^{(-1)^n}]a^{n-2}u[n-2] - a^{n+2}\frac{1}{2}[1+(-1)^n]u[n]}$$

$$\bullet\ \boxed{h[n] = \begin{cases} a^{n-2}u[n-2] - a^{n+2}u[n] & ,\ n \text{ par} \equiv n = \dot{2} \\ 0 & ,\ n \text{ impar} \equiv n \neq \dot{2} \end{cases}}$$

---

d) $$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1$$ DATO: x[n] energía unidad

Relación Parseval

$$\bullet\ \boxed{E_y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|Y(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|X(e^{j\omega})|^2\underbrace{|H(e^{j\omega})|^2}_{1 \text{ por lo visto en b)}} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \boxed{E_x = 1}$$

SEPTIEMBRE 2007

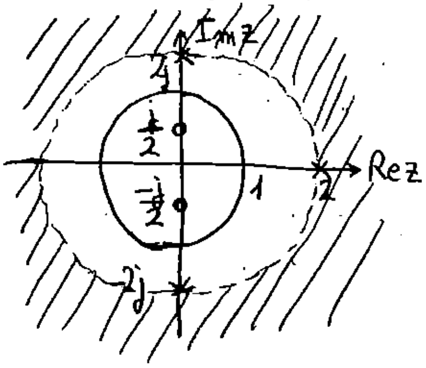
Ejercicio 3

Considere un sistema de tiempo discreto lineal, invariante y causal descrito por los polos $(z_{p1} = 2,\ z_{p2} = j2, z_{p3} = -j2)$, los ceros $(z_{c1} = j/2,\ z_{c2} = -j/2)$ y la unidad como constante multiplicativa de la función de transferencia:

a) Calcule la función de transferencia del sistema.
b) ¿Es estable el filtro? ¿Y su inverso? Razone la respuesta.
c) Calcule la respuesta al impulso del sistema.

---

a) Diagrama de polos y ceros:



- Hay dos posibles ROC:
  - $|z|<2$ Sist anticausal, estable
  - $\boxed{|z|>2}$ Sist causal, no estable (no incluye la circunferencia unidad)
- Por el enunciado sabemos que $H(z)$ es de la forma:

$$\boxed{H(z) = k\,\frac{(z-j/2)(z+j/2)}{(z-2)(z-2j)(z+2j)}}$$

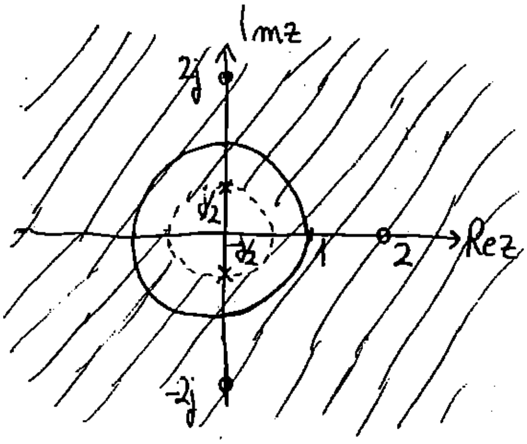
- Y en el enunciado se nos especifica que $k=1$ (aunque suena algo ambiguo eso de constante multiplicativa la unidad ^^U)

$$\boxed{H(z)} = \frac{(z-j/2)(z+j/2)}{(z-2)(z-2j)(z+2j)} = \frac{(z-j/2)z^{-1}\,(z+j/2)z^{-1}}{(z-2)z^{-1}(z-2j)z^{-1}\,(z+2j)z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}\cancel{z^{-1}}\,\cancel{z^{-1}}}{\cancel{z^{-1}}\,\cancel{z^{-1}}} = \boxed{z^{-1}\frac{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})}}$$

---

b) - El filtro (que se sobreentiende que es el sistema del cual hablamos) $\boxed{\text{NO ES ESTABLE}}$ porque su ROC no incluye la circunferencia unidad (aptdo a)

- El sistema inverso es: $\boxed{H_I(z)} = \frac{1}{H(z)} = \boxed{z\,\frac{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}}$ Los polos de $H(z)$ son los ceros de $H_I(z)$ y viceversa



- El sistema inverso debe tener como ROC una cuya intersección sea NO NULA con la ROC del sistema original $(|z|>2)$
- Posibles ROC:
  - $|z|<\frac{1}{2} \Rightarrow |z|<\frac{1}{2} \cap |z|>2 = \emptyset$
  - $|z|>\frac{1}{2} \Rightarrow |z|>1/2 \cap |z|>2 = \frac{1}{2}<|z|<2 \neq \emptyset$
- La ROC es $\boxed{|z|>\frac{1}{2}}$
- Como incluye la circunferencia unidad su ROC, $\boxed{\text{el sistema inverso es estable}}$

c) $$\boxed{H(z)} = \frac{z^{-1}\left(1-\frac{j}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{j}{2}z^{-1}\right)}{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})} \overset{\uparrow}{=} z^{-1}\frac{1-j^2\frac{1}{4}z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-4j^2z^{-2})} \overset{\uparrow}{=} z^{-1}\frac{1+\frac{1}{4}z}{1+4z^{-2}-2z^{-1}-8z^{-3}} =$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$j^2=-1$

$$= \frac{z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-3}}{1-2z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}} \overset{\uparrow}{=} \dots = \text{Coct} + \frac{\text{Res}}{\text{div}} = -\frac{1}{32} + \underbrace{\frac{\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{32}}{(1-2z^{-1})(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})}}_{H_1(z)} \overset{\uparrow}{=}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{\frac{1}{4}z^{-3}} \qquad\qquad +z^{-1} & -8z^{-3}+4z^{-2}-2z^{-1}+1 \\ \hline \ominus\ \cancel{+\frac{1}{4}z^{-3}} -\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{1}{16}z^{-1}-\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ \hline \quad \underbrace{\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{32}} & \end{array}$$

$$D = Cd + R \Rightarrow \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

Descomposición fracciones simples

$$= -\frac{1}{32} + \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-2jz^{-1}} + \frac{C}{1+2jz^{-1}} \overset{\uparrow}{=} \boxed{-\frac{1}{32} + \frac{17}{64}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{15}{64(j-1)}\frac{1}{1-2jz^{-1}} + \frac{-15}{64(j+1)}\frac{1}{1+2jz^{-1}}}$$

A, B, C se obtienen de manera habitual o con fórmulas:

$$A = H_1(z)\,(1-2z^{-1})\Big]_{z=2} = \frac{\frac{1}{8}2^{-2}+\frac{15}{16}2^{-1}+\frac{1}{32}}{(1-\cancel{2}j\cancel{2^{-1}})(1+\cancel{2}j\cancel{2^{-1}})} = \frac{\frac{1}{32}+\frac{15}{32}+\frac{1}{32}}{1-j^2} = \frac{17}{64}$$

$$B = H_1(z)\,(1-2jz^{-1})\Big]_{z=2j} = \frac{\frac{1}{8}2^{-2}j^{-2}+\frac{15}{16}2^{-1}j^{-1}+\frac{1}{32}}{(1-2\cancel{2^{-1}}j^{-1})(1+2j\cancel{2^{-1}j^{-1}}\to 1)} \overset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{\frac{-1}{32}}-\frac{15}{32}j+\cancel{\frac{1}{32}}}{2(1+j)} = \frac{15}{64(1+j)j} = \frac{15}{64(j-\dots}$$

$\boxed{(-1)^{-2}=1}\ \boxed{(-1)^{-1}=-1}$ $\qquad$ $\boxed{j^{-2}=\frac{1}{j^2}=-1}\ \boxed{j^{-1}=-j}$

$$C = H_1(z)\,(1+2jz^{-1})\Big]_{z=-2j} \overset{\downarrow}{=} \frac{\frac{1}{8}2^{-2}j^{-2}-\frac{15}{16}2^{-1}j^{-1}+\frac{1}{32}}{(1+2\cancel{2^{-1}}j^{-1})(1-(\underbrace{-2j\cancel{2^{-1}j^{-1}}}_{1}))} = \frac{\cancel{\frac{-1}{32}}+\frac{15}{32}j+\cancel{\frac{1}{32}}}{2(1-j)} = \frac{-15}{64(j+1)}$$

- Finalmente:

$$\boxed{h[n]} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = -\frac{1}{32}\mathcal{Z}^{-1}\{1\} + \frac{17}{64}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\} + \frac{15}{64(j-1)}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-2jz^{-1}}\right\} - \frac{15}{64(j+1)}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1+2jz^{-1}}\right.$$

$$\overset{\uparrow}{=} \boxed{-\frac{1}{32}\delta[n] + \left(\frac{17}{64}2^n + \frac{15}{64(j-1)}(2j)^n - \frac{15}{64(1+j)}(-2j)^n\right)u[n]} /\!/$$

NOTA: $a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$, En este caso ¿$|z|>2$? Sí (ROC)

$\delta[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 1$

-¿Es causal? Sí porque $h[n]=0$, $\forall n<0$ (revisar esto siempre ayuda a detectar errores, sobre todo al elegir qué par de TZ se utiliza)

15-12-2006

FEBRERO 2006

3. Sea la señal en tiempo discreto $x[n]=a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$ donde a y ω_0 son parámetros reales, positivos y arbitrarios, siendo $u[n]$ la función escalón unidad.

(a) Demuestre que su transformada Z viene dada por la siguiente expresión

$$X(z)=\frac{1-a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

justificando su región de convergencia.

(b) Calcule el intervalo de valores de a para el cual existe la transformada de Fourier de $x[n]$ y calcule dicha transformada de Fourier.

Suponga un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, caracterizado por su respuesta al impulso $h[n]$ desconocida. Para dicha entrada $x[n]$ con los valores de a calculados en el apartado (b), se observa que la salida del sistema es $y[n]=\delta[n-n_0]$ donde n_0 es un parámetro entero conocido.

(c) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$ en función de a, ω_0, y n_0.

---

a) - 1ª idea ∘ "Definición" $a,\omega_0\in\mathbb{R}^+$

• $x[n]=a^n\cos(\omega_0 n)u[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}\boxed{X(z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(\omega_0 n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}z^{-n}=$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^ne^{j\omega_0 n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^ne^{-j\omega_0 n}}{z^n}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{j\omega_0}}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{-j\omega_0}}{z}\right)^n\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\underbrace{1-\frac{ae^{j\omega_0}}{z}}_{\left|\frac{ae^{j\omega_0}}{z}\right|<1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\underbrace{1-\frac{ae^{-j\omega_0}}{z}}_{\left|\frac{ae^{-j\omega_0}}{z}\right|<1}}}_{(*)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}+1-ae^{j\omega_0}z^{-1}}{(1-ae^{j\omega_0}z^{-1})(1-ae^{-j\omega_0}z^{-1})}=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{1}{\cancel{2}}-\overset{1}{\cancel{2}}az^{-1}\cos\omega_0}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}-ae^{j\omega_0}z^{-1}+a^2z^{-2}\cancel{e^{0}}^{\nearrow 1}}=$$

$$=\boxed{\frac{1-a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}}$$ cqd

- 2ª idea ∘ "cambiar coseno en x[n]"

• $x[n]=a^n u[n]\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\overset{Z}{\longleftrightarrow}$ etc.

■ Cálculo de la ROZ

- 1ª idea: Partiendo de (*), convergencia de sumatorios:

• $\left|\frac{ae^{j\omega_0}}{z}\right|<1$ ∧

• $\left|\frac{ae^{-j\omega_0}}{z}\right|<1$

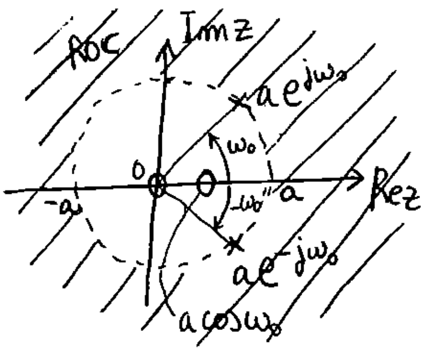
$\rightarrow |z|>|ae^{\pm j\omega_0}|\Rightarrow|z|>|a|$ ∘ $(a\in\mathbb{R}^+\Rightarrow|a|=a)$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{ROC: } |z|>a}$

- 2ª idea: $\lim_{z\to 0} X(z) = \frac{\infty}{\infty^2} = 0 \Rightarrow$ Cero en "0"

Además $\begin{cases} \text{- Polos simples en } "ae^{\pm j\omega_0}" \\ \text{- Cero en } "a\cos\omega_0" \end{cases}$ Mirar expresión de $X(z)$



$x[n]$ ilimitada hacia la derecha $\Rightarrow$

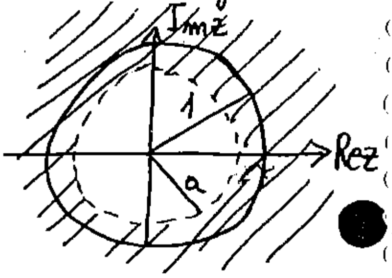
ROC hacia fuera del polo más externo

$\Rightarrow$ ROC : $\boxed{|z|} > |ae^{j\omega_0}| = \boxed{a}$

---

b) Para que exista TF la circunferencia unidad debe estar dentro de la ROC, y en ese caso

$$\boxed{X(e^{j\omega})} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \boxed{\frac{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}{1-2a\cos\omega_0 e^{-j\omega}+a^2e^{-2j\omega}}}$$



- Para que esto sea cierto: $\boxed{0<a<1}$

$\uparrow$ Dato enunciado

$\uparrow$ Para que la circ ud $\subset$ ROC

NOTA: Si la circunf unidad estuviera en la frontera de la ROC (i.e: a=1) existiría TF "generalizada", pero ya NO se cumpliría que $X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

---

c)

$$\begin{tikzcd} x[n] \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"] & \boxed{\text{LTI causal } h[n]} \arrow[r] & y[n]=\delta[n-n_0] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\ X(e^{j\omega}) \arrow[r] & H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \arrow[u, "\mathcal{F}^{-1}"] & Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Es más factible trabajar con TF pues TZ sólo sabemos tres, mientras que en el examen tenemos toda una tabla para TF

$$\cdot\ H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}\,\frac{1-2a\cos\omega_0 e^{-j\omega}+a^2e^{-2j\omega}}{1-\underbrace{a\cos\omega_0}_{CTE}\,e^{-j\omega}}$$; (RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL SISTEMA)

$$\cdot\ \boxed{h[n]} = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\Big\{e^{-j\omega n_0}\overset{H_1(e^{j\omega})}{\frac{1}{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}}\Big\} - 2a\cos\omega_0\mathcal{F}^{-1}\Big\{e^{-j\omega(n_0+1)}\overset{H_1(e}{\frac{1}{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}}$$

$$\ldots + a^2\mathcal{F}^{-1}\Big\{e^{-j\omega(n_0+2)}\underbrace{\frac{1}{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}}_{H_1(e^{j\omega})}\Big\} = \boxed{h_1[n-n_0]-2a\cos(\omega_0)\cdot h_1[n-(n_0+1)]+a^2h_1[n-(n_0+}$$

[*]

$$\boxed{h_1[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(e^{j\omega})\} = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{1}{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}\Big\} = (a\cos\omega_0)^n u[n]}\ \boxed{\text{Tabla: } |a\cos\omega_0|<1\ ✓}$$

$$= \boxed{(a\cos\omega_0)^{n-n_0}u[n-n_0] - 2a\cos\omega_0(a\cos\omega_0)^{n-n_0-1}u[n-n_0-1] + a^2(a\cos\omega_0)^{n-n_0-2}u[n-n_0-2]}$$

Realmente con la expresión de [*], indicando qué es $h_1[n]$, valdría. No hay por qué escribir este troncho.

FEBRERO 2007

3. Sea un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo cuya relación entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ viene descrita por la siguiente ecuación en diferencias:

$+a_1 y[n-1]+$

$$y[n]+a_1y[\cancel{n}1]+a_2y[n-2]=x[n]$$

a) Calcule los parámetros a_1, a_2 sabiendo que la función de transferencia del sistema tiene dos polos complejos en $z_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}$, donde r y ω_0 son números reales positivos. Exprese sus valores en función de r y ω_0.

b) Sabiendo que la respuesta al impulso es $h[n]=Ar^n\,\mathrm{sen}(\omega_0 n+\theta)u[n]$, identifique A y θ en función de r y ω_0 (la expresión de $h[n]$ es válida también cambiando la función seno por coseno).

c) Suponiendo que $r=1$, calcule la transformada de Fourier de $h[n]$. Compare el resultado obtenido con la particularización de $H(z)$ en la circunferencia unidad y comente el resultado.

---

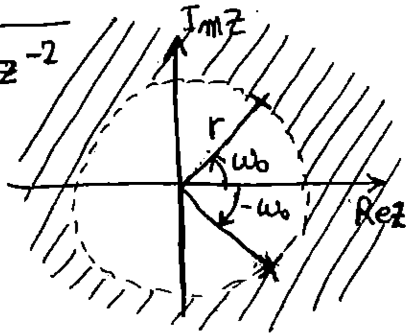
a) $x[n]\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\text{LTI causal}\\ h[n]\end{matrix}}\longrightarrow y[n]$ $\Big\|$ $y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=x[n]$

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{-n_0}$

- $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$; Calculamos $H(z)$ también porque sabemos donde están los polos:
- $H(z)=\dfrac{1}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})}=\dfrac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}-re^{j\omega_0}z^{-1}+r^2z^{-2}\underbrace{\cancel{e^{0}}}_{1}}=$

$$=\frac{1}{1-r(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}+r^2z^{-2}}=\frac{1}{1\underbrace{-2r\cos(\omega_0)}_{a_1}z^{-1}+\underbrace{r^2}_{a_2}z^{-2}}$$



Identificando: $\left\{\begin{array}{l}\boxed{a_1=-2r\cos\omega_0}\\ \boxed{a_2=r^2}\end{array}\right.$

- ROC hacia fuera del polo más externo pues el sistema es CAUSAL

---

b) $h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})(1-re^{j\omega_0}z^{-1})}\right\}=Z^{-1}\left\{\dfrac{B}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}+\dfrac{C}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}\right.$

- Polos simples: $\cdot\ B=H(z)(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})\Big|_{z=re^{-j\omega_0}}=\dfrac{1}{1-\cancel{r}e^{j\omega_0}\frac{1}{\cancel{r}}e^{j\omega_0}}=\dfrac{e^{-j\omega_0}}{e^{-j\omega_0}-e^{j\omega_0}}=\dfrac{-e^{-j\omega_0}}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}$

$\cdot\ C=H(z)(1-re^{j\omega_0}z^{-1})\Big|_{z=re^{j\omega_0}}=\dfrac{1}{1-e^{-2j\omega_0}}=\dfrac{e^{j\omega_0}}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}$ $\boxed{\mathrm{sen}(-\omega_0)=-\mathrm{sen}\,\omega_0}$

SIGUE

SIGUE

- $\boxed{h[n]} \overset{\cdot}{=} B\, z^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}}_{\substack{a=re^{-j\omega_0}\\ |a|=r\,,\ |z|>r}}\right\} + C\, z^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}}_{\substack{a=re^{j\omega_0}\\ |a|=r\,,\ |z|>r}}\right\} =$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\,,\ |z|>a \xleftrightarrow{Z^{-1}} x[n]=a^n u[n]$$
$$,\ |z|<a \xleftrightarrow{Z^{-1}} x[n]-a^n u[-n-1]$$

$$= B\left(re^{-j\omega_0}\right)^n u[n] + C\left(re^{j\omega_0}\right)^n u[n] = \frac{-e^{-j\omega_0}}{2j\ \mathrm{sen}\,\omega_0} r^n e^{-j\omega_0 n} u[n] + \dots$$

$$\dots + \frac{e^{j\omega_0}}{2j\ \mathrm{sen}\,\omega_0} r^n e^{j\omega_0 n} u[n] = \frac{r^n}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}\left[e^{j\omega_0(n+1)} - e^{-j\omega_0(n+1)}\right]u[n] =$$

$$= \frac{r^n}{\mathrm{sen}\,\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0[n+1])\,u[n] \overset{\cdot}{=} \boxed{\frac{r^n}{\mathrm{sen}\,\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 n+\omega_0)}$$

Enunciado: $h[n]=Ar^n \mathrm{sen}(\omega_0 n+\theta)$

- Identificando: $\boxed{\theta=\omega_0}$ $\boxed{A=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\omega_0}}$

---

c) $h[n]\Big|_{r=1} = \frac{\mathrm{sen}(\omega_0[n+1])}{\mathrm{sen}\,\omega_0} = \frac{\mathrm{sen}(\omega_0 n)\cos\omega_0 + \cos(\omega_0 n)\,\mathrm{sen}\,\omega_0}{\mathrm{sen}\,\omega_0} = \underbrace{\frac{\cos\omega_0}{\mathrm{sen}\,\omega_0}}_{\mathrm{cotg}\,\omega_0}\mathrm{sen}(\omega_0 n)+\cos(\omega$

$\updownarrow \mathcal{F}$

$\mathrm{sen}\,\omega_0 n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)]\,;\ \cos\omega_0 n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dots$

- $H(e^{j\omega})\Big|_{r=1} = \mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{sen}(\omega_0[n+1])}{\mathrm{sen}\,\omega_0}\right\} = \mathrm{cotg}\,\omega_0\,\mathcal{F}\{\mathrm{sen}\,\omega_0 n\} + \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 n)\}\,;$

$$\frac{1}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}\left[\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0}\} - \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega_0}\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}\left[\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}\}e^{j\omega_0} - \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 n}\}e^{-j\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j\,\mathrm{sen}\,\omega_0}\left[e^{j\omega_0}\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)\right) - e^{-j\omega_0}\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right)\right]$$

- $H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}\Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{(1-e^{j\omega_0}e^{-j\omega})(1-e^{-j\omega_0}e^{-j\omega})}$

$$= \frac{1}{(1-e^{j(\omega_0-\omega)})(1-e^{-j(\omega_0+\omega)})}$$

No es un sumatorio de deltas

- Claramente $\boxed{H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \neq H(e^{j\omega})}$ pues la ROC no contiene la circunferencia unidad ($|z|>1$). Existe la TF generalizada

SEPTIEMBRE 2008

3) Considere el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

donde x[n] es la secuencia de entrada e y[n] es la secuencia de salida.

Se pide:

a) Determine las posibles funciones de transferencia H(z)=Y(z)/X(z), con sus respectivas regiones de convergencia, donde X(z) e Y(z) son las transformadas Z de x[n] e y[n].

b) Calcule las posibles respuestas al impulso $h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}$, analizando la causalidad y estabilidad de cada solución.

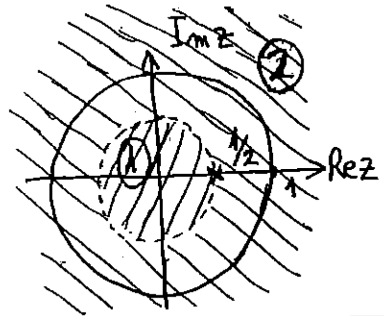
c) Suponiendo $x[n]=e^{j\pi n}+2^{-n}u[n]$, determine la secuencia de salida y[n], correspondiente al sistema estable.

---

a) $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+X(z)$

Así que: $\boxed{H(z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}=\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}$ // FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA

Tiene un polo en $z=\frac{1}{2}$



//// ROC 1 : $|z|<\frac{1}{2}$ ANTICAUSAL, NO ESTABLE

\\\\ ROC2: $|z|>\frac{1}{2}$ CAUSAL, ESTABLE

---

b) • $\boxed{h_1[n]}=Z^{-1}\{H(z)\}\Big|_{ROC1}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}\Big|_{ROC1}=\boxed{-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}$ // Anticausal, no estable

$\boxed{-a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|<|a|,\ a=\frac{1}{2}}$

Como se esperaba

• $\boxed{h_2[n]}=Z^{-1}\{H(z)\}\Big|_{ROC2}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}\Big|_{ROC2}=\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$ // Causal, estable

$\boxed{a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|>|a|,\ a=\frac{1}{2}}$

---

c)

$$\begin{tikzcd}
x[n]=e^{j\pi n}+2^{-n}u[n] \arrow[rr] \arrow[dd, "Z"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI estable}\\ h_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\end{array}} \arrow[rr] \arrow[dd, "Z"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & & y[n]=x[n]*h_2[n] & \\
& X(e^{j\omega}) & & H(e^{j\omega}) & & Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \arrow[ul, "\mathcal{F}^{-1}"'] \\
X(z) & & H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ ROC2 & & Y(z)=X(z)H(z) \arrow[uu, "Z^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

SIGUE

SIGUE ⟩ 1ª idea: {Dominio frecuencia} ⇐ El mejor en esta ocasión

- Se trata del sistema estable: $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$;

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{e^{j\pi n} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \mathcal{F}\{e^{j\pi n}\} + \mathcal{F}\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \overset{\uparrow}{=} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi) + \overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}}^{H(e^{j\omega})}$$

$$\boxed{a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad\Big|\quad e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)}$$

$f(\omega)\delta(\omega-$ $\;=\; f(\omega_0)\delta(\omega-$

-Así que: $\boxed{Y(e^{j\omega})} \overset{!}{=} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + [H(e^{j\omega})]^2 \overset{\downarrow}{=}$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)\overbrace{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\pi+2\pi k)}}\right)}^{2/3} + [H(e^{j\omega})]^2 \overset{\uparrow}{=} \frac{2}{3}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi) + H(e^{j\omega})H(e^{j\omega}$$

$$\boxed{e^{-j(\pi+2\pi k)} = \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}\,\underbrace{e^{-j2\pi k}}_{1} = -1}$$

$\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = h_2[$

- Finalmente: $\boxed{y[n]} \overset{!}{=} \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)\right\} + \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\} \overset{\downarrow}{=}$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} + \left(h_2[n] * h_2[n]\right) \overset{!}{=} \boxed{\frac{2}{3}(-1)^n + (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

↳ $(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$: Se puede hacer gráficamente o con la fórmula para convoluciones ilimitadas por la derecha:
$x[n]u[n] * y[n]u[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} x[k]y[n-k]\right)u[n]$

2ª idea: {Dominio tiempo} ⇐ No me ha salido =(

- $\boxed{y[n]} \overset{!}{=} x[n] * h_2[n] = \left(\overbrace{e^{j\pi n}}^{(-1)^n} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right) * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] =$

$$= \underbrace{(-1)^n * h_2[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{h_2[n] * h_2[n]}_{y_2[n]} \overset{\uparrow}{=} \boxed{\frac{2}{3}(-1)^n + (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

Debería dar

$y_2[n] = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

- $y_1[n] = \left[(-1)^n u[n] + (-1)^n u[-n] - \delta[n]\right] * h_2[n] = \underbrace{(-1)^n u[n] * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}_{y_{11}[n]} +$

Se puede hacer gráficamente

$$\overbrace{(-1)^n u[-n] * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}^{y_{12}[n]} - \underbrace{\delta[n] * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h_2[n]} ;$$

- $y_{11}[n] \overset{\downarrow}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k}\right)u[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\right)u[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\frac{1-(-2)^{n+1}}{1+2}u[n]$; $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

- $y_{12}[n] = (-1)^n u[-n] * h_2[n] \overset{\uparrow}{=} (-1)^{-n}u[-n] * h_2[n] \overset{\uparrow}{=} y_{11}[-n]$

$\boxed{(-1)^n = (-1)^{-n}}$ $\quad$ $\boxed{x_a[-n] * x_b[n] = z[-n] \text{ si } z[n] = x_a[n] * x_b[}$

$$\Rightarrow y_1[n] = y_{11}[n] + y_{11}[-n] - h_2[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}u[n] + 2^n\frac{1-(-2)^{1-n}}{3}u[-n] - h_2[n] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}\cdot(-2)\cdot(-1)^n\cancel{2^n}\,u[n] - \cancel{2^n}(-2)(-1)^{-n}\cancel{2^{-n}}\,u[-n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]\right] - h_2[n] =$$

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{2}{3}\left[(-1)^n\underbrace{\left(u[n]+u[-n]\right)}_{1-\delta[n]}\right] + \left[\frac{h_2[n]+h_2[-n]}{3}\right] - h_2[n] = \frac{2}{3}\left[(-1)^n - \delta[n]\right] + \left[\frac{h_2[n]+h_2[-n]}{3}\right] - h_2[n]$$

- En algún sitio habré metido la pata, pues $y_1[n] \neq \frac{2}{3}(-1)^n$ (al menos

Tema 5

9-1-2001

SEPTIEMBRE 1999

Podría ir en T3 perfectamente, pero se usan conceptos vistos en T5

3. Sea $x(t)$ una señal real de banda limitada ($X(j\omega)=0\ \forall\omega>\omega_0$). A partir de ella obtenemos otra señal $y(t)$ mediante la siguiente operación:

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\ \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

donde T es un parámetro arbitrario y la función 'sinc' se define a continuación: $\text{sinc}(t)=\dfrac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$

a) Determine la expresión de la transformada de Fourier de $y(t)$, esto es, $Y(j\omega)$ en función de $X(j\omega)$.

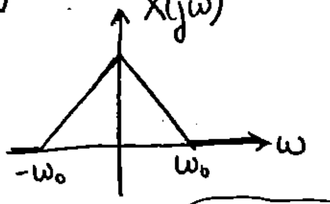
b) Si se verifica que $T<\pi/\omega_0$, demuestre que $y(t)=x(t)\ \forall t$.

Nota: Puede utilizar los siguientes pares de transformadas para la resolución del ejercicio.

$$\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}\ \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\leftrightarrow}}\ \begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}\qquad\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\ \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\leftrightarrow}}\ \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

---

a)



$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\ \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\,\delta(t-nT)*\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)=$$

$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)}$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)\right]*\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)=\left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]*\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi\frac{t}{T}}=$$

$\boxed{f(t_0)\delta(t-t_0)=f(t)\delta(t-t_0)}$

$\boxed{\text{sinc}\,t=\frac{\text{sen}\,\pi t}{\pi t}}$

$$=\underbrace{\left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]}_{x_p(t)\text{ señal con muestreo ideal}}*\underbrace{T\,\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi t}}_{h(t)\text{ del filtro reconstructor (interpolador)}}$$

¡¡Muy parecido a lo visto en muestreo!! Podemos asociar...

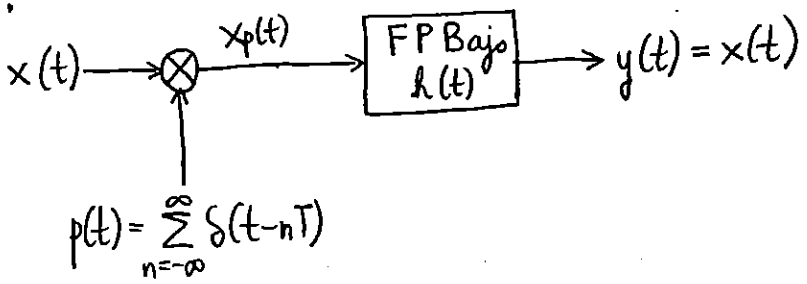
- Así que: $y(t)=x_p(t)*h(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}Y(j\omega)=X_p(j\omega)\cdot H(j\omega)$

$\cdot\ \boxed{X_p(j\omega)}=\mathcal{F}\left\{x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X(j\omega)*\frac{\cancel{2\pi}}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\Big(\omega-k\overset{\omega_s}{\boxed{\tfrac{2\pi}{T}}}\Big)=\boxed{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))};$

$\cdot\ \boxed{H(j\omega)}=\mathcal{F}\left\{T\,\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi t}\right\}=\boxed{\begin{cases}T\ , & |\omega|<\frac{\pi}{T}\\ 0\ , & \text{resto}\end{cases}}$

- Finalmente: $\boxed{Y(j\omega)}=H(j\omega)\,X_p(j\omega)=\boxed{H(j\omega)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))}$

- Corresponde a!

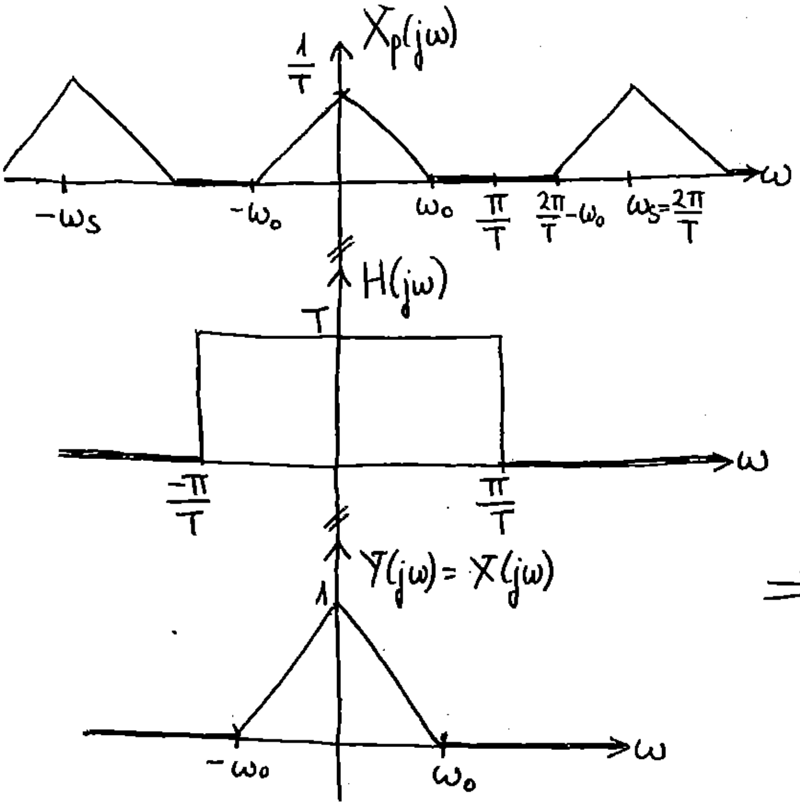


¡¡SÓLO si $\omega_s>2\omega_0$!!

SIGUE

19-1-2007

b) Para que $y(t) = x(t)$ se debe cumplir la condición de muestreo (Nyquist) o de no solapamiento espectral. Esta condición es:



$$\frac{2\pi}{T} - \omega_0 > \omega_0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\pi}{T} > \cancel{2}\omega_0 \Rightarrow$$

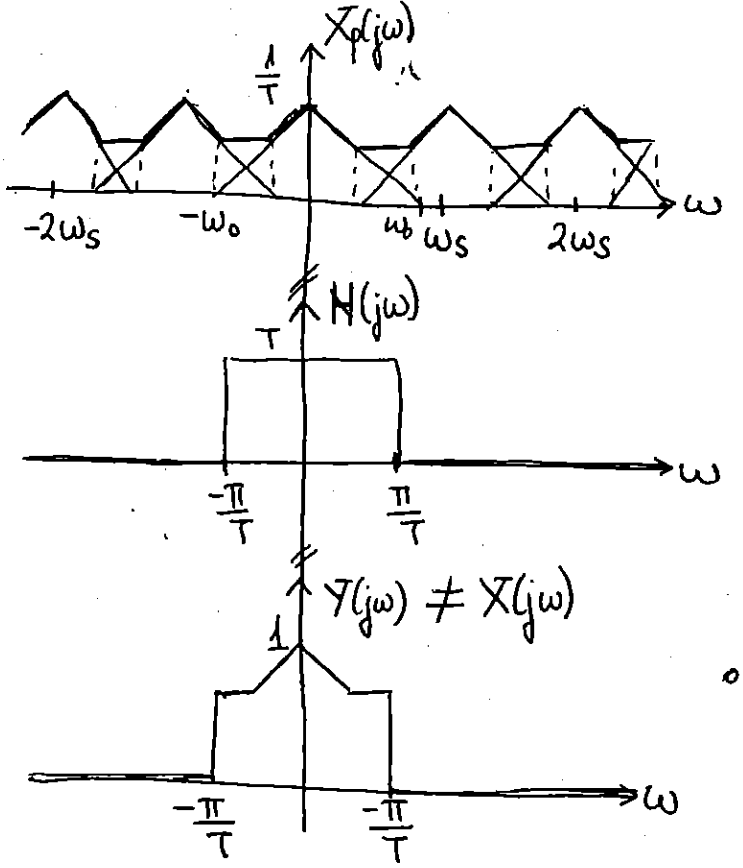
$\boxed{T < \frac{\pi}{\omega_0}}$ que es la condición del enunciado

- También se puede poner:

$$\omega_s - \omega_0 > \omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_s > 2\omega_0}$$

⇒ Puesto que los espectros coinciden, las señales x(t) e y(t) también son iguales en el dominio del tiempo cqd//

NOTA: Si no se cumpliera la condición de no solapamiento espectral, ocurriría:



∃ solapamiento

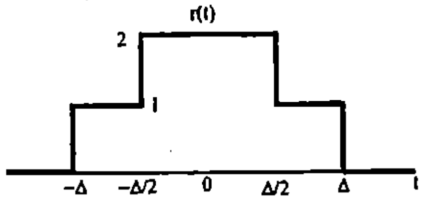
No se recupera la señal original

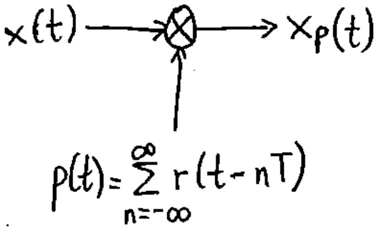
FEBRERO 2000

5. Considere un esquema de muestreo en el que la señal de muestreo $p(t)$ es un tren de pulsos:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$

donde el pulso r(t) se representa en la figura siguiente:





$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$

suponiendo que $\Delta \ll T$.

Si denominamos $x(t)$ a la señal que se muestrea, supuesta de banda limitada, esto es $X(j\omega)=0$ $|\omega|>\omega_{max}$, y que se verifica la condición de muestreo de Nyquist,

a) Calcule $R(j\omega)$, transformada de Fourier de $r(t)$.

b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_p(t)=x(t)p(t)$.

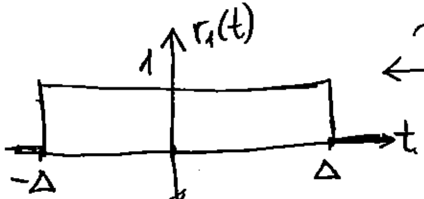
c) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_i(t)$ definida como

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)r(t-nT)$$

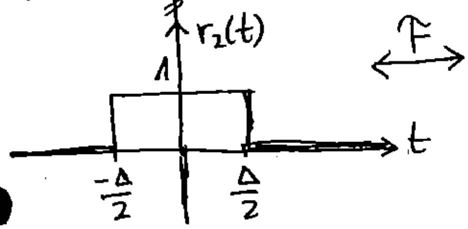
d) Explique detalladamente para los casos b), c), cómo sería la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo que permitiría recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ y $x_i(t)$ respectivamente.

---

a) $r(t) = r_1(t) + r_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R(j\omega) = R_1(j\omega) + R_2(j\omega)$



$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} R_1(j\omega) = \dfrac{2\,sen(\omega\Delta)}{\omega}$



$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} R_2(j\omega) = \dfrac{2\,sen(\omega\frac{\Delta}{2})}{\omega}$

$$\boxed{R(j\omega) = \frac{2\,sen(\omega\Delta)}{\omega} + \frac{2\,sen(\omega\frac{\Delta}{2})}{\omega}}$$

---

b) $x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$ ¡¡MUESTREO NATURAL!!

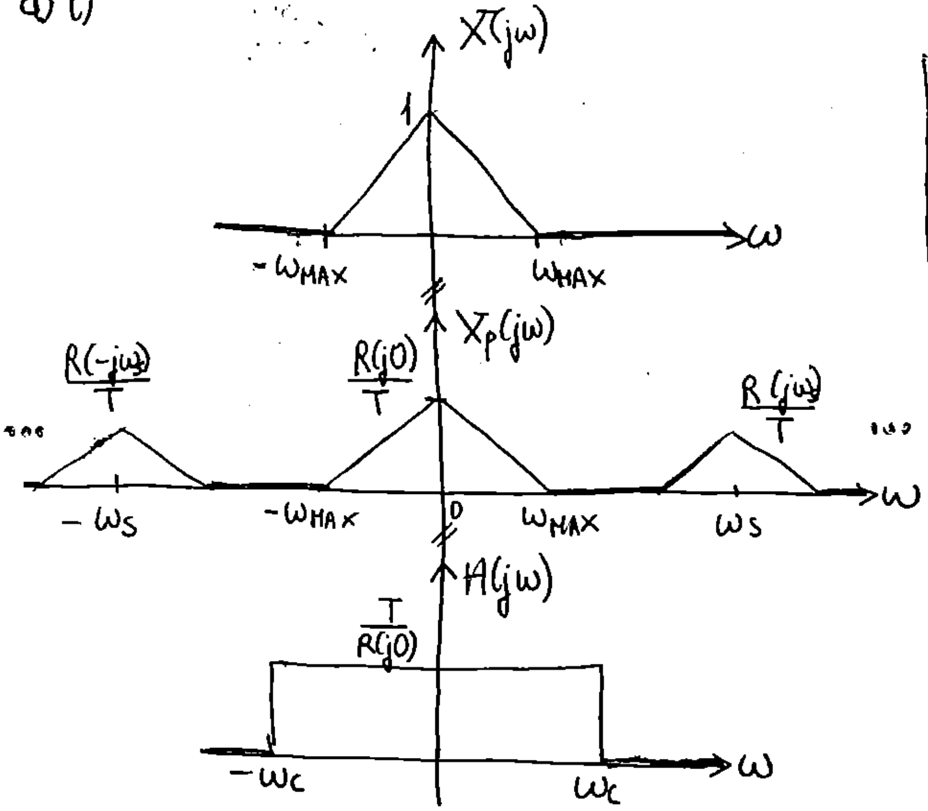
$\mathcal{F}$

$$\boxed{X_p(j\omega)} = \mathcal{F}\{x_p(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)\} = \mathcal{F}\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t) * \delta(t-nT)\} =$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)\cdot r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \left[R(j\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\right] =$$

$$= \frac{1}{T}X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{R(jk\omega_s)}_{\text{número}}\delta(\omega-k\omega_s) = \boxed{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R(jk\omega_s)X(j(\omega-k\omega_s))}$$

d) i)



$$\boxed{H(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{R(j0)}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

CONDICIÓN MUESTREO

$$\boxed{\omega_{MAX} < \omega_c < \omega_S - \omega_{MAX}}$$

$\Downarrow$

Si esto es así,

$$X_r(j\omega) = X(j\omega)$$

$\Downarrow$

$$x_r(t) = x(t)$$

---

c) $x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, r(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT) * r(t) = r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT) =$

¡MUESTREO INSTANTÁNEO!!

$$= r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = r(t) * \left[x(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right]$$

$\mathcal{F}\updownarrow$

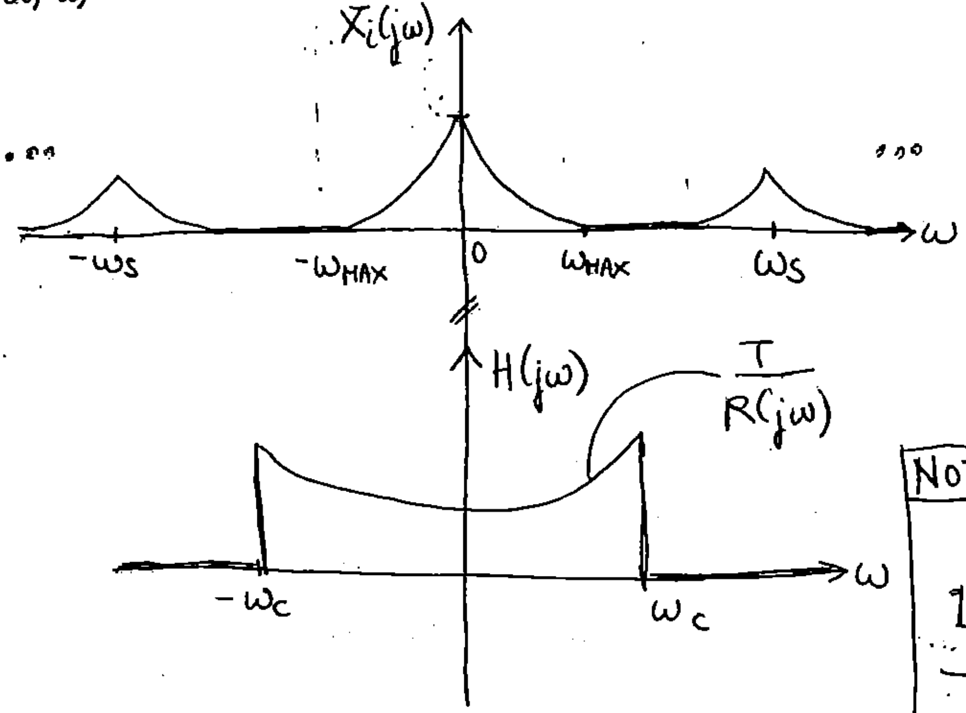
$$\cdot\ \boxed{X_i(j\omega)} = \mathcal{F}\left\{ r(t) * \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] \right\} = R(j\omega)\cdot\left[\frac{1}{\cancel{2\pi}} X(j\omega) * \frac{\cancel{2\pi}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{T}\, R(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega-k\omega_s))}$$

→ función que depende de ω

---

d) ii)

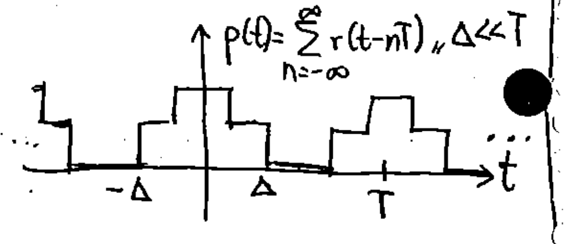


$$\boxed{H(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{R(j\omega)}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

$$\boxed{\omega_{MAX} < \omega_c < \omega_S - \omega_{MAX}}$$

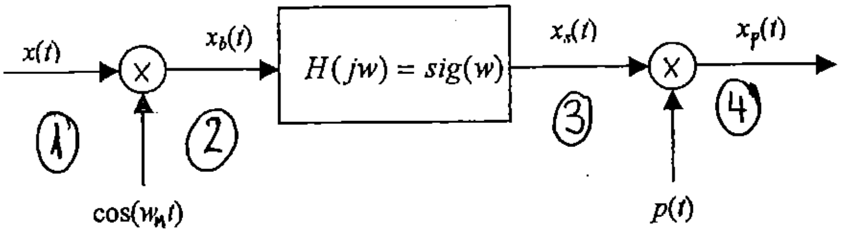
NOTA La señal muestreadora es:

$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$, $\Delta \ll T$



FEBRERO 2001

4. Se sabe que la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de una señal arbitraria $x(t)$ cumple que $X(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_M$. Considérese el siguiente sistema:



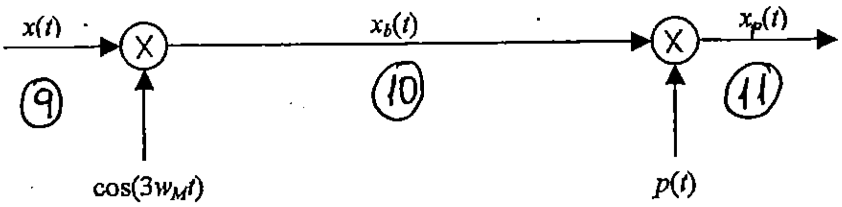
Siendo $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ y sig(ω) la función signo, definida como:

$$\text{sig}(\omega)=\begin{cases}1 & \omega>0\\ 0 & \omega=0\\ -1 & \omega<0\end{cases}$$

a) Obtenga razonadamente el máximo valor de T que permite recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

b) Diseñe razonadamente el sistema que permitiría obtener la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

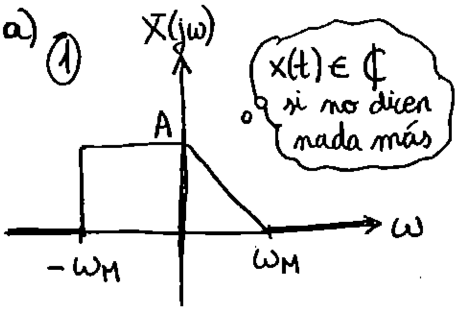
c) Considere el esquema de la FIGURA 2:



Justifique que en este caso se puede muestrear la señal $x_b(t)$ a una frecuencia de $4\omega_M$, que es inferior a la frecuencia de Nyquist de $x_b(t)$, y no obstante es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

---

a) ①

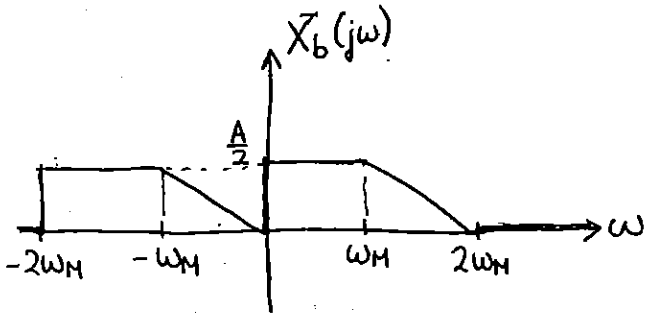


x(t) ∈ ℂ si no dicen nada más

② $x_b(t)=x(t)\cos\omega_M t \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

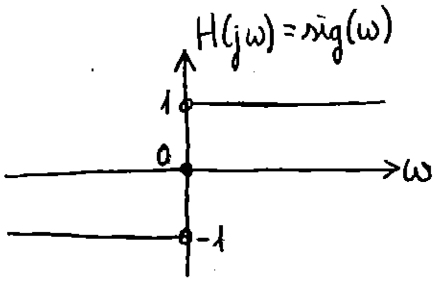
$$X_b(j\omega)=\frac{1}{2\cancel{\pi}}X(j\omega)*\cancel{\pi}\left[\delta(\omega+\omega_M)+\delta(\omega-\omega_M)\right]=$$

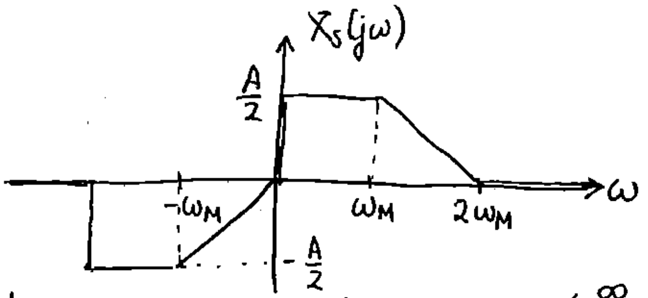
$$=\frac{1}{2}\left[X(j[\omega+\omega_M])+X(j[\omega-\omega_M])\right]$$



SIGUE

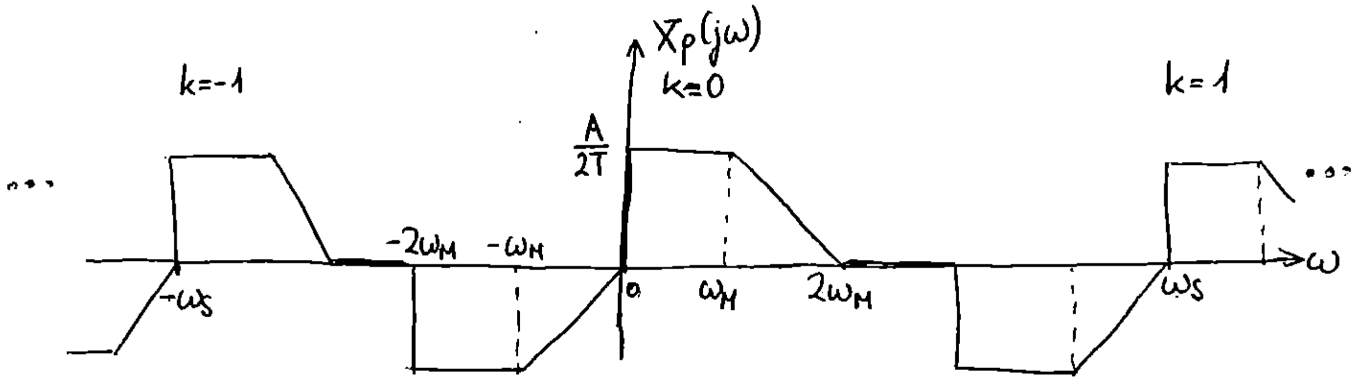
③ Suponemos el sistema LTI: $X_s(j\omega)=X_b(j\omega)\cdot H(j\omega)$





④ $x_p(t)=x_s(t)\cdot p(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_s(j\omega)*P(j\omega)=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X_s(j\omega)*\frac{\cancel{2\pi}}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\overset{\omega_s}{\boxed{\frac{2\pi}{T}}})=$

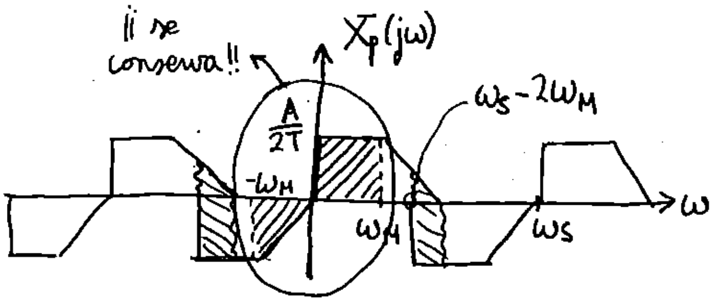
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_s(j[\omega-k\omega_s])$$



- A priori, lo lógico sería exigir $\omega_s-2\omega_M\geq2\omega_M\Longrightarrow\omega_s\geq4\omega_M$

$\frac{2\pi}{T}\geq4\omega_M\Rightarrow T\leq\frac{2\pi}{4\omega_M}=\frac{\pi}{2\omega_M}\Rightarrow\boxed{T_{máx}=\frac{\pi}{2\omega_M}}$ //

- Pero incluso con solapamiento podríamos recuperar el espectro de x(t)

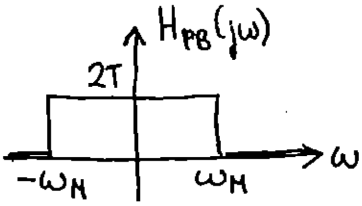


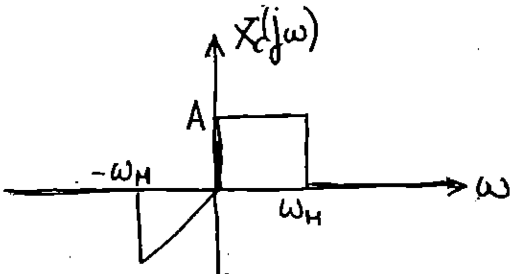
- Mientras se conserve el □ y el ▷ entre $-\omega_M$ y ω_M, la información se conservará (descolocada, sí, pero se puede recuperar). Así que:

$\omega_s-2\omega_M\geq\omega_M\Rightarrow\omega_s\geq3\omega_M\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\geq3\omega_M\Rightarrow$

$\Rightarrow T\leq\frac{2\pi}{3\omega_M}\Rightarrow\boxed{T_{máx}=\frac{2\pi}{3\omega_M}}$ // (La optimizada)

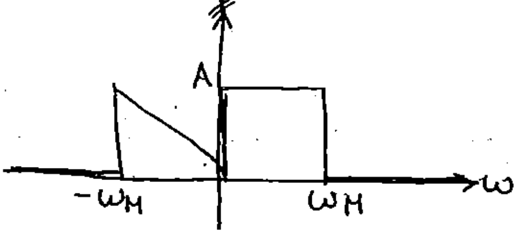
b) ⑤ $x_p(t)\longrightarrow\boxed{\text{F Paso Bajo } H_{PB}(j\omega)}\longrightarrow x_c(t)$





⑥ $x_c(t)\longrightarrow\boxed{H(j\omega)}\longrightarrow x_d(t)$

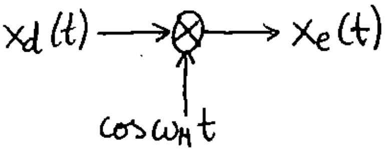
$H(j\omega)=sig(\omega)=\begin{cases}1\text{ '' }\omega>0\\-1\text{ '' }\omega<0\end{cases}$



CONTINÚA

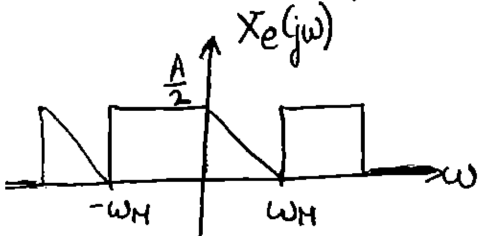
CONTINÚA E-53

⑦ Modulamos

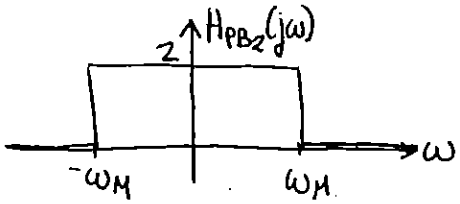


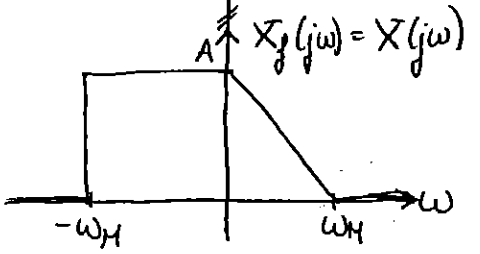
$$x_e(t) = x_d(t)\cos\omega_M t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_e(j\omega) = X_d(j\omega) * \cancel{\pi}[\delta(\omega+\omega_M)+\delta(\omega-\omega_M)]\frac{1}{2\cancel{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X_d(j[\omega+\omega_M]) + X_d(j[\omega-\omega_M])\right]$$

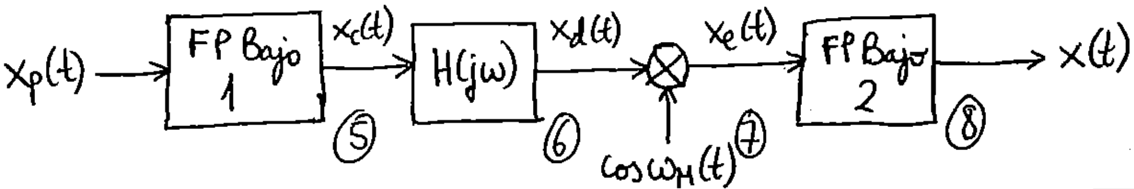


⑧ $x_e(t) \rightarrow$ FB Bajo 2 $\rightarrow x_f(t) = x(t)$





- El esquema final para recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ es:

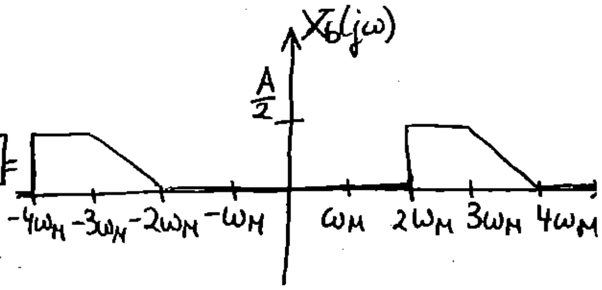


---

c) ⑩ $x_b(t) = x(t)\cos(3\omega_M t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

$$X_b(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} X(j\omega) * \cancel{\pi}[\delta(\omega-3\omega_M)+\delta(\omega+3\omega_M)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(j[\omega-3\omega_M]) + X(j[\omega+3\omega_M])\right]$$

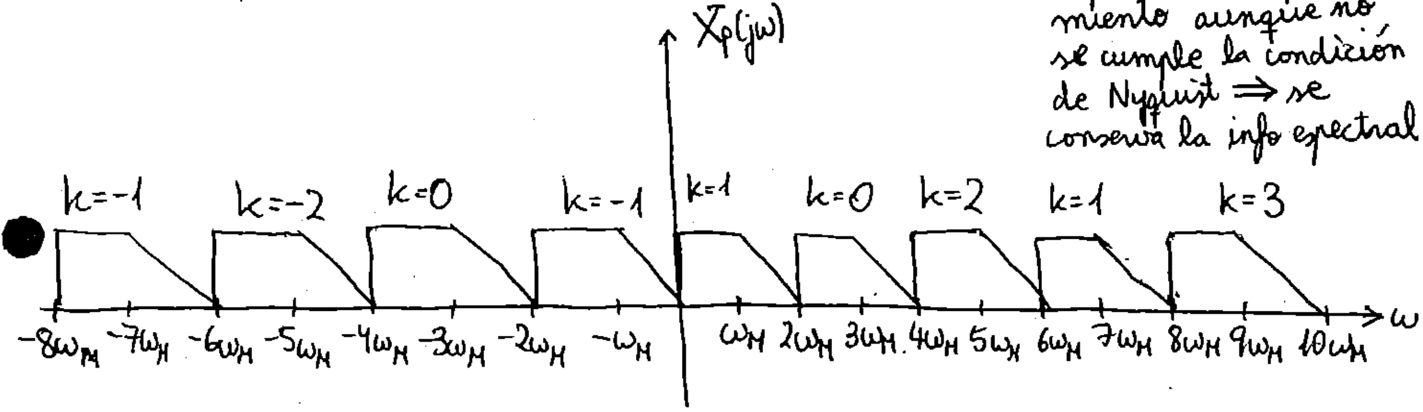


⑪ Muestreamos con $\omega_s = 4\omega_M$

$$x_p(t) = x_b(t)\cdot p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X_b(j\omega) * P(j\omega) =$$

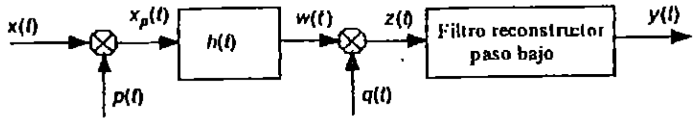
$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} X_b(j\omega) * \frac{\cancel{2\pi}}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\Big(\omega - k\overset{\omega_s}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\Big) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j[\omega-k\omega_s])$$

- Se ve claramente del dibujo que no se produce solapamiento aunque no se cumple la condición de Nyquist ⇒ se conserva la info espectral

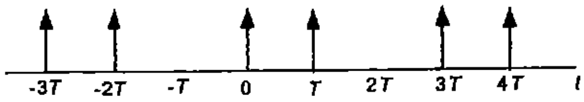


FEBRERO 2003

4. Sea el esquema de la figura



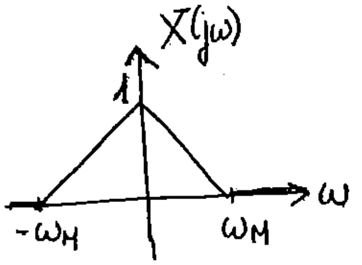
donde la señal de entrada $x(t)$ es de banda limitada (ω_m es la frecuencia máxima) y la señal $p(t)$ es periódica de la forma que representamos a continuación:



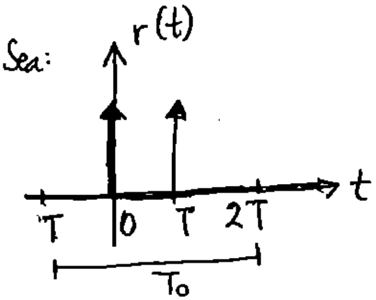
a) Calcule los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier de la señal $p(t)$, demostrando que dichos coeficientes constituyen a su vez una secuencia periódica. Calcule su periodo.

b) Calcule la expresión del espectro de $X_p(j\omega)$. Represente de manera aproximada su módulo asumiendo una forma arbitraria para la representación del módulo de $X(j\omega)$. Calcule el máximo valor del parámetro T que permite la recuperación de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$

c) Suponiendo que $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema LTI definido por la expresión $h(t) = u(t+T) - u(t-T)$, y que la señal $q(t) = \exp(j4\pi t/(3T))$, diseñe el filtro reconstructor paso bajo que permite recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.



Sea:



Entonces: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t - nT_0)$

$T_0 = 3T$ = Periodo de muestreo

¡¡ MUESTREO NATURAL !!

¡👁! → No es muestreo ideal

---

a) 1ª idea → Def

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} p(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} p(t)\,e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\,dt = \frac{1}{3T}\int_{-T}^{2T}\left[\delta(t)+\delta(t-T)\right]e^{-jk\frac{2\pi}{3T}t}dt =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

2ª idea → TF particularizada

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T_0}R(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{3T}\left(1+e^{-j\omega T}\right)\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3\cancel{T}}\cancel{T}}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3T}\left(1+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\begin{cases} r(t) = \delta(t) + \delta(t-T) \\ R(j\omega) = 1 + e^{-j\omega T}\end{cases}}$$

SIGUE

SIGUE

10/1/2024

- Dando valores a "k":

$\underline{k=0|}$ $a_0=\frac{2}{3T}$ $\quad \underline{k=1|}$ $a_1=\frac{1}{3T}\left(1+e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$ $\quad \underline{k=2|}$ $a_2=\frac{1}{3T}\left(1+e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)$

$\underline{k=3|}$ $a_3=\frac{1}{3T}\left(1+\underbrace{e^{-j2\pi}}_{1}\right)=a_0$ $\quad \underline{k=4|}$ $a_4=\ldots=a_1$ $\quad \underline{k=5|}$ $a_5=\ldots=a_2$

- Podemos ver que $a_k=a_{k+N}$, $N=3$. Demostrándolo rigurosamente:

$$a_k=a_{k+N} \, , \, \frac{\cancel{1}}{\cancel{3T}}\left(\cancel{1}+e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)=\frac{\cancel{1}}{\cancel{3T}}\left(\cancel{1}+e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{3}}\right) ,$$

$$\cancel{e^{-jk\frac{2\pi}{3}}}=\cancel{e^{-jk\frac{2\pi}{3}}}e^{-jN\frac{2\pi}{3}} ; \; e^{-jN\frac{2\pi}{3}}=e^{-j2n\pi} \, , n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \cancel{-j}N\frac{2\pi}{3}=\cancel{-j}\cancel{2}n\cancel{\pi} \Rightarrow$$

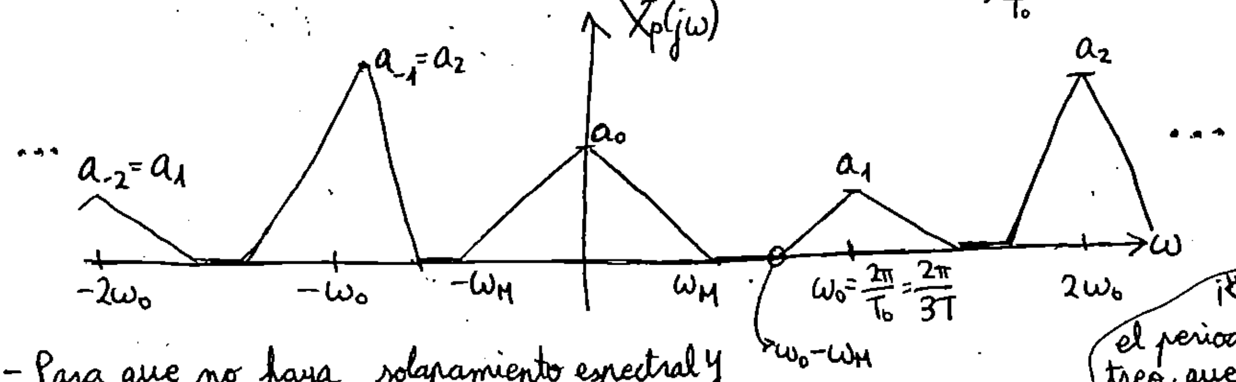
$\boxed{N=3n \, , \, n\in\mathbb{Z}}$ Todos los valores "N" múltiplos de 3 son periodos válidos de a_k, pero el menor de todos es $\boxed{N=3}$ //

<u>NOTA</u>: En este caso los coeficientes del DSF son periódicos de periodo 3 igual que hubiera pasado con una señal periódica en T.D., pues al ser una señal periódica compuesta por deltas en tiempo continuo, se parece mucho a una señal en TD. Pero recordemos que en general los a_K en T.C. <u>NO</u> son una secuencia periódica.

---

b) El DSF de $p(t)$ será: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{3T}t}$

$$x_p(t)=x(t)\,p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega)=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X(j\omega) * \cancel{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\underbrace{\omega_0}_{\frac{2\pi}{T_0}})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(j[\omega-k\underbrace{\omega_0}_{\frac{2\pi}{3T}}])$$



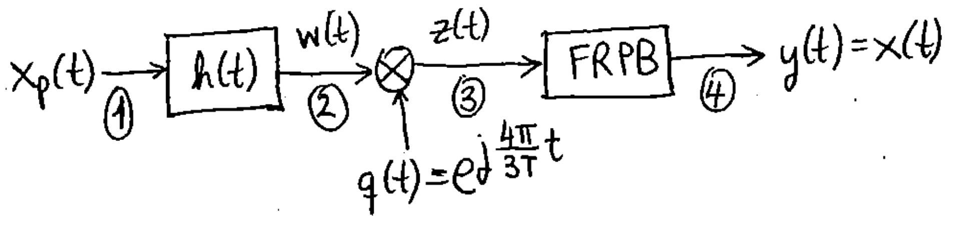
¡👁! T no es el periodo de muestreo, que es $T_0=3T$ (cuidado con los nombres)

- Para que no haya solapamiento espectral y podamos recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ se deberá cumplir que:

$$\omega_0-\omega_M \geqslant \omega_M \Rightarrow \omega_0 \geqslant 2\omega_M \Rightarrow \frac{\cancel{2}\pi}{T_0} \geqslant \cancel{2}\omega_M \Rightarrow \frac{\pi}{3T} \geqslant \omega_M \Rightarrow T \leqslant \frac{\pi}{3\omega_M} \Rightarrow \boxed{T_{máx}=\frac{\pi}{3\omega_M}} //$$

---

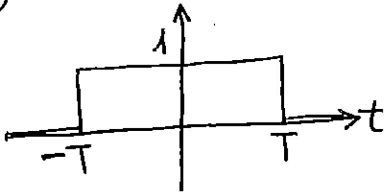
c)



CONTINÚA

CONTINÚA → E-54

② $h(t) = u(t+T) - u(t-T)$

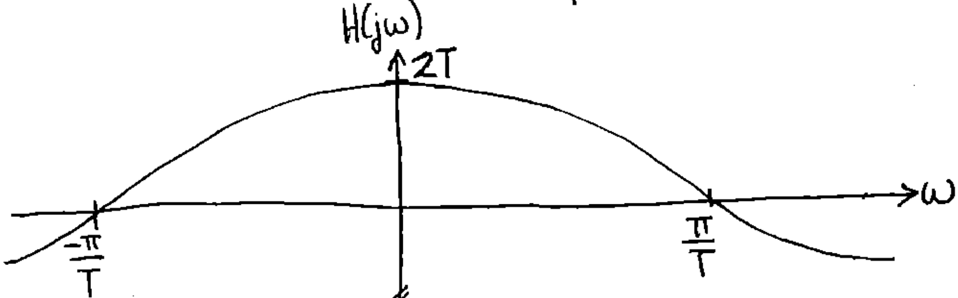


$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{2\operatorname{sen}(\omega T)}{\omega}$$

Ceros en:

$\omega T = k\pi$

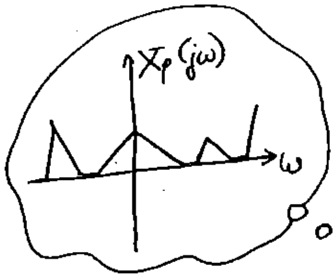
$\omega = \frac{k\pi}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$

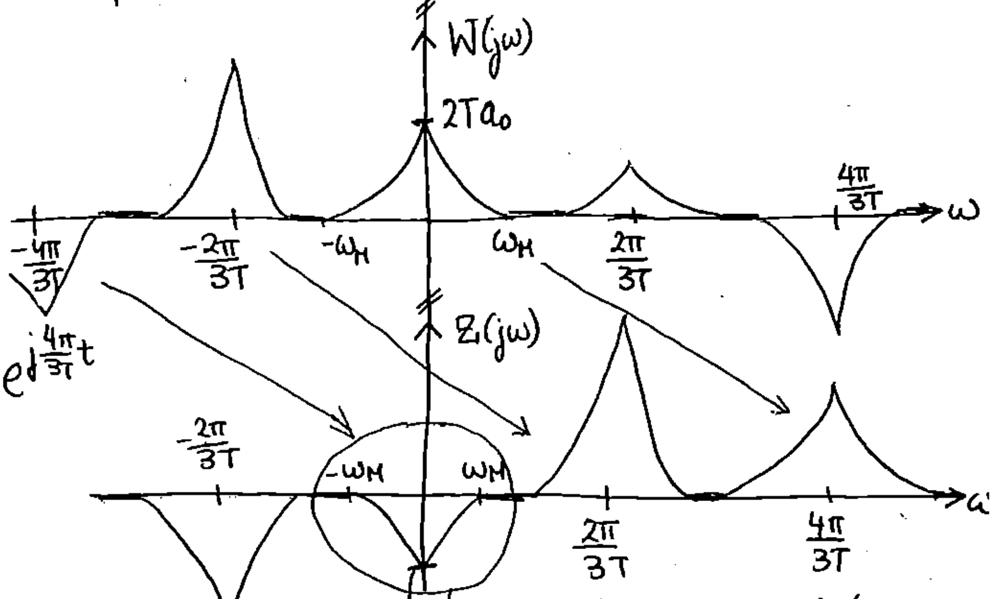


$w(t) = x_p(t) * h(t)$

$\mathcal{F}$

$W(j\omega) = X_p(j\omega) \cdot H(j\omega)$





③ $z(t) = w(t) \cdot q(t) = w(t)e^{j\frac{4\pi}{3T}t}$

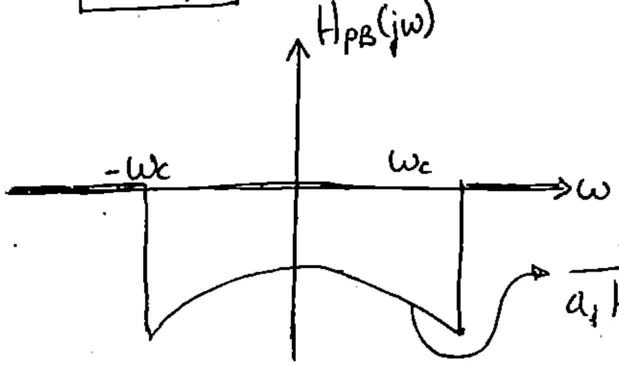
$\mathcal{F}$

$Z(j\omega) = W(j[\omega - \frac{4\pi}{3T}])$

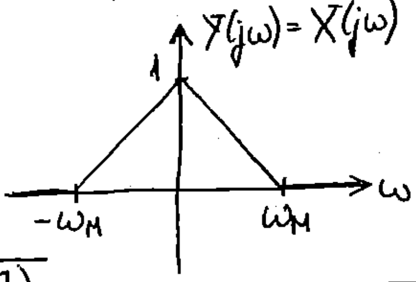
$\underbrace{a_{-2}}_{\overset{\shortparallel}{a_1}} H(j[\omega - 2\frac{2\pi}{3T}])$

Con esta señal habrá que recuperar la original

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{FRPB} \\ H_{PB}(j\omega)\end{matrix}} \longrightarrow x(t) = y(t)$$



$$\frac{1}{a_1 H(j[\omega - \frac{4\pi}{3T}])}$$



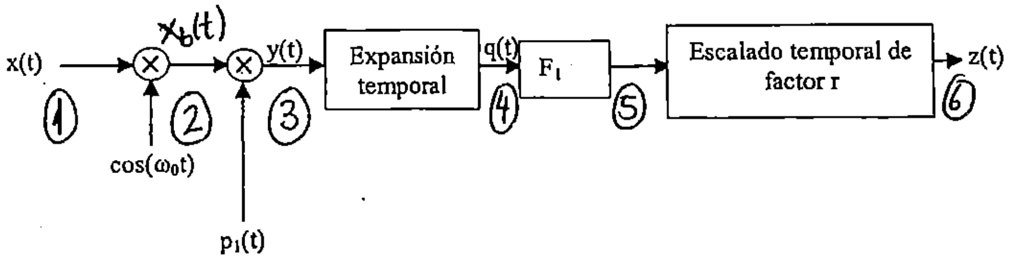
$$\boxed{\omega_M < \omega_c < \frac{2\pi}{3T} - \omega_M}$$

$$\boxed{H_{PB}(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1 H(j[\omega - \frac{4\pi}{3T}])}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

10-1-2007

SEPTIEMBRE 2004

4. Considere el sistema de la figura:



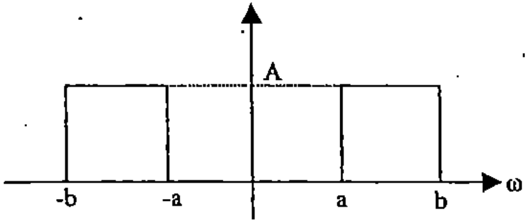
donde: $x(t)$ es una señal paso bajo de banda limitada ($X(j\omega)=0$ cuando $|\omega| > \omega_m>0$). Se cumple:

$$\omega_0=(3/4)\ \omega_s \ ; \quad f_s=1/T_s$$

$$p_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$

El bloque de expansión temporal realiza la siguiente operación: $q(t)=y(t/2)$, y el bloque de escalado temporal realiza un escalado del eje de tiempos con un factor r.

El bloque F₁ es un filtro paso banda ideal cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura siguiente:



Se pide:

(a) Dibuje el espectro de la señal $y(t)$. ¿Cuál es el valor mínimo de ω_s para el que se puede recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$?

(b) Demuestre la siguiente igualdad: $\delta(t/2)=2\delta(t)$ (Utilice esta igualdad en el resto del ejercicio).

(c) Con el bloque de expansión temporal, el filtro paso banda ideal, y el bloque de escalado temporal se pretende recuperar la señal modulada $x(t)\cos(\omega_0 t)$. Determine lo siguiente para que pueda obtenerse dicho objetivo:

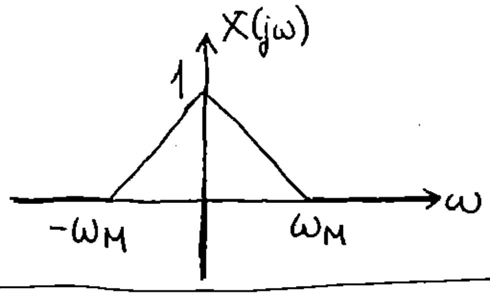
- Dibuje el espectro de la señal $q(t)$ (salida del bloque de expansión temporal)
- ¿Cuales deben ser los parámetros del filtro F₁: A, a, b?
- ¿Cuál debe ser el valor del parámetro de escalado temporal r?

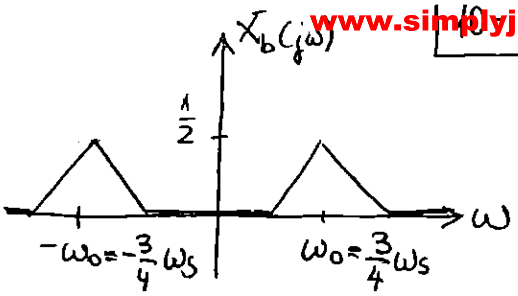
¡¡MUESTREO INSTANTÁNEO!! $f_s = \frac{1}{T_s} \equiv$ frecuencia de muestreo

$T_s \equiv$ periodo de muestreo $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s} \equiv$ pulsación de muestreo

10-1-2004

a) ①

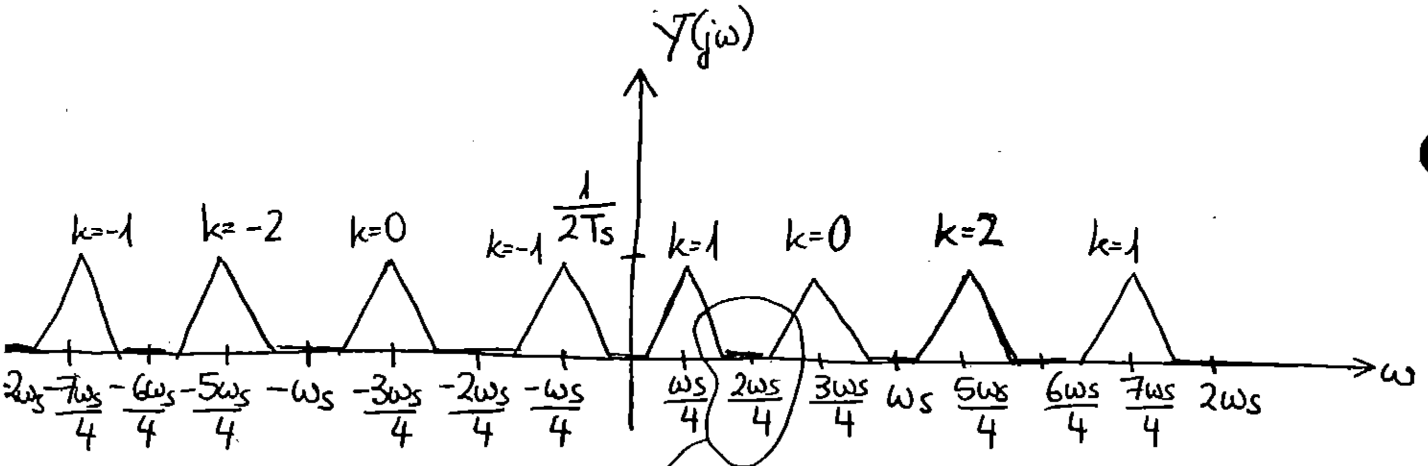




② $x_b(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_b(j\omega)=\frac{1}{2\cancel{\pi}}X(j\omega)*\cancel{\pi}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]=$

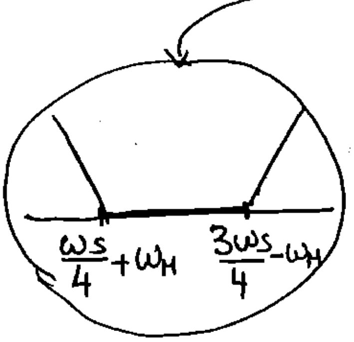
$=\frac{1}{2}[X(j[\omega+\omega_0])+X(j[\omega-\omega_0])]$

③ $y(t)=x_b(t)\cdot p_1(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\boxed{Y(j\omega)}=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X_b(j\omega)*\frac{\cancel{2\pi}}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)=\boxed{\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_b(j[\omega-k\omega_s}$



-Para poder recuperar x(t) hay que evitar el solapamiento espectral (aliasing)

Para ello:



- $\frac{3\omega_s}{4}-\omega_M\geq\frac{\omega_s}{4}+\omega_M\Rightarrow\frac{\omega_s}{2}\geq\omega_M\Rightarrow\omega_s\geq 4\omega_M\Rightarrow$

  $\Rightarrow\boxed{\omega_{s\,mín}=4\omega_M}$//

- expresado en función de T_s:

  $\frac{\cancel{2}\pi}{T_s}\geq\overset{2}{\cancel{4}}\omega_M\Rightarrow T_s\leq\frac{2\pi}{4\omega_M}\Rightarrow\boxed{T_{s\,máx}=\frac{\pi}{2\omega_M}}$//

---

b) Hay que demostrar que $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{t}{2}\right)=\delta(t)$ ∘∘

Intuitivo si sabemos que una delta siempre ha de tener área unidad.
En la teoría viene la propiedad:
$\delta\left(\frac{t}{T}\right)=T\delta(t)$

Dem)

Cambio de variable

$\frac{t}{2}=\tau$ // $t=2\tau\Rightarrow dt=2d\tau$

$t=-\infty\Rightarrow\tau=\frac{t}{2}=-\infty$; $t=\infty\Rightarrow\tau=\infty$

- $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{2}\right)dt\overset{*}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)2d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)dt\Longrightarrow\boxed{\delta\left(\frac{t}{2}\right)=2\delta(t)}$// cqd//

variable muda

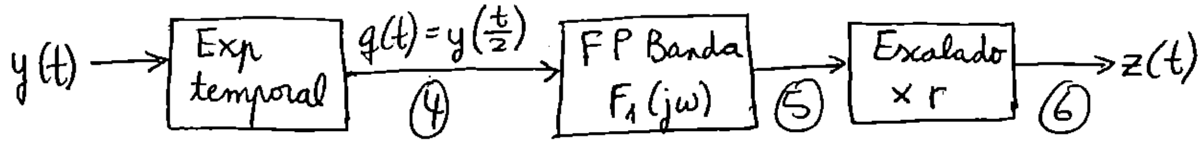
CONTINÚA

∘∘? ⟹ ¿seguro? "cqd" La "demostración" es muy poco rigurosa, es la que dieron en la solución oficial.-

CONTINÚA → E-55

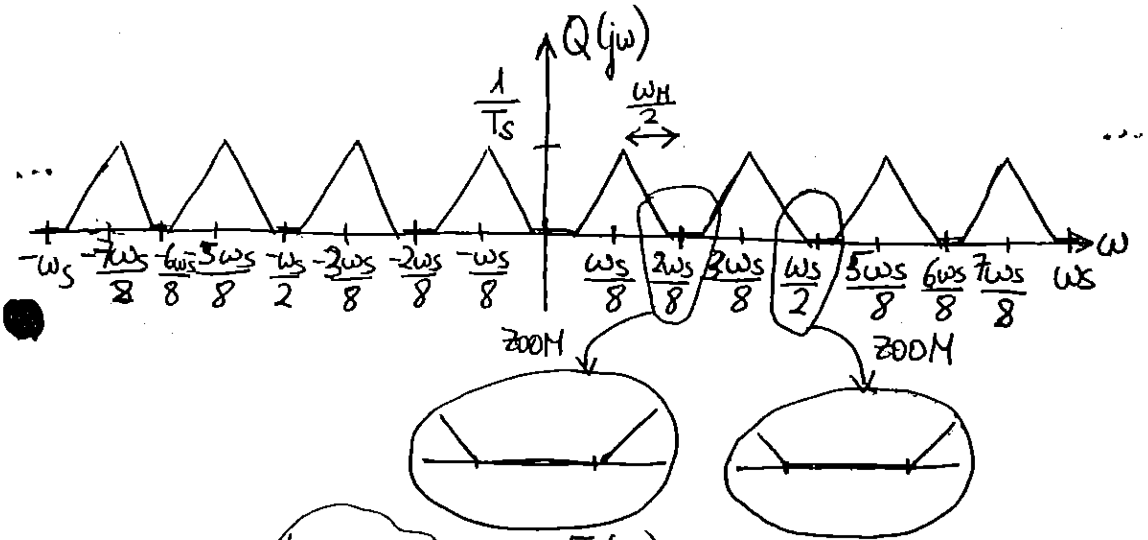
10-1-2009

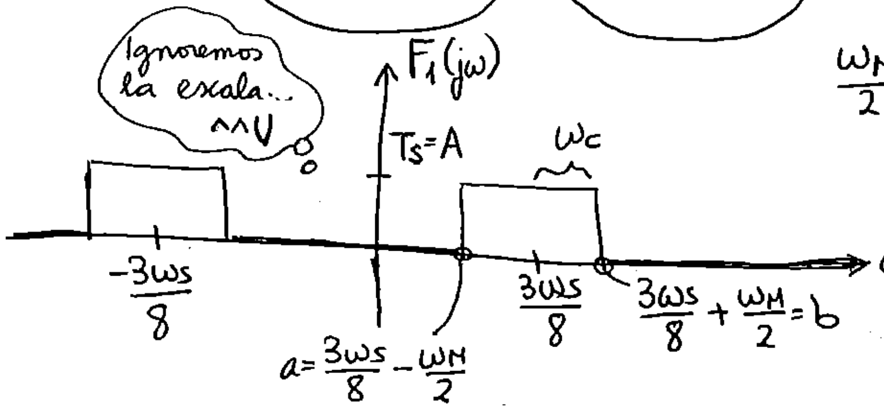
c)



④ $q(t) = y\left(\frac{t}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Q(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2}} Y\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) = 2Y(2j\omega)$

$\boxed{x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)}$ $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

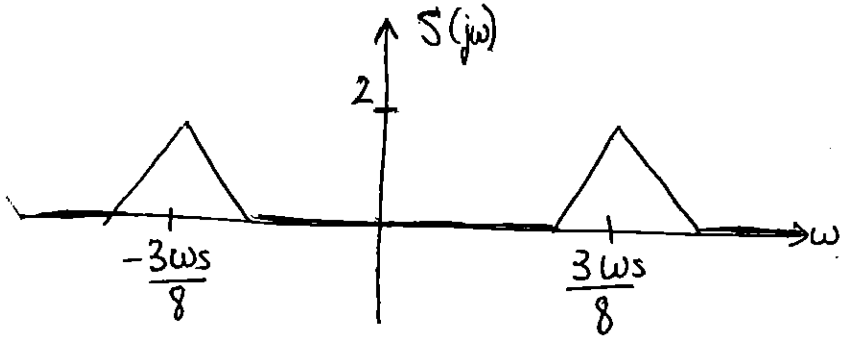




$\frac{\omega_M}{2} < \omega_c < \frac{2\omega_s}{8} - \frac{\omega_M}{2}$

Cogemos el valor mínimo posible así que:

⑤



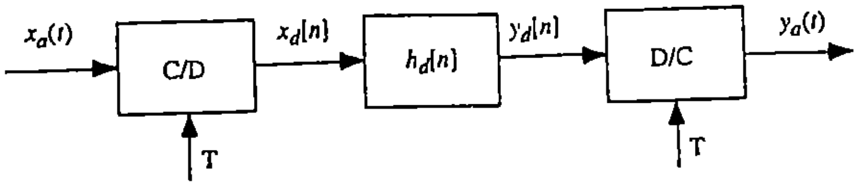
⑥ Expansión en frecuencia ×2 (compresión en t ×2)

$$z(t) = s(2t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(j\omega) = \frac{1}{2} S\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

12-1-2009

SEPTIEMBRE 1999

3. Considere el esquema de la figura siguiente correspondiente al filtrado de señales de banda limitada en tiempo continuo, mediante procesado discreto de secuencias:



Mismo esquema que en la teoría T5.5

donde el primer bloque conversor continuo-discreto (C/D) muestrea de forma ideal la señal de entrada cada T segundos obteniéndose $x_d[n]=x_a(nT)$; el segundo bloque es un sistema discreto de respuesta al impulso $h_d[n]$; y el tercer bloque es un conversor de discreto a continuo (D/C) mediante una operación de interpolación, descrita por la siguiente expresión:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\ h_a(t-nT) \qquad (1)$$

siendo $h_a(t)$ la señal interpoladora.

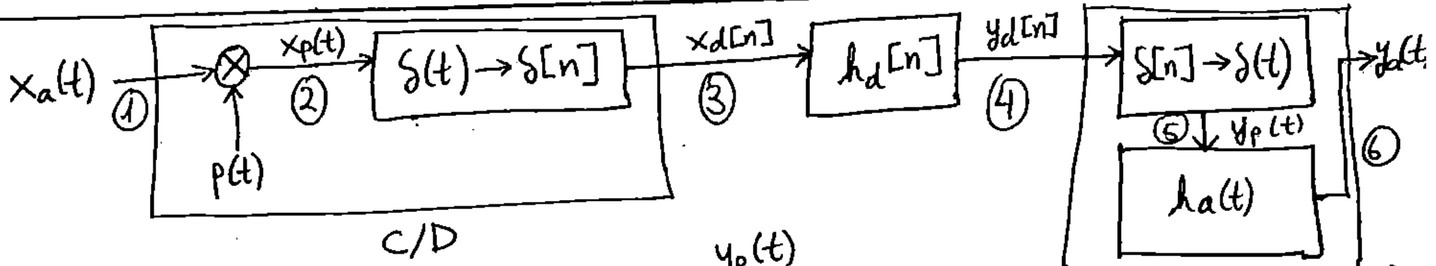
a) Determine la transformada de Fourier $Y_a(j\omega)$ en función de la transformada de Fourier de la entrada $X_a(j\omega)$ y las respuestas frecuenciales de los distintos sistemas. Para ello, suponga que $X_a(j\omega)$ es de banda limitada y que se verifica el teorema de Nyquist de muestreo.

b) Si consideramos la siguiente situación particular:

$$x_a(t)=1, \qquad h_d[n]=\delta[n], \qquad h_a(t)=e^{-t/T}u(t) \qquad (2)$$

determine la expresión analítica de $Y_a(j\omega)$ a partir del resultado obtenido en a).

c) Determine $y_a(t)$ como la transformada inversa de Fourier de $Y_a(j\omega)$. Justifique que es periódica y calcule los coeficientes de su Desarrollo en Serie de Fourier.



D/C $Y_d(e^{j\Omega})$

$$y_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\,h_a(t-nT)=\overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\,\delta(t-nT)}^{y_p(t)} * h_a(t)$$

a) ① $X_a(j\omega)$

② $X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j[\omega-k\omega_s])=\frac{1}{T}X_a(j\omega),\ |\omega|<\frac{\omega_s}{2}$,, Periódica $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

$\omega\rightarrow\Omega$,, $\omega=\frac{\Omega}{T}$

③ $X_d(e^{j\Omega})=X_p(j\frac{\Omega}{T})=\frac{1}{T}X_a(j\frac{\Omega}{T}),\ |\Omega|<\pi$,, Periódica 2π

④ $Y_d(e^{j\Omega})=X_d(e^{j\Omega})H_d(e^{j\Omega})=\frac{1}{T}X_a(j\frac{\Omega}{T})H_d(e^{j\Omega})$,, $|\Omega|<\pi$, Periódica 2π

$\Omega\rightarrow\omega$,, $\Omega=\omega T$

⑤ $Y_p(j\omega)=\frac{1}{T}X_a(j\frac{\omega \cancel{T}}{\cancel{T}})H_d(e^{j\omega T})=\frac{1}{T}X_a(j\omega)H_d(e^{j\omega T})$,, $|\omega|<\frac{\omega_s}{2}$,, Periódica ω_s

SIGUE

SIGUE

11-1-2004

⑥ $\boxed{Y_a(j\omega)} = Y_p(j\omega)H_a(j\omega) = \boxed{\frac{1}{T} X_a(j\omega)\, H_d(e^{j\omega T})\, H_a(j\omega) \;,\; \frac{-\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}}$ ¿Periódica ω?

- **Forma alternativa más rigurosa**: (Arrastramos Σs)

(No conocemos $h_a(t)$ ó $H_a(j\omega)$)

① $X_a(j\omega)$

② $X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j[\omega - k\omega_s])$

③ $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j[\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}]) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{1}{T}[\Omega - k2\pi])$

④ $Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega})H_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}H_d(e^{j\Omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{1}{T}[\Omega - k2\pi])$

⑤ $Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}H_d(e^{j\omega T})\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{1}{T}[\omega T - k2\pi]) = \frac{1}{T}H_d(e^{j\omega T})\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j[\omega - k$

⑥ $\boxed{Y_a(j\omega)} = Y_p(j\omega)H_a(j\omega) = \boxed{\frac{1}{T}H_d(e^{j\omega T})\, H_a(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j[\omega - k\omega_s])}$ //

---

b) • $x_a(t) = 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{X_a(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)}$

• $h_a(t) = e^{-\frac{t}{T}}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{H_a(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}}$

• $h_d[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_d(e^{j\Omega}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{H_d(e^{j\omega T})} = H_d(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \omega T} = \boxed{1}$

- Finalmente: $\boxed{Y_a(j\omega)} = \frac{1}{T}\cdot 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - k\overset{\omega_s}{\frac{2\pi}{T}}) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1 + j\omega T}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) =$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1 + jk\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \boxed{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{1 + jk2\pi}}_{a_k}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})}$$ //

---

c) • $Y_a(j\omega)$ es un espectro de deltas equiespaciadas $\frac{2\pi}{T} \Rightarrow$ $\boxed{y_a(t) \text{ periódica de periodo } T}$ //

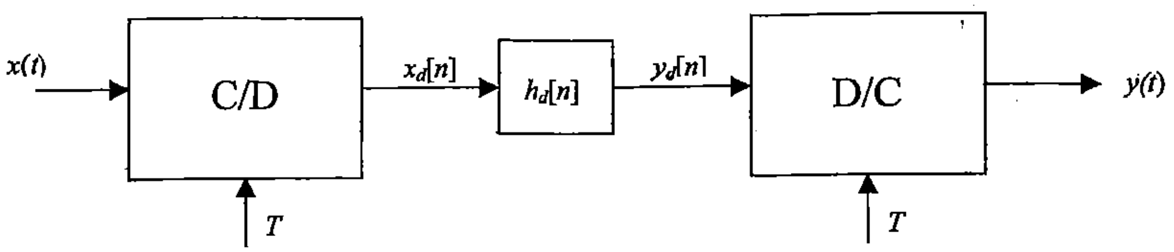
• Además su DSF es: $\boxed{y_a(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{1 + jk2\pi}}_{a_k} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}}$ //

(Aquí $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

• $\boxed{a_k = \frac{1}{1 + jk2\pi}}$ //

FEBRERO 2005

4. Considera el sistema de la figura:



Dada la señal de entrada $x(t) = x_0(t) + x_0(t)\cos w_0 t$, cumpliéndose que $X_0(jw) = 0\ ,\ \forall\,|w| > w_0/2$.

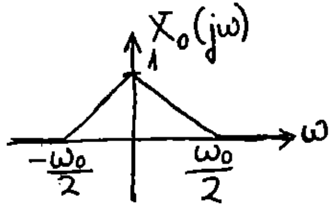
a) Determine el máximo periodo de muestreo $T = T_{\max}$ de modo que la secuencia de muestras de $x(t)$, $x_d[n] = x(nT)$, sea representativa de $x(t)$, (es decir que $x(t)$ se puede recuperar a partir de $x_d[n]$).

b) Determine la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro de manera que $y_d[n] = x_0(nT_{\max})$, (observe que $x_0(t)$ es una componente aditiva de $x(t)$) donde $T_{\max}$ corresponde al valor de T determinado en el apartado a).

c) En las condiciones del apartado b), diseñe el conversor "D/C" de manera que $y(t) = x_0(t)$, y exprese $y(t)$ en función de las muestras de $x_0(t)$.

---

a) Objetivo: evitar solapamientos del espectro de x(t)

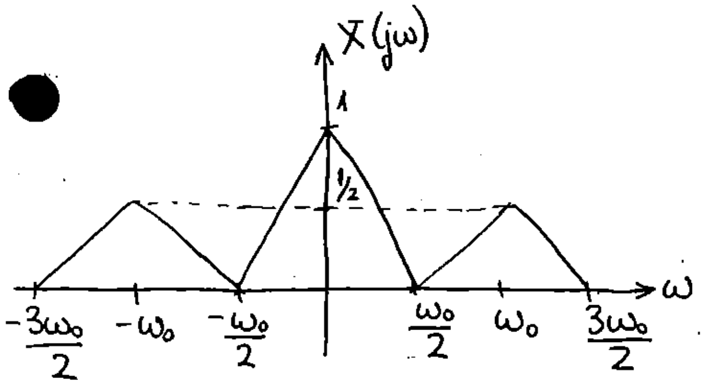


- $x(t) = x_0(t) + x_0(t)\cos(\omega_0 t)$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

- $X(j\omega) = X_0(j\omega) + \frac{1}{2\cancel{\pi}} X_0(j\omega) * \cancel{\pi}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] =$

$$= X_0(j\omega) + \frac{1}{2}[X_0(j[\omega-\omega_0]) + X_0(j[\omega+\omega_0])]$$



- Tendremos que exigir que se cumpla el Tª de Nyquist: $\omega_S \geqslant 2\omega_M \Rightarrow$

$$\omega_S \geqslant \cancel{2}\frac{3\omega_0}{\cancel{2}} \Rightarrow \omega_S \geqslant 3\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_{S_{mín}} = 3\omega_0}$$

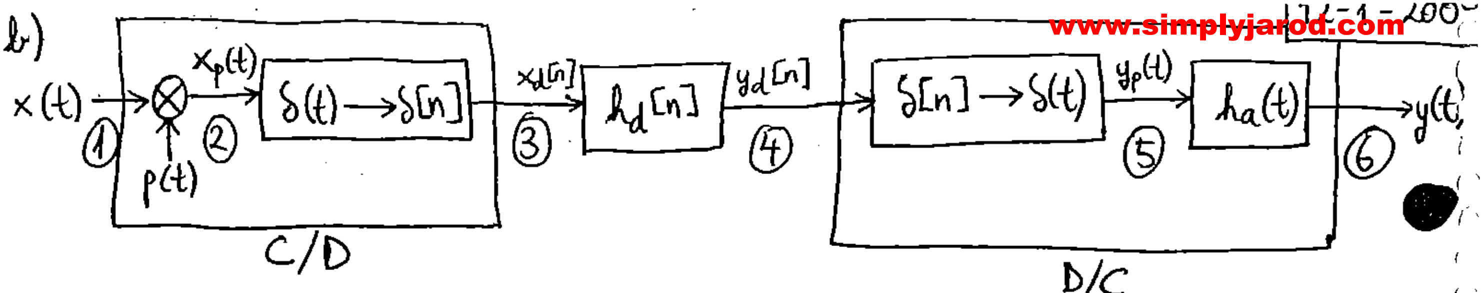
$$\frac{2\pi}{T} \geqslant 3\omega_0 \Rightarrow T \leq \frac{2\pi}{3\omega_0} \Rightarrow \boxed{T_{máx} = \frac{2\pi}{3\omega_0}}$$

NOTA: Aquí, al contrario que otros ejercicios, hay que conservar toda la señal, no sólo la información estricta y necesaria, pues si por ejemplo sólo conservamos $X_0(j\omega)$, para obtener $X(j\omega)$ habría que modular (con cosenos...) y eso no está contemplado en el esquema del enunciado.

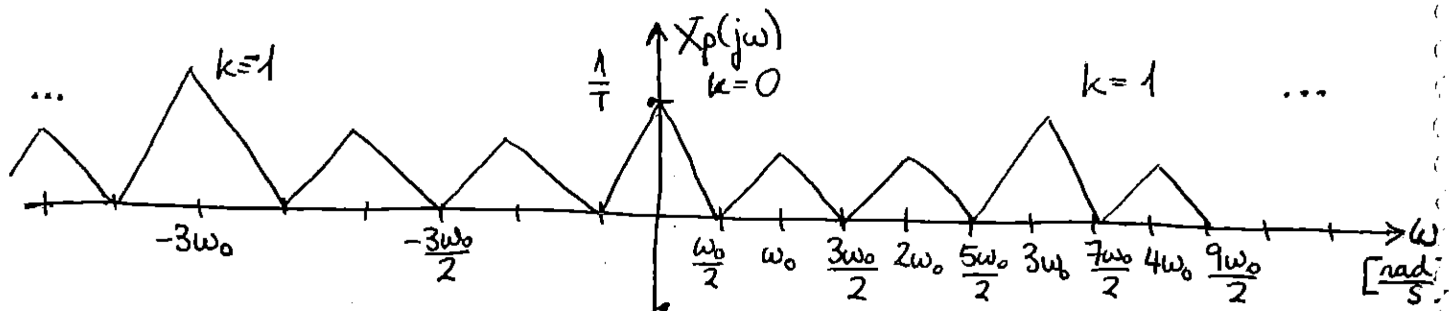
SIGUE

17-1-200

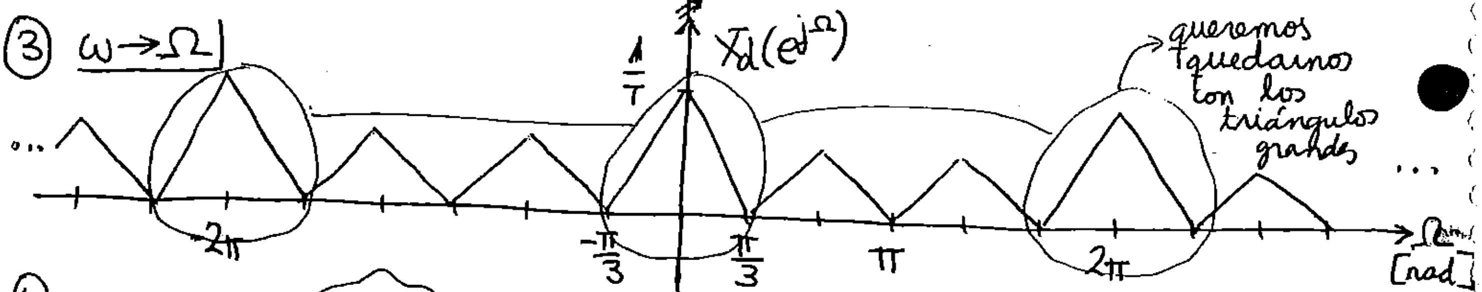
b)



② $X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j[\omega - k\omega_s])$, $\omega_s = \omega_{s\,mín} = 3\omega_0 \Leftrightarrow T = T_{máx} = \frac{2\pi}{3\omega_0}$

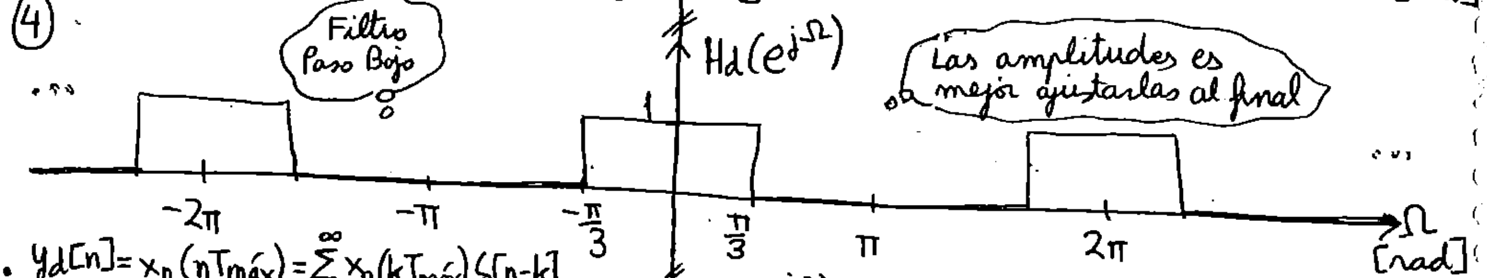


③ $\omega \to \Omega$



queremos quedarnos con los triángulos grandes

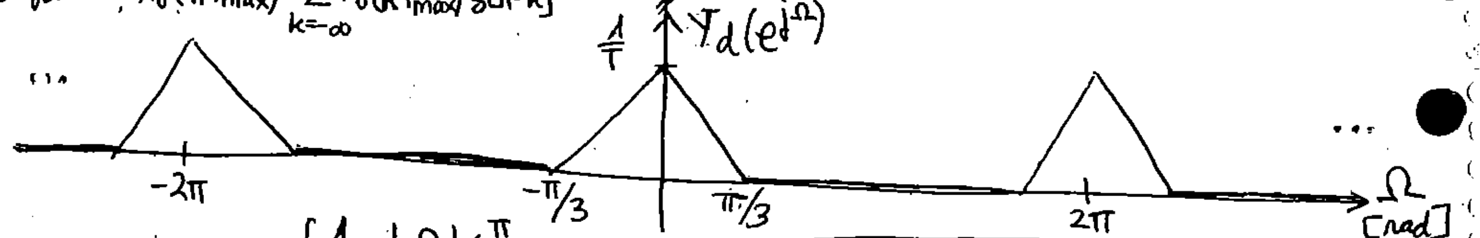
④



Filtro Paso Bajo

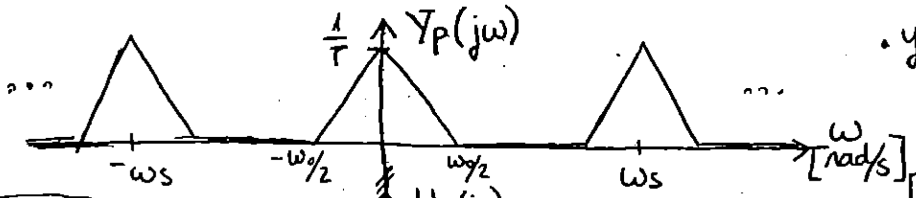
Las amplitudes es mejor ajustarlas al final

- $y_d[n] = x_0(nT_{máx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(kT_{máx})\delta[n-k]$



▸ $H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 \,,\, |\Omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0 \,,\, \pi/3 < |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{h_d[n] = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n}}$

⑤ $\Omega \to \omega$

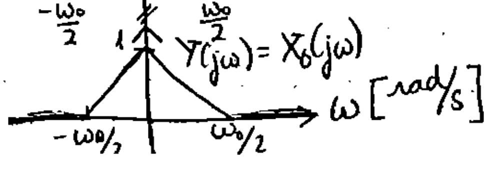


- $y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT_{máx})\delta(t - nT_{máx}$

⑥

Se puede sustituir en la expresión final

$\boxed{h_a(t) = T\frac{\text{sen}(\frac{\omega_0}{2}t)}{\pi t}}$



- $\boxed{y(t)} = y_p(t) * h_a(t) =$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT_{máx})\delta(t - nT_{máx}) * h$

$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT_{máx}) h_a(t - nT_{m}}$

muestras de $x_0(t)$

(∄ solapamiento espect.) $\boxed{x_0(t)}$

JUNIO 2004

4. Sea un sistema como el descrito en la figura 1 donde $x_c(t)$ es una señal paso bajo de espectro arbitrario y banda limitada, cuya frecuencia máxima es ω_{max}. $h_1(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante cuya respuesta en frecuencia es $H_1(j\omega)=\dfrac{1-e^{-aT}e^{-j\omega T}}{a+j\omega}$ siendo T el periodo de muestreo y a una constante real y positiva.

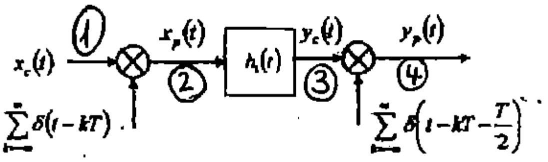


Figura 1

a) Represente gráficamente las señales $x_c(t)$, $x_p(t)$, $y_c(t)$ e $y_p(t)$. Demuestre en el dominio del tiempo que se verifica la relación $y_p(t)=e^{-a\frac{T}{2}}x_p\left(t-\frac{T}{2}\right)$.

Nota: Aunque no se haya demostrado, utilice esta expresión para el resto del ejercicio.

b) Determine las condiciones bajo las que se puede recuperar la señal $x_c(t)$ a partir de $y_p(t)$. Determine el sistema que permite recuperar la señal $x_c(t)$ a partir de $y_p(t)$.

c) Considere la estructura en tiempo discreto de la figura 2 (que utiliza el esquema de muestreo de la figura 1). El conversor discreto/continuo está formado por conversor de señal en tiempo discreto a tren de deltas seguido de un filtro interpolador ideal. Calcule la expresión del sistema en tiempo continuo equivalente $H_c(jw)$ en función del sistema en tiempo discreto $H_d(e^{jw})$.

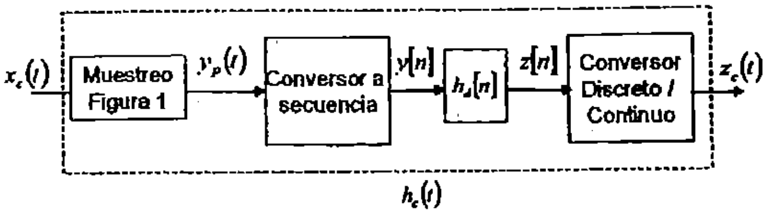


Figura 2

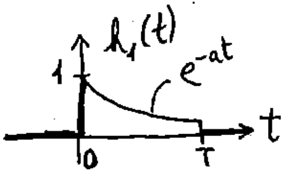
a) $H_1(j\omega)=\dfrac{1-e^{-aT}e^{-j\omega T}}{a+j\omega}=\dfrac{1}{a+j\omega}-\dfrac{e^{-aT}}{a+j\omega}e^{-j\omega T};$

DATO: $a\in\mathbb{R}^+\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{a\}>0$ ✓

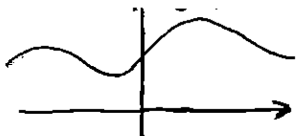
$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

$\boxed{h_1(t)}=\mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{a+j\omega}\right\}-e^{-aT}\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{a+j\omega}e^{-j\omega T}\right\}\overset{\downarrow}{=}e^{-at}u(t)-\cancel{e^{-aT}}e^{-a(t-\cancel{T})}u(t-T)=$

$$\boxed{=e^{-at}\left[u(t)-u(t-T)\right]=\begin{cases}e^{-at} & ,\ 0<t<T\\ 0 & ,\ \text{resto}\end{cases}}$$

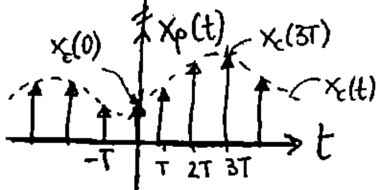


①



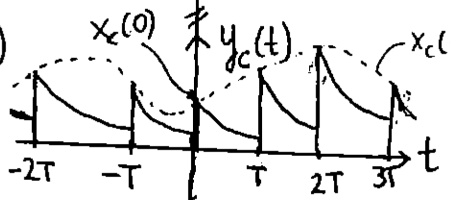
(Por ejemplo)

②



$$x_p(t) = x_c(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\,\delta(t-kT)$$

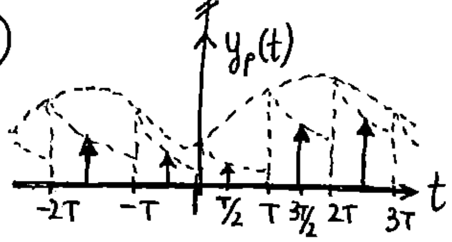
③



$$y_c(t) = x_p(t) * h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\,h_1(t-kT)$$

{$h_1(t)$ replicada, escalada y desplazada}

④



$$y_p(t) = y_c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-T/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_c(kT+T/2)\,\delta(t-T[k+1/2]$$

{Esto empieza a ponerse feo analíticamente...}

- Debemos probar que $y_p(t) = e^{-a\frac{T}{2}} x_p(t-T/2) \Rightarrow$

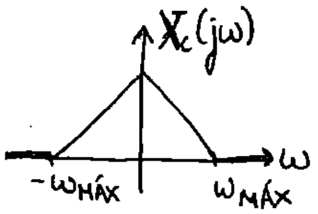
- $$\boxed{y_p(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-T/2) \cdot \left(x_c(kT)e^{-a(t-kT)}\right)\Bigg|_{t=T(k+\frac{1}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-T/2)x_c(kT)e^{-a[T(k+\frac{1}{2})}$$

a ojo del dibujo ④ y aplicando props de la $\delta(t)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-T/2)x_c(kT)e^{-a\frac{T}{2}} = e^{-a\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-\tfrac{T}{2})x_c(kT) = \boxed{e^{-a\frac{T}{2}} x_p(t-\tfrac{T}{2})}$$

---

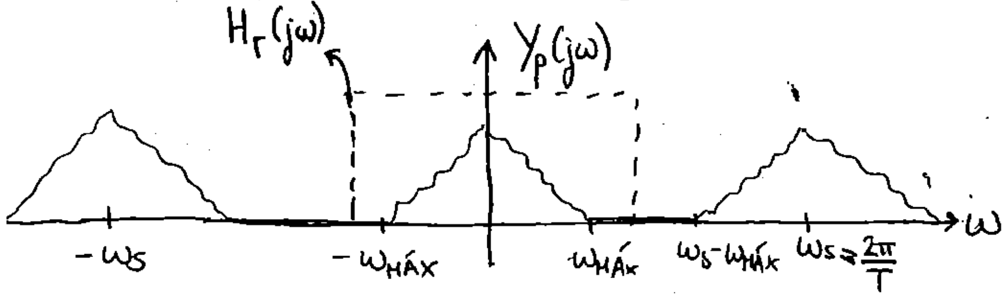
b) - Veamos cómo es $Y_p(j\omega)$ para ver cómo podemos recuperar $X_c(j\omega)$



$$y_p(t) = e^{-a\frac{T}{2}} x_p(t-\tfrac{T}{2})$$

$$\mathcal{F} \downarrow \boxed{Y_p(j\omega)} = e^{-a\frac{T}{2}} \mathcal{F}\{x_p(t-\tfrac{T}{2})\} = e^{-a\frac{T}{2}} X_p(j\omega)e^{-j\omega\frac{T}{2}} \overset{\text{muestreo ideal}}{=}$$

$$= \boxed{\frac{1}{T}e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j[\omega-k\omega_s])}$$



- Los triángulos están deformados al estar multiplicados por $e^{-j\omega\frac{T}{2}}$, y escalados al estar multiplicados por $\frac{1}{T}e^{-a\frac{T}{2}}$

$$\omega_S - \omega_{MÁX} \geqslant \omega_{MÁX} \Rightarrow \boxed{\omega_S \geqslant 2\omega_{MÁX}}$$

CONDICIÓN DE NO SOLAPAMIENTO ESPECTRAL O DE NYQUIST

- Siempre que esto se cumpla podemos recuperar $x(t)$ a partir de $y_p(t)$, ya que no hay solapamiento. ¿Cómo? Pues con un filtro paso bajo que compense las deformaciones de los triángulos.

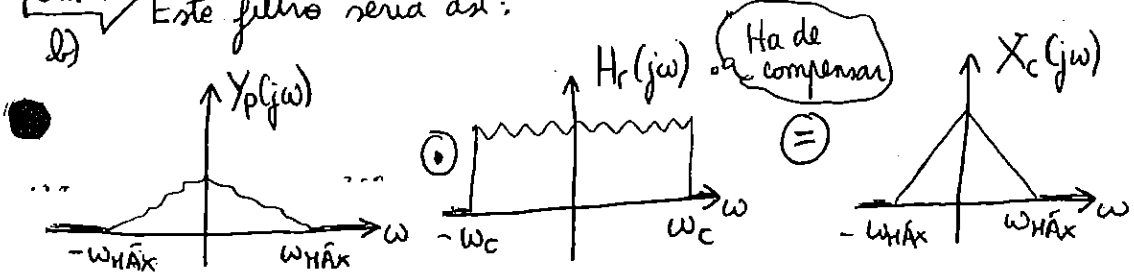
SIGUE

16/1/200

E-58

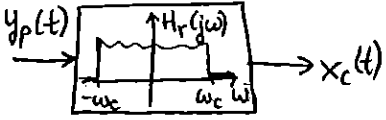
SIGUE

b) Este filtro sería así:



$$\boxed{H_r(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{T}{e^{-aT/2} e^{-j\omega T/2}} = T e^{(a+j\omega)\frac{T}{2}}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{h_r(t) = T e^{a\frac{T}{2}} \frac{\operatorname{sen}[\omega_c(t+T/2)]}{\pi(t+T/2)}}$$

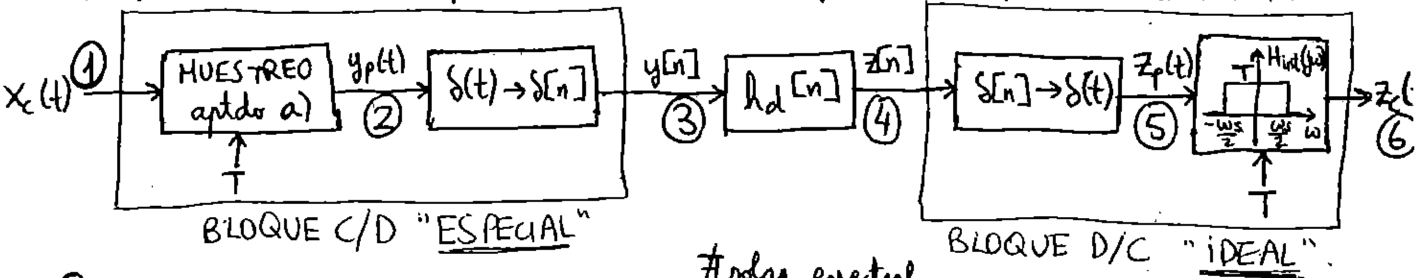
$$\boxed{\omega_{MÁX} < \omega_c < \omega_s - \omega_{MÁX}}$$



<u>NOTA</u>: $h_r(t)$ <u>no</u> es de un filtro causal, pues $h_r(t) \neq 0 \ \forall t < 0$ (A veces lo preguntan)

---

c) ¡OJO! En este caso <u>no</u> podemos aplicar directamente la fórmula de la teoría, porque aunque se cumple la condición de Nyquist, el bloque C/D <u>no es ideal</u>.



① $X_c(j\omega)$

$\omega \to \Omega$, $\omega = \frac{\Omega}{T}$

② $$Y_p(j\omega) = e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j[\omega - k\omega_s]) \overset{\substack{\nexists \text{ solap. espectral} \\ \downarrow}}{=} \begin{cases} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} \frac{1}{T} X_c(j\omega), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2}; \\ \text{Periódica } \omega_s \end{cases}$$

③ $$Y(e^{j\Omega}) = Y_p(j\omega)\Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T}} = Y_p\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = \begin{cases} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\Omega\frac{1}{2}} \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right), & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases};$$

$\Omega \to \omega$, $\Omega = \omega T$

④ $$Z(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega}) H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\Omega\frac{1}{2}} \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right) H_d(e^{j\Omega}), & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases};$$

⑤ $$Z_p(j\omega) = Z(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \omega T} = \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} X_c(j\omega) H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ \text{Periódica } \omega_s \end{cases};$$

⑥ $$Z_c(j\omega) = Z_p(j\omega) H_{int}(j\omega) = \begin{cases} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} X_c(j\omega) Hd(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, \text{ resto} & \text{¡¡No periódica!!} \end{cases}$$

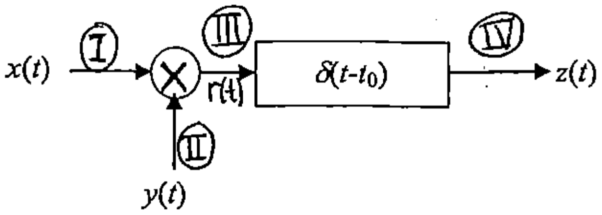
- <u>Sistema continuo equivalente</u>

$$\left.\begin{array}{l} x_c(t) \rightarrow \boxed{h_c(t)} \rightarrow z_c(t) \\ Z_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_c(j\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{H_c(j\omega) = \begin{cases} e^{-a\frac{T}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}} H_d(e^{j\omega T}), & \boxed{|\omega| < \frac{\omega_s}{2}} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

Ponemos esto porq
$Hd(e^{j\Omega})$ es periódi
y en T.C.
no lo es
en este ca

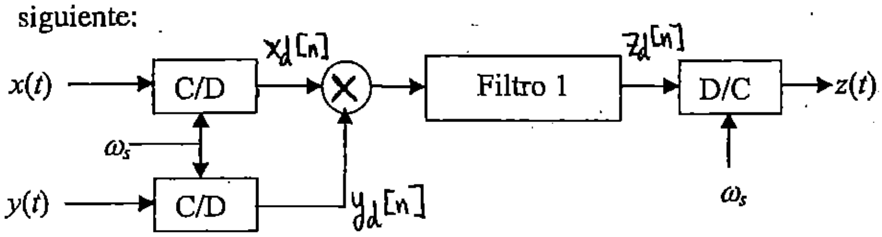
FEBRERO 2004

4. Considere el siguiente sistema de procesado de señales en tiempo continuo:



donde $x(t)$ e $y(t)$ son señales limitadas en banda, es decir, $X(j\omega)=0\ \forall\ |\omega|>\omega_x$; $Y(j\omega)=0\ \forall\ |\omega|>\omega_y$

Se desea diseñar un sistema discreto que simule el efecto del sistema continuo anterior sobre las señales. El diagrama de bloques de dicho sistema será el siguiente:



donde los conversores continuo-discreto y discreto-continuo son <u>ideales</u>.

Conteste a las siguientes cuestiones:

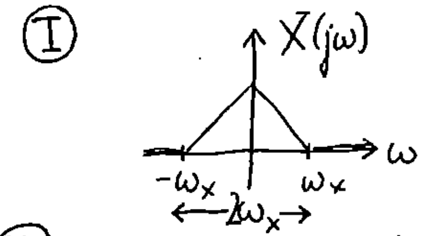
(a) ¿Cual es la mínima frecuencia de muestreo ω_s que debe utilizar el sistema discreto?

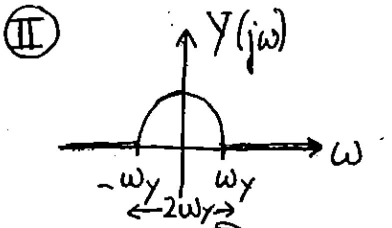
(b) Calcule la respuesta en frecuencia que debe tener el Filtro 1 para que el sistema discreto y el continuo sean equivalentes.

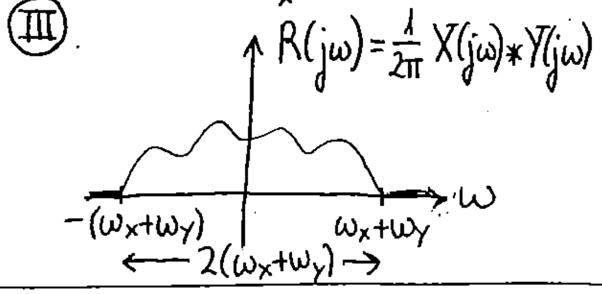
(c) Calcule la respuesta impulsiva del Filtro 1. Particularícela cuando el retardo t_0 es un múltiplo entero del periodo de muestreo. Comente el resultado.

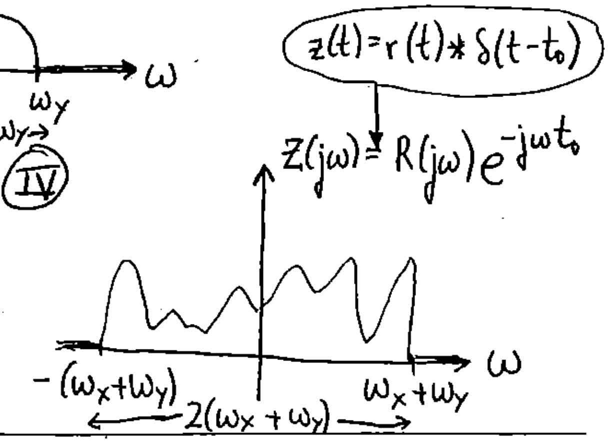
---

a) -Para obtener la mínima frecuencia de muestreo debemos garantizar que se cumple el criterio de Nyquist para la señal de mayor ancho de banda en cualquier punto del sistema continuo equivalente.







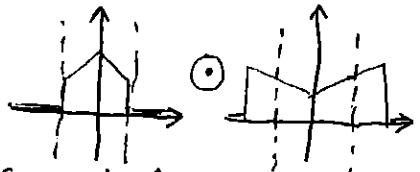


- Como se ve, hay que saberse muy bien cómo afecta la convolución a la señal resultado en su ancho de banda (T1.12.1)
- Está claro que el mayor ancho de banda en esta ocasión es $\boxed{B = 2(\omega_x + \omega_y)}$
- Condición de Nyquist: $\omega_s \geq 2\omega_M = 2\omega_B \Rightarrow \omega_s \geq 2(\omega_x + \omega_y) \Rightarrow \boxed{\omega_{s_{mín}} = 2(\omega_x + \omega_y)}$

NOTA: ¿Cómo afecta al ancho de banda una convolución en el tiempo?

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) = X_3(j\omega)$$

ANCHO BANDA $X_3(j\omega) \triangleq \boxed{B_{X_3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a ojo}}}{\triangleq} \text{mín}\left\{B_{X_1}, B_{X_2}\right\}}$



-Se recorta el ancho de banda al mínimo

---

b) Como no hay solapamiento espectral (se supone, ¡si no, no nos habrían pedido $\omega_{s_{mín}}$!) y las cajas C/D y D/C son ideales (estándar), podemos aplicar las fórmulas vistas en la teoría sin necesidad de deducirlas:

$$\boxed{H_d(e^{j\Omega})} \triangleq \begin{cases} H_c(j\omega)\Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T}} \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases} = \begin{cases} H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right) & , \ |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases} \underset{\uparrow}{=} \boxed{\begin{cases} e^{-j\frac{\Omega}{T}t_0} & , \ |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}}$$

$$h_c(t) = \delta(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_c(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

---

c) $\boxed{h_d[n]} \triangleq \mathcal{F}^{-1}\left\{H_d(e^{j\Omega})\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-j\Omega\frac{t_0}{T}}\right\} \underset{\uparrow}{\triangleq} \boxed{\delta\left[n - \frac{t_0}{T}\right]}$

$$\delta[n - n_0] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}$$

- ¡¡MUCHO OJO!! Esto sólo será cierto cuando $\frac{t_0}{T} \in \mathbb{Z}$, pues no tiene sentido un desplazamiento fraccionario en T.D. O, lo que es lo mismo:

¿qué es $\delta\left[n - \frac{27}{5}\right]$? Nada, no existe eso.

$\boxed{t_0 = \dot{T} = kT \ , \ k \in \mathbb{Z}}$ (t_0 múltiplo del periodo de muestreo, T)

En general

$$\boxed{h_d[n]} \triangleq \mathcal{F}^{-1}\left\{H_d(e^{j\Omega})\right\} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} e^{-j\Omega\frac{t_0}{T}} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega\left(n - \frac{t_0}{T}\right)} d\Omega =$$

No queda otra

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j\left(n - \frac{t_0}{T}\right)} e^{j\Omega\left(n - \frac{t_0}{T}\right)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j\left(n - \frac{t_0}{T}\right)}\left[e^{j\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)} - e^{-j\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)}\right] =$$

$$\triangleq \boxed{\frac{\text{Sen}\left[\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)}}$$

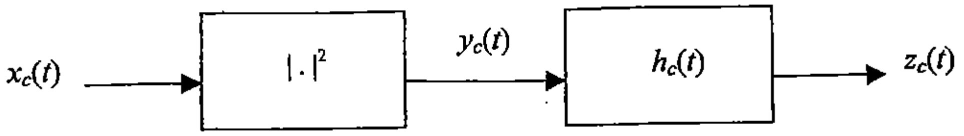
Algo parecido a una "sinc"

- Finalmente: $\boxed{h_d[n] = \begin{cases} \delta\left[n - \frac{t_0}{T}\right] & \text{si } t_0 = \dot{T} \\ \frac{\text{sen}\left[\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{t_0}{T}\right)} & \text{si } t_0 \neq \dot{T} \end{cases}}$

16-4-2009

SEPTIEMBRE 2002

4. Sea el sistema en tiempo continuo de la figura:

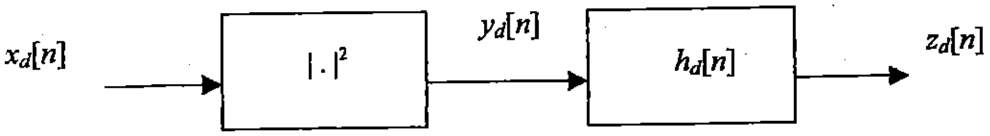


El primer bloque halla el cuadrado del módulo de la señal de entrada $x_c(t)$, que supondremos real y de banda limitada ($X(jw) = 0 \quad \forall |w| > w_0$).

El sistema $h_c(t)$ se define mediante la siguiente relación entrada–salida:

$$z_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}$$

El sistema en tiempo discreto equivalente es:



Conteste a las siguientes cuestiones:

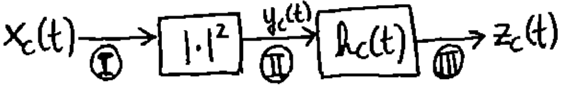
a) ¿Cuál debe ser la frecuencia de muestreo f_s mínima para poder recuperar $z_c(t)$ a partir de la salida del sistema equivalente en tiempo discreto, $z_d[n]$?

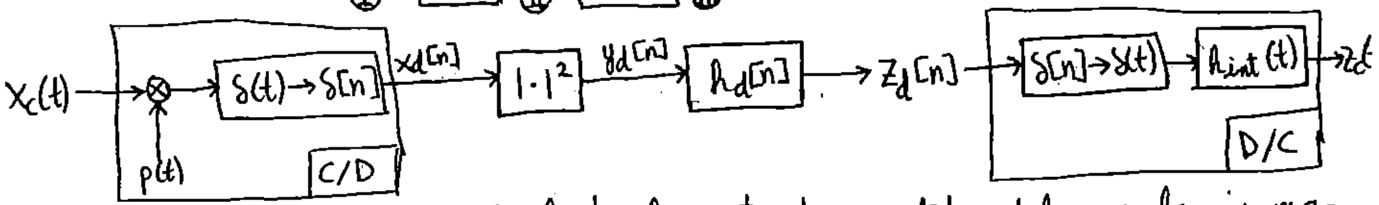
b) ¿Cuál debe ser la respuesta en frecuencia $H_d(e^{jw})$ del sistema discreto $h_d[n]$ equivalente al sistema lineal $h_c(t)$?

c) Halle la respuesta impulsiva del sistema equivalente $h_d[n]$.

---

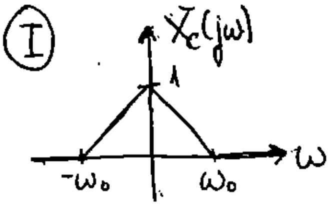
a)





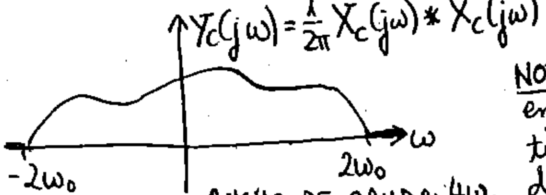
- Para que sea totalmente equivalente, las entradas y salidas deben ser las mismas
- Se debe cumplir el criterio de Nyquist para la señal de mayor ancho de banda que aparezca en cualquier punto del <u>sistema continuo</u>.

Ⓘ



ANCHO DE BANDA: $2\omega_0$

Ⓘ Ⓘ $y_c(t) = |x_c(t)|^2 = x_c^2(t) = x_c(t) \cdot x_c(t) \xleftrightarrow{F} Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) * X_c(j\omega) \frac{1}{2\pi}$



ANCHO DE BANDA: $4\omega_0$

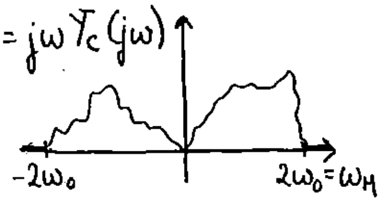
<u>NOTA</u>: Al convolucionar dos cosas en tiempo continuo la convolución tiene como "anchura" la suma de "anchuras" originales (ver T-1.)

SIGUE

SIGUE

16-1-2004

Ⓘⅰ $z_c(t) = \frac{d}{dt} y_c(t) \xleftrightarrow{F} Z_c(j\omega) = j\omega Y_c(j\omega)$



ANCHO DE BANDA: $4\omega_0$

CONCLUSIÓN: Las señales con mayor ancho de banda en el sistema continuo son $y_c(t)$ ó $z_c(t)$. Debemos satisfacer la condición de Nyquist para cualquiera de ellas y será suficiente para que no haya solapamiento:

$$\omega_S \geq 2\omega_M = 4\omega_0 \Rightarrow \omega_{S_{mín}} = 4\omega_0 \Rightarrow \boxed{f_{S_{mín}}} = \frac{\omega_{S_{mín}}}{2\pi} = \frac{4\omega_0}{2\pi} = \boxed{\frac{2\omega_0}{\pi} \; [Hz]}$$

---

b) En este caso como no hay solapamiento espectral y las cajas C/D y D/C son las estándar puedo aplicar:

- $H_d(e^{j\Omega}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T}} = H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right)$ „ $|\Omega| < \pi$, Periódica 2π
- $Z_c(j\omega) = Y_c(j\omega) j\omega \Rightarrow H_c(j\omega) = j\omega \Rightarrow \boxed{H_d(e^{j\Omega}) = j\frac{\Omega}{T} \text{ „ } |\Omega| < \pi \text{„ Periódica } 2\pi}$

---

c) $$\boxed{h_d[n]} = F^{-1}\{H_d(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} H_d(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\frac{\Omega}{T} e^{j\Omega n} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\int_{\pi}^{\pi} j\Omega e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{j}{2\pi T}\left[\left(\frac{\Omega}{jn}e^{j\Omega n}\right)_{\Omega=\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} d\Omega\right] =$$

PARTES
$u = \Omega \rightarrow du = d\Omega$
$dv = e^{j\Omega n} \rightarrow v = \frac{1}{jn} e^{j\Omega n}$

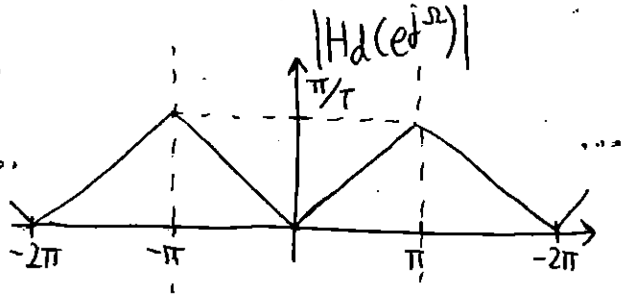
$$= \frac{j}{2\pi T}\left[\frac{\pi}{jn}\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} - \frac{(-\pi)}{jn}\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} - \frac{1}{(jn)^2}\left(e^{j\Omega n}\right)_{\Omega=-\pi}^{\pi}\right] = \frac{j}{2\pi T}\left[\frac{1}{n^2}\cancel{\left(\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} - \underbrace{e^{-j\pi n}}_{(-1)^n}\right)}^{0} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{2\pi}{jn}(-1)^n\right] = \frac{\cancel{j}\cancel{2\pi}(-1)^n}{\cancel{2\pi}\cancel{j}nT} = \boxed{\frac{(-1)^n}{nT} \; \forall n \neq 0} \quad \begin{cases} \frac{1}{nT} \text{ „ } n \text{ par} \neq 0 \\ 0 \text{ „ } n = 0 \text{ (se hace)} \\ \frac{-1}{nT} \text{ „ } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\boxed{h_d[0]} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\frac{\Omega}{T} d\Omega = \frac{j}{2\pi T}\cancel{\left[\frac{\Omega^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}}^{0} = \boxed{0}$$

- Representación de $|H_d(e^{j\Omega})| = \left|j\frac{\Omega}{T}\right| = \frac{|\Omega|}{T}$ ...

(periódica 2π)



11-1-2009

SEPTIEMBRE 2008 ✓

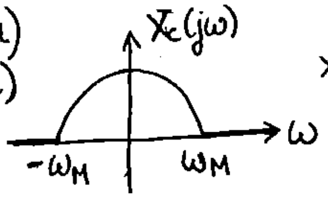
4) Sea una señal $x_c(t)$ de banda limitada ($X_c(j\omega)=0 \quad para \quad |\omega| \geq \omega_M$). Se desea realizar en tiempo discreto un sistema que ejecute la siguiente operación en tiempo continuo: $y_c(t)=x_c(t)*h_c(t)$.
Indique razonadamente qué condición debe cumplir la frecuencia de muestreo y cómo debe ser la respuesta en frecuencia del sistema discreto, $H_d(e^{j\Omega})$, en los dos casos siguientes:

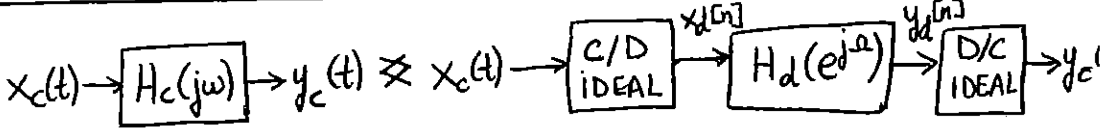
a) $h_c(t)=\left(\dfrac{sen((\omega_M/4)t)}{\pi t}\right)^2$

b) $h_c(t)=e^{-a|t|}$, $a>0$ y real

---

a)i)
b)i)





- Si no se especifica en el enunciado, se suponen cajas C/D y D/C ideales (muestreo y filtros ideales)

- Condición de muestreo: debe cumplirse que no haya solapamiento espectral (Tª de Nyquist) : $\boxed{\omega_S \geqslant 2\omega_M}$

- Para que el sistema sea equivalente al continuo:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c(j\omega)\Big]_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right) \text{ , } |\Omega|<\pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$

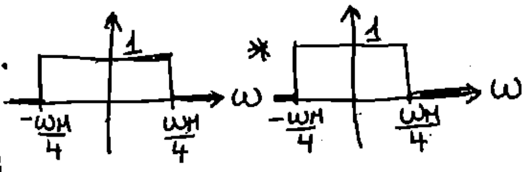
NOTA: Para poder usar esta fórmula debe cumplirse la condición de no solapamiento y que las cajas C/D y D/C sean ideales. En otro caso habría que deducir la fórmula.

---

a) Particularizamos: $h_c(t) = \left[\dfrac{sen\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t}\right]^2 = \dfrac{sen\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t} \cdot \dfrac{sen\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t} =$

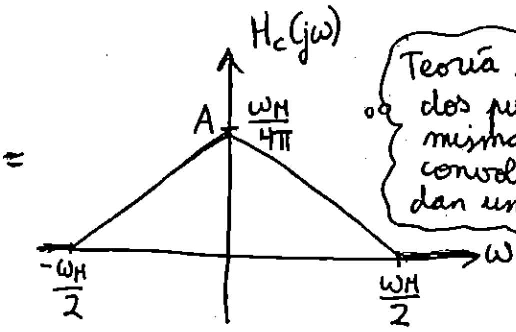
$\downarrow \mathcal{F} \qquad \downarrow \mathcal{F}$

$= \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\dfrac{sen\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\left\{\dfrac{sen\left(\frac{\omega_M}{4}t\right)}{\pi t}\right\} = \dfrac{1}{2\pi}\cdot$



$=$

$=$



Teoría tema 1: dos pulsos de misma anchura convolucionados dan un triángulo

$A = \frac{1}{2\pi}\cdot 1\cdot 1\cdot\left(\frac{\omega_M}{4} - \left(-\frac{\omega_M}{4}\right)\right) = \frac{\omega_M}{4\pi}$

- Ecuaciones rectas :

$\boxed{-\frac{\omega_M}{2} < \omega < 0}$ $\boxed{\text{Pendiente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A-0}{0-\left(-\frac{\omega_M}{2}\right)} = \frac{\frac{\cancel{\omega_M}}{4\pi_2}}{\frac{\cancel{\omega_M}}{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{1}{2\pi}}$

$\boxed{\text{Ecuación : } \frac{1}{2\pi}\omega + \frac{\omega_M}{4\pi}}$

SIGUE

$0 < \omega < \frac{\omega_M}{2}$ | Pendiente $\frac{1}{T} \ldots \frac{1}{T} - \frac{1}{2\pi}$

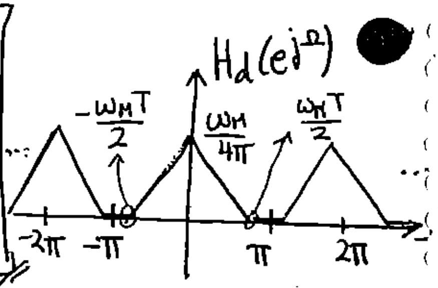
14-1-2007

Ecuación: $-\frac{1}{2\pi}\omega + \frac{\omega_M}{4\pi}$

¡OJO! ¡Hay que dejarlo en función de $\Omega = \omega T$!

· Finalmente:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\Omega}{T}\right) + \frac{\omega_M}{4\pi} & \text{"} \left(-\frac{\omega_M}{2}T\right) < \Omega < 0 \\ \frac{-1}{2\pi}\frac{\Omega}{T} + \frac{\omega_M}{4\pi} & \text{"} \; 0 < \Omega < \frac{\omega_M}{2}T \\ 0 & \text{"} \; \frac{\omega_M T}{2} < |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$

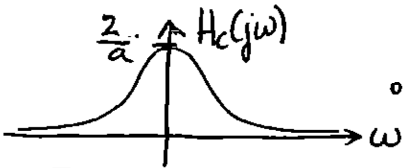


---

b) $h_c(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$

- Ya hecho en P- (Ejercicio de clase 1; Tema 3) Apartado b):

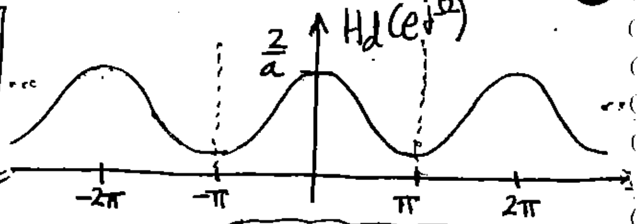
$$H_c(j\omega) = \ldots = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



No es de banda limitada, pero…

· Así que:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{2a}{a^2+\left(\frac{\Omega}{T}\right)^2} & \text{"} \; |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$



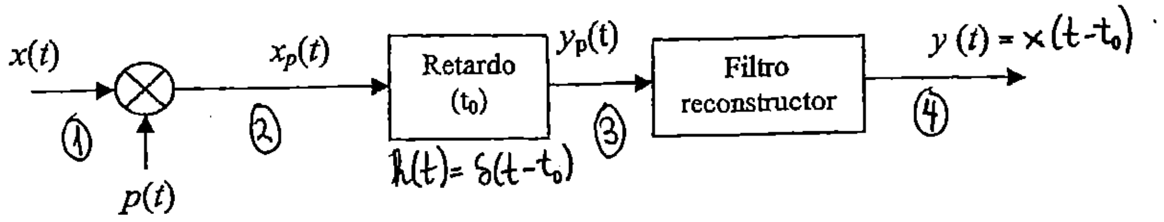
Recortamos $H_c(j\omega)$ entre π y $-\pi$ y la replicamos

11-1-2009

FEBRERO 2008

Ejercicio 4

Considere el sistema de la figura:



Donde: $x(t)$ es una señal de banda limitada ($X(j\omega)=0,\ \forall|\omega|>\omega_{max}$)

$p(t)$ es un tren de pulsos con forma $p_p(t)$

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_p(t-nT) \\ p_p(t) &= \left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right)\cdot\left(u(t+T/4)-u(t-T/4)\right) \end{aligned}\right\} \text{¡¡MUESTREO NATURAL!!}$$

El bloque **Retardo** retarda la señal de entrada t_0 unidades temporales.

Se pide:

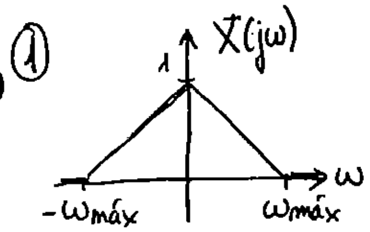
a) Calcule el espectro de $x_p(t)$ e $y_p(t)$. Diga cuál debe ser el filtro reconstructor para que $y(t)=x(t-t_0)$. Suponga que se cumple el criterio de muestreo de Nyquist ($2\pi/T > 2\omega_{max}$).

b) Suponga ahora que quiere retardar la señal $x(t)$ utilizando un sistema discreto (conversor C/D ideal, filtro discreto, conversor D/C ideal) equivalente al de la figura ($y(t)=x(t-t_0)$). Asumiendo que se muestrea $x(t)$ cumpliendo el criterio de Nyquist, ¿cuál debe ser la respuesta en frecuencia del filtro discreto en este caso?.

---

a) NOTA: ¡OJO! Recordemos: $x(t-t_0)$ RETARDO $\not{x}$ $x(t+t_0)$ ADELANTO ¡cuidado!
(A estas alturas no podemos fallar en esto... Es del tema 1...)

①



No vale la pena aprenderse expresiones que no sean del muestreo ideal. Vale más la pena saberlo deducir, que además queda elegante

$$② \quad x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_p(t-nT) = x(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_p(t) * \delta(t-nT)\right] =$$

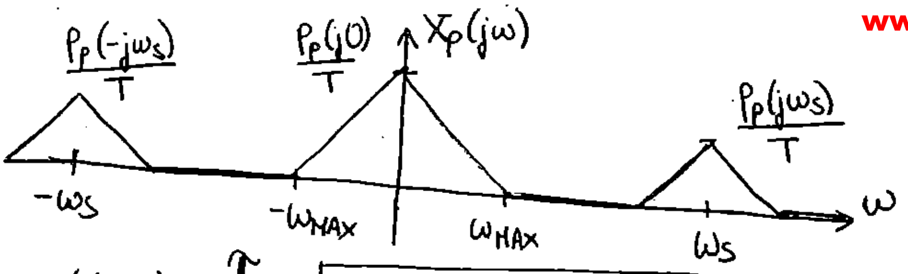
$$\mathcal{F}\Big\updownarrow \quad = x(t)\cdot\left[p_p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]$$

$$\boxed{X_p(j\omega)} = \mathcal{F}\{x_p(t)\} = \frac{1}{\cancel{2\pi}} X(j\omega) * P_p(j\omega)\frac{\cancel{2\pi}}{T}\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta\Big(\omega - k\overset{\omega_s}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\Big) =$$

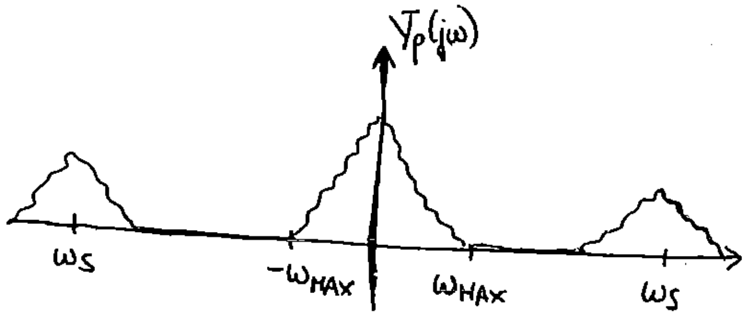
$$= \frac{1}{T}X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_p(jk\omega_s)\,\delta(\omega-k\omega_s) = \boxed{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{P_p(jk\omega_s)}_{\text{Número}}X(j[\omega-k\omega_s])}$$

SIGUE

SIGUE



③ $y_p(t) = x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{Y_p(j\omega) = X_p(j\omega)e^{-j\omega t_0}}$

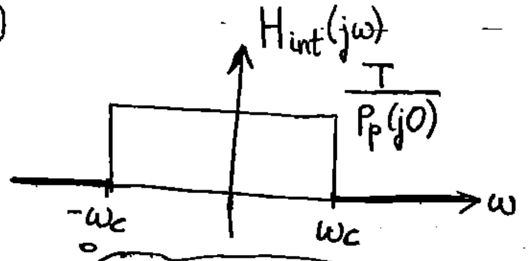


NOTA: $|Y_p(j\omega)| = |X_p(j\omega)|\underbrace{|e^{-j\omega t_0}|}_{1} =$

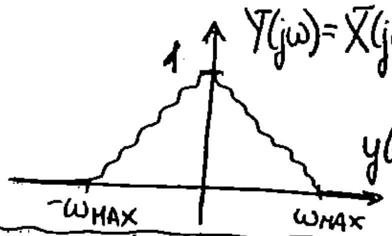
$= |X_p(j\omega)|$

El retardar o adelantar sólo afecta a la fase. En el dibujo sólo pretendemos hacer notar que son espectros distintos

④



$\Longrightarrow$



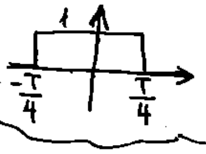
$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$\updownarrow$

$y(t) = x(t-t_0)$

¡OJO! ¡No queremos recuperar $X(j\omega)$, sino $Y(j\omega)$! Hay que saber bien qué estamos haciendo...

- $P_p(j\omega) = \mathcal{F}\{(1+\cos(\frac{4\pi}{T}t)\cdot[u(t+\frac{T}{4})-u(t-\frac{T}{4})]\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{1+\cos(\frac{4\pi}{T}t)\} * \frac{2\operatorname{sen}(\omega\frac{T}{4})}{\omega}$



$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\frac{T}{4}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\left[\cancel{2\pi}\delta(\omega)+\cancel{\pi}\left[\delta\left(\omega-\frac{4\pi}{T}\right)+\delta\left(\omega+\frac{4\pi}{T}\right)\right]\right] * \cancel{2}\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{T}{4})}{\omega} =$$

$$= 2\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{T}{4})}{\omega} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left[\omega-\frac{4\pi}{T}\right]\frac{T}{4}\right)}{\omega-\frac{4\pi}{T}} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left[\omega+\frac{4\pi}{T}\right]\frac{T}{4}\right)}{\omega+\frac{4\pi}{T}}$$

- Calculemos $P_p(j0)$:

$$\boxed{P_p(j0)} = \lim_{\omega\to0} P_p(j\omega) = \left[\frac{0}{0}\right] + 0 + 0 \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{\omega\to0}\frac{2\overbrace{\cos(\omega\frac{T}{4})}^{\omega\to0\ \to 1}\frac{T}{4}}{1} = \boxed{\frac{T}{2}}$$

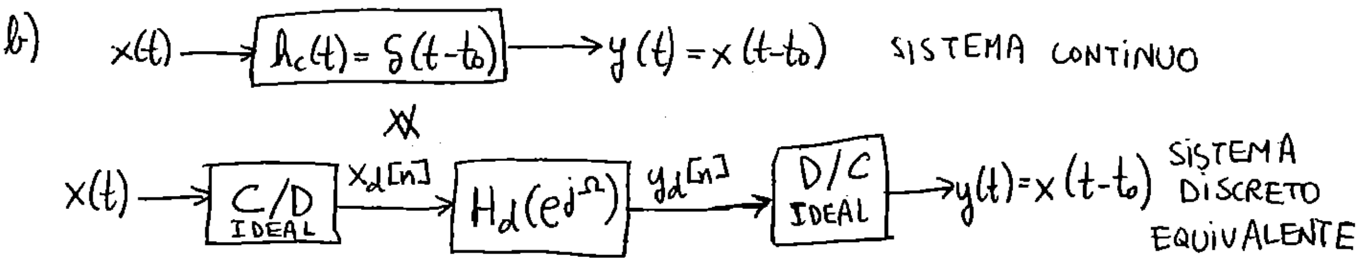
- Así que: $\boxed{H_{int}(j\omega)} = \begin{cases}\frac{T}{P_p(j0)}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \text{resto}\end{cases} = \boxed{\begin{cases}2, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \text{resto}\end{cases}}$

$$\boxed{\omega_{MÁX} < \omega_c < \omega_s - \omega_{MÁX}}$$

CONTINÚA

CONTINÚA E-62

b)



- Como no hay solapamiento espectral (se cumple Nyquist) y las cajas C/D y D/C son ideales (no dicen lo contrario):

$$\cdot\ H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} \text{ ,, } |\Omega|<\pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}$$

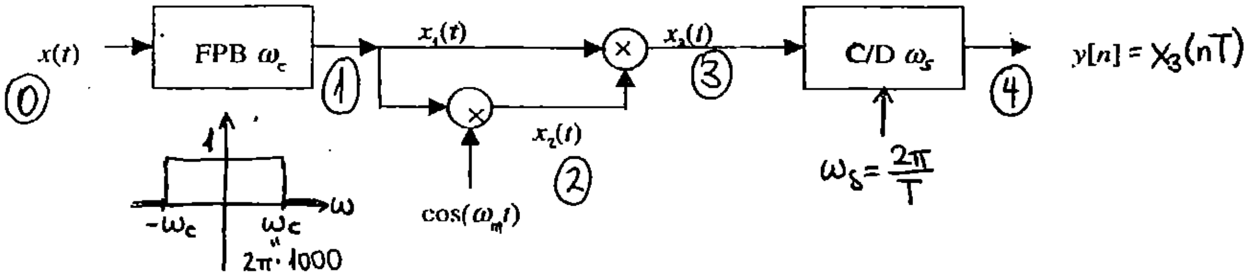
$$\cdot\ h_c(t) = \delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_c(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

· Así que:

$$\boxed{H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\frac{\Omega}{T}t_0} \text{ ,, } |\Omega|<\pi \\ \text{Periódica } 2\pi \end{cases}}$$

SEPTIEMBRE 2003 ≡ JUNIO 2007

4. Considere el sistema de la figura en el que el filtro paso bajo ideal (FPB) tiene una frecuencia de corte de $w_c = 2\pi \times 1000$ y donde $w_m = 2\pi \times 2000$. El bloque C/D es un conversor continuo-discreto que trabaja a la frecuencia w_s.



La señal de entrada $x(t)$ está limitada en banda. Es decir:

$$X(jw) \neq 0, \quad |w| < 2\pi \times 8000$$
$$X(jw) = 0, \quad |w| > 2\pi \times 8000$$

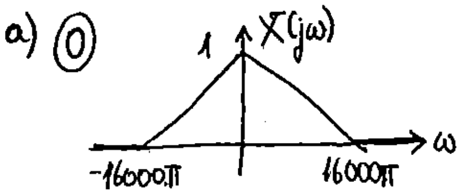
a) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo w_s que debe tener el conversor de continuo a discreto para que no haya solapamiento de $x_3(t)$? Razónelo empleando un esquema de los espectros de las señales $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.

b) Si $x(t) = 2\cos(2\pi \cdot 300t) + 4\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 3000t)$, ¿Cuál es la expresión de la salida $y[n]$ para la w_s calculada en el apartado anterior?.

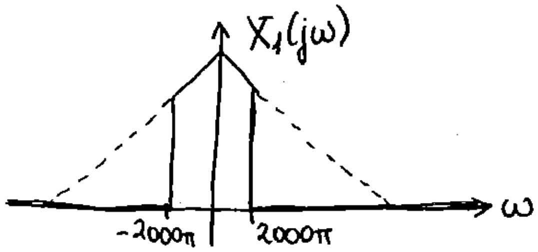
c) Represente el espectro de la salida $y[n]$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ para $w_s = 2\pi \times 4000$.

---

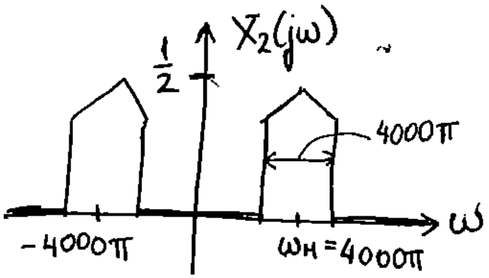
a) ⓪



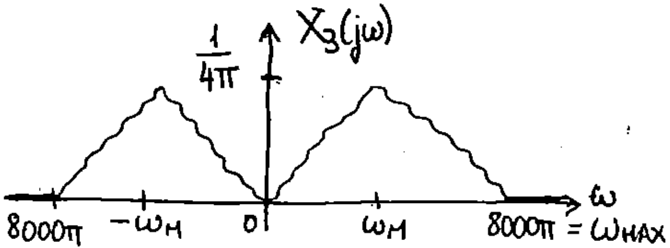
①



② $x_2(t) = x_1(t)\cos\omega_M t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X_1(j[\omega-\omega_M]) + X_1(j[\omega+\omega_M])\right]$



③ $x_3(t) = x_1(t)\,x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$



No hace falta hacer la convolución (de hecho, no tenemos señales concretas). Sólo hay que razonar con anchos de banda: la convolución tiene la suma de los anchos de banda. El situarlos en $\pm\omega_M$ es fácil de ver si sacamos $\delta(\omega-\omega_0)$ y convolucionamos en el origen

SIGUE

SIGUE · NOTA: Es más fácil hacer $x_1(t)\cos\omega_M t = x_3(t)$ | 11-1-2009

(sale una convolución más fácil) pero así hemos visto la deducción para un caso más complicado

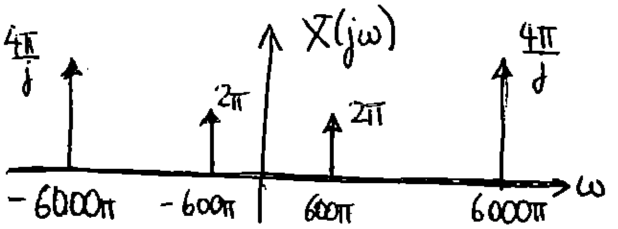
- Para que no haya solapamiento espectral: $\boxed{\omega_s \geq 2\omega_{máx}}$

$$\boxed{\omega_{s_{mín}}} = 2\omega_{MAX} = \boxed{16000\pi \frac{rad}{s} = 2\pi \cdot 8000\pi \frac{rad}{s}}$$

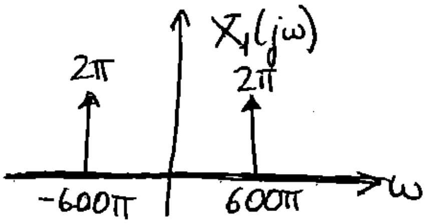
$$\boxed{f_{s_{mín}}} = \frac{\omega_{s\,mín}}{2\pi} = 8000\,Hz = \boxed{8kHz}$$

---

b) ⓪ $x(t) = 2\cos(600\pi t) + 4\,sen(6000\pi t) \longrightarrow \boxed{FPB} \rightarrow x_1(t) = 2\cos(600\pi t)$



En la frecuencia se ve el filtrado



② $x_2(t) = x_1(t)\cos\omega_H t = 2\cos(600\pi t)\cos(4000\pi t)$

1ª idea: Nos sabemos las fórmulas trigonométricas

- Ahorramos tiempo ⇒ Ir a [∗]

2ª idea: No nos las sabemos / no nos acordamos: El dominio de la frecuencia nos ayuda aquí:

· $X_2(j\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \frac{1}{\cancel{2\pi}}[\cancel{2\pi}(\delta(\omega-600\pi)+\delta(\omega+600\pi))] * [\pi(\delta(\omega-4000\pi)+\delta(\omega+400$

$$= \pi[\delta(\omega-4600\pi)+\delta(\omega-3400\pi)+\delta(\omega+4600\pi)+\delta(\omega+3400\pi)] =$$

$$= \pi[\delta(\omega-4600\pi)+\delta(\omega+4600\pi)] + \pi[\delta(\omega-3400\pi)+\delta(\omega+3400\pi)] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

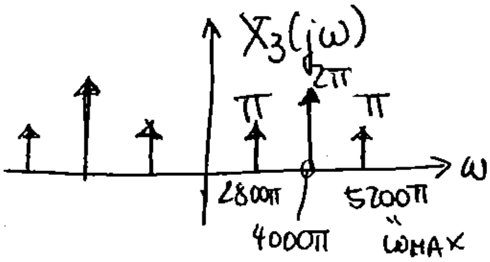
$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_2(t) \overset{[*]}{=} \cos(4600\pi t) + \cos(3400\pi t)$: Hemos aplicado, sin saberlo: $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$

· $x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = 2\pi[\delta(\omega-4000\pi)+\delta(\omega+4000\pi)$

$\ldots + \pi[\delta(\omega-5200\pi)+\delta(\omega+5200\pi)] + \pi[\delta(\omega-2800\pi)+\delta(\omega+2800\pi)]$

· $x_3(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_3(j\omega)\} = 2\cos(4000\pi t) + \cos(5200\pi t) + \cos(2800\pi t)$

$$\omega_{s\,mín} = 16000\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{T} = 16000\cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{8000}s}$$



- No hay solapamiento espectral pues: CONTINÚA

$$\omega_s > 2 \cdot 5200\pi = 10400\pi \frac{rad}{s}$$

· $y[n] = x_3(nT) = x_3\left(\frac{n}{8000}\right) = 2\cos\left(4000\pi\frac{n}{8000}\right) + \cos\left(5200\pi\frac{n}{8}\right.$

$+ \cos\left(2800\pi\frac{n}{8000}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{13}{20}\pi n\right) + \cos\left(\frac{7}{20}\pi n\right)$

CONTINÚA E-63

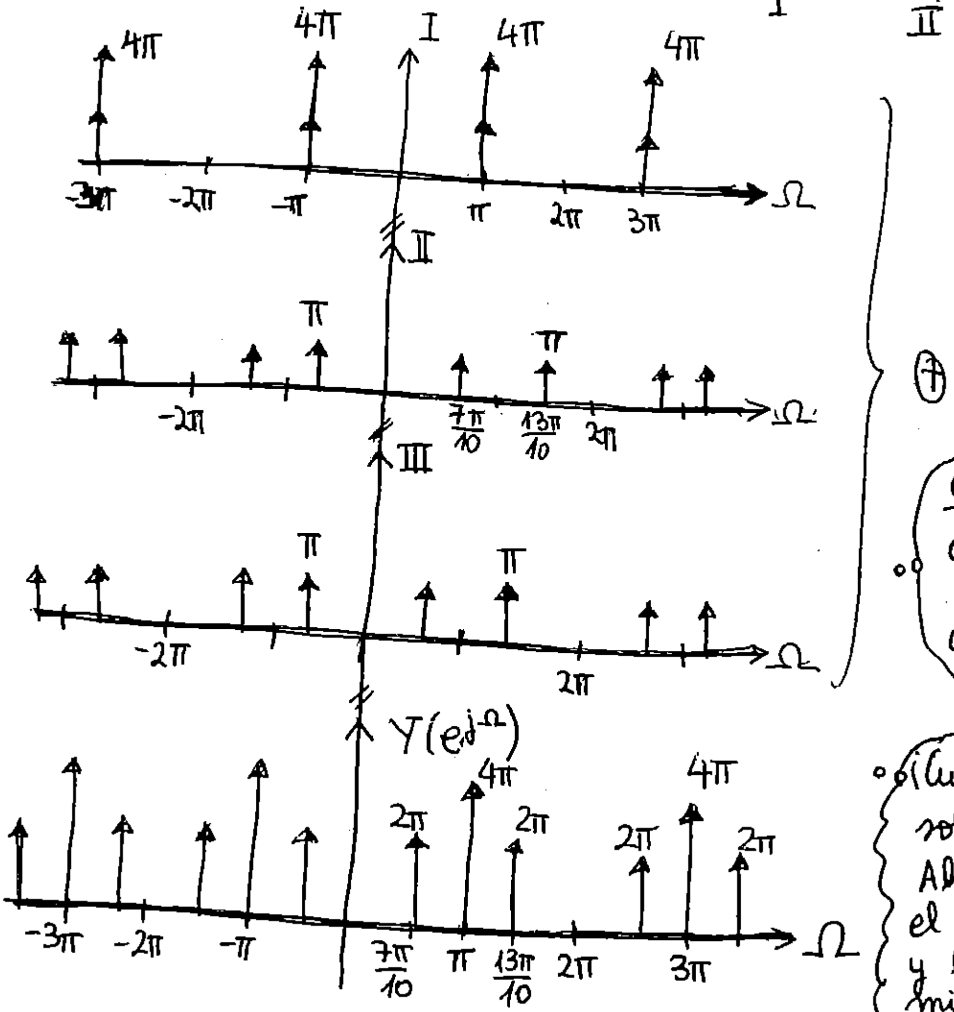
11-1-2009

c) Representar y[n] en [-2π, 2π] para $\omega_S = 2\pi \cdot 4000 = 8000\pi \Rightarrow T = \frac{1}{4000}s$

Aunque haya solapamiento espectral y[n] sigue siendo igual a $x_3(nT)$, pero claro, a partir de $x_3(nT)$ no podríamos recuperar $x(t)$

$$\boxed{y[n]} \overset{!}{=} x_3(nT) = x_3\left(\frac{n}{4000}\right) = 2\cos\left(\cancel{4000}\pi\frac{n}{\cancel{4000}}\right)+\cos\left(52\cancel{00}\pi\frac{n}{40\cancel{00}}\right)+\cos\left(28\cancel{00}\pi\frac{n}{40\cancel{00}}\right)=$$

$$= \underbrace{2\cos(\pi n)}_{(-1)^n} + \cos\left(\frac{13}{10}\pi n\right) + \cos\left(\frac{7}{10}\pi n\right) \overset{!}{=} \boxed{\underbrace{2\cdot(-1)^n}_{I}+\underbrace{\cos\left(\frac{13}{10}\pi n\right)}_{II}+\underbrace{\cos\left(\frac{7}{10}\pi n\right)}_{III}}$$



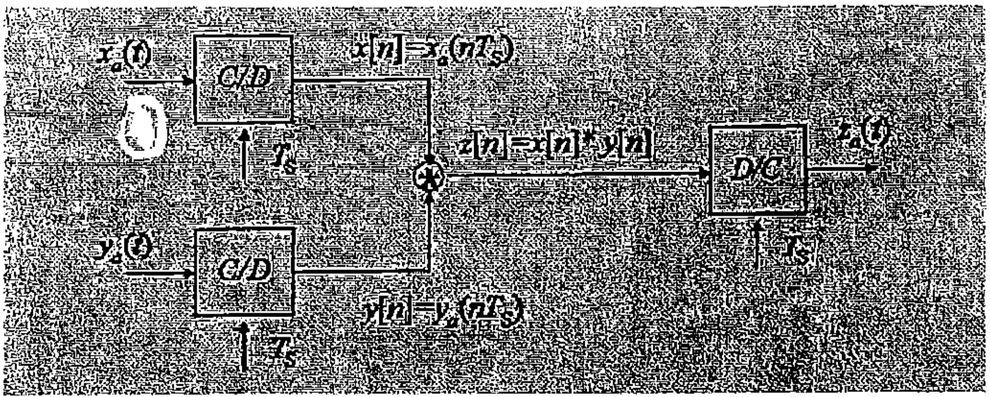
OBS: $\cos\left(\frac{13}{10}\pi n\right) \overset{!}{=} \cos\left(\frac{7}{10}\pi n\right)$

¡Cuidado con la solución oficial! Ahí se les olvidó el solapamiento y les sale la mitad de amplitud. Además, ¡pusieron deltas de Kronecker en lugar de Dirac! (Una gran pifia)

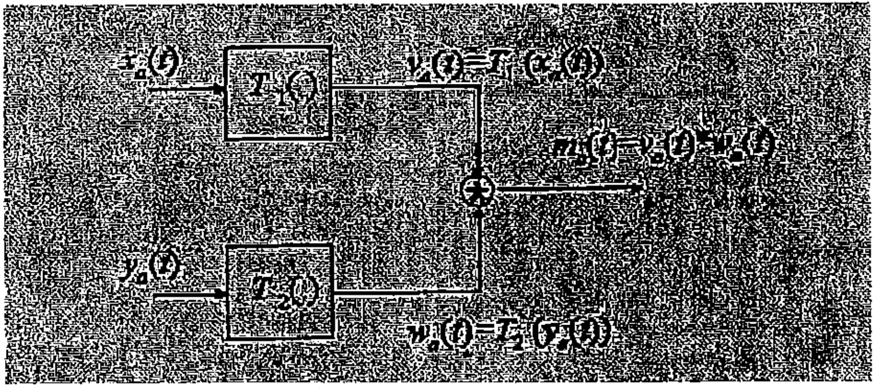
SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 4

Sea el esquema de la figura donde $x_a(t)$ e $y_a(t)$ son señales estrictamente de banda limitada, es decir, $X_a(j\omega)=0, \forall|\omega|>\omega_{max}$, $Y_a(j\omega)=0, \forall|\omega|>2\omega_{max}$ siendo ω_{max} un parámetro arbitrario real positivo que representa su pulsación máxima.

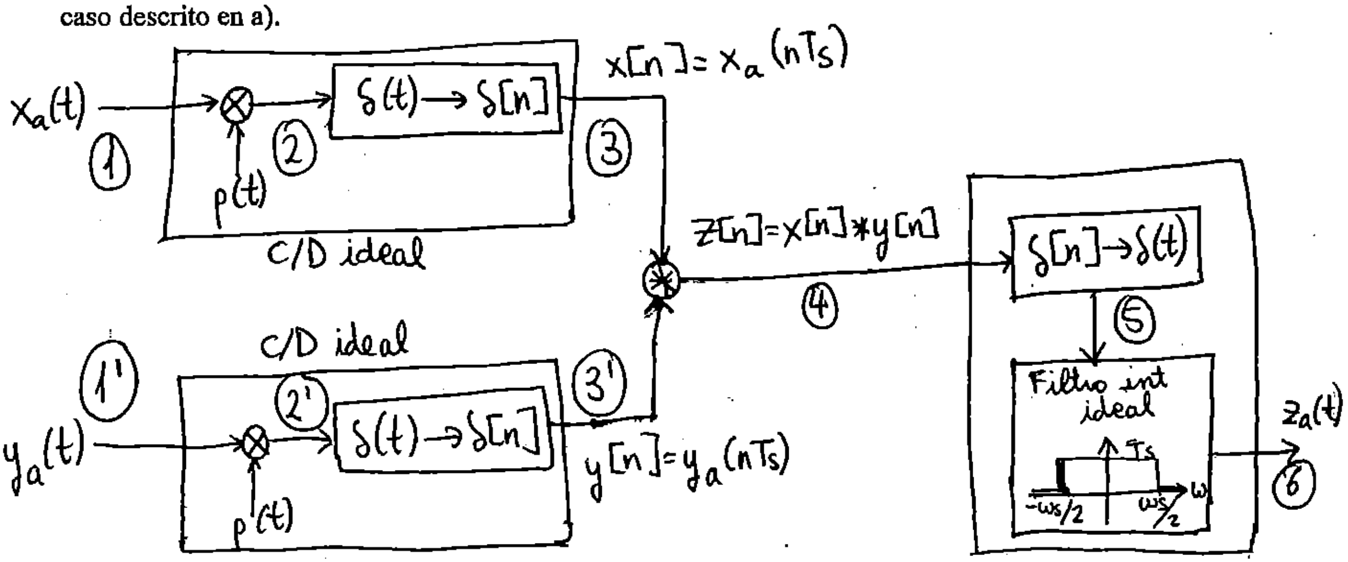


Los bloques C/D y D/C representan los procesos ideales de conversión Continuo/Discreto y Discreto/Continuo respectivamente, el operador convolución se representa por el símbolo " * " y T_S, ω_S son el período y la pulsación de muestreo. Considere igualmente que se propone el siguiente esquema donde las entradas $x_a(t)$ e $y_a(t)$ ya han sido descritas y $T_1()$, $T_2()$ representan unas transformaciones arbitrarias a calcular.

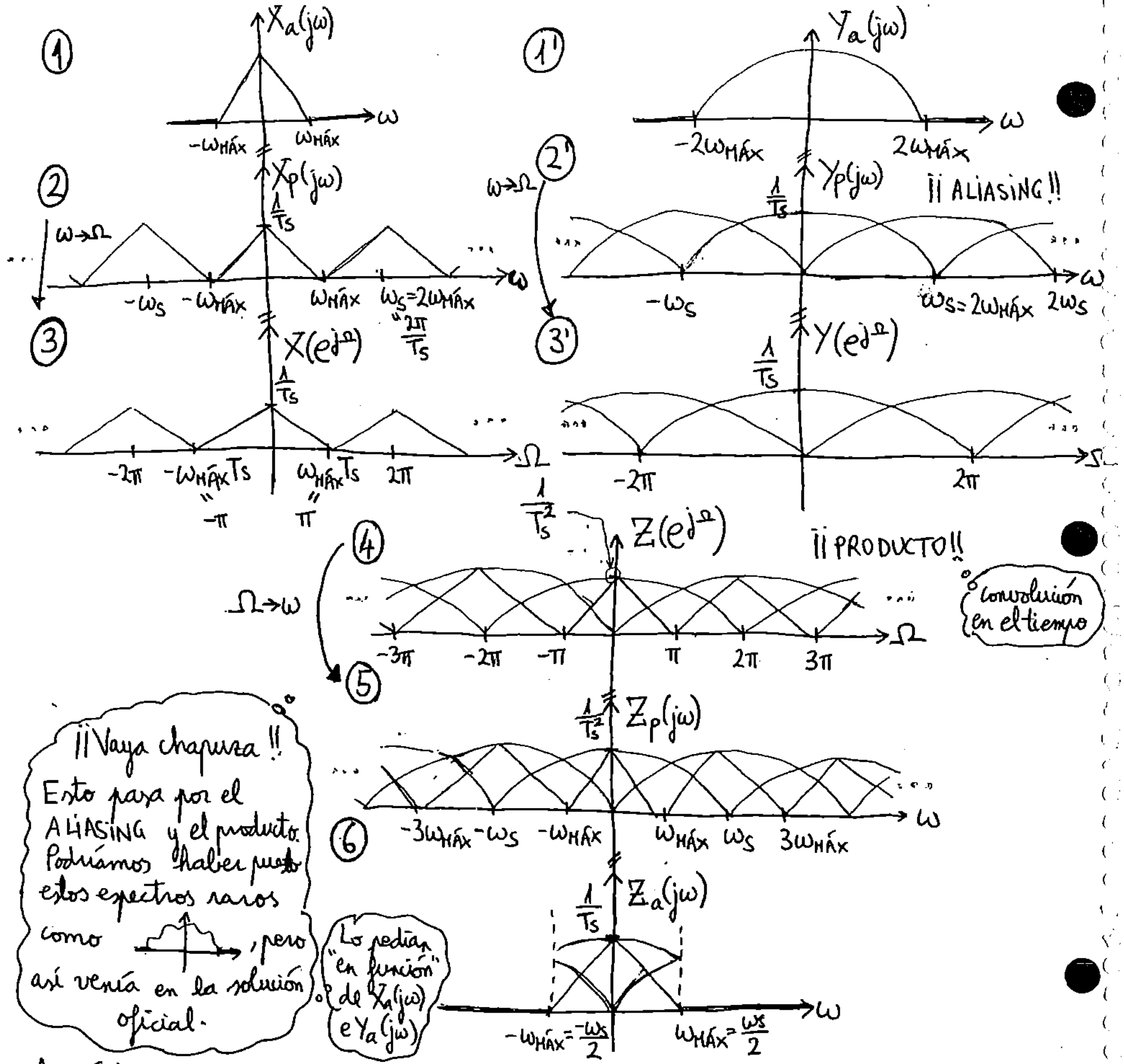


a) Suponiendo que $\omega_S=2\omega_{max}$, calcule analíticamente y represente de forma esquemática $Z_a(j\omega)$ en función de $X_a(j\omega)$ e $Y_a(j\omega)$.

b) Determine las transformaciones $T_1(), T_2()$ calculando $v_a(t)$ en función de su entrada $x_a(t)$ e igualmente $w_a(t)$ en función de su entrada $y_a(t)$ de manera que se verifique que $m_a(t)=z_a(t)$ para el caso descrito en a).



a) ■ ESQUEMÁTICAMENTE :



¡¡Vaya chapuza!! Esto pasa por el ALIASING y el producto. Podríamos haber puesto estos espectros raros como [dibujo], pero así venía en la solución oficial.

■ ANALÍTICAMENTE :

① $X_a(j\omega)$ — muestreo ideal

①' $Y_a(j\omega)$

② $X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right]\right)$

$\omega \to \Omega$

②' $Y_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a\left(j\left[\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right]\right)$

$\omega \to \Omega$

③ $X(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\frac{\Omega}{T_s} - k\frac{2\pi}{T_s}\right]\right)$

③' $Y(e^{j\Omega}) = \dots = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a\left(j\frac{1}{T_s}\left[\Omega - k2\pi\right]\right)$

④ $Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\,Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{1}{T_s}[\Omega - k2\pi]\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a\left(j\frac{1}{T_s}[\Omega - k2\pi]\right)$ SIGUE ⇨

$\Omega \to \omega$

⑤ $Z_p(j\omega) = Z(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right]\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_a\left(j\left[\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right]\right)$

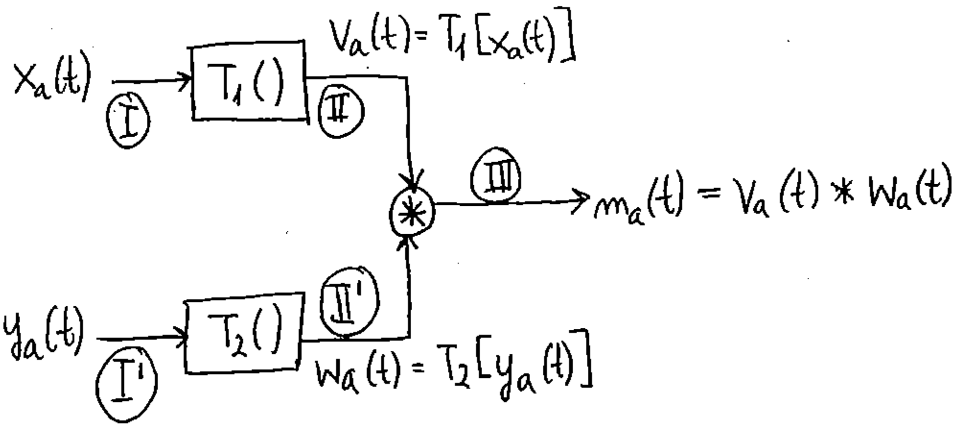
Viendo el esquema

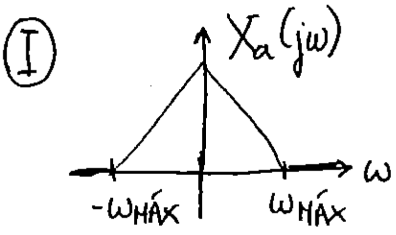
⑥ $\boxed{Z_a(j\omega) = \begin{cases} T_s\, Z_p(j\omega) \text{ ,, } |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 \text{ ,, resto} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{T_s} X_a(j\omega)\left[Y_a(j\omega) + Y_a(j[\omega - 2\omega_{MÁX}]) + Y_a(j[\omega + 2\omega_{MÁX}])\right] \text{ ,, } |\omega| < \\ 0 \text{ ,, resto} \end{cases}}$

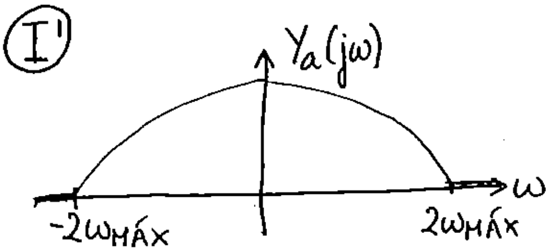
11-1-2009

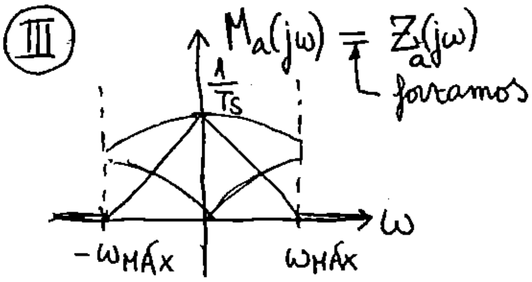
SIGUE E-64

b)

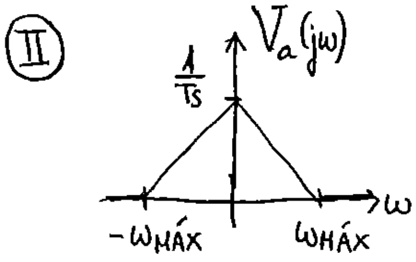




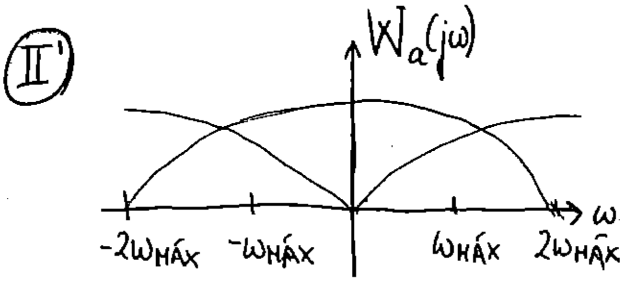




- Así que:



$$\boxed{v_a(t) = \frac{1}{T_S} X_a(t)}$$



$$W_a(j\omega) = Y_a(j\omega) + Y_a(j[\omega-2\omega_{MÁX}]) + Y_a(j[\omega+2\omega_{MÁX}])$$

$$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$\boxed{w_a(t)} = y_a(t) + y_a(t)\,e^{j2\omega_{MÁX}t} + y_a(t)\,e^{-j2\omega_{MÁX}t} =$$

$$= y_a(t)\left[1 + e^{j2\omega_{MÁX}t} + e^{-j2\omega_{MÁX}t}\right] =$$

$$= \boxed{y_a(t)\left[1 + 2\cos(2\omega_{MÁX}t)\right]}$$

NOTA: Esta es sólo una posible solución. También vale poner el escalado en $w_a(t)$ en lugar de en $v_a(t)$, por ejemplo.

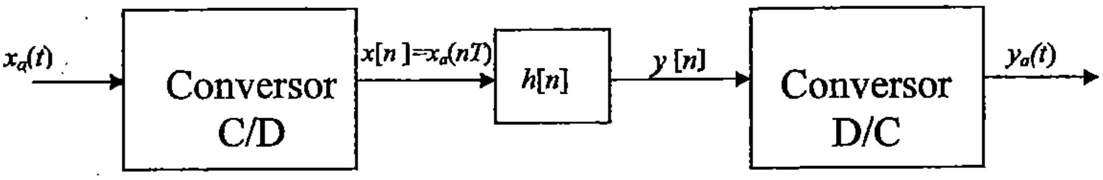
FEBRERO 2007

4. Considere el diagrama de la figura, donde $x_a(t)=1+\cos(8\pi\cdot 10^3\cdot t+\pi/4)$, el periodo de muestreo $T=10^{-4}seg.$ (0.1 milisegundos). El filtro estable de respuesta al impulso $h[n]$, está caracterizado por la siguiente relación:

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

El conversor D/C está caracterizado por la siguiente relación:

$$y_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\cdot\exp(-|t-nT|/T)$$



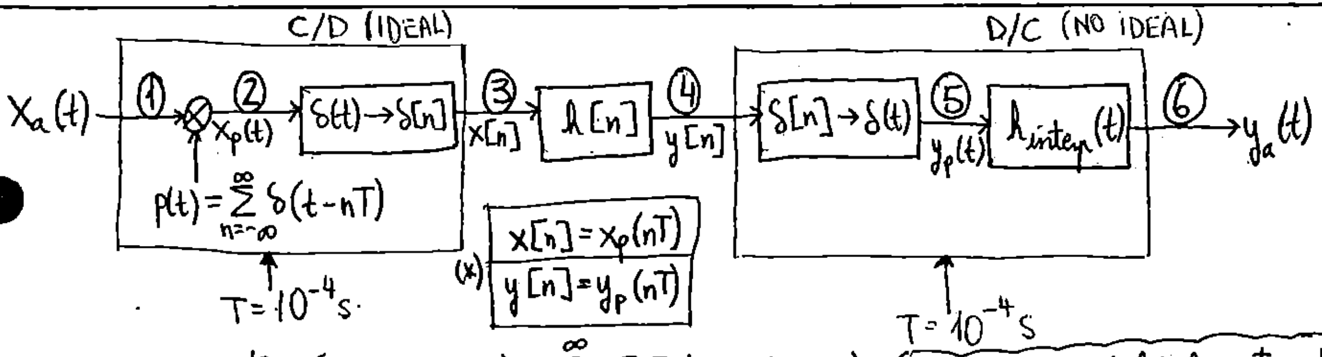
Se pide:

a) Calcule la transformación de Fourier de las señales $x_a(t)$ y $x[n]$ y represente sus módulos. Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $x[n]$, y cómo lo podría realizar.

b) Determine la transformada de Fourier de la secuencia $y[n]$.

c) Calcule la transformada de Fourier de la señal de salida $y_a(t)$.

d) Razone si $x_a(t)$ es recuperable a partir de $y_a(t)$, y dibuje el diagrama de bloques del sistema que realiza dicha operación.



- Sabemos por teoría que: $y_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\,h_{interp}(t-nT)$. (mirar T-5.3 al final, antes de sustituir $h_{interp}(t)$ por "sinc")

- Si nos hemos olvidado, lo deducimos:

$$y_a(t)=y_p(t)*h_{interp}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y_p(kT)\delta(t-kT)*h_{interp}(t)\overset{(*)}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}y[k]\,h_{interp}(t-kT)$$

- Y como: $y_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\cdot e^{\frac{-|t-nT|}{T}}\xRightarrow{\text{Identificando}}\boxed{h_{interp}(t)=e^{\frac{-|t|}{T}}}$

- Antes de empezar, vamos a calcular también $H(e^{j\Omega})$, porque luego hará falta:

- De la ecuación en diferencias:

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{2}Y(e^{j\Omega})e^{-j\Omega}+X(e^{j\Omega});$$

$$\boxed{H(e^{j\Omega})}=\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}=\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}}$$

---

a) ① $x_a(t)=1+\cos(8\pi 10^3t+\frac{\pi}{4})=1+\dfrac{e^{j(8\pi\cdot 10^3t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(8\pi\cdot10^3t+\frac{\pi}{4})}}{2}=$

$$=1+\frac{1}{2}e^{j8\pi10^3t}e^{j\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j8\pi\cdot10^3t}e^{-j\frac{\pi}{4}};$$

NOTA: Si quisiéramos sustituir $e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=(1\pm j)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Big\updownarrow F$$

$$\boxed{X_a(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-8\pi\cdot10^3)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+8\pi\cdot10^3)}$$ ¡¡ No periódico !!

② $X_p(j\omega)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j[\omega-k\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s}])$; ¡¡Periódico ω_s!!

muestreo ideal

$\omega=\frac{\Omega}{T}$

$$X(e^{j\Omega})=X_p(j\frac{\Omega}{T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j[\frac{\Omega}{T}-k\frac{2\pi}{T}])=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi]);$$ ¡¡Periódico 2π!!

- En este caso particular:

$$\cdot\boxed{X(e^{j\Omega})}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[2\pi\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi])+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi]-8\pi\cdot10^3)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi]+8\pi\cdot10^3$$

T-1.4

$\delta(\frac{t}{T})=T\delta(t)$

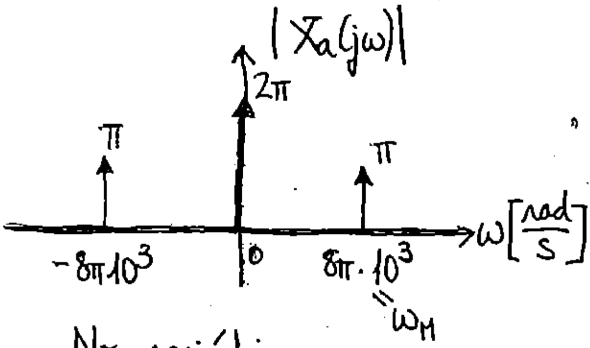
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[2\pi\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi])+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi-8\pi\cdot10^3T])+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\frac{1}{T}[\Omega-k2\pi+8\pi\cdot10^3T]$$

$$=\frac{1}{\cancel{T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2\pi\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi-8\pi\cdot10^3T)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\cancel{T}\delta(\Omega-k2\pi+8\pi\cdot10^3T)$$

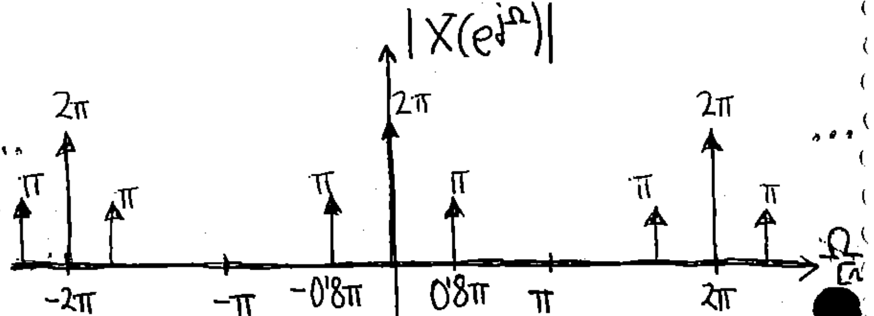
$T=10^{-4}s$

$$=\boxed{\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2\delta(\Omega-k2\pi)+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi-0'8\pi)+e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi+0'8\pi)}$$

- Representación gráfica de $|X_a(j\omega)|$ y $|X(e^{j\Omega})|$: IMPORTANTE: $|e^{\pm j\frac{\pi}{4}}|=1$



No periódico



← 1 periodo →

Periódico 2π

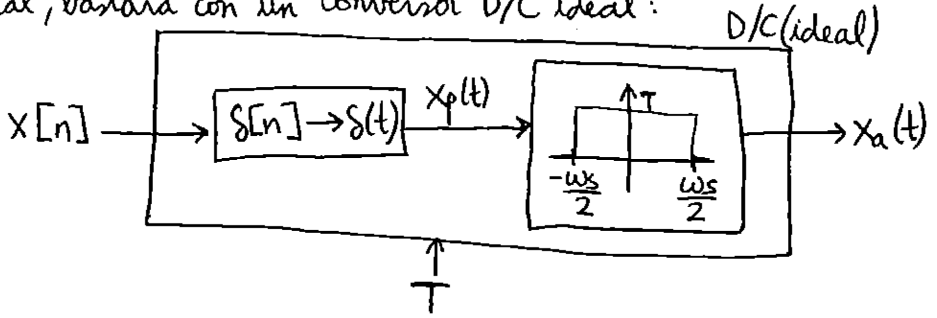
SIGUE

SIGUE E-65

- $x_a(t)$ será recuperable a partir de $x[n]$ si no hay aliasing o solapamiento

● $$\left.\begin{array}{l}\omega_H = 8\pi\cdot 10^3 \\ \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\cdot 10^4\end{array}\right\} \boxed{2\omega_H} \overset{!}{=} 16\pi\cdot 10^3 = 1'6\pi\cdot 10^4 < \boxed{\omega_s} \Rightarrow$$ Se cumple el criterio de Nyquist $\Rightarrow \nexists$ aliasing $\Downarrow$ $\boxed{\text{se puede recuperar } x_a(t) \text{ a partir de } x[n]}$

- Para recuperar $x_a(t)$, como ha sido muestreada con muestreo ideal, bastará con un conversor D/C ideal:



---

b) - Siguiendo con el esquema original:

● ④ $$\boxed{Y(e^{j\Omega})} \overset{!}{=} X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[2\delta(\Omega-k2\pi) + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi-0'8\pi) + \ldots$$

$$\ldots + e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi+0'8\pi)\Big]\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \overset{!}{=} \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[2\delta(\Omega-k2\pi)\overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cancel{e^{-jk2\pi}}_{1}}}^{=2} + \ldots$$

$e^{\pm jk2\pi} = 1$

$f(\Omega)\delta(\Omega-\Omega_0)$
||
$(\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0)$

$$\ldots + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi-0'8\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(0'8\pi+k2\pi)}} + e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi+0'8\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(k2\pi-0'8\pi)}}\Big] =$$

$$\boxed{\overset{!}{=} \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[4\delta(\Omega-k2\pi) + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi-0'8\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j0'8\pi}} + e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\Omega-k2\pi+0'8\pi)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j0'8\pi}}}$$

● c) ④ $\xrightarrow{\Omega=\omega T}$ ⑤ $Y_p(j\omega) = Y(e^{j\omega T})$; ¡¡ Periódica ω_s !!

⑥ $Y_a(j\omega) = Y_p(j\omega)H_{interp}(j\omega)$;

- $$h_{interp}(t) = e^{\frac{-|t|}{T}} = \begin{cases} e^{\frac{t}{T}} \ , \ t<0 \\ e^{\frac{-t}{T}} \ , \ t>0 \end{cases} = \underbrace{e^{\frac{t}{T}}u(-t)}_{h_1(t)} + \underbrace{e^{\frac{-t}{T}}u(t)}_{h_2(t)}$$

- $$H_2(j\omega) = \mathcal{F}\{h_2(t)\} = \frac{1}{\frac{1}{T}+j\omega} = \frac{T}{1+j\omega T} \ ; \ Re\{a\} = \frac{1}{T} > 0$$ ✓

● - $$H_1(j\omega) \overset{!}{=} H_2(-j\omega) = \frac{T}{1-j\omega T} \ ;$$ $h_1(t) = h_2(-t)$; $x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$ Propiedad en la tabla

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

▶ $$\boxed{H_{interp}(j\omega)} \overset{!}{=} \frac{T}{1+j\omega T} + \frac{T}{1-j\omega T} = \frac{T(1-\cancel{j\omega T}) + T(1+\cancel{j\omega T})}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{2T}{1-j^2\omega^2T^2} \overset{!}{=} \boxed{\frac{2T}{1+(\omega T)^2}} \ ;$$

- Así que: $\boxed{Y_a(j\omega) = Y(e^{j\omega T})\frac{2T}{1+(\omega T)^2}}$ // Siendo $Y(e^{j\Omega})$ lo calculado en c)

°(no vamos ahora a sustituir ese troncho)

---

d)- Como se cumple la condición de Nyquist en todo el sistema, no se ha producido solapamiento espectral al muestrear, por tanto $x_a(t)$ será recuperable a partir de $y_a(t)$ si compensamos el efecto de los distintos filtros de la cadena: $H(e^{j\omega T})$ y $H_{interp}(j\omega)$. Para ello tomaremos sus inversos en la banda $\frac{-\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$ (para no arrastrar la periodicidad). Lo vemos:

$$Y_a(j\omega) = Y(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega) \overset{\uparrow}{=} X(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega) \overset{\uparrow}{=} \begin{cases} \frac{1}{T}X_a(j\omega)H(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega), & |\omega| < \omega_s \\ \text{Periódico } \omega_s \end{cases} =$$

$$\boxed{Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})}$$

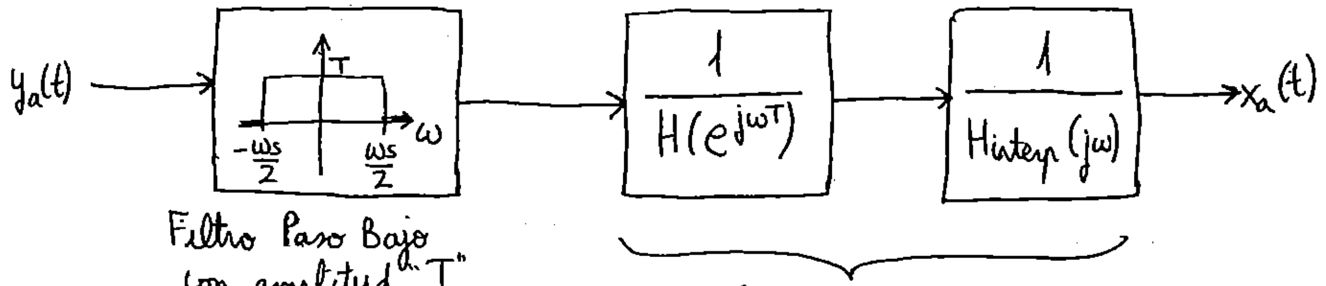
$$\boxed{X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T}X_a(j\frac{\Omega}{T}), & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódico } 2\pi \end{cases}}$$

Queremos esto

$$= \begin{cases} \boxed{X_a(j\omega)}\frac{1}{T}H(e^{j\omega T})H_{interp}(j\omega), & |\omega| < \omega_s \\ \text{Periódico } \omega_s \end{cases}$$

;

- Así que el esquema para recuperar $X_a(j\omega)$ a partir de $Y_a(j\omega)$ será:



Filtro Paso Bajo con amplitud "T" (Para quitar la periodicidad y ajustar la amplitud)

Compensación de los filtros con sus inversos

NOTA: El orden de las cajas es indiferente.

STLN
Convocatorias de examen de 2009

FEBRERO 2009

Tiempo total: 3 horas

Apellidos:	1
Nombre:	2
Grupo:	3
DNI:	4
Firma:	Total

1. Sea un sistema cuya relación entrada-salida viene dada por:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Suponga que se colocan dos sistemas como el anterior en serie.

(a) Demuestre que el sistema completo es LTI.
(b) Calcule la relación entrada-salida del sistema completo.
(c) Calcule la respuesta al impulso del sistema completo.
(d) Suponga que la entrada al sistema completo es $u[n]$. Calcule la salida $s[n]$ y dibújela.
(e) Calcule la convolución de $s[n]$ con la señal $a^n u[n]$, siendo a un número real positivo.

(2,5 puntos)

2/11

SOLUCION PROBLEMA 1

(a) Demostraremos que el sistema $y[n] = x[n] - x[n-1]$ es
(0,5p.) LTI. Como la interconexión en serie de sistemas LTI es LTI, quedará demostrado lo que se pide.

(a.1) Linealidad:

$$y_1[n] = x_1[n] - x_1[n-1], \quad y_2[n] = x_2[n] - x_2[n-1]$$

Sea $x_3[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$

$$y_3[n] = x_3[n] - x_3[n-1] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] - a_1 x_1[n-1] - a_2 x_2[n-1]$$

$$= a_1\underbrace{(x_1[n] - x_1[n-1])}_{y_1[n]} + a_2\underbrace{(x_2[n] - x_2[n-1])}_{y_2[n]}$$

Por lo que el sistema es lineal

(a.2) Invarianza:

$$y_1[n] = x_1[n] - x_1[n-1];$$

Sea $x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$$y_2[n] = x_2[n] - x_2[n-1] = x_1[n-n_0] - x_1[n-n_0-1]$$

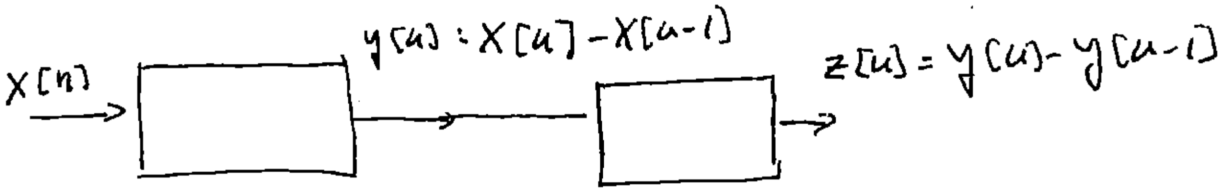
$$= y_1[n-n_0]$$

Por lo que el sistema es invariante

Otra forma de resolver este apartado es utilizar la relación entrada-salida del sistema completo:
$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$ y demostrar sobre esa relación la linealidad y la invarianza

(b)

([illegible]5p.)



$$z[n] = y[n] - y[n-1] = \left(x[n] - x[n-1]\right) - \left(x[n-1] - x[n-2]\right) =$$

$$= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

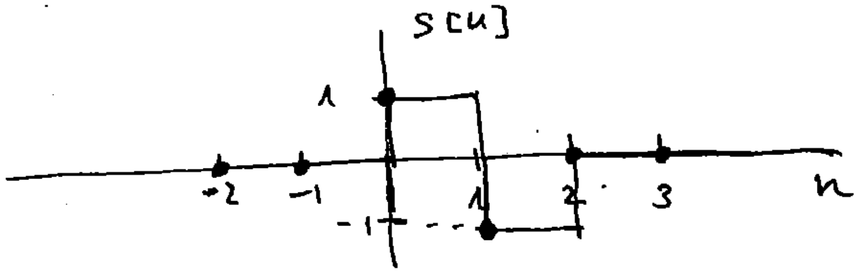
(c) Si en la relación E/S anterior hacemos $x[n] = \delta[n]$,

([illegible]p.) entonces $z[n] = h[n]$. Por tanto:

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

(d) $s[n] = u[n] - 2u[n-1] + u[n-2]$

(0,5p.)



(e) $s[n]$ se puede expresar como: $s[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

(0,5 p.) Por lo tanto, si $x[n] = a^n u[n]$, entonces

$$x[n] \ast s[n] = a^n u[n] \ast \left(\delta[n] - \delta[n-1]\right) = a^n u[n] -$$

$$- a^{n-1} u[n-1] =$$

$$= a^n \left\{u[n] - \frac{1}{a} u[n-1]\right\}$$

4/11

2. Halle la transformada de Fourier, directa o inversa según corresponda, de las siguientes señales y espectros. Conteste también a las preguntas que se le formulen en cada apartado.

a) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p(t - k \cdot 2)$

donde $x_p(t) = \begin{cases} t & ; \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$

b) $X(j\omega) = e^{-\alpha|\omega|}$; $-\infty < \omega < \infty$

donde α es un número real positivo

c) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot x_p(t - k \cdot 4)$

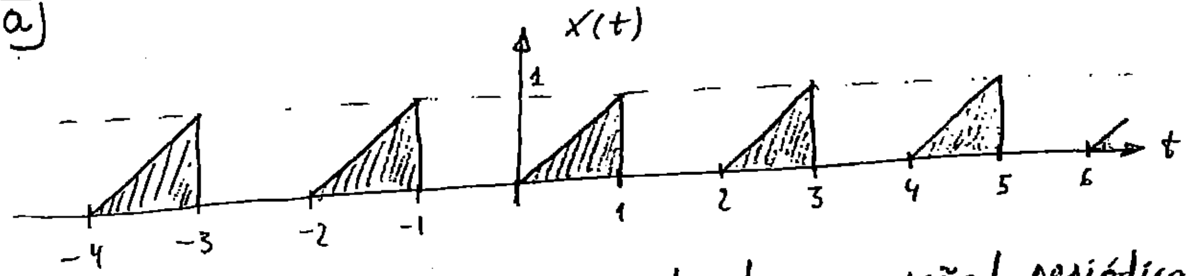
donde $x_p(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le |t| < 1/2 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$

Indique las condiciones que debe cumplir el escalar a para que exista la transformada de Fourier

(2,5 puntos)

(0,9 pts)

a)



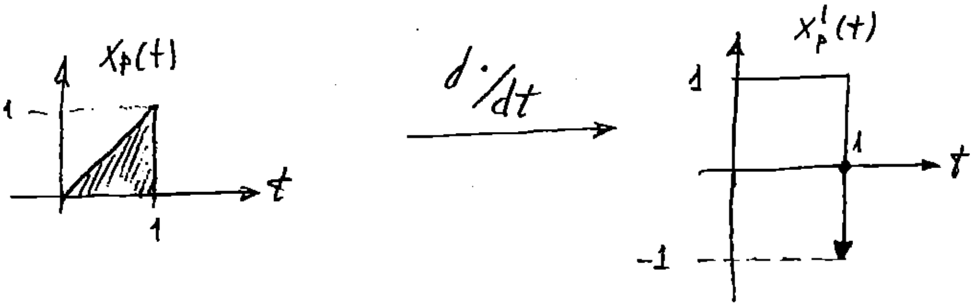
Se trata de obtener el espectro de una señal periódica:

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{K=-\infty}^{\infty} X_p\left(jK \cdot \frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot \delta\left(\omega - K\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

donde T_0 representa el periodo $(T_0 = 2)$ y $X_p(j\omega)$ es el espectro de un periodo de la señal.

Para obtener $X_p(j\omega)$ utilizamos la propiedad de derivación en el tiempo:

5/11



$$X_p(j\omega) = \frac{X_p'(j\omega)}{j\omega} = F\left\{\Pi\left(\frac{t-1/2}{1}\right) - \delta(t-1)\right\} / j\omega =$$

$$= \left\{ \frac{2\,\mathrm{Sen}(\omega/2)}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega} \right\} / j\omega$$

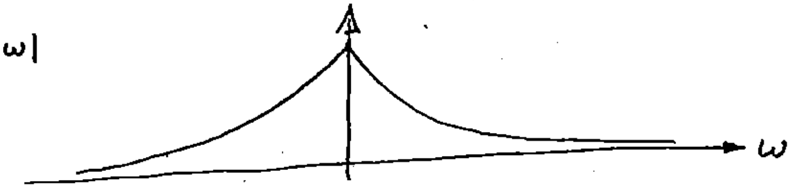
Sustituyendo en $X(j\omega)$ tenemos la expresión del espectro ($T_0=2$):

$$X(j\omega) = \frac{\cancel{2}\Pi}{\cancel{2}} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{K}{2}\frac{\cancel{2}\Pi}{\cancel{2}}\right)}{K\cdot\cancel{2}\Pi/\cancel{2}} e^{-jK\frac{\cancel{2}\Pi}{\cancel{2}}/2} - e^{-jK\frac{2\Pi}{\cancel{2}}} \right\}}{jK\frac{\cancel{2}\Pi}{\cancel{2}}} \cdot \delta\left(\omega - K\frac{2\Pi}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{j e^{-j\frac{K\Pi}{2}}}{K} \cdot \left\{ e^{-jK\frac{\Pi}{2}} - 2\,\frac{\mathrm{sen}\left(K\frac{\Pi}{2}\right)}{K\cdot\Pi} \right\} \delta(\omega - K\cdot\Pi)$$

(0'8 pts)

b) $X(j\omega) = e^{-\alpha|\omega|}$



Aplico la propiedad de dualidad:

$$F\{e^{-\alpha|t|}\} = Y(j\omega)$$

$$F\{Y(jt)\} = 2\pi \cdot e^{-\alpha|-\omega|} = 2\Pi \cdot e^{-\alpha|\omega|}$$

despejando: $F^{-1}\{e^{-\alpha|\omega|}\} = \dfrac{Y(jt)}{2\Pi}$

$$F\{e^{-\alpha|t|}\} = Y(j\omega) = F\{e^{-\alpha t}u(t)\} + F\{e^{-\alpha t}u(t)|_{t=-t}\}$$

$$= \frac{1}{j\omega+\alpha} + \frac{1}{-j\omega+\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Sustituyendo tenemos: $x(t) = \frac{Y(jt)}{2\pi} = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2+t^2}$

(0'8 ptos)

c) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot x_p(t-k\cdot 4) = x_p(t) * \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-k\cdot 4)$

$$X(j\omega) = X_p(j\omega) \cdot F\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-k4)\right\} =$$

$$= X_p(j\omega) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-jk4\cdot\omega}$$

para que excista la transformada tiene que converger la serie geométrica:

$$|r| = |a e^{-j4\omega}| = |a| < 1$$

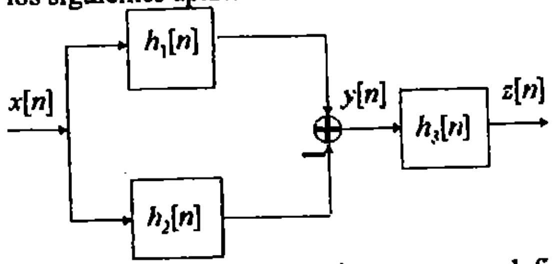
Sumando la serie queda:

$$X(j\omega) = X_p(j\omega) \cdot \frac{1}{1-ae^{-j4\omega}} = \frac{2\,\mathrm{Sen}(\omega/2)}{\omega} \cdot \frac{1}{1-ae^{-j4\omega}}$$

$$|a| < 1$$

7/11

3. Sea el esquema de la figura donde los 3 sistemas representados son lineales e invariantes en el tiempo. El problema consiste en realizar tres diseños independientes que se describen en los siguientes apartados:



a) Caso 1: suponiendo que los tres sistemas se definen mediante sus correspondientes respuestas al impulso $h_1[n]=\delta[n+1]$, $h_2[n]=\dfrac{\sin(W_2(n+1))}{\pi(n+1)}$, $h_3[n]=\dfrac{\sin(W_3 n)}{\pi n}-\dfrac{\sin(W_3(n-1))}{\pi(n-1)}$, calcule la relación que deben verificar los parámetros W_2, W_3 para que se cumpla que $z[n]=0$, para cualquier función de entrada $x[n]$.

b) Caso 2: suponiendo de nuevo que los tres sistemas se definen mediante sus correspondientes respuestas al impulso $h_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$, $h_2[n]=P,\forall n$, $h_3[n]=\begin{cases}1 & |n|\le M\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$, calcule la relación que deben cumplir los parámetros P, M, N para que se cumpla que $z[n]=0$, para cualquier función de entrada $x[n]$.

c) Caso 3: suponiendo ahora que los 3 sistemas son causales y estables y sabiendo que las funciones de transferencia de dos de ellos son $H_1(z)=\dfrac{z^{-2}-az^{-1}+1}{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})}$ y $H_3(z)=\dfrac{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})}{(1-az^{-1})}$ calcule la respuesta al impulso $h_2[n]$ para que se cumpla que $z[n]=x[n]$, expresando el resultado en función de los parámetros a, b, c.

(2,5 puntos)

8/11

PROBLEMA 3.

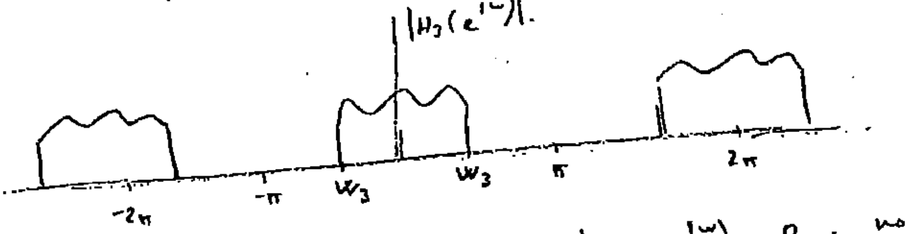
0.8p a). $H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega}$.

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega} & |\omega| < W_2 \\ 0 & \text{resto}, \end{cases}$$ Periódica, periodo 2π.

$$H_1(e^{j\omega}) - H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < W_2. \\ e^{j\omega} & \text{resto} \end{cases}$$ Periódica 2π.

El módulo de la diferencia sería.

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j\omega}. & |\omega| < W_3. \\ 0 & \text{resto}. \end{cases}$$ Periódica 2π.



Para que $H_{eq}(e^{j\omega}) = (H_1(e^{j\omega}) - H_2(e^{j\omega}))\cdot H_3(e^{j\omega}) = 0$, no debe haber solapamiento en las figuras anteriores, es decir.

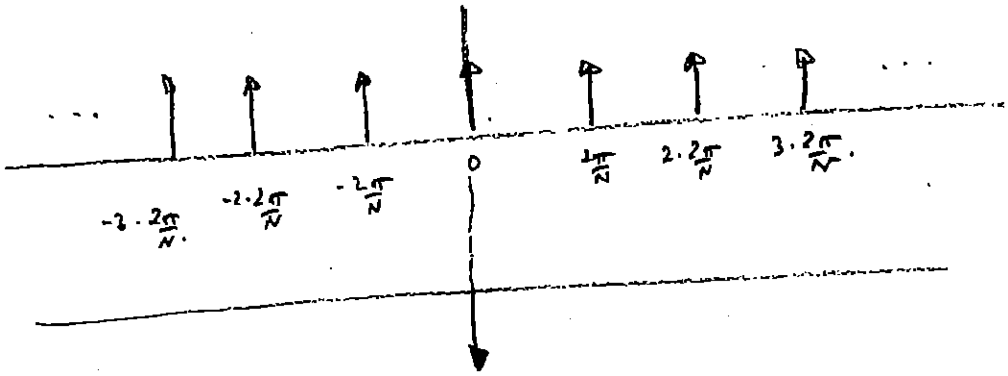
$$0 < W_3 < W_2 < \pi.$$

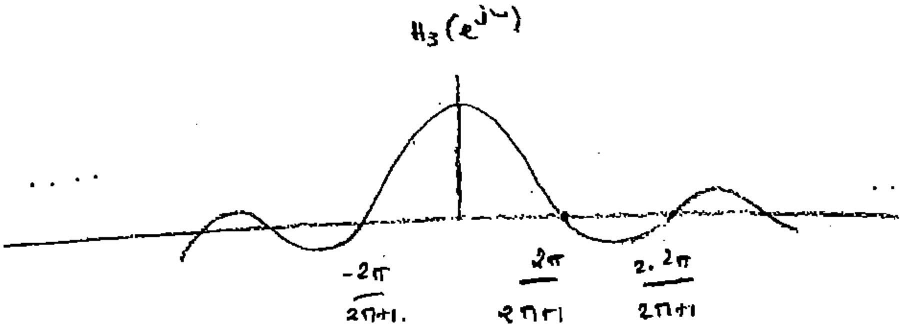
0.8p. b). $H_1(e^{j\omega}) = \sum \frac{2\pi}{N} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$.

$H_2(e^{j\omega}) = P \sum 2\pi\, \delta(\omega - k2\pi)$.

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega(\pi + 1/2)}{\sin \omega/2}.$$

$H_1(e^{j\omega}) - H_2(e^{j\omega})$.



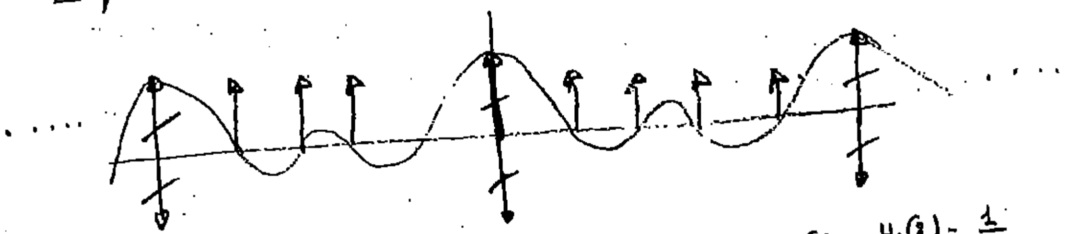


Para que se verifique $\left(H_1(e^{jw}) - H_2(e^{jw})\right) H_3(e^{jw}) = 0$. debe cumplirse que:

- Se anulen las deltas en los múltiplos de 2π. $P = 1/N$.
- Los ceros de $H_3(e^{jw})$ deben anular el resto de las deltas.

$$w = k \frac{2\pi}{2\Pi+1} = k \frac{2\pi}{N} \longrightarrow N = 2\Pi+1.$$

Esquemáticamente



0.9φ. c). ha de verificarse $\left(H_1(z) - H_2(z)\right) H_3(z) = 1 \rightarrow H_2(z) = H_1(z) - \frac{1}{H_3(z)}$.

$$H_2(z) = \frac{z^{-2} - a z^{-1} + 1}{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} - \frac{1 - a z^{-1}}{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} = \frac{z^{-2}}{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})}.$$

Resolvamos: $H_2'(z) = \frac{1}{(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} = \frac{A}{1-bz^{-1}} + \frac{B}{1-cz^{-1}}$

$$A = \left.\frac{1}{1-cz^{-1}}\right|_{z^{-1}=\frac{1}{b}} = \frac{b}{b-c}. \qquad B = \left.\frac{1}{1-bz^{-1}}\right|_{z^{-1}=\frac{1}{c}} = \frac{c}{c-b}.$$

Al ser causales: $h_2'[n] = \frac{b}{b-c} \cdot b^n u[n] + \frac{c}{c-b} c^n u[n]$.

Claramente: $h_2[n] = h_2'[n-2] = \frac{b}{b-c} \cdot b^{n-2} u[n-2] + \frac{c}{c-b} c^{n-2} u[n-2]$.

$$= \frac{1}{b-c}\left(b^{n-1} - c^{n-1}\right) u[n-2].$$

4. Considere dos señales en tiempo continuo $x_{1c}(t)$ y $x_{2c}(t)$, cuyas respectivas transformadas de Fourier $X_{1c}(j\omega)$ y $X_{2c}(j\omega)$, verifican $X_{1c}(j\omega)=X_{2c}(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_0$. A partir de las señales anteriores, se obtienen las secuencias siguientes

$$y[n]=x_1[n]+(-1)^n x_2[n]=x_1[n]+e^{j\pi n}x_2[n]$$

donde $x_1[n]=x_{1c}(nT)$ y $x_2[n]=x_{2c}(nT)$, siendo T el periodo de muestreo.

0.5 p. (a) Determine la transformada de Fourier de $y[n]$, denotada como $Y(e^{j\Omega})$, en función de $X_{1c}(j\omega)$ y $X_{2c}(j\omega)$.

0.5 p (b) Para señales $x_{1c}(t)$ y $x_{2c}(t)$ reales con espectros rectangular y triangular respectivamente, centrados en el origen de frecuencias, represente gráficamente el espectro de $y[n]$. Determine la condición que debe verificar T para que las señales $x_{1c}(t)$ y $x_{2c}(t)$ sean recuperables a partir de la secuencia $y[n]$.

0.5+0.5 p. (c) Suponiendo $\omega_0=\pi 10^4$ rad./seg. y $T=5\cdot 10^{-5}$ seg., explique los procesos que permiten recuperar las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ a partir de la secuencia $y[n]$, y

0.5 p. la señal en tiempo continuo $x_{1c}(t)$ a partir de la secuencia $x_1[n]$.

(2,5 puntos)

(a) Se sabe que

$$X_i(e^{j\Omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{ic}\left(j\,\frac{\Omega-2k\pi}{T}\right), \qquad i=1,\ 2$$

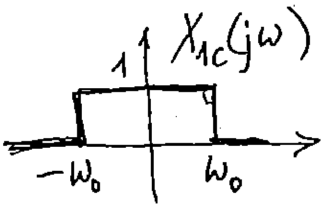
verificándose la relación: $\omega\cdot T=\Omega$

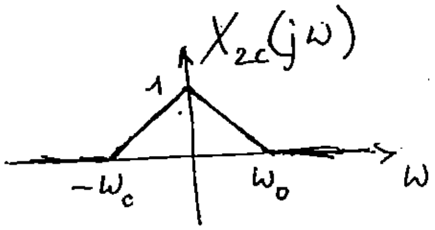
Entonces, $Y(e^{j\Omega})=X_1(e^{j\Omega})+X_2\left(e^{j(\Omega-\pi)}\right)$

y sustituyendo, se tiene finalmente

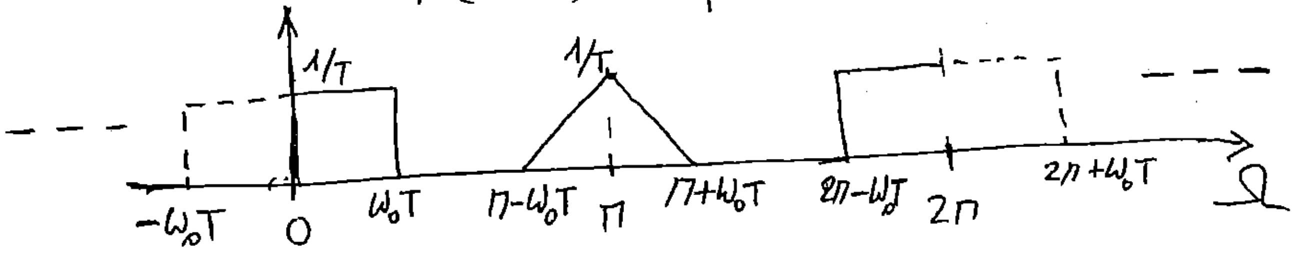
$$Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{X_{1c}\left(j\,\frac{\Omega-2k\pi}{T}\right)+X_{2c}\left(j\,\frac{\Omega-(2k+1)\pi}{T}\right)\right\}$$

(b) Espectros:





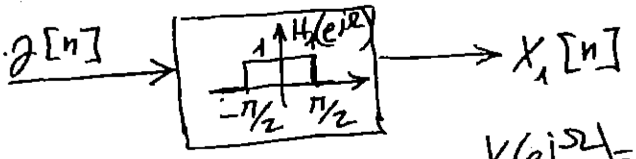
$Y(e^{j\Omega})$ es periódica (periodo 2π)



Condición de Nyquist para este caso:

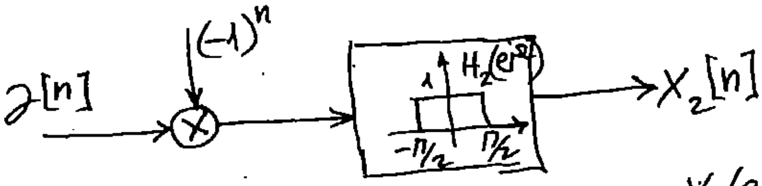
$$2\omega_0 T \leq \pi \Rightarrow \boxed{T \leq \frac{\pi}{2\omega_0}}$$

(c) Recuperación de señales: $T = \pi/2\omega_0$



; $H_1(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\Omega| < \pi \end{cases}$

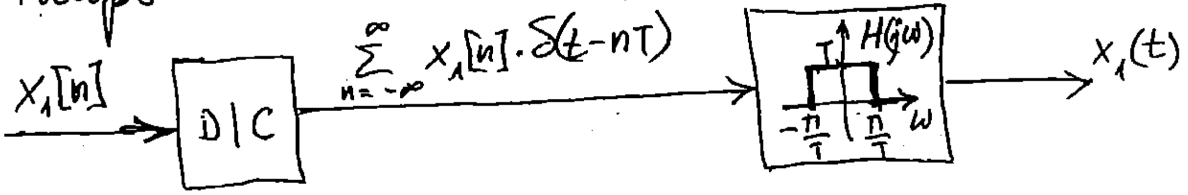
$$X_1(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})\cdot H_1(e^{j\Omega})$$



; $H_2(e^{j\Omega}) = H_1(e^{j\Omega})$

$$X_2(e^{j\Omega}) = Y(e^{j(\Omega+\pi)})\cdot H_1(e^{j\Omega})$$

Tiempo continuo:



o bien,

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\cdot \text{sinc}(t-nT); \quad H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > 3\omega_0 \end{cases}$$

SEPTIEMBRE 2009

1/11

Tiempo total: 3 horas

Apellidos: SOLUCIÓN

Nombre:

Grupo:

DNI:

Firma:

1

2

3

4

Total

1. Considere un sistema discreto cuya secuencia de salida $y[n]$ se obtiene a partir de la secuencia de entrada $x[n]$, mediante la expresión siguiente

$$y[n]=\frac{1}{2N+1}\cdot\sum_{k=n-N}^{n+N}|x[k]|^2$$

Se pide:

1 p. (a) Estudiar en dicho sistema cada una de las siguientes propiedades: linealidad, invariancia temporal, causalidad, estabilidad BIBO, invertibilidad.

0.5 p. (b) Si la secuencia de entrada $x[n]$ es periódica de periodo $2N+1$ y potencia media igual a 2, determine razonadamente la secuencia de salida $y[n]$.

1 p. (c) Suponiendo que $N=2$, $x[n]=e^{j\pi n}\cdot u[n]$ (siendo $u[n]=1$, si $n\geq 0$, y $u[n]=0$, si $n<0$), determine y represente gráficamente la secuencia de salida $y[n]$.

(2,5 puntos)

(a) Propiedades:

(a1) Linealidad: NO es lineal, puesto que

$$|\alpha\cdot x_1+\beta x_2|^2=|\alpha x_1|^2+|\alpha x_2|^2+(\alpha x_1)\cdot(\beta x_2)^*+$$
$$+(\alpha x_1)^*\cdot(\beta x_2)\neq\alpha|x_1|^2+\beta|x_2|^2$$

(a2) Invariancia temporal: sí es invariante, puesto que

$$x[n-n_0]\longrightarrow\frac{1}{2N+1}\sum_{k=n-N}^{n+N}|x[k-n_0]|^2\underset{k'=k-n_0}{=}\frac{1}{2N+1}\sum_{k'=n-n_0-N}^{n-n_0+N}|x[k']|^2=y[n-n_0]$$

(a_3) Causalidad: NO es causal, puesto que $y[n_0]$ depende de valores de $x[n]$ posteriores a n_0, esto es, $x[n_0+1], \ldots, x[n_0+N]$ para $N \geq 1$.

(a_4) Estabilidad BIBO: Sí es estable, puesto que si $|x[n]| \leq A$, entonces

$$|y[n]| = \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} |x[k]|^2 \right| \leq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} |x[k]|^2$$

$$\leq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} A^2 = A^2$$

(a_5) Invertibilidad: No es invertible, puesto que

$y[n] = 1 \Rightarrow x[n] = \pm 1$ (múltiples entradas son posibles)

(b) Si $x[n]$ es periódica de periodo $2N+1$, se tiene

$$P_{med} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} |x[n]|^2 = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} |x[k]|^2 = y[n]$$

esto es, $y[n] = P_{med} = 2$

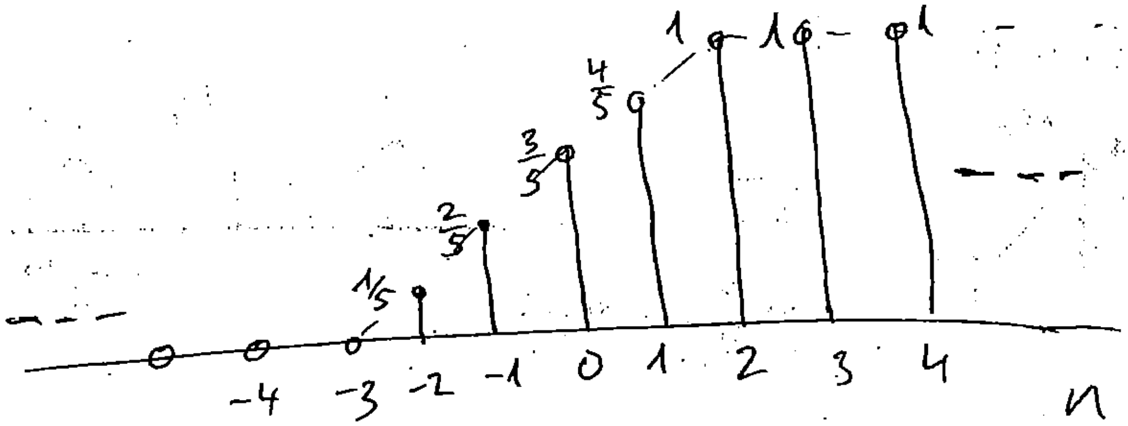
(c) Suponiendo $N=2$, $x[n] = e^{j\pi n} \cdot u[n]$

$$y[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=n-2}^{n+2} \left| \underbrace{e^{j\pi k}}_{=1} \cdot u[k] \right|^2 = \frac{1}{5} \sum_{k=n-2}^{n+2} u[k]$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ u[n-2] + u[n-1] + u[n] + u[n+1] + u[n+2] \right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \leq -3 \\ \frac{n+3}{5}, & -2 \leq n \leq 2 \\ 1 & n \geq 3 \end{cases}$$

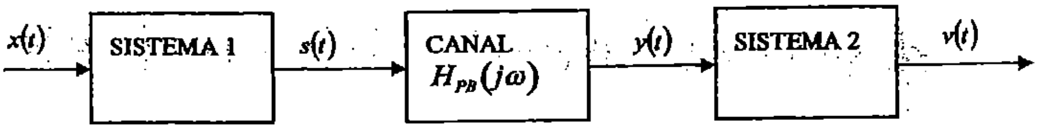
Dibujo:



2. Se desea transmitir una señal $x(t)$, real y de banda limitada ($X(j\omega)=0;\ |\omega|>\omega_M$), por un canal de comunicaciones que se puede modelar como un filtro paso banda ideal, con respuesta en frecuencia

$$H_{PB}(j\omega)=\begin{cases}1, & \omega_0-\frac{\omega_M}{2}<|\omega|<\omega_0+\frac{\omega_M}{2} \\ 0, & \text{resto}\end{cases} \quad ; \quad \omega_0>\omega_M$$

Para ello debe realizarse un proceso previo sobre la señal $x(t)$. El diagrama de bloques propuesto es el siguiente



1,3p. (a) Diseñe razonadamente el SISTEMA 1 para que la señal $y(t)$ permita recuperar posteriormente la señal $x(t)$. Justifique analíticamente su diseño.

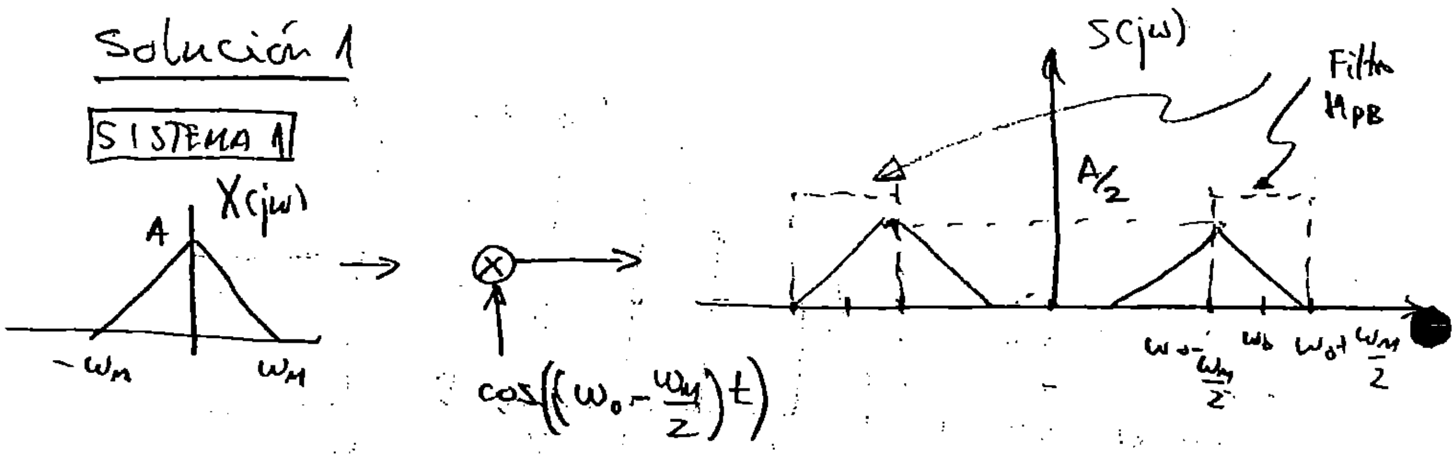
1,2p. (b) Diseñe razonadamente el SISTEMA 2 para que se cumpla que $v(t)$ sea igual a $x(t)$. Justifique analíticamente su diseño.

(2,5 puntos)

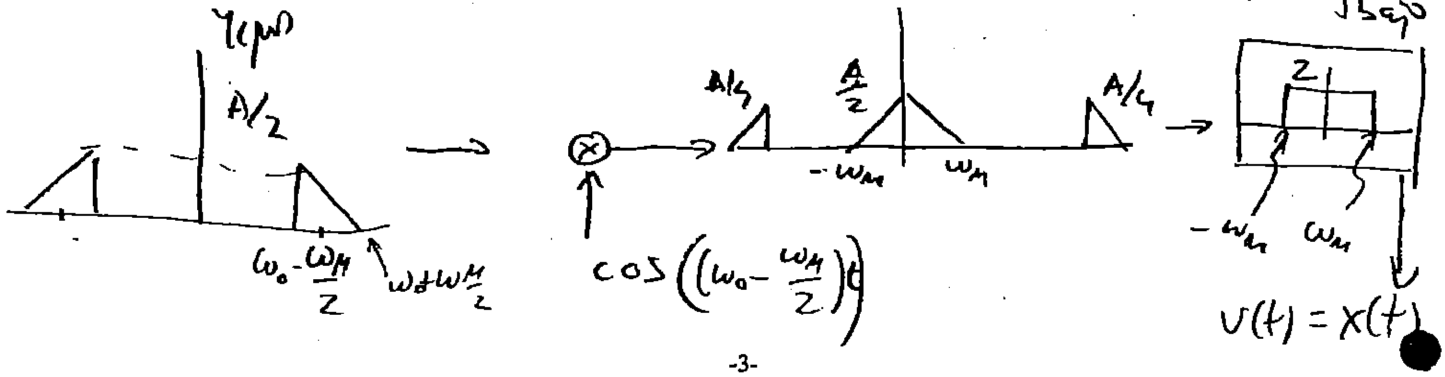
Hay varias soluciones. Comentamos dos posibles

Solución 1

SISTEMA 1

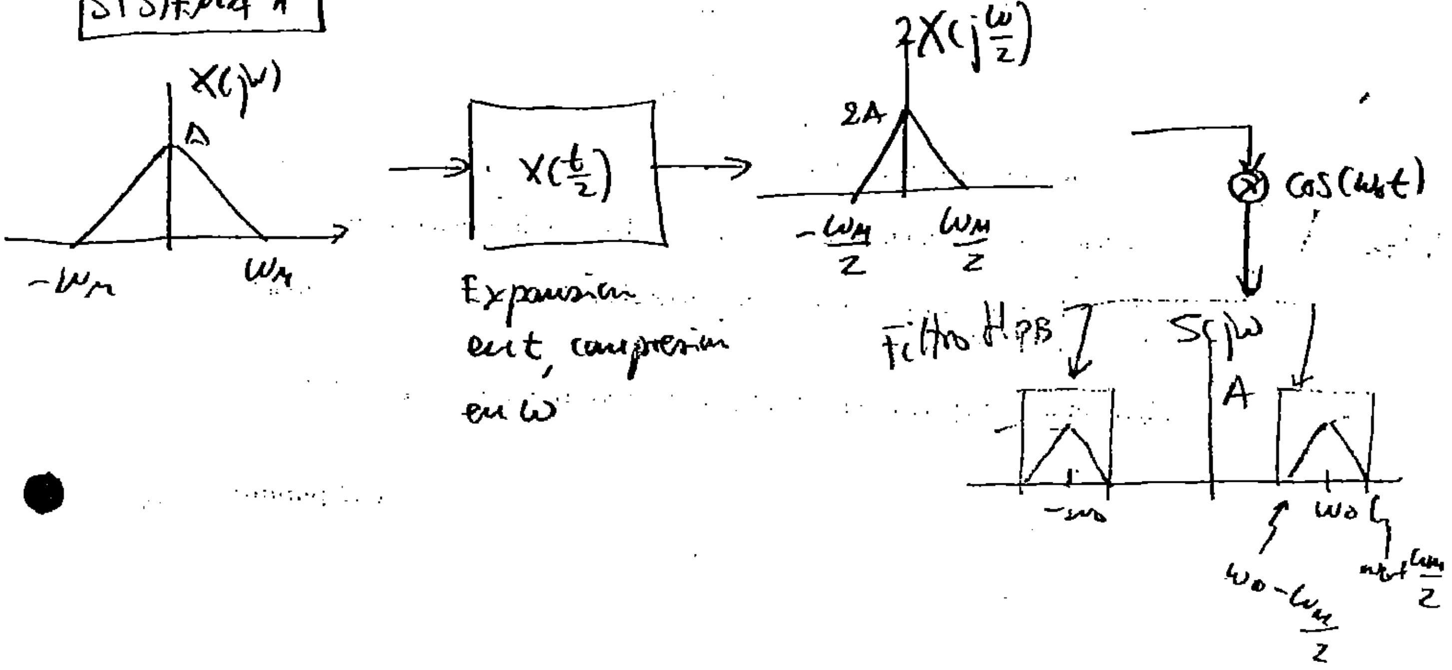


SISTEMA 2

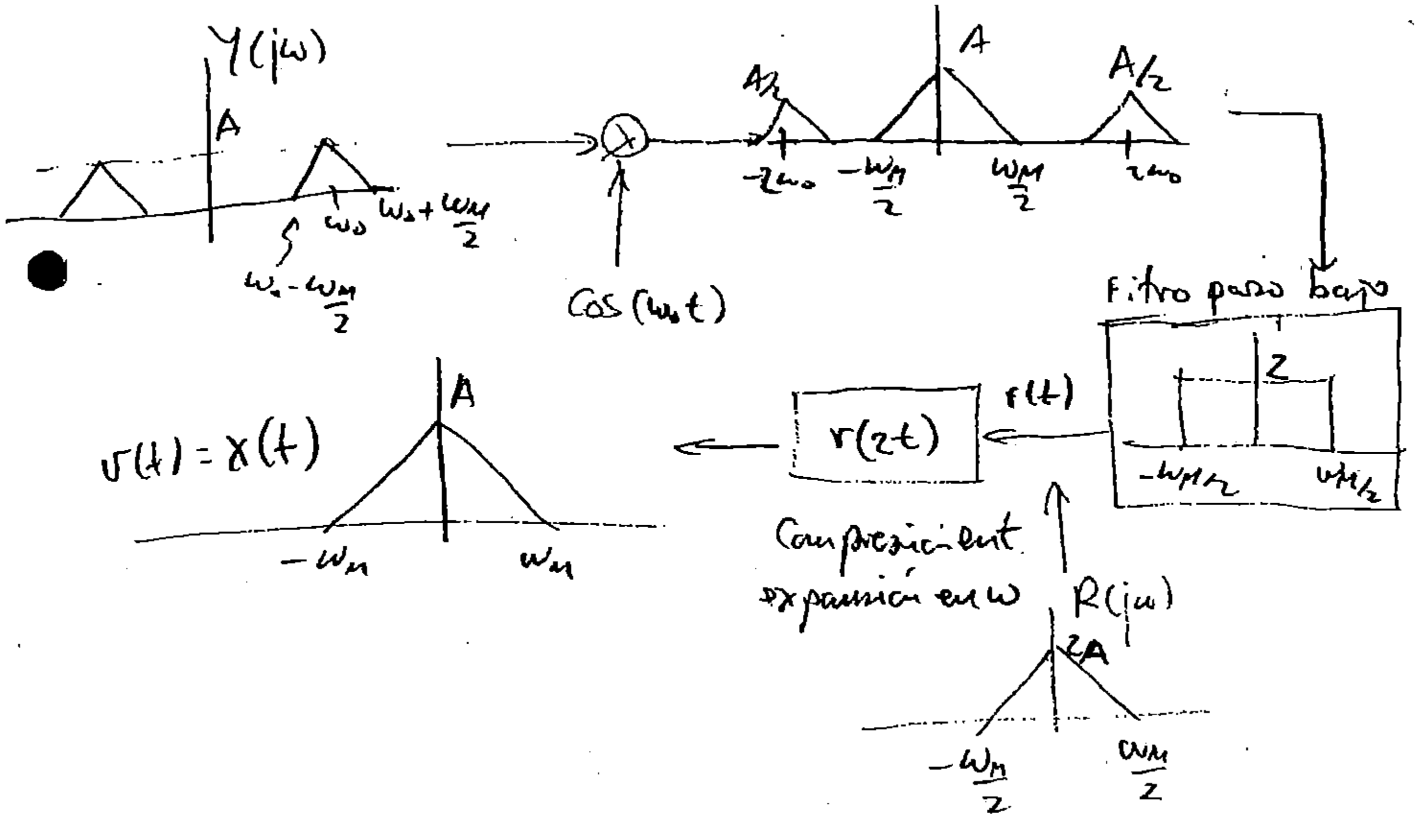


Solución 2

SISTEMA 1



SISTEMA 2



3. Considere las señales y la respuesta impulsiva dadas por:

$$x[n]=1+\cos\left(\frac{\pi}{17.5}n\right) \quad ; \quad z[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k\cdot 16] \quad ; \quad y[n]=x[n]\cdot z[n]$$

$$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-16]$$

Resuelva las siguientes cuestiones:

a) Calcule la transformada de Fourier de $y[n]$. ¿Es periódica dicha señal?

b) Halle el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema lineal e invariante representado por $h_1[n]$.

c) Determine la respuesta del sistema representado por $h_1[n]$ a la señal $y[n]$.

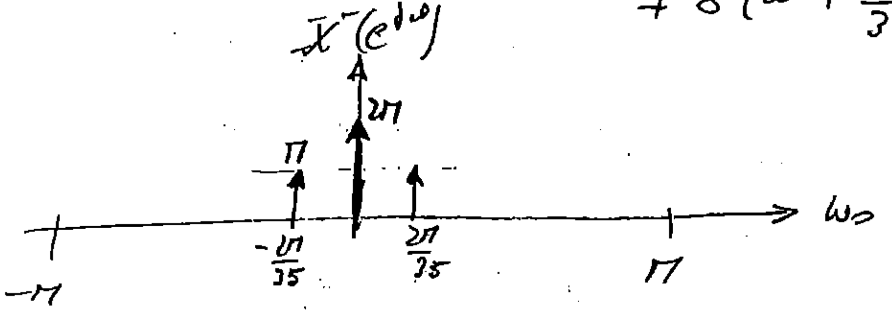
(2,5 puntos)

7/11

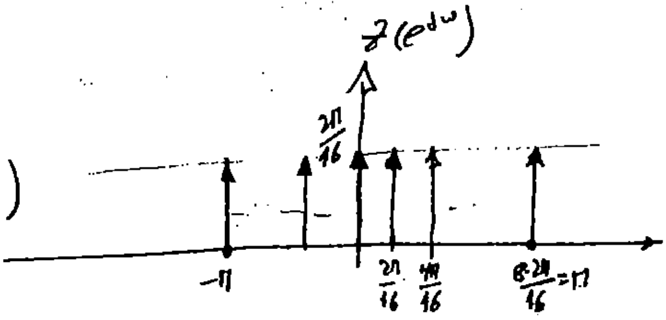
ⓐ (1'2)

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - 2\pi l\right) + \right.$$

$$\left. + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - 2\pi l\right) \right.$$



$$Z(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{16} k\right)$$



$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast Z(e^{j\omega})$$

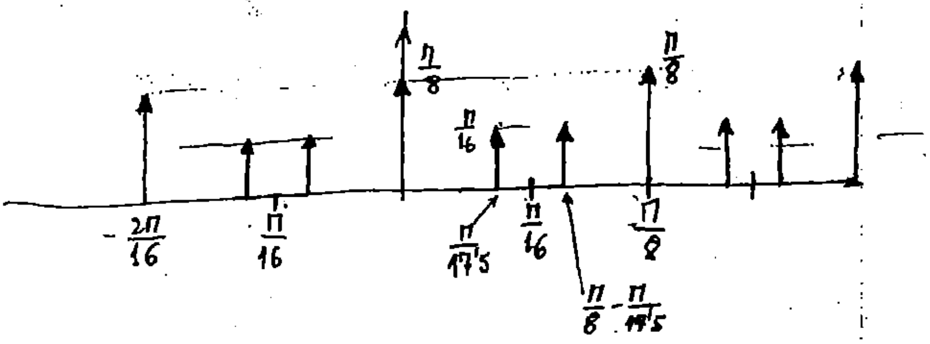
⇒ dado pero no hay deltas ni solapamiento

la señal queda!

$$\cancel{\frac{1}{2\pi}} \left\{ \frac{\cancel{2\pi}}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{16} k\right) \circledast \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ 2\delta(\omega - 2\pi l) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - 2\pi l\right) \right. \right.$$

$$\left. + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - 2\pi l\right) \right\} = \frac{\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ 2\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{16}\right) + \right.$$

$$\left. + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) \right\}$$



8/11 para que la señal sea periódica las deltas del espectro deben caer en múltiplos de una determinada cantidad → o b que a·b

$$\boxed{\frac{2\pi}{35} k = \frac{2\pi}{16}}$$

mismo, las tres señales involucradas tienen que ser periódicas y tener un mínimo común múltiplo común:

$$N_x = 35 \qquad \left(\frac{\omega_0}{2\pi} = \boxed{\frac{m}{N}} = \frac{1}{35} \right)$$

↳ N° racional

$$N_z = 16$$

(la constante es periódica de cualquier periodo, 1)

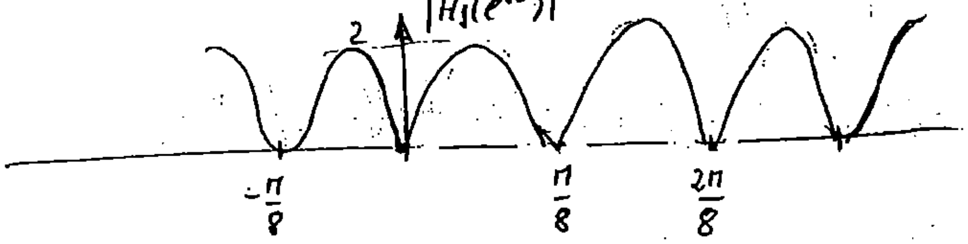
$$\rightarrow N_y = mcm(N_x, N_z) = mcm(16, 35) = 560$$

ⓑ (08) $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-16]$

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega 16}$$

$$|H_1(e^{j\omega})|^2 = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_1^*(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega 16}) \cdot (1 - e^{j\omega 16}) =$$

$$= 1 - e^{-j\omega 16} - e^{j\omega 16} + \underbrace{e^{-j\omega 16} \cdot e^{j\omega 16}}_{1} = 2 - 2\cos(\omega \cdot 16) = 4 \cdot \left(\frac{1 - \cos(\omega 16)}{2} \right)$$



$$\Rightarrow |H_1(e^{j\omega})| = 2\sqrt{\frac{1 - \cos(\omega 1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot 8)$$

Como consecuencia, el filtro elimina todas las deltas situadas en múltiplos de $\frac{\pi}{8}$.

ⓒ Llamemos a la respuesta w[n]

(0'5)

$$W(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) =$$

{Teniendo en cuenta que el filtro elimina las deltas en $k \cdot \frac{\pi}{8} = \omega$}

$$= \frac{\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ H_1\left(\frac{2\pi}{35} + \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) + H_1\left(-\frac{2\pi}{35} + \frac{2\pi}{16} k\right) \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) \right\} =$$

{dado que $H_1(j\omega)$ es periódico de periodo $\frac{2\pi}{16}$}

$$= \frac{\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ H_1\left(\frac{2\pi}{35}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) + H_1\left(-\frac{2\pi}{35}\right) \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) \right\}$$

Dado que $H_1(e^{j\omega}) = H_1^*(e^{-j\omega}) = (1 - e^{-j16\omega}) = (1 - e^{-j16(-\omega)})^*$

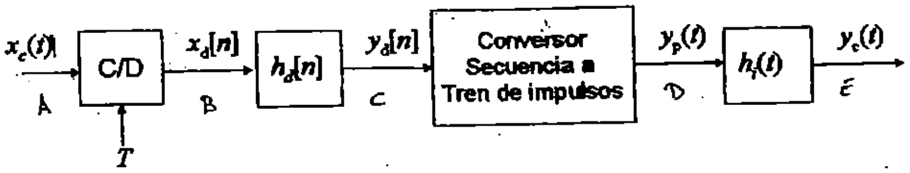
$$= \frac{\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ H_1\left(\frac{2\pi}{35}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) + H_1^*\left(\frac{2\pi}{35}\right) \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{35} - \frac{2\pi}{16} \cdot k\right) \right\}$$

Podemos volver al tiempo teniendo en cuenta que se trata de una señal muestreada por el efecto de z[n].

$$w[n] = \left|H_1\left(\frac{2\pi}{35}\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{35} \cdot n + \arg H_1\left(\frac{2\pi}{35}\right)\right) \cdot z[n]$$

10/11

4. Sea una señal $x_c(t)$ de banda estrictamente limitada ($X_c(j\omega)=0,\ \forall|\omega|>\omega_m$) que es la entrada de un conjunto de sistemas descritos en la figura siguiente:



donde C/D representa un conversor continuo discreto ($x_d[n]= x_c(nT)$) y $h_i(t)$ es un interpolador (filtro reconstructor) NO ideal.

1.5p a) Suponiendo que la transformada de Fourier de $h_i(t)= h_1(t)$ es

$$H_i(j\omega)=H_1(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4\omega_m}\omega} & -\omega_m\le\omega\le\omega_m\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

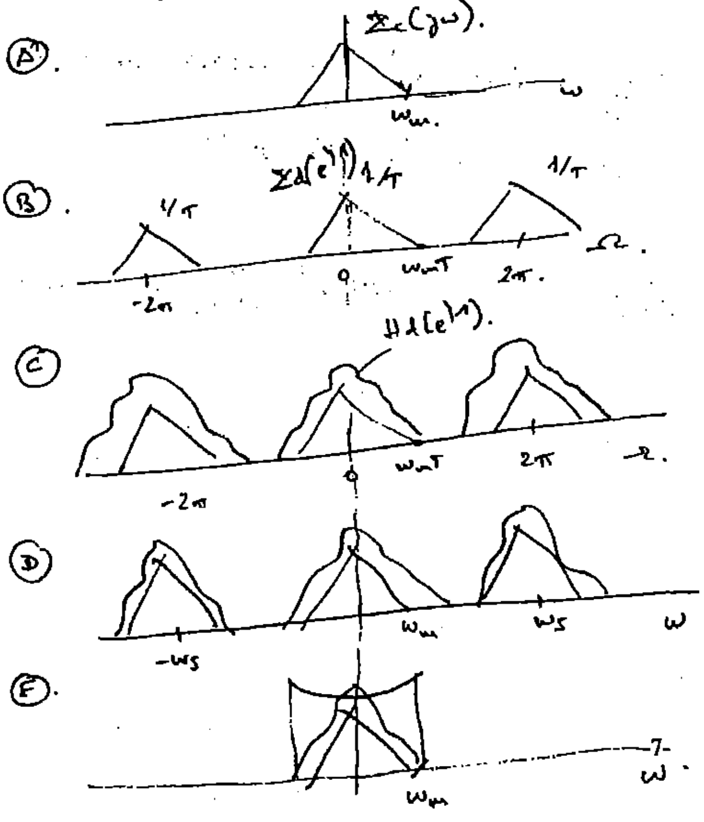
exprese analíticamente los espectros de las distintas señales a la salida de todos los bloques de la figura anterior y represente esquemáticamente dichos espectros. Justifique el valor de la frecuencia de muestreo mínima que permitiría recuperar la señal $x_c(t)$ a partir de $y_c(t)$.

0.5p b) Para dicha frecuencia de muestreo, determine la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso del sistema $h_d[n]$ que hace que $y_c(t)$ sea idéntico a $x_c(t)$.

0.5p c) Para la misma frecuencia de muestreo y siendo ahora $h_i(t)=h_1(t)\cos(2\omega_m t)$ determine la respuesta al impulso del sistema $h_d[n]$ que hace que $y_c(t)=x_c(t)\cos(2\omega_m t)$.

(2,5 puntos)

1.5p a) De acuerdo con la notación A, B, C, D, E que identifica a los bloques de la figura tenemos:



$X_d(e^{j\Omega})= \frac{1}{T}\ X_c(j\frac{\Omega}{T})\quad -\pi<\Omega<\pi$

Periódica 2π.

$Y_d(e^{j\Omega})= \frac{1}{T}\ X_c(j\frac{\Omega}{T}).H_d(e^{j\Omega}),\ -\pi<\Omega<\pi$

Periódica 2π.

$Y_p(j\omega)=\frac{1}{T}\ (X_c(j\omega).H_d(e^{j\omega T}),\ -\omega_s<\omega<\omega_s$

Periódica ω_s.

$Y_c(j\omega)= \frac{1}{T}.X_c(j\omega).H_d(e^{j\omega T}).H_i(j\omega).\quad -\omega_m<\omega<\omega_m$

0 resto.

la condición de recuperabilidad implica que no haya solapamiento: $w_s \geq 2w_m$

2. b). Si se observa el espectro en el punto E, se deduce que

$$Hi(jw) = \begin{cases} \dfrac{T}{Hd(e)^{wT}} & -w_m < w < w_m \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$Hd(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \dfrac{-T}{Hi(j\frac{\Omega}{\pi})} = T\cos\dfrac{\Omega}{4} & |\Omega| < \pi \\ \text{Periódica de periodo } 2\pi \end{cases}$$

$$hd[n] = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\Omega}{4}\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\frac{\Omega}{4}} + e^{-j\frac{\Omega}{4}}}{2}\, e^{j\Omega n}\, d\Omega =$$

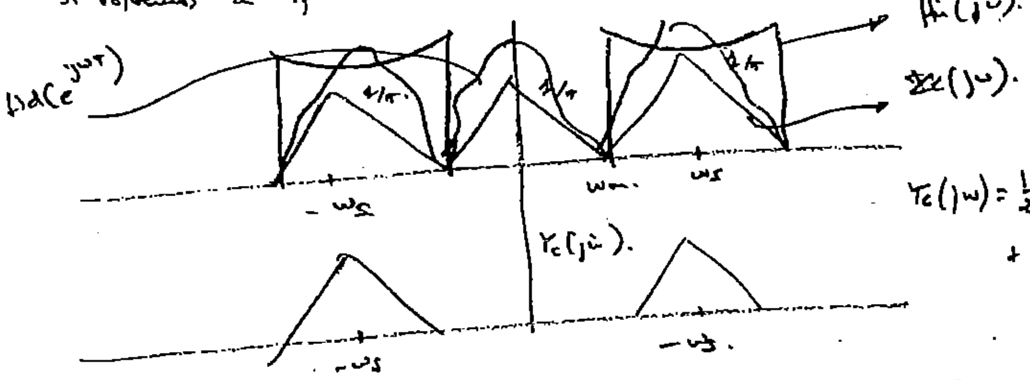
$$= \frac{T}{4\pi j}\cdot \frac{e^{j(n+\frac{1}{4})\pi} - e^{-j(n+\frac{1}{4})\pi}}{n+\frac{1}{4}} + \frac{T}{4\pi j}\, \frac{e^{j(n-\frac{1}{4})\pi} - e^{-j(n-\frac{1}{4})\pi}}{n-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{1}{4})\pi}{n+\frac{1}{4}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{4})\pi}{n-\frac{1}{4}}\right].$$

0.5p. c). $hi(t) = h_s(t)\cos 2w_m t \rightarrow Hi(jw) = \frac{1}{2} H_s(j(w-2w_m)) + \frac{1}{2} H_s(j(w+2w_m)).$

$$= \frac{1}{2}\cdot H_s(j(w-w_s)) + \frac{1}{2} H_s(j(w+w_s)).$$

Si volvemos a pintar los espectros en el punto D y E.



$$Yc(jw) = \frac{1}{2} Xc(j(w-w_s)) + \frac{1}{2} Xc(j(w+w_s)).$$

Se observa que $Hd(e^{j\Omega})$. tiene que ser el mismo del apartado anterior. e idénticamente $hd[n]$.