

**simplyjaro.com**

# ADCT

## Carpeta Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM



Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en [simplyjarod.com](http://simplyjarod.com)

# **ADCT**

# **Teoría**

## **PROGRAMA DE LA ASIGNATURA**

---

**Tema 1: Análisis de circuitos mediante Transformada de Laplace**

**Tema 2: Respuesta temporal y frecuencial de circuitos lineales**

**Tema 3: Introducción a la síntesis de circuitos**

**Tema 4: Cuadripolos**

# TEMA 1: APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

## 1.1 Introducción

La transformación de Laplace es una herramienta matemática que facilita el análisis de circuitos. Esta transformación opera sobre las variables circuitales y las ecuaciones diferenciales que las relacionan.

Las relaciones entre las variables circuitales en el “dominio del tiempo” son del tipo “ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes”. Al aplicar la transformación de Laplace, las relaciones entre las “variables transformadas” son del tipo “ecuaciones algebráicas lineales”. Obviamente, es más sencillo resolver las ecuaciones en el dominio de Laplace que en el dominio del tiempo, razón fundamental para el uso de la transformación de Laplace.

Por consiguiente, la respuesta temporal podrá obtenerse por doble vía:

- Análisis en el dominio del tiempo (como hacíamos en IACR)
- Análisis en el dominio de Laplace (como vamos a hacer en ADCT)

## 1.2 Definición de la Transformada de Laplace

En este tema utilizaremos  $p$  en vez de  $s$

Se define la transformada de Laplace  $F(p)$  de  $f(t)$  por la relación siguiente:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

donde el parámetro  $p \in \mathbb{C}$  es la variable de Laplace.

## 1.3 Propiedades de la Transformada de Laplace

A continuación se enumeran las principales propiedades de la Transformada de Laplace. Sea una función definida en el tiempo  $f(t)$  para  $t > 0$  cuya transformada es  $F(p) = L[f(t)]$ .

### Linealidad

Siendo  $A$  y  $B$  dos constantes

$$A f_1(t) + B f_2(t) \leftrightarrow A F_1(p) + B F_2(p)$$

### Derivación en el dominio del tiempo

$$f'(t) \leftrightarrow p \cdot F(p) - f(0)$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n \cdot F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0)$$

## Integración en el dominio del tiempo

$$\int f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{1}{p} \int f(0) dt$$

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$$

$$\int_0^t \int_0^{t''} \dots \int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p^n}$$

## Desplazamiento en el dominio del tiempo

$$f(t-\tau)u(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} F(p)$$

## Desplazamiento en el dominio de Laplace

$$e^{-at} f(t) \leftrightarrow F(p+a)$$

## Derivación en el dominio de Laplace

$$t f(t) \leftrightarrow -\frac{dF(p)}{dp}$$

$$t^2 f(t) \leftrightarrow \frac{d^2 F(p)}{dp^2}$$

$$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

## Cambio de escala temporal

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

## Convolución en el dominio del tiempo

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$$

## Convolución en el dominio de Laplace

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow F_1(p) * F_2(p)$$

## 1.4 Transformada de Laplace de funciones elementales



$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$K u(t) \leftrightarrow \frac{K}{p}$$

$$t^n \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$e^{-\alpha t} \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha}$$

$$t^n \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$$

$$\operatorname{sen}(w_0 t) \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{w_0}{p^2 + w_0^2}$$

$$\cos(w_0 t) \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + w_0^2}$$

$$e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sen}(w_0 t) \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{w_0}{(p+\alpha)^2 + w_0^2}$$

$$e^{-\alpha t} \cdot \cos(w_0 t) \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + w_0^2}$$

## 1.5 Relaciones tensión-corriente en el dominio de Laplace

A continuación veremos cuales son las relaciones entre la tensión y la corriente en el dominio de Laplace para la resistencia, la capacidad y la inductancia.

Relación tensión-corriente en la resistencia

$$v(t) = R \cdot i(t) \leftrightarrow V(p) = R \cdot I(p)$$

Relación tensión-corriente en la inductancia

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow I(p) = \frac{V(p)}{Lp} + \frac{i(0^+)}{p}$$

Relación tensión-corriente en la capacidad

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Leftrightarrow V(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{v(0^+)}{p}$$

## 1.6 Leyes de Kirchhoff en el dominio de Laplace

Las leyes de Kirchhoff también se cumplen en el dominio de Laplace. En efecto,

Primera ley de Kirchhoff (ley de los nudos)

$$\sum_k i_k(t) \Leftrightarrow \sum_k I_k(p) \quad \text{donde} \quad I_k(p) = \mathcal{L}[i_k(t)]$$

Segunda ley de Kirchhoff (ley de las mallas)

$$\sum_k v_k(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_k V_k(p) = 0 \quad \text{donde} \quad V_k(p) = \mathcal{L}[v_k(t)]$$

## 1.7 Análisis en el dominio del Laplace

Ya estamos en condiciones de formalizar el análisis de circuitos en el dominio de Laplace. Hemos visto cómo se transforman los elementos del circuito del dominio del tiempo al dominio de Laplace, permaneciendo la topología inalterada. Además las leyes de Kirchoff también se cumplen en el dominio de Laplace. Por consiguiente, poco más hay que añadir de lo ya dicho en cuanto a la formalización del **análisis general de circuitos en el dominio de Laplace**, pues va a ser formalmente idéntico al análisis en régimen permanente sinusoidal.

A continuación establecemos el análisis en el dominio de Laplace, considerando las siguientes fases:

### a) Incorporación circuital de las condiciones iniciales

Extraer como generadores las condiciones iniciales para obtener un circuito en el dominio del tiempo con las condiciones iniciales nulas.

### b) Circuito en el dominio de Laplace

Aplicar la transformada de Laplace al circuito del punto a), manteniendo la topología del mismo. Se determinan las transformadas de Laplace de los generadores; se consideran las impedancias y las admitancias de los elementos, así como las transformadas de las variables circitales (tensiones y corrientes). Así se tiene el circuito traducido al dominio de Laplace.

### c) Análisis en el dominio de Laplace

Analizamos el circuito obtenido en el punto anterior como si fuera en régimen permanente senoidal. Por tanto, podemos aplicar los teoremas conocidos en régimen permanente senoidal y los procedimientos generales de análisis, cuidando de sustituir fasores por transformadas de Laplace y  $jw$  por  $p$  en las impedancias

### d) Resolución algebraica

Resolver el sistema de ecuaciones en el dominio de Laplace (ecuaciones algebraicas) para obtener la respuesta en el dominio de Laplace.

### e) Respuesta temporal

Calcular la transformada inversa de Laplace del resultado para obtener la respuesta temporal.

## 1.8 Teoremas límites

Se aplican para calcular directamente en el dominio de Laplace, algunos valores típicos en el tiempo, sin necesidad de calcular la transformada inversa.

### Teorema del valor inicial

“el valor inicial por la derecha del origen de tiempos se obtiene multiplicando la transformada por  $p$  y calculando el límite cuando  $p$  tiende a infinito”

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

### Teorema del valor final

Si  $pF(p)$  es analítica (no tiene polos) a la derecha del eje  $jw$  (incluido), entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

## 1.9 Transformada inversa de Laplace

### Definición

La expresión de transformada inversa de Laplace es la siguiente:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

### Método práctico de cálculo

Casi nunca tendremos que utilizar la anterior definición sino que utilizaremos alguno de los siguientes métodos para calcular la transformada inversa:

#### Primer método

Descomponemos  $F(p)$  en fracciones simples y aplicamos las propiedades y las transformadas elementales ya vistas anteriormente. Este método es especialmente útil cuando la transformada es una función racional.

#### Segundo método: Teorema de los Residuos

Siempre que en el infinito  $F(p) = 0$ , puede aplicarse el teorema de los residuos.

Si no se cumple lo anterior tenemos que descomponer  $F(p)$  en  $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$  donde  $F_1(p)$  se puede resolver por el primer método y  $F_2(p)$  por el teorema de los residuos que enunciamos a continuación:

Este teorema se estuda en MMT1

$$f(t) = \sum_i k_i(t) u(t)$$

donde  $k_i(t)$  son los residuos en los polos,  $p_i$  de orden  $N_i$ , de  $F(p)e^{pt}$ . El procedimiento de cálculo es el siguiente:

$$k_i(t) = \lim_{p \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(N_i-1)!} \cdot \frac{d^{N_i-1}}{dp^{N_i-1}} [(p-p_i)^{N_i} \cdot F(p)e^{pt}] \right\}$$

En caso de que el polo  $p_i$  sea de orden uno la expresión anterior queda reducida a:

$$k_i(t) = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) \cdot F(p)e^{pt}$$

Caso particular importante:

Si  $p_i \in \mathbb{C}$ , su conjugado  $\bar{p}_i$  también es polo, correspondiéndole el residuo  $\bar{k}_i(t)$ . Como siempre se cumple que  $\bar{k}_i(t) + k_i(t) = 2 \operatorname{Re}\{k_i(t)\}$  solo es necesario calcular el residuo en uno de los polos,  $k_i(t)$ .

## TEMA 2: RESPUESTA TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE CIRCUITOS LINEALES.

### 2.1 Análisis de circuitos de capacidades conmutadas

Los circuitos de capacidades conmutadas (SC) se componen de amplificadores operacionales, condensadores e interruptores.

Sistematización del análisis para dos fases

} • Amplificadores Operacionales Ideales  
 } • Condensadores  
 } • Interruptores

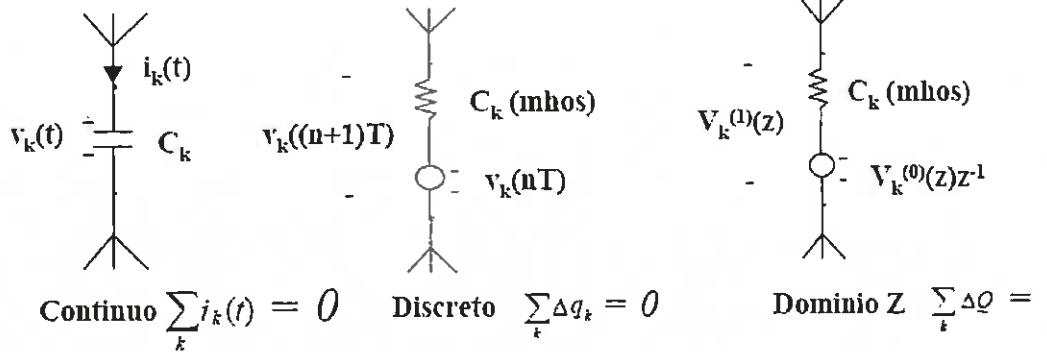
- ① • Asignamos a cada condensador del circuito una variable de tensión de polaridad arbitraria. -1/4
- ② • Representamos la topología en ambas fases especificando las variables con el superíndice correspondiente. Se trata, por tanto, de hacer dos dibujos: primero dibujamos el circuito con todos los interruptores de fase  $\phi_1$  cerrados y los de la fase  $\phi_2$  abiertos. Despues hacemos otro dibujo con la situación contraria, es decir, con los interruptores de fase  $\phi_2$  cerrados y los de la fase  $\phi_1$  abiertos. (por detrás)
- ③ • Discretizamos el circuito sustituyendo  $t$  por  $n$ . Sustituimos cada condensador por una conductancia (del mismo valor que la capacidad) en serie con un generador de tensión que representa la condición inicial de tensión del condensador al comienzo de la fase. Hay que tener en cuenta que la tensión en un condensador es continua en el tiempo, por eso, al pasar de una fase a otra el voltaje en el instante inicial de la nueva fase es igual al voltaje en el instante final de la fase anterior  $v(t^-) = v(t^+)$ . Por ello el valor del generador de tensión siempre será el voltaje final del condensador en la fase anterior.
- ④ • Pasamos todas las variables al dominio transformado (transformada Z).

$$f(n) \xrightarrow{z} F(z)$$

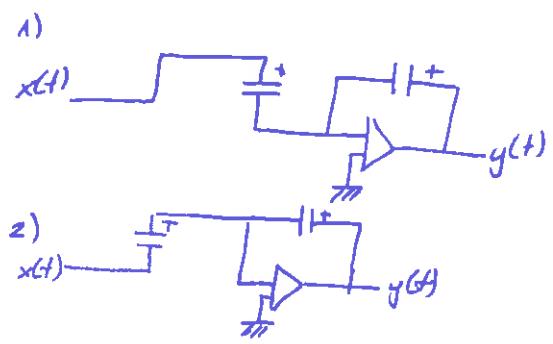
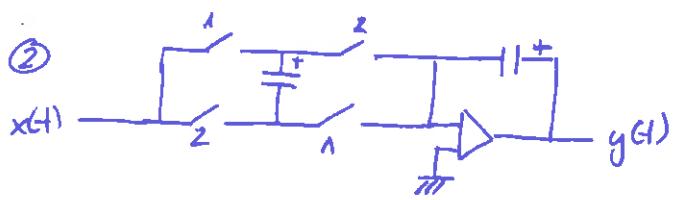
y aplicamos la propiedad de desplazamiento temporal:

$$f(n-n_0) \xrightarrow{z} z^{-n_0} F(z)$$

En este dibujo se muestra las tres transformaciones que hay que hacer al condensador:  
 -Tiempo continuo  
 -Tiempo discreto Z.  
 -Transformada Z.



- ⑤ • Analizamos cada una de las dos topologías por el método de nudos (análisis sólo con resistencias, generadores y A.O.), obteniéndose dos sistemas de ecuaciones con tantas incógnitas (funciones de z) como número de ecuaciones. Las transformadas Z de las entradas son datos y las transformadas de las salidas y variables internas son incógnitas.
- ⑥ • Se resuelve el sistema de ecuaciones conjunto correspondiente a las dos topologías (sistema lineal y algebraico) presentando la relación entrada-salida en forma matricial.



3)  $\frac{1}{TC_R} \times \frac{1}{C_R(\text{mhos})}$

*conductancia*

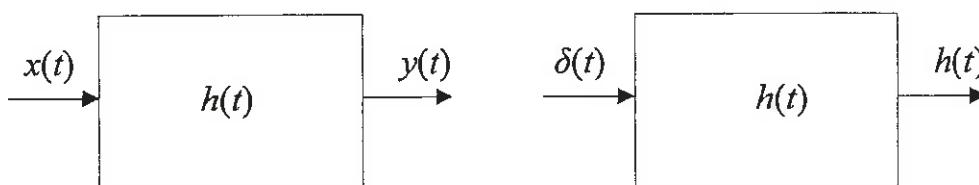
## 2.2 Función de transferencia

La teoría de Sistemas Lineales nos dice que si  $x(t)$  es la entrada de un sistema e  $y(t)$  es la salida, se puede establecer la siguiente relación:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$\downarrow TL$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$



donde  $h(t)$  es la respuesta del sistema a la función impulso o función delta de Dirac  $\delta(t)$ .

El análisis temporal de circuitos va parejo al aspecto físico e intuitivo del comportamiento circuital; sin embargo, su manejo es muy complejo en circuitos de orden elevado. Por el contrario, el análisis circuital en los dominios de transformadas (Laplace, Fourier, fasores, etc) resulta fácilmente manejable y generalizable; además, determinadas propiedades de los circuitos resultan evidentes en el dominio de la frecuencia (efecto de filtrado, análisis de estabilidad, etc); sin embargo, no resultan tan evidentes en el dominio del tiempo. Estas razones son las fundamentales para que pasemos a abordar el tratamiento de “entrada-salida” en los dominios transformados.

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la anterior igualdad tenemos:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

y despejando se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

que recibe el nombre de **función de red** o **función de transferencia** de la entrada a la salida. Observamos que  $H(s)$  es el cociente de las transformadas de la respuesta y de la excitación. La excitación (fuente o entrada) ocupa el denominador y la respuesta (salida) ocupa el numerador.

El comportamiento de un circuito en el dominio de la frecuencia se obtiene particularizando  $H(s)$  en el eje imaginario ( $s = jw$ ). La función  $H(jw)$  se denomina **respuesta en frecuencia** y corresponde a la relación fasorial entre la salida y la entrada a la pulsación  $w$  (régimen permanente senoidal).

El módulo de  $H(jw)$ , esto es,  $|H(jw)|$ , constituye la respuesta espectral de amplitud del circuito; el argumento de  $H(jw)$ , esto es,  $\arg H(jw)$  es la respuesta en fase.

## 2.3 Estabilidad de circuitos

### Definición

La estabilidad de un circuito es un concepto temporal y relacionado con la evolución temporal de las respuestas circuitales en el transcurso del tiempo. Se dice que un circuito es estable si entradas acotadas en amplitud implican a salidas acotadas en amplitud. (BIBO)

Banded In Banded Out

### Caracterización de la estabilidad en el Dominio de Laplace

También se puede determinar si un circuito es estable a partir de la función de transferencia en el dominio de Laplace  $H(s)$ :

$$\text{Circuito estable} \Leftrightarrow \text{Polos de } H(s) \text{ en } \text{Re}[s] < 0$$

### Caracterización de la estabilidad en el Dominio Z

Esta caracterización es muy útil para los circuitos de capacidades comutadas.

Puesto que un circuito de condensadores comutados es un sistema discreto definido por la función de transferencia  $H(z)$ , para que el circuito sea estable es necesario que todos los polos de  $H(z)$  estén dentro del círculo unidad en el plano Z:



$$\text{Circuito estable} \Leftrightarrow \text{Polos de } H(z) \text{ dentro de } |z| < 1$$

Para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema discreto y estable se considera  $H(z)$  y se particulariza  $z$  sobre la circunferencia unidad, es decir  $z = e^{j\Omega}$ , donde  $\Omega$  es la frecuencia en tiempo discreto. Finalmente se sustituye  $\Omega = wT$ , esto es,

$$H(jw) = H(e^{jwT}) = H(z) \Big|_{z=e^{jwT}}$$
$$H(z) \xrightarrow{z=e^{j\Omega}} H(e^{j\Omega}) \xrightarrow{\Omega=jw} H(jw) = H(e^{jwT})$$



## TEMA 3: INTRODUCCIÓN A LA SÍNTESIS DE CIRCUITOS.

### 3.1 Estructuras canónicas

#### Funciones reales positivas

Decimos que una función  $F(s)$  es real positiva (FRP) si verifica que:

$$\operatorname{Re}[F(s)] \geq 0, \quad \forall \operatorname{Re}[s] \geq 0$$

La propiedad anterior se puede desglosar en otras propiedades más elementales y que enunciamos a continuación. Decimos que  $F(s)$  es real positiva si cumple las siguientes propiedades:

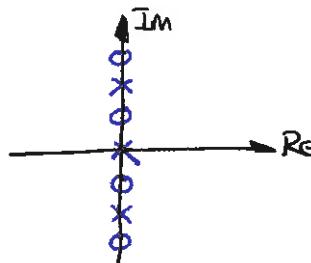
- $F(s)$  es una función racional de coeficientes reales y positivos.
- Los polos y ceros de  $F(s)$  están todos en el semiplano izquierdo incluido el eje  $jw$ .
- Los polos y ceros de  $F(s)$  que están en el eje imaginario  $s = jw$  son simples (orden 1).
- El grado del numerador de  $F(s)$  y el grado del denominador se diferencian, a lo sumo, en una unidad.  $\operatorname{grado(numerador)} + x = \operatorname{grado(denominador)}, x \in \{-1, 0, 1\}$
- Los residuos en los polos son reales y positivos.
- En el eje imaginario ( $s = jw$ ) se verifica:  $0 \leq \operatorname{Re}[F(jw)] < \infty$ , (el infinito no se alcanza)

#### Funciones reales positivas impares

Una función real positiva  $F(s)$  se dice que es impar si  $F(-s) = -F(s)$

Las propiedades de las funciones reales positivas impares son las siguientes:

- $(F(s)$  es una función racional de coeficientes reales y positivos.) *Redundante: Función real positiva*
- Todos los ceros y polos están en el eje  $jw$
- Los polos y ceros se alternan en el eje  $jw$



## Primera forma canónica ( Primera de Foster)

Sólo sintetiza impedancias  $Z(s)$ .

Se basa en la extracción simultánea de todos los polos incluido el del origen y el del infinito (si los hay).

$$F(s) = Z(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2k_2 s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + k_\infty \cdot s$$

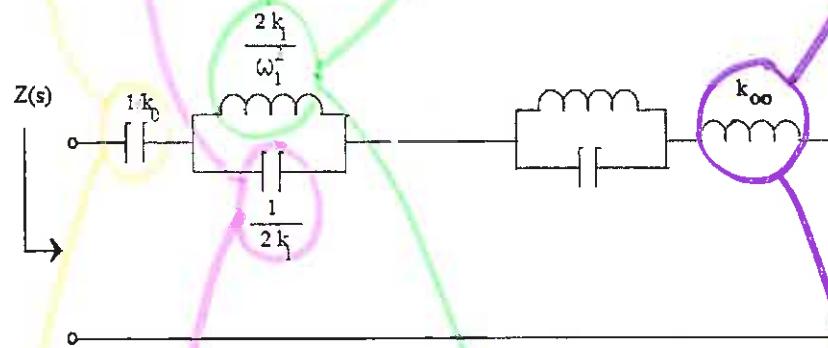
$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0}s} + \frac{1}{\frac{1}{2k_1}s + \frac{1}{\omega_1^2}s} + \frac{1}{\frac{s}{2k_2} + \frac{1}{\omega_2^2}s} + \dots + k_\infty \cdot s$$

Donde :

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Z(s), \quad 2k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -\omega_1^2} \frac{s^2 + \omega_1^2}{s} \cdot Z(s), \quad 2k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -\omega_2^2} \frac{s^2 + \omega_2^2}{s} \cdot Z(s), \text{ etc...}$$

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot Z(s)$$

La estructura que corresponde a  $F(s)$  es la mostrada en la siguiente figura:

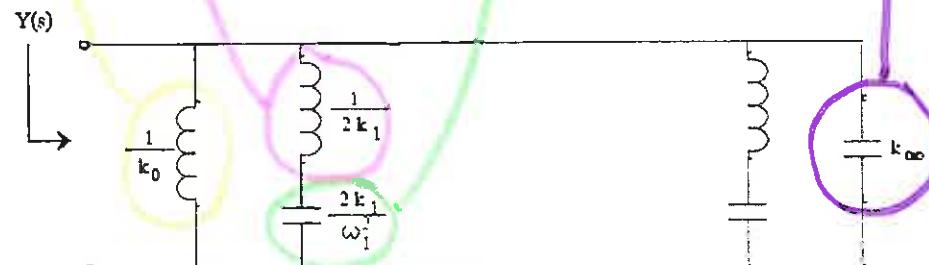


## Segunda forma canónica ( Segunda de Foster)

Sólo sintetiza admitancias  $Y(s)$ .

Se calcula exactamente igual que la anterior pero tomando  $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$ .

La estructura que corresponde a la segunda forma canónica es la mostrada en la siguiente figura:



### Tercera forma canónica (Primera de Cauer)

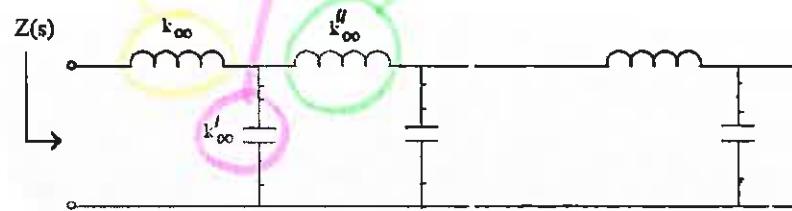
Sintetiza tanto impedancias  $Z(s)$  como admitancias  $Y(s)$

La tercera forma canónica se obtiene extrayendo sucesivamente polos en el infinito.

$$F(s) = k_{\infty} \cdot s + \frac{1}{k'_{\infty} \cdot s + \frac{1}{k''_{\infty} \cdot s + \dots}}$$

Para obtener esta expresión dividiremos reiteradamente. Empezaremos dividiendo el numerador de  $F(s)$  entre el denominador. El cociente de esta primera división es  $k_{\infty} \cdot s$ . Tras ello, dividimos el divisor (tomándolo como dividendo) y el resto (tomándolo como divisor) de la anterior división y obtenemos un cociente que será  $k'_{\infty} \cdot s$ . Seguiremos así hasta que el cociente sea nulo.

La estructura que corresponde a la tercera forma canónica es la mostrada en la siguiente figura:



### Cuarta forma canónica (Segunda de Cauer)

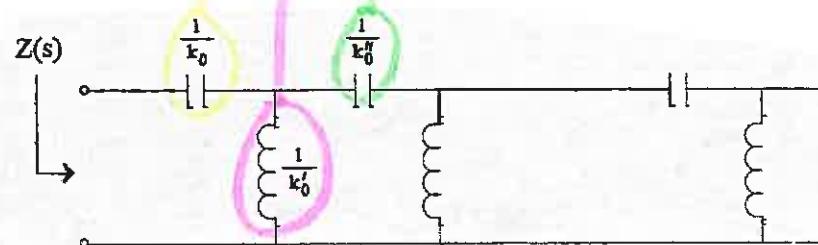
Sintetiza tanto impedancias  $Z(s)$  como admitancias  $Y(s)$

La cuarta forma canónica se obtiene extrayendo sucesivamente polos en el origen.

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \dots}}$$

La forma de obtener los coeficientes es la misma que en la tercera forma canónica.

La estructura que corresponde a la cuarta forma canónica es la mostrada en la siguiente figura:



### 3.2 Normalización de Parámetros

Se trata de un cambio de escala que se realiza para operar con valores más sencillos.

Consideraremos dos parámetros fundamentales de normalización:

Normalmente serán  
dato del ejercicio

- La resistencia de normalización  $R_0$  ( $\Omega$ )
- La pulsación de normalización  $w_0$  ( $rad / s$ )

A partir de esto se normaliza la frecuencia:

$$w_n = \frac{w}{w_0}$$

y todos los elementos circuitales:

$$R_n = \frac{R}{R_0}$$

$$L_n = \frac{L w_0}{R_0}$$

$$C_n = R_0 C w_0$$

#### Observación

- Los valores normalizados  $R_n$ ,  $L_n$  y  $C_n$  son valores adimensionales.
- Si  $R_0$  y  $w_0$  han sido elegidos cuidadosamente, los valores de los elementos de las estructuras son número fáciles de manejar.

### 3.3 Transformaciones de frecuencias

#### Transformación paso bajo – paso alto

Si  $H(s)$  corresponde a un filtro paso-bajo, entonces  $H(1/s)$  corresponde a un filtro paso-alto.

Consideremos que  $H(\hat{s})$  es un filtro paso bajo en la variable  $\hat{s}$ , entonces tomando,

$$s = \omega \quad (\hat{s} = j\omega)$$

$$j\hat{\omega} = \frac{k_0}{j\omega} = \frac{k_0}{\omega} (j)$$

variable del filtro paso bajo  
(filtro inicial)

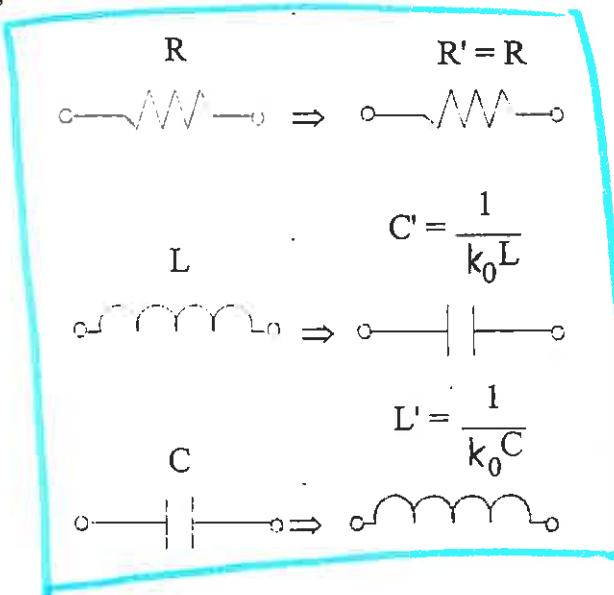
$$\hat{s} = \frac{k_0}{s}$$

variable del filtro paso alto  
(filtro final)

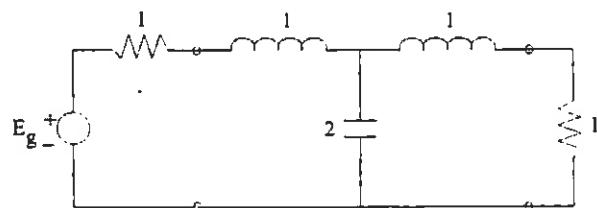
tendremos la transformación de paso-bajo a paso-alto dependiente del parámetro  $k_0$  que se puede fijar a conveniencia del diseñador. En definitiva:

$$H(\hat{s}) \xrightarrow{\hat{s} = \frac{k_0}{s}} H\left(\frac{k_0}{s}\right)$$

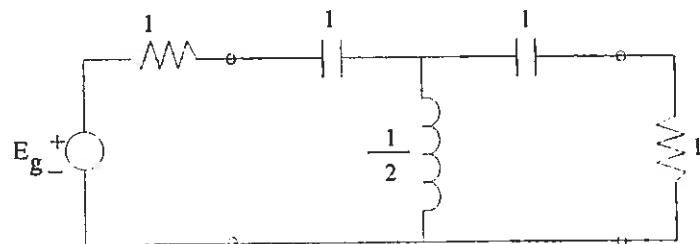
topológicamente,



Por ejemplo, el filtro paso-bajo siguiente



Se transforma en la estructura paso-alto de la figura siguiente:



## Transformación paso bajo - paso banda

Considerando

$$\hat{s} = j\hat{\omega}, \quad s = j\omega$$

$$\hat{\omega} = k_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}$$

$$\hat{s} = k_0 \frac{s^2 + w_0^2}{s}$$

entonces el filtro paso-bajo  $H(\hat{s})$  se transforma en el filtro paso-banda

$$H\left(k_0 \frac{s^2 + w_0^2}{s}\right)$$

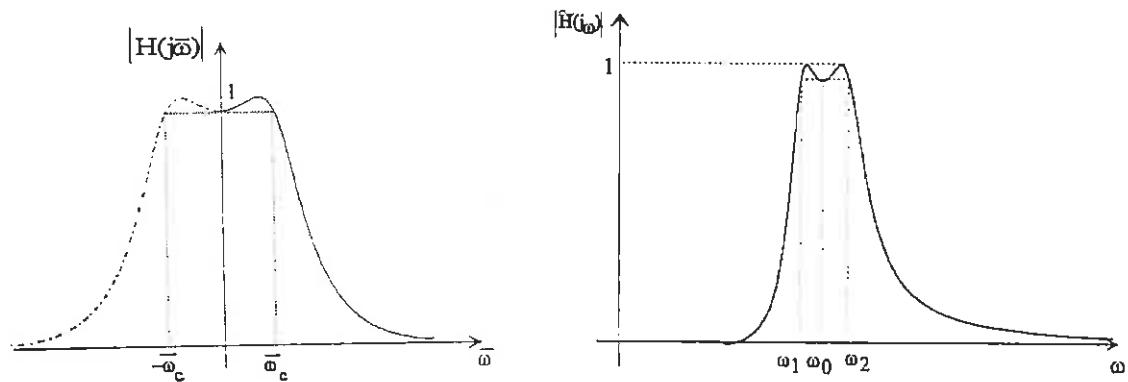
donde  $k_0$  y  $w_0^2$  son parámetros a fijar por el diseñador.

Se verifica que:

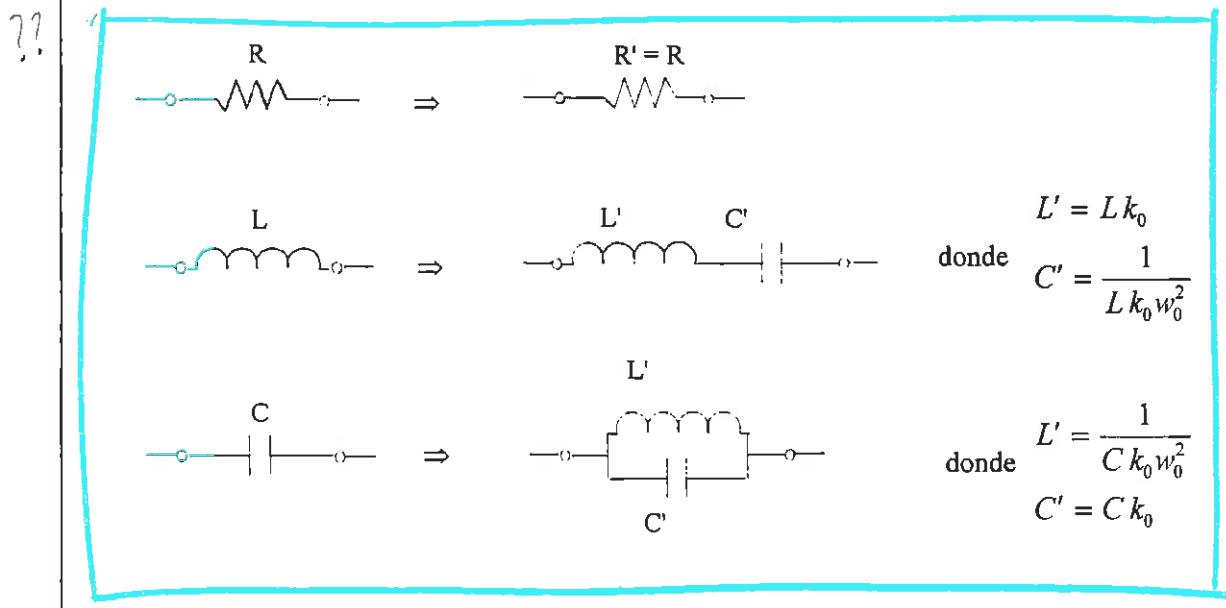
$$w_1 \cdot w_2 = w_0^2$$

$$w_2 - w_1 = \frac{w_c}{k_0}$$

En las siguientes figuras se muestra la característica paso-bajo y paso-banda:



En cuanto a las transformaciones sobre la topología y los elementos circuitales:



# DEMOSTRACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES

## SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Z = \frac{1}{sL} \Rightarrow Y = \frac{1}{sL} = \frac{1}{K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} L} = \frac{1}{K_0 L (s + \frac{\omega_0^2}{s})} = \frac{1}{K_0 L s + \frac{1}{\frac{1}{K_0 \omega_0^2} s}}$$

$\rightarrow L' = K_0 L$

$\rightarrow$

$C' = \frac{1}{K_0 \omega_0^2 L}$

## PRIMERA FORMA CANÓNICA

$$Z = \frac{1}{sC} = \frac{1}{K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} C} = \frac{1}{K_0 C s + \frac{1}{\frac{1}{K_0 \omega_0^2} s}}$$

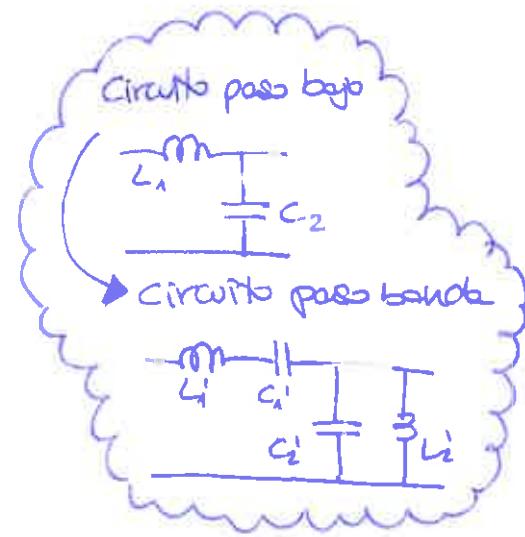
$\rightarrow C' = \frac{1}{K_0 \omega_0^2 C}$

$\rightarrow$

$m$

$\rightarrow$

$c' = K_0 C$



## Transformación paso bajo – banda eliminada

paso bajo + paso alto

Considerando

$$s = j\omega \quad s = \omega$$

$$j\omega = k_0 \frac{j\omega}{\omega^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega = k_0 \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\hat{s} = k_0 \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}$$

entonces el filtro paso-bajo  $H(\hat{s})$  se transforma en el filtro banda eliminada

$$H\left(k_0 \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}\right)$$

donde  $k_0$  y  $\omega_\infty^2$  son parámetros a fijar por el diseñador.

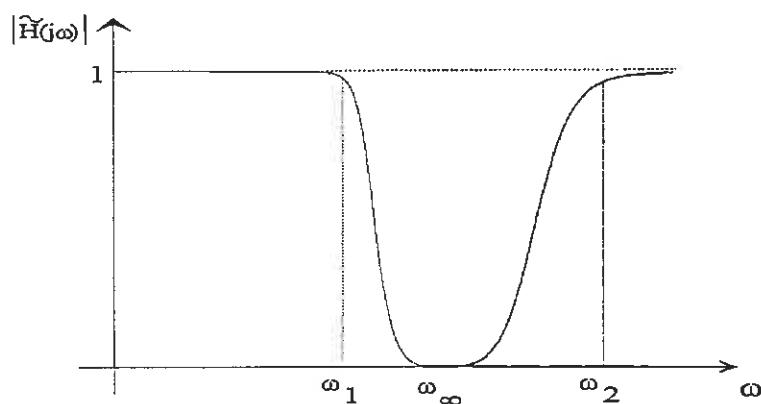
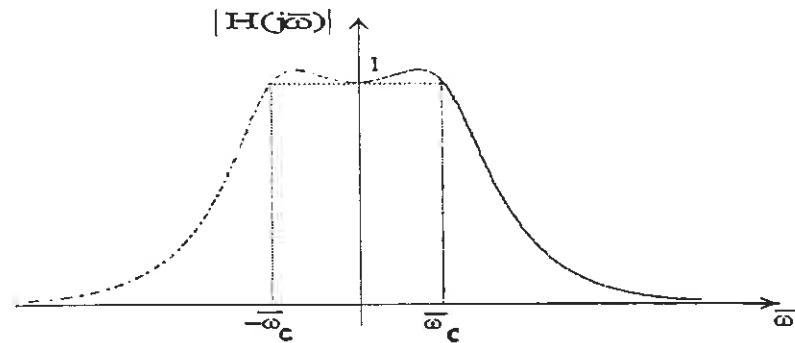
Se verifica que:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_\infty^2$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{k_0}{\bar{w}_C}$$

Transformaciones de bobinas y condensadores por detrás

En las siguientes figuras se muestra la característica paso-bajo y paso-banda:

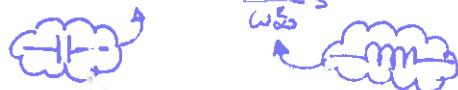
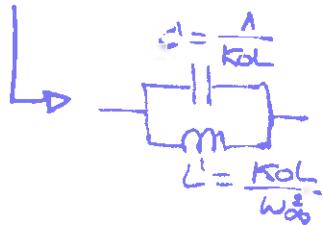


En cuanto a las transformaciones sobre la topología y los elementos circuitales son duales de las de la transformación paso-banda.

# TRANSFORMACIONES

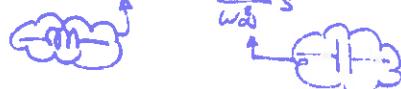
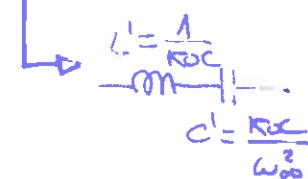
## PRIMERA FORMA CANÓNICA

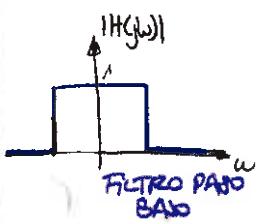
$$Z = \hat{s}L = K_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} L = \frac{K_0 s L}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_0 s L} + \frac{\omega_0^2}{K_0 s L}} = \frac{1}{\frac{1}{K_0 L} s + \frac{1}{\frac{K_0 L}{\omega_0^2} s}}$$



## SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Z = \frac{1}{\hat{s}C} \rightarrow Y = \hat{s}C = \frac{K_0 C}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_0 C} + \frac{\omega_0^2}{K_0 C}} = \frac{1}{\frac{1}{K_0 C} s + \frac{1}{\frac{K_0 C}{\omega_0^2} s}}$$

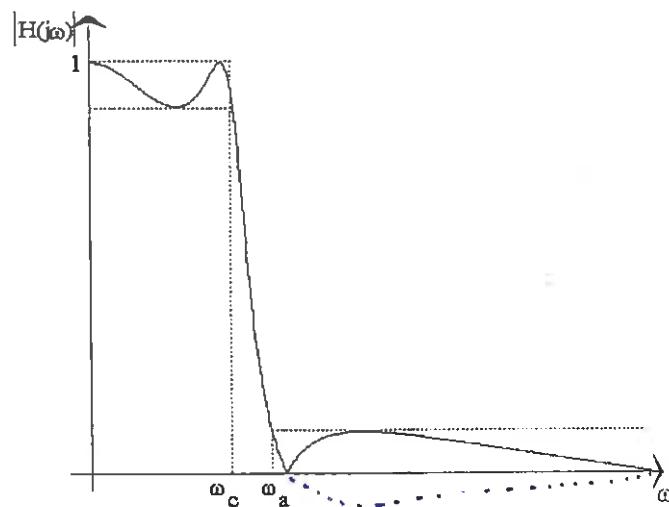




### 3.4 Diseño de filtros

A continuación vamos a examinar los distintos tipos de aproximación al filtro paso-bajo ideal. Ya hemos visto que, a partir de un filtro paso bajo podemos obtener otro tipo de filtros aplicando transformación de frecuencias.

Consideremos la característica paso bajo ideal de la figura siguiente y tratemos de obtener  $|H(jw)|$  que se ajuste lo mejor posible al rectángulo.



De acuerdo con la figura anterior, podemos escribir (por conveniencia):

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot F_n^2\left(\frac{w}{w_c}\right)}$$

donde  $\varepsilon$  es el parámetro de rizado en la banda de paso y  $F_n(x)$  una función racional (o polinómica) de orden  $n$  que debe cumplir:

$$0 \leq F_n(x) \leq 1 , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$F_n^2(x) \gg 1 , \quad x > 1$$

Además definimos:

$w_c$  = pulsación de corte de la banda de paso, que cumple

$$-20 \log|H(w)| \leq \alpha_c \text{ (dB)} , \quad 0 \leq w \leq w_c$$

donde  $\alpha_c$  es la atenuación máxima en la banda de paso.

$w_a$  = pulsación de corte en la banda atenuada, que cumple

$$-20 \log|H(w)| \geq \alpha_a \text{ (dB)} , \quad w \geq w_a$$

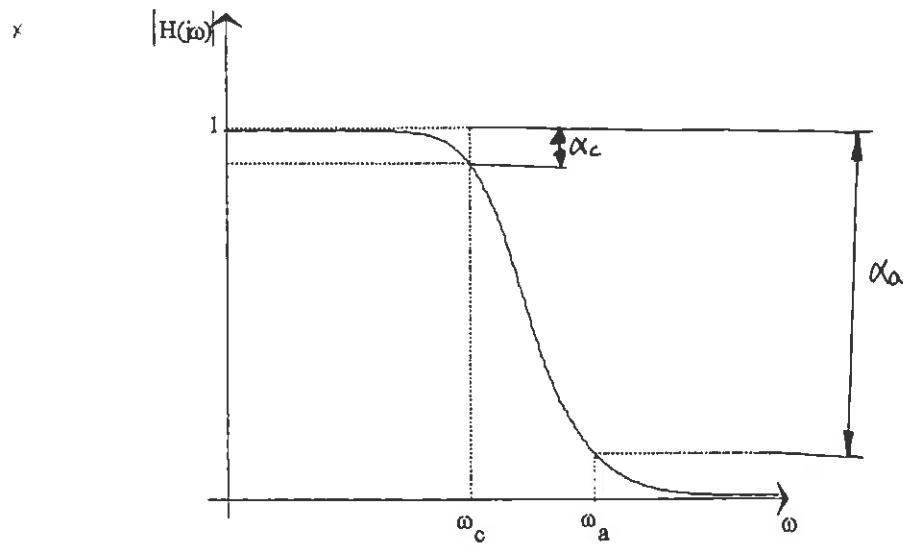
donde  $\alpha_a$  es la atenuación mínima en la banda atenuada

Según sea  $F_n(x)$  tenemos tres tipos de filtros:

- Butterworth
- Chebychev
- Cauer

### 3.4.1 Características de Butterworth

Si  $F_n(x) = x^n$  (monomio de orden  $n$ ), la aproximación al rectángulo del filtro ideal se muestra en la siguiente figura:



Por consiguiente la expresión general para los filtros paso-bajo de Butterworth queda como sigue:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Normalmente los datos son  $\omega_c$ ,  $\omega_a$ ,  $\alpha_c$  y  $\alpha_a$  que están relacionados mediante las siguientes expresiones:

$$10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2) = \alpha_c$$

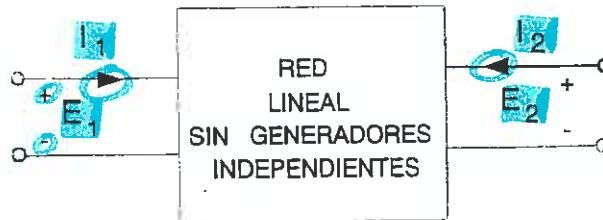
$$10 \cdot \log \left( 1 + \varepsilon^2 \cdot \left( \frac{\omega_a}{\omega_c} \right)^{2n} \right) = \alpha_a$$

Resolviendo el anterior sistema obtenemos los valores del factor de rizado  $\varepsilon$  y el orden del filtro  $n$ .

## TEMA 4: CUADRIPOLOS

### 4.1 Introducción

Se denomina cuadripolo a una red (circuito) de dos puertas, lineal y sin generadores independientes cuyo dibujo esquemático se muestra a continuación:



Importante: El convenio de signos es el de la figura, es decir, las variables circuitales de las puertas son positivas como se definen en la figura.

De bornas hacia fuera se puede trabajar sin conocer la estructura interior, mediante dos ecuaciones (una por puerta).

Todo el desarrollo de este tema se hará en régimen permanente sinusoidal RPS (dominio de fasores) pero se puede generalizar al régimen transitorio mediante la transformada de Laplace.

Se estudiarán cinco familias de parámetros que definen el cuadripolo, resultantes de ordenar de distintas maneras las ecuaciones que relacionan las variables circuitales en las puertas del cuadripolo. Serán por tanto equivalentes y relacionadas entre sí.

Las cinco familias son las siguientes:

Parámetros [Z]

Parámetros [Y]

Parámetros [h]

Parámetros [g]

Parámetros [F]

## 4.2 Parámetros impedancia [Z]

Estos parámetros son los más intuitivos (dimensiones de impedancia). Sus ecuaciones son las siguientes:

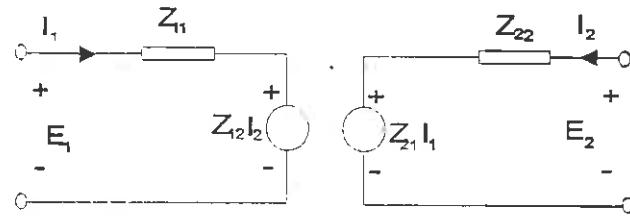
$$\begin{aligned} E_1 &= Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ E_2 &= Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad [E] = [Z][I]$$

y los parámetros se calculan de la siguiente forma:

$$Z_{11} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{21} = \left. \frac{E_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \left. \frac{E_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad Z_{12} = \left. \frac{E_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

En el caso de las redes RLC sin generadores dependientes se cumple que  $Z_{12} = Z_{21}$ .

El circuito equivalente es:



### 4.3 Parámetros admitancia [Y]

Estos parámetros también son bastante intuitivos (dimensiones de admitancia). Sus ecuaciones son las siguientes:

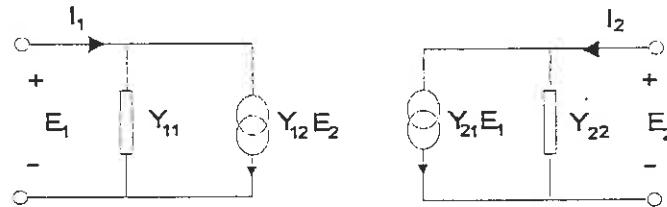
$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \cdot E_1 + Y_{12} \cdot E_2 & \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} & [I] = [Y][E] \end{aligned}$$

y los parámetros se calculan de la siguiente forma:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0} \quad Y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0} \quad Y_{22} = \frac{I_2}{E_2} \Big|_{E_1=0} \quad Y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Big|_{E_1=0}$$

En el caso de las redes RLC sin generadores dependientes se cumple que  $Y_{12} = Y_{21}$ .

El circuito equivalente es:



Obsérvese la dualidad de las ecuaciones de  $[Z]$  y  $[Y]$ :

$$[Z] = [Y]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{22}}{|Y|} & \frac{-Y_{12}}{|Y|} \\ \frac{-Y_{21}}{|Y|} & \frac{Y_{11}}{|Y|} \end{pmatrix} \quad \text{donde } |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$

$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{|Z|} & \frac{-Z_{12}}{|Z|} \\ \frac{-Z_{21}}{|Z|} & \frac{Z_{11}}{|Z|} \end{pmatrix} \quad \text{donde } |Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

#### 4.4 Parámetros híbridos [h]

Los parámetros híbridos [h] son muy utilizados en los circuitos equivalentes de transistores (dispositivos de estado sólido). Sus ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} E_1 &= h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot E_2 & \begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \\ I_2 &= h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot E_2 & \begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= [h] \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y los parámetros se calculan de la siguiente forma:

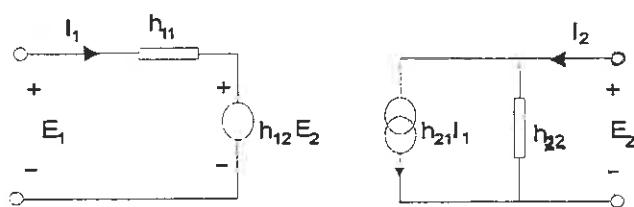
$$h_{11} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{E_2=0} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$$

$$h_{12} = \left. \frac{E_1}{E_2} \right|_{I_1=0} = \left( \frac{E_1}{I_2}, \frac{I_2}{E_2} \right)_{I_1=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{E_2=0} = \left( \frac{I_2}{E_1}, \frac{E_1}{I_1} \right)_{E_2=0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{E_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{|Y|}{Y_{11}}$$

El circuito equivalente es:



## 4.5 Parámetros híbridos [g]

Los parámetros [g] suelen utilizarse para modelar dispositivos de vacío (por ejemplo triodos). Sus ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} \cdot E_1 + g_{12} \cdot I_2 & \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ E_2 &= g_{21} \cdot E_1 + g_{22} \cdot I_2 & \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix} &= [g] \begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y los parámetros se calculan de la siguiente forma:

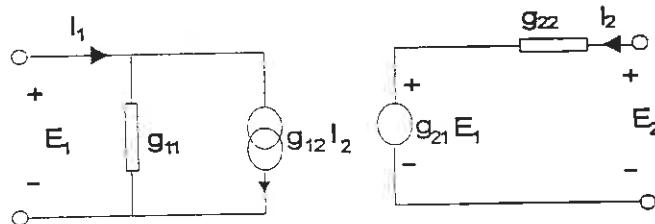
$$g_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_{11}} = \frac{|Y|}{Y_{22}}$$

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{E_1=0} = \left( \frac{I_1}{E_2} \cdot \frac{E_2}{I_2} \right)_{E_1=0} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{E_2}{I_2} \Big|_{I_2=0} = \left( \frac{E_2}{I_1} \cdot \frac{I_1}{E_1} \right)_{I_2=0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

$$g_{22} = \frac{E_2}{I_2} \Big|_{E_1=0} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{|Z|}{Z_{11}}$$

El circuito equivalente es:



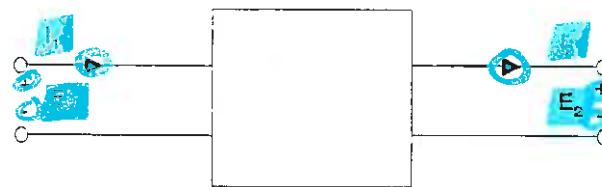
Obsérvese la dualidad de las ecuaciones de [h] y [g]. De hecho se cumple que:

$$[g] = [h]^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{array} \right)^{-1} = \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}} \left( \begin{array}{cc} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{array} \right)$$

## 4.6 Parámetros [F]

Para este último caso vamos a considerar el cuadripolo de la figura siguiente donde debe observarse que la corriente  $I_2$  ahora sale del cuadripolo (por definición):



Los parámetros [F] son usados en diseños de transmisión, de ahí la particularidad del cambiar el sentido de  $I_2$ .

Se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= A \cdot E_2 + B \cdot I_2 & \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ I_1 &= C \cdot E_2 + D \cdot I_2 & \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= [F] \begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y los parámetros se calculan de la siguiente forma:

$$A = \left. \frac{E_1}{E_2} \right|_{I_2=0} = \left( \frac{E_1}{I_1}, \frac{I_1}{E_2} \right)_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$$

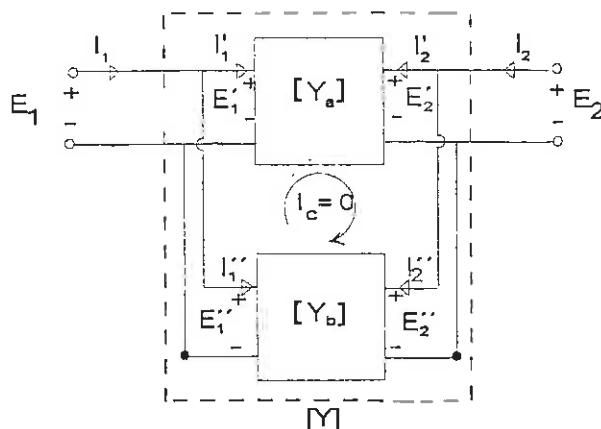
$$B = \left. \frac{E_1}{I_2} \right|_{E_2=0} = -\frac{1}{Y_{21}} = \frac{|Z|}{Z_{21}}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{E_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_{21}} = -\frac{|Y|}{Y_{21}}$$

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{E_2=0} = \left( \frac{I_1}{E_1}, \frac{E_1}{I_2} \right)_{E_2=0} = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}}$$

## 4.7 Asociación de cuadripolos en paralelo

Consideramos la estructura de la figura siguiente, consistente en la conexión en paralelo de las “puertas 1” y de las “puertas 2” de los cuadripolos A y B. Se supone que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ , es decir, que la corriente del lazo formado por ambos cuadripolos es nula.



Se cumple que la matriz admitancia de la conexión en paralelo (cuando no exista corriente circulatoria  $I_C = 0$ ) es la suma de las matrices admitancias de cada cuadripolo:

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b]$$

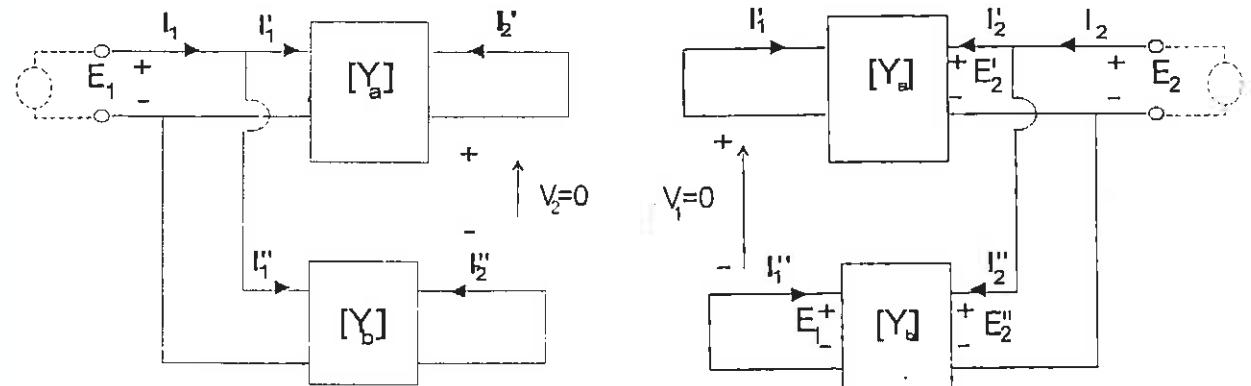
### Condiciones de Brune

Antes de aplicar la ecuación anterior, debemos cuestionarnos si después de la interconexión se siguen manteniendo las corrientes .....

Para comprobar que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$  se recurre al **test de Brune** que consiste en las dos pruebas siguientes.

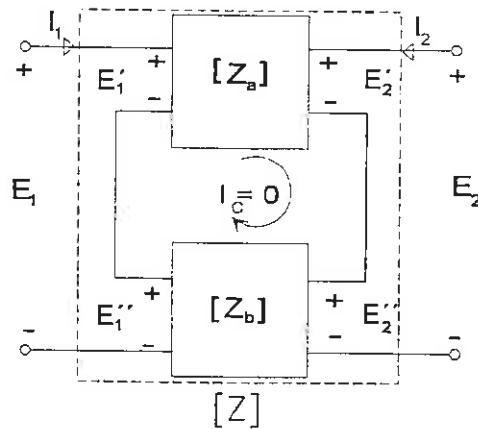
- a) Se conectan en paralelo las “puertas 1” y se excitan mediante un generador (tensión o corriente). Se cortocircuita individualmente las “puertas 2”, y observamos si la tensión entre ambas puertas cortocircuitadas es cero:  $V_2 = 0$ .
- b) Se realiza una operación similar a la indicada en a), pero cambiando los papeles de las “puertas 1” con los de las “puertas 2” y se comprueba si  $V_1 = 0$ .

Si  $V_2 = 0$  y  $V_1 = 0$  entonces se verifican las pruebas de Brune y la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ ; por lo que se puede asegurar  $[Y] = [Y_a] + [Y_b]$ .



## 4.8 Asociación de cuadripolos en serie

Consideramos ahora la asociación serie de dos cuadripolos, como se indica en la figura siguiente.



Suponemos que se cumple que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ .

Entonces se verifica que la matriz impedancia del conjunto es la suma de las matrices impedancias de cada cuadripolo, es decir

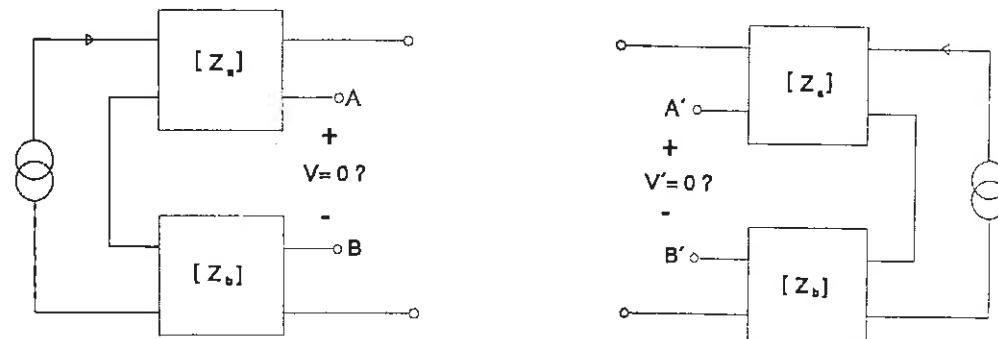
$$[Z] = [Z_a] + [Z_b]$$

### Condiciones de Brune

Para comprobar que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$  se realizan las siguientes pruebas.

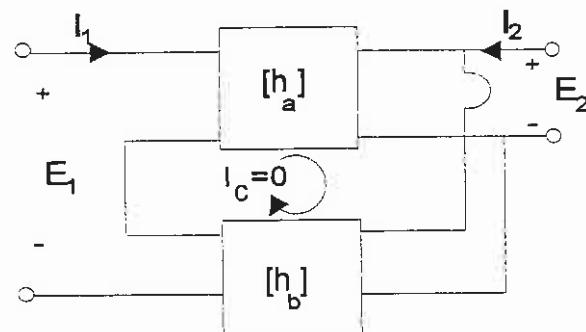
- a) Las "puertas 2" se dejan en circuito abierto y las "puertas 1" se interconectan en serie. Si la tensión entre A y B es cero  $V = 0$ , entonces ha superado la primera prueba.
- b) Se realiza una operación similar a la indicada en a), pero cambiando los papeles de las "puertas 1" con los de las "puertas 2". Si la tensión entre A' y B' es cero  $V' = 0$ , se ha superado la segunda prueba.

Si  $V = 0$  y  $V' = 0$  entonces se verifican las pruebas de Brune y la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ ; por lo que se puede asegurar  $[Z] = [Z_a] + [Z_b]$ .



## 4.9 Asociación serie-paralelo

En la asociación serie-paralelo de dos cuadripolos las puertas 1 se conectan en serie y las puertas 2 se conectan en paralelo, como se indica en la figura siguiente.



Suponemos que se cumple que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ .

Entonces se verifica que la matriz  $[h]$  del conjunto es la suma de las matrices  $[h]$  de cada cuadripolo, es decir

$$[h] = [h_a] + [h_b]$$

### Condiciones de Brune

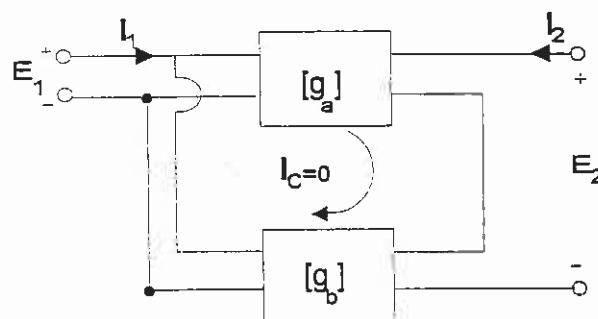
Para comprobar que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$  se realizan las siguientes pruebas.

- Coincide con la prueba a) de la conexión en paralelo-paralelo (página T4-7) con la salvedad de que la conexión de la interconexión de las "puertas 1" es en serie.
- Coincide con la prueba b) de la conexión en serie-serie (página T4-8) con la salvedad de que la conexión de la interconexión de las "puertas 2" es en paralelo.

Si se verifican las pruebas de Brune entonces la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ ; por lo que se puede asegurar  $[h] = [h_a] + [h_b]$ .

## 4.10 Asociación serie-paralelo

Consideramos ahora la asociación serie de dos cuadripolos, como se indica en la figura siguiente.



Suponemos que se cumple que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ .

Entonces se verifica que la matriz  $[g]$  del conjunto es la suma de las matrices  $[g]$  de cada cuadripolo, es decir

$$[g] = [g_a] + [g_b]$$

### Condiciones de Brune

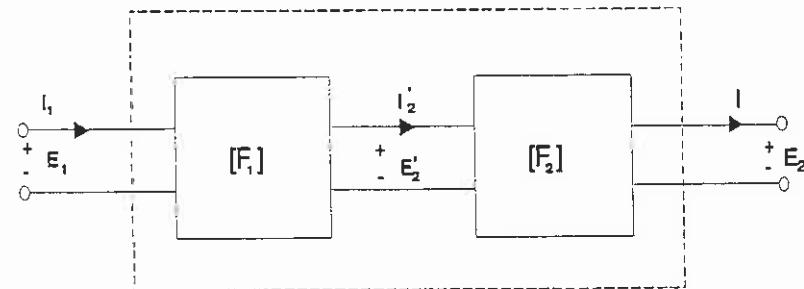
Para comprobar que la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$  se realizan las siguientes pruebas.

- Coincide con la prueba a) de la conexión en serie-serie (página T4-8) con la salvedad de que la conexión de la interconexión de las “puertas 1” es en paralelo.
- Coincide con la prueba b) de la conexión en paralelo-paralelo (página T4-7) con la salvedad de que la conexión de la interconexión de las “puertas 2” es en serie.

Si se verifican las pruebas de Brune entonces la corriente circulatoria es nula  $I_C = 0$ ; por lo que se puede asegurar  $[g] = [g_a] + [g_b]$ .

#### 4.11 Asociación de cuadripolos en cascada

Consideremos la disposición en cascada de dos cuadripolos, como se indica en la siguiente figura:

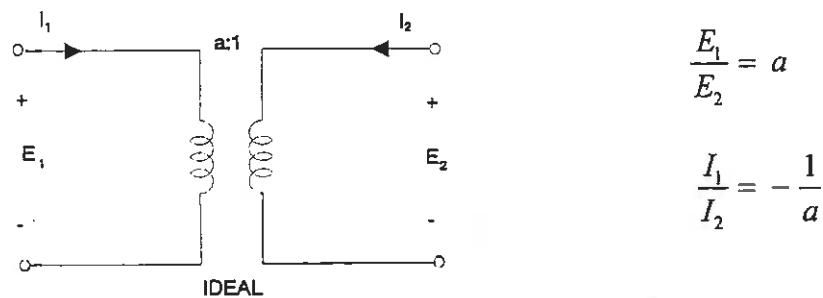


Supongamos cada cuadripolo viene definido por su matriz  $[F_i]$ ,  $i = 1, 2$ . Es inmediato demostrar que la matriz  $[F]$  del conjunto, se obtiene como producto de las matrices  $[F]$  de los cuadripolos:

$$[F] = [F_1][F_2]$$

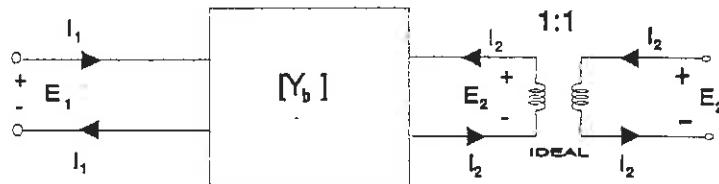
## 4.12 Transformadores

Un transformador ideal se puede considerar un cuadripolo, puesto que es un dispositivo de dos puertas. Tomando como referencia la siguiente figura se verifica.



### Observaciones

- La forma más común de evitar las corrientes circulatorias cuando asociamos cuadripolos es mediante el uso de un transformador. Si a uno de los cuadripolos le conectamos un transformador ideal de relación 1:1, tal como indica la figura, la matriz global seguirá siendo la misma pero la corriente circulatoria de la nueva estructura será siempre cero.



- Existen cuadripolos que no admiten todas las representaciones matriciales. Esta es una de las razones por las que se definen tantas familias de parámetros. Por ejemplo el transformación ideal que acabamos de estudiar no puede definirse mediante la matriz de impedancias ni mediante la de admitancias, porque ambas son infinito. Sin embargo, sí admite representación con la matriz  $[h]$  puesto que:

$$I_2 = -a I_1 + 0 E_2$$

$$E_1 = 0 I_1 + a E_2$$

Por consiguiente, la matriz de un transformador ideal es

$$[h] = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

# **ADCT**

# **Ejercicios de clase**

# **ADCT**

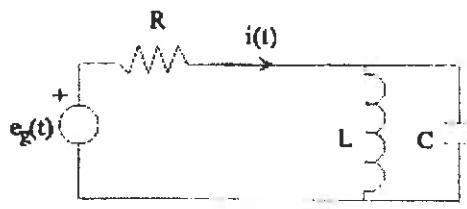
# **Problemas de**

# **examen**

Ejercicio 1

Considérese el circuito de la Figura 1 con los datos indicados en la misma

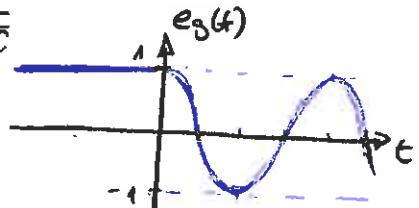
Datos:



$$e_g(t) = \begin{cases} 1 & -\infty < t < 0 \\ \cos(\omega_0 t) & 0 < t < \infty \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

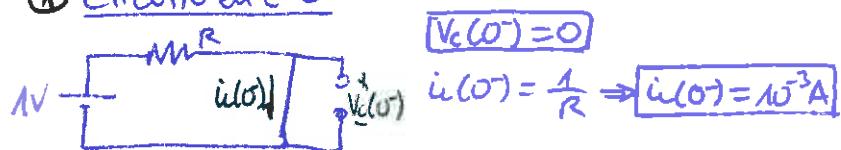
$$L = 1 \text{ mH}, \quad C = 10 \mu\text{F}, \quad R = 1 \text{ K}\Omega$$



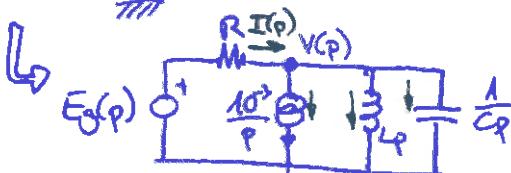
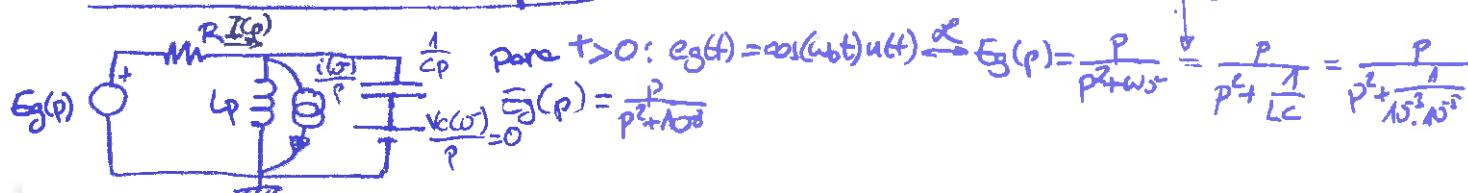
Se pide:

- 1º.- Dibujar el circuito en el dominio de Laplace incorporando las condiciones iniciales como generadores.
- 2º.- Determinar la transformada de Laplace de la corriente sobre la resistencia R, es decir,  $I(p) = \mathcal{L}[i(t)]$ .
- 3º.- Calcular la transformada inversa de  $I(p)$ , es decir,  $i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(p)]$ ,  $t > 0$ . Determinar la respuesta en régimen permanente.

① Circuito en  $t=0^-$



Circuito en el dominio de Laplace



$$\text{Nodo: } \frac{E_g(p) - V(p)}{R} = \frac{10^3}{P} + \frac{V(p)}{Lp} + \frac{V(p)}{1/Cp} \rightarrow V(p) = \frac{\frac{E_g(p)}{R} - \frac{10^3}{P}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp}$$

$$\text{Ahora: } I(p) = \frac{E_g(p) - V(p)}{R} = \frac{E_g(p)}{R} - \frac{1}{R}$$

$$I(p) = \frac{\frac{P}{p^2 + 10^6} \left( \frac{1}{10^3 p} + 10^3 p \right) + \frac{10^3}{P}}{10^3 \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^3 p} + 10^3 p \right)}$$

$$I(p) = \frac{\frac{1}{p^2 + 10^6} (10^3 + 10^6 p^2) + \frac{10^3}{P}}{10^3 (10^3 + \frac{10^3}{P} + 10^3 p)}$$

$$I(p) = \frac{\frac{P}{p^2 + 10^6} (10^3 + 10^6 p^2) + 10^3}{10^3 (10^3 p + 10^3 + 10^6 p^2)}$$

Multiplicar y dividir por  $p$

$$I(p) = \frac{p(10^3 + 10^{-5}p^2) + 10^{-3}(p^2 + 10^8)}{(p^2 + 10^8)(10^{-3}p + 10^3 + 10^{-5}p^2) \cdot 10^3} = \frac{p(10^3 + p^2) + 10^{-3}(p^2 + 10^8) \cdot 10^5}{(p^2 + 10^8)(10^2p + 10^8 + p^2) \cdot 10^3} = \frac{p + 10^2}{10^3p^2 + 10^5p + 10^{11}}$$

↑ Multiplicando y dividendo por  $10^{-3}$

$$I(p) = \frac{p + 10^2}{10^3p^2 + 10^5p + 10^{11}} = \frac{10^{-3}p + 0'1}{p^2 + 10^2p + 10^8}$$

③

$$\text{Raíces de } I(p): p^2 + 10^2p + 10^8 = 0 \Rightarrow p = \frac{-10^2 \pm \sqrt{10^4 - 4 \cdot 10^8}}{2} = -50 \pm 10^4j \quad | P_1 = -50 + 10000j \\ | P_2 = -50 - 10000j$$

Transformada inversa por residuos:

$$K_1(t) = \lim_{p \rightarrow p_1} (F - p_1) \cdot \frac{10^{-3}p + 0'1}{(p - p_1)(p + p_2)} \cdot e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{10^{-3}p + 0'1}{p + p_2} e^{pt} = \frac{10^{-3}p_1 + 0'1}{p_1 - p_2} e^{p_1 t}$$

$\underbrace{-50s}_{p^2 + 10^2p + 10^8}$

$$K_1(t) = \frac{10^{-3}(-50 + 10^4j) + 0'1}{(-50 + 10^4j) - (-50 - 10^4j)} e^{(-50 + 10^4j)t} = \frac{\underbrace{0'05}_{50 \cdot 10^{-3} + 10^4j}}{2 \cdot 10^4j} \cdot e^{-50t} e^{10^4tj} = (25 \cdot 10^{-7} + 5 \cdot 10^{-4})j e^{j(10^4t + 5 \cdot 10^{-3})}$$

$$K_1(t) = (5 \cdot 10^{-4} - j \cdot 25 \cdot 10^{-7}) e^{-50t} e^{10^4tj} = 5 \cdot 10^{-4} e^{-50t} \cdot e^{-10^4tj} \cdot e^{j5 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4} e^{-50t} e^{j(\omega^4 t + \gamma \cdot 10^{-3})}$$

$$K_1(t) = 5 \cdot 10^{-4} e^{-50t} (\cos(\omega^4 t + 5 \cdot 10^{-3}) + j \sin(\omega^4 t + 5 \cdot 10^{-3}))$$

$$K_2(t) = K_1(t)^*$$

$$\text{Finalmente: } i(t) = [k_1(t) + k_2(t)^*] u(t) = [k_1(t) + K_1(t)^*] u(t) = 2 \operatorname{Re}(K_1(t)) u(t).$$

$$i(t) = 10^{-3} \cdot e^{-50t} \cos(\omega^4 t + 5 \cdot 10^{-3}) u(t)$$

$$\text{Régimen permanente: } i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10^{-3} e^{-50t} \cos(\omega^4 t + 5 \cdot 10^{-3}) u(t) \xrightarrow{e^{-50t} \rightarrow 0} 0.$$

$$i(t) \rightarrow 0!$$

Ejercicio 4

Considérense las tres funciones racionales siguientes:

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 3}, \quad F_2(s) = \frac{s^2 + 2}{s^4 + 4s^2 + 3}, \quad F_3(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + 3},$$

- 1) Razonar cuáles de las  $F_i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  son funciones reales positivas impares.
- 2) Realizar las  $F_i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  que procedan en las cuatro formas canónicas (Foster, Cauer) suponiendo que  $F_i(s)$  se considera admitancia.

$$\textcircled{1} \quad F_1(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 3} = \frac{s(s^2 + 2)}{s^2 + 3}$$

$$\text{Ceros: } s(s^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s^2 + 2 = 0 \rightarrow s^2 = -2 \rightarrow s = \pm\sqrt{-2} = \pm j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Polos: } s^2 + 3 = 0 \rightarrow s^2 = -3 \rightarrow s = \pm\sqrt{-3} = \pm j\sqrt{3}$$

Carácter del infinito:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 3} = \infty, \text{ es decir, } F_1(\infty) \rightarrow \infty; s = \pm\infty \text{ es un polo de } F_1(s)$$

$F_1(s)$  no es real positiva impar porque no alterna polos y ceros en el eje jw

$$\textcircled{2} \quad F_2(s) = \frac{s^2 + 2}{s^4 + 4s^2 + 3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grado(numerador) = 2} \\ \text{grado(denominador) = 4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{diferencia de grados} > 1.$$

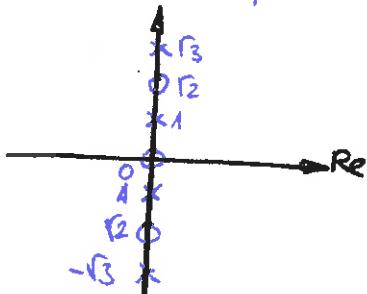
Además,  $F_2(s)$  no es impar, de hecho  $F_2(s)$  es par.

$$\textcircled{3} \quad F_3(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + 3} = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} \quad s^4 + 4s^2 + 3 = 0 \rightarrow s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \rightarrow s^2 = -1 \rightarrow s^2 + 1 = 0 \\ x = 3 \rightarrow s^2 = -3 \rightarrow s^2 + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} s = j \\ s = -j \\ s = j\sqrt{3} \\ s = -j\sqrt{3} \end{array}$$

$$\text{Polos: } (s^2 + 1)(s^2 + 3) = 0 \rightarrow s^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm j \\ \rightarrow s^2 + 3 = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{3}$$

$$\text{Ceros: } s(s^2 + 2) = 0 \rightarrow s = 0 \\ \rightarrow s^2 + 2 = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

$F_3(s)$  es real positiva impar



\textcircled{2} PRIMERA FORMA CANÓNICA

$$F_3(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + 3} \Rightarrow Y(s) = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} \Rightarrow Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)}$$

(Si grado(numerador) es un grado mayor que grado(denominador)  $\Rightarrow$  ponemos s<sup>0</sup> s<sup>0</sup>)

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{2K_1s}{s^2 + 2} + sK_2 \quad (\text{Si grado(numerador) = grado(denominador) } \Rightarrow \text{no se pone s}^0 \text{ s}^0)$$

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} = \frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)} = \frac{3}{2}$$

$$2K_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \frac{s^2 + 2}{s} Z(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \frac{s^2 + 2}{s} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s^2} = \frac{(-2+1)(-2+3)}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

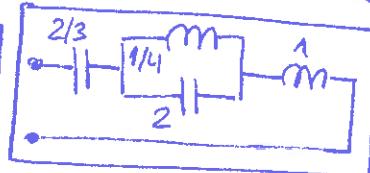
$$K_{00} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Z(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4 + \dots}{s^4 + \dots} = 1$$

$$Z(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{2K_1 s}{s^2+2} + s K_{00} = \frac{3}{2s} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+2} + s \cdot 1$$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{1}{\frac{s^2+2}{\frac{1}{2}s}} + s = \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{1}{\frac{s^2}{\frac{1}{2}s} + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} + s$$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{1}{\frac{s}{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{4}s} + s \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{4}s}} + s$$



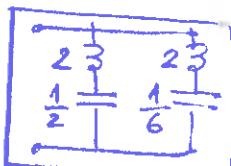
### SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Y(s) = \frac{s(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{2K_1 s}{s^2+1} + \frac{2K_2 s}{s^2+3}$$

$$\begin{cases} 2K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2+1}{s} Y(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2+1}{s} \frac{3(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2} \\ 2K_2 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2+3}{s} Y(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2+3}{s} \frac{3(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+3} = \frac{1}{\frac{s^2}{\frac{1}{2}s} + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} + \frac{1}{\frac{s^2}{\frac{1}{2}s} + \frac{3}{\frac{1}{2}s}} = \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{6}s}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{6}s}}$$



### TERCERA FORMA CANÓNICA

$$Y(s) = \frac{s(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)} \Rightarrow Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$$

$$Z(s) = K_{00}s + \frac{1}{K_{00}s + \frac{1}{K_{00}s + \frac{1}{K_{00}s + \frac{1}{K_{00}s}}}}$$

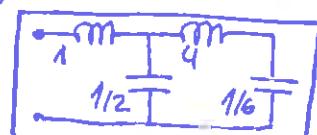
$$Z(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{4s + \frac{1}{\frac{1}{6}s}}}$$

$$\frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s} \mid \frac{s^3+2s}{s^3+2s}$$

$$K_{00} s$$

$$\frac{s^3+2s}{s^3-3s} \mid \frac{2s^2+3}{2s^2+3}$$

$$\frac{1}{2}s \mid \frac{3}{\frac{1}{6}s} K_{00}s$$

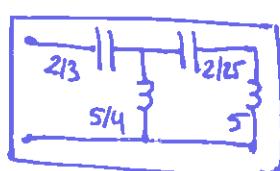


### CUARTA FORMA CANÓNICA

$$Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s} = \frac{\frac{s^4+4s^2+3}{s^4}}{\frac{s^3+2s}{s^4}} = \frac{1+4\frac{1}{s^2}+3\frac{1}{s^4}}{\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^3}} \xrightarrow{x=\frac{1}{s}} \frac{1+4x^2+3x^4}{x+2x^3}$$

$$Z(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{1}{s + \frac{K_0}{s} + \frac{1}{s + \frac{K_0}{s} + \frac{1}{s}}}$$

$$Z(s) = \frac{3}{2s} + \frac{1}{\frac{5}{2}s + \frac{1}{\frac{25}{2}s + \frac{1}{\frac{1}{5}s}}}$$



$$Z(s) = \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{1}{\frac{1}{5}s} + \frac{1}{\frac{1}{2}s} + \frac{1}{\frac{1}{5}s}$$

$$\frac{3x^4+4x^2+1}{-3x^4-\frac{3x^2}{2}} \mid \frac{2x^3+x}{2x^3+\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{5}{2}x^2+1 \rightarrow 2x^3+x \mid \frac{5}{2}x^2+1$$

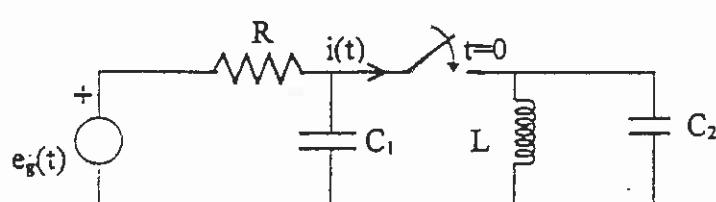
$$\frac{5}{2}x^2+1 \mid \frac{1}{5}x \quad \frac{1}{5}x K_{00}x = \frac{K_0}{s}$$

$$\frac{5}{2}x^2+1 \mid \frac{25}{2}x \quad \frac{25}{2}x K_{00}x = \frac{K_0}{s}$$

$$\frac{1}{5}x \rightarrow -\frac{1}{5}x \quad \frac{1}{5}x K_{00}x = \frac{K_0}{s}$$

**Ejercicio 2**

Considérese el circuito de la figura, con los datos indicados en la misma y donde el interruptor se cierra en  $t = 0$ . (se supone que la inductancia y la capacidad de la derecha tienen condiciones iniciales nulas).



$$e_g(t) = \begin{cases} 1 & , -\infty < t < 0 \\ 2 & , 0 < t < \infty \end{cases}$$

$$L = 1 \text{ mH}$$

$$C_1 = C_2 = 5 \mu\text{F}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

Se pide:

- Dibujar el circuito en el dominio de Laplace incorporando las condiciones iniciales como generadores.
- Determinar la transformada de Laplace de la corriente a través del interruptor, es decir,  $I(p) = \mathcal{L}[i(t)]$ .
- Calcular la transformada inversa de  $I(p)$ , esto es,  $i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(p)]$ ,  $t \geq 0$ . Determinar la respuesta en régimen permanente.

## SEPTIEMBRE 1996

### Ejercicio 4

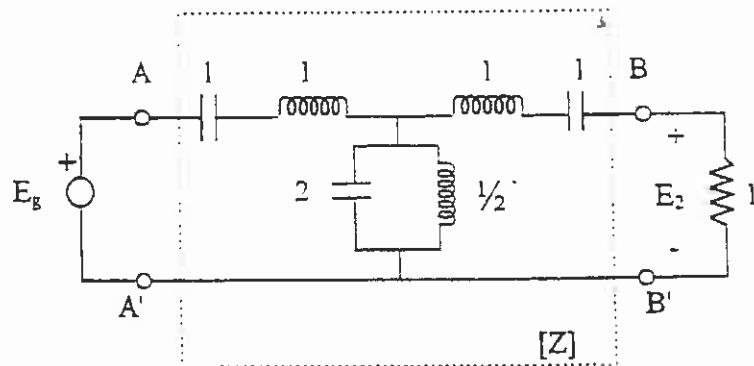
Considérese la función racional siguiente:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + a}$$

- a) Determinar el intervalo de valores del parámetro  $a$  para que  $F(s)$  sea función real positiva impar.
- b) Realizar  $F(s)$  para  $a=0$  en las cuatro formas canónicas (Foster, Cauer), suponiendo que  $F(s)$  se considera impedancia.

**Ejercicio 1**

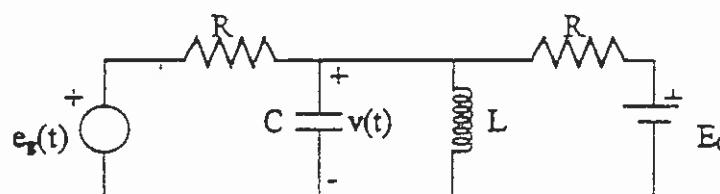
Dada la estructura de la figura en régimen permanente senoidal con los valores normalizados de los elementos indicados en la misma.



- Determinar los parámetros de impedancia (matriz  $[Z]$ ) del cuadripolo comprendido entre  $AA'$  y  $BB'$ .
- Calcular la relación fasorial  $E_2 / E_g$ , correspondiente al circuito de la figura.
- La estructura de la figura es un filtro paso banda. Dibujar aproximadamente la respuesta de amplitud, esto es,  $|E_2 / E_g|$  en función de la pulsación  $\omega$ , comprobando que  $|E_2 / E_g| = 1$  para  $\omega = 1$ , y que  $|E_2 / E_g| = 0$  para  $\omega = 0$  para  $\omega = \infty$ .

**Ejercicio 2**

Considérese el circuito de la figura, con los datos indicados en la misma.



Datos:

$$e_g(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ e^{-10^3 t} & 0 < t < \infty \end{cases}$$

$L = 1 \text{ mH}$   
 $C_1 = 10 \mu\text{F}$   
 $R = 2 \text{ K}\Omega$

$$E_0 = 2 \text{ V}$$

Se pide:

- 1) Dibujar el circuito en el dominio de Laplace incorporando las condiciones iniciales como generadores.
- 2) Determinar la transformada de Laplace de la tensión en bornas de la capacidad, es decir,  $V(p) = L[v(t)]$ .
- 3) Calcular la transformada inversa de  $V(p)$ , es decir,  $v(t) = L^{-1}[V(p)]$ ,  $t \geq 0$ .

Ejercicio 4

Considérese la función racional siguiente:

$$F(s) = \frac{s^3 + bs}{s^4 + 4s^2 + a}$$

a) Determinar los intervalos de valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que  $F(s)$  sea función real positiva impar.

b) Realizar  $F(s)$  para  $a=0$ ,  $b=1$  en las cuatro formas canónicas (Foster, Cauer), suponiendo que  $F(s)$  se considera admitancia.

⑥  $F(s) = \frac{s^3 + bs}{s^4 + 4s^2 + a} \stackrel{b \geq 0}{=} \frac{s^3 + s}{s^4 + 4s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^3 + s}{s^4 + 4s^2} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}$

PRIMERA FORMA CANÓNICA

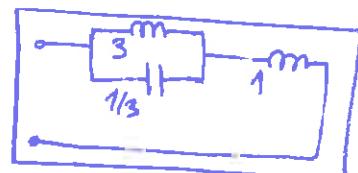
$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} \Rightarrow Z(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^2 + 1} = \frac{2s^2s + s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

grado(numerador) > grado(denominador)  
↓  
ponemos 1/s^2s

$$2k_1 = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 + 1}{s} Z(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 + 1}{s} \frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow -\infty} (s^2 + 4) = -1 + 4 = 3$$

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Z(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1} = 1$$

$$Z(s) = \frac{-3s}{s^2 + 1} + s = \frac{1}{s^2 + 1} + s \Rightarrow Z(s) = \frac{1}{\frac{3s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}} + s$$

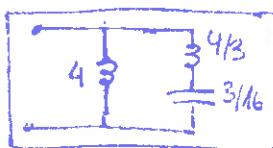
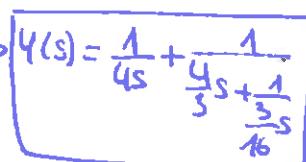


SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1 s}{s^2 + 4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \\ 2k_1 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{s^2 + 4}{s} Y(s) = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{s^2 + 4}{s} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{s^2 + 1}{s^2} = \frac{-4 + 1}{-4} = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$Y(s) = \frac{1/4}{s} + \frac{\frac{3}{4}s}{s^2 + 4} = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{4s} + \frac{1}{\frac{3}{4}s + \frac{1}{\frac{3}{4}s}} = \frac{1}{4s} + \frac{1}{\frac{3}{4}s + \frac{1}{\frac{3}{16}s}} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{\frac{3}{16}s}}$$

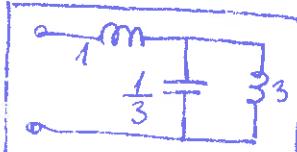


TERCERA FORMA CANÓNICA

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} \Rightarrow Z(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^4 + 4s^2}$$

$$\frac{s^3 + 4s}{s^3 - 3} \cdot \frac{1}{s^2s} \Rightarrow \frac{s^2 + 1}{s^2 - 3} \cdot \frac{1}{s^2s} \Rightarrow \frac{3s + 1}{3s - 9} \cdot \frac{1}{s^2s}$$

$$Z(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3s}}$$



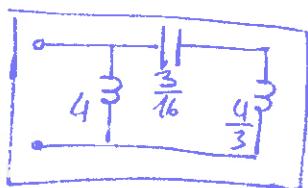
### CUARTA FORMA CANÓNICA

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 4s} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 + 4\frac{1}{s^2}} \xrightarrow[s=x]{} Y(s) = \frac{x + x^3}{1 + 4x^2}$$

$$\frac{x^3 + x}{1 + 4x^2} \xrightarrow{x=0} K_0 x = \frac{K_0}{3}$$

$$\frac{-x^3 - 4x}{1 + 4x^2} \xrightarrow{x=0} K_0 x = \frac{16}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{3s} + \frac{1}{3s^2}$$



$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{3s} + \frac{1}{16s} + \frac{1}{3s^2}$$

Finalmente  
 $Z(s) = \frac{1}{Y(s)}$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{4s} + \frac{1}{3s} + \frac{1}{16s} + \frac{1}{3s^2}}$$

**Ejercicio 4**

El circuito de la figura 1 es un filtro paso-bajo de Butterworth de tercer orden con función de transferencia  $H_B(\hat{s}) = E_2 / E_{20}$ , siendo  $2E_{20} = E_g$ , y la respuesta en amplitud:  $|H_B(j\hat{\omega})| = (1 + \hat{\omega}^6)^{-1/2}$ .

Si aplicamos la transformación de frecuencias  $\hat{s} = s(s^2 + 9)/(s^2 + 4)$ , el filtro de la figura 1 se transforma en el filtro correspondiente al de la figura 2, donde:

$$Z_L(s) = 2s(s^2 + 9)/(s^2 + 4), \quad Y_C(s) = s(s^2 + 9)/(s^2 + 4)$$

son la impedancia y la admitancia de los correspondientes dipolos. Se pide:

a) Realizar todos los dipolos de la figura 2 en la segunda forma canónica, esto es, considerando el desarrollo de Foster para las admitancias.

b) Determinar los valores de  $|H(j\omega)| = |V_2/V_{20}|$  para  $\omega = 0, \omega = 2, \omega = 3$  y  $\omega = \infty$ , a partir de

$|H_B(j\hat{\omega})|$  del filtro paso bajo y de la transformación de frecuencias. Dibujar aproximadamente la respuesta en amplitud  $|H(j\omega)|$  del filtro transformado.

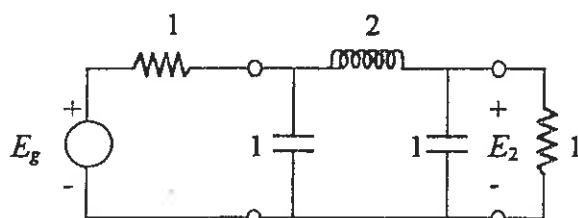


figura 1

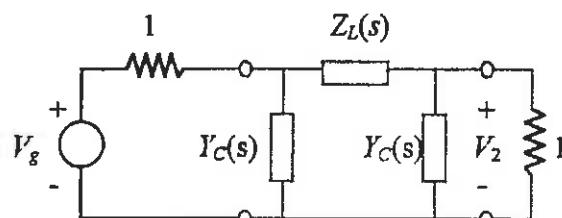


figura 2

④  $L=2$  SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Z_L = \frac{1}{sL} = \frac{1}{2s} = \frac{2s(s^2 + 9)}{s^2 + 4} \Rightarrow Y_L = \frac{s^2 + 4}{2s(s^2 + 9)} = \frac{K_0}{s} + \frac{2R_1 s}{s^2 + 9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sY_L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 4}{2s(s^2 + 9)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 4}{2s^2 + 18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \\ 2R_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 4}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 4}{s^2 - 9} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 4}{2s^2} = \frac{-9 + 4}{2(-9)} = \frac{-5}{-18} = \frac{5}{18} \end{array} \right.$$

$$Y_L = \frac{2/9}{s} + \frac{5s/18}{s^2 + 9} = \frac{1}{\frac{9}{2}s} + \frac{1}{\frac{18}{5}s} = \frac{1}{\frac{9}{2}s} + \frac{1}{\frac{5}{18}s} + \frac{1}{\frac{5}{18}s} = \frac{1}{\frac{9}{2}s} + \frac{1}{\frac{18}{5}s} + \frac{1}{\frac{5}{18}s}$$

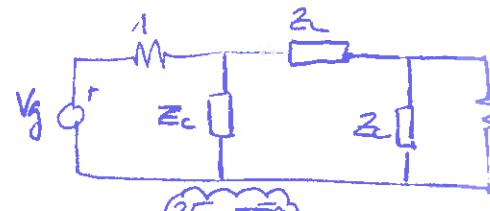
$C=1$  SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$$Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 9)} \Rightarrow Y_C = \frac{s(s^2 + 9)}{s^2 + 4} = \frac{2R_1 s}{s^2 + 4} + K_{\infty} s$$

$$2R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 4}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 4}{s^2 - 9} = 5$$

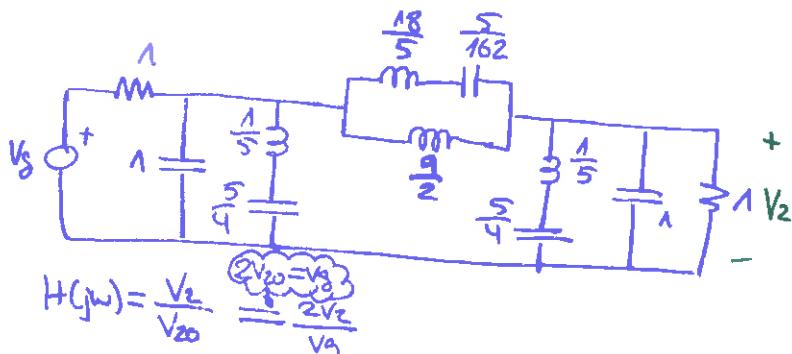
$$K_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s(s^2 + 9)}{s^2 + 4} = 1$$

$$Y_C = \frac{5s}{s^2 + 4} + s = \frac{1}{s^2 + 4} + s = \frac{1}{\frac{5}{4}s^2 + \frac{4}{5}s} + s = \frac{1}{\frac{1}{5}s + \frac{1}{5}s} + s$$



$$H_B(j\hat{\omega}) = \frac{E_2}{E_{20}} = \frac{2E_2}{E_2} = 2$$

Filtro para baja



$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_{20}} = \frac{2\sqrt{2}\omega}{\sqrt{2}\omega + 2\sqrt{2}}$$

(b) Como  $\hat{s} = \frac{s(s^2+9)}{s^2+4} \Rightarrow j\hat{\omega} = \frac{j\omega(-\omega^2+9)}{-\omega^2+4} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{\omega(9-\omega^2)}{4-\omega^2}$

$$\omega=0 \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{0(9-0^2)}{4-0^2} = 0 \Rightarrow |H_B(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1$$

$$\omega=2 \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{2(9-2^2)}{4-2^2} = \infty \Rightarrow |H_B(j\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}} = 0$$

$$\omega=3 \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{3(9-3^2)}{4-3^2} = 0 \Rightarrow |H_B(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1$$

$$\omega=\infty \Rightarrow \hat{\omega} = \infty \Rightarrow |H_B(j\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega(9-\omega^2)}{4-\omega^2} = \infty$$

Por tanto, si para  $\hat{\omega}=0$ ,  $|H_B(j0)|=1$ , entonces para  $\omega=0$ ,  $|H(j0)|=|H_B(j0)|=1$  y para  $\omega=3$ ,

$$|H(j3)| = |H_B(j0)| = 1$$

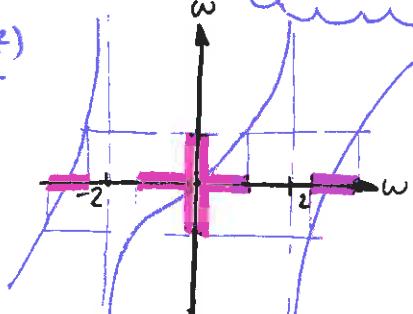
si para  $\hat{\omega}=\infty$ ,  $|H_B(j\infty)|=0$ , entonces para  $\omega=2$ ,  $|H(j2)|=|H_B(j\infty)|=0$  y para  $\omega=\infty$ ,

$$|H(j\infty)| = |H_B(j\infty)| = 0$$

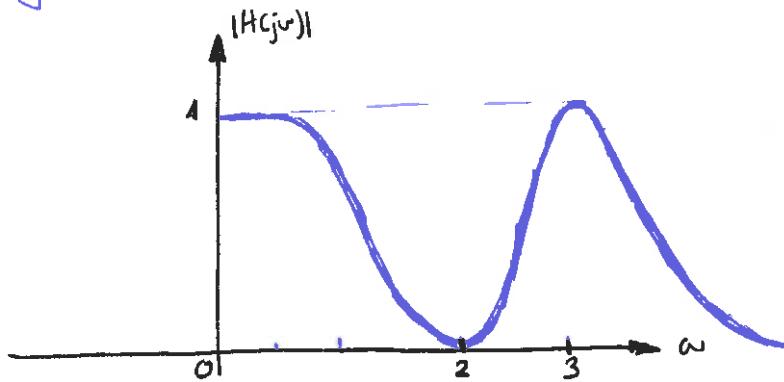
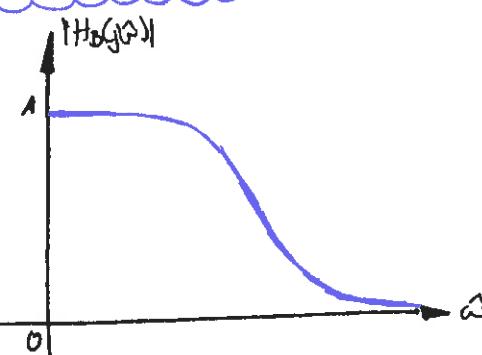
NOTA: Tras una transformación de frecuencias  
nunca saldremos la nueva función de  
transferencia  $H(j\omega)$  analizando el circuito

$$\hat{\omega} = \frac{\omega(9-\omega^2)}{4-\omega^2}$$

(función impar)



$$\hat{\omega} = \frac{\omega(9-\omega^2)}{4-\omega^2}$$



Ejercicio 1

Considérese el cuadripolo de la Fig. 1.1. Se pide:

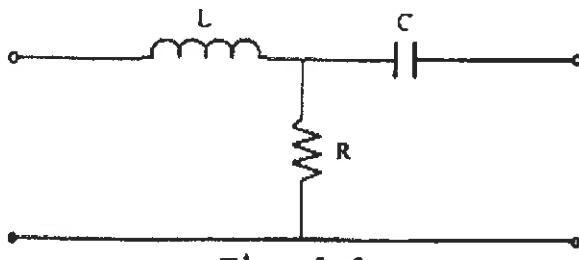
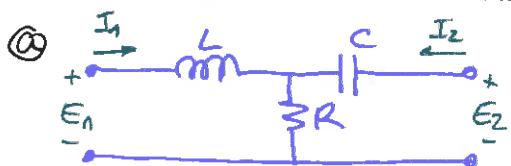
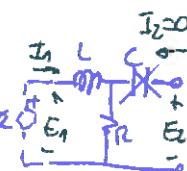
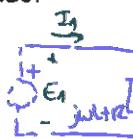


Fig. 1.1

- Determinar los parámetros de impedancia (matriz [Z]) y de admitancia (matriz [Y]) del cuadripolo de la Fig. 1.1.
- Determinar la matriz [F] (parámetros A, B, C, D) del cuadripolo de la Fig. 1.1. Calcule el valor del determinante de la matriz [F], justificando la respuesta.
- Si se conectan en paralelo dos cuadripolos idénticos al de la Fig. 1.1 (conexión paralelo-paralelo), determinar la nueva matriz [F] del conjunto. Calcule el valor del determinante de la nueva matriz, justificando el resultado.



Por todos los dibujos  
No hay que hacerlos en  
el examen, lo hacemos  
mentalmente



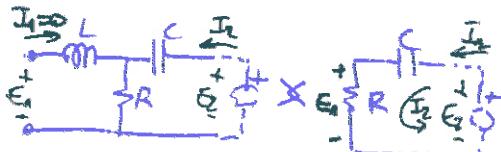
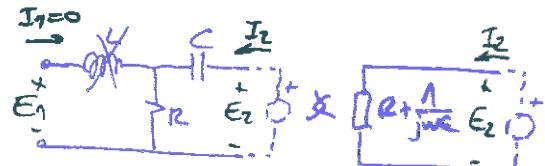
$$Z_{11} = \frac{E_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \rightarrow Z_{11} = j\omega L + R$$

$$Z_{22} = \frac{E_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow Z_{22} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{12} = \frac{E_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow Z_{12} = R$$

$$Z_{21} = \frac{E_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \rightarrow Z_{21} = R \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Por ser un cuadripolo} \\ R \in C \quad Z_{12} = Z_{21} \end{array} \right.$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L + R & R \\ R & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$



ADMITANCIA: Hay varias formas de calcularla, la más fácil:  $[Y] = [Z]^{-1}$   
Vamos a hacerlo calculando coeficiente por coeficiente:

$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{|Z|} & -\frac{Z_{12}}{|Z|} \\ -\frac{Z_{21}}{|Z|} & \frac{Z_{11}}{|Z|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{|Z|} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{j\omega LR + \frac{L}{C} + \frac{R}{j\omega C}} = \frac{1 + j\omega CR}{\omega^2 LRC + j\omega LR} \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{|Z|} = \frac{j\omega L + R}{j\omega LR + \frac{L}{C} + \frac{R}{j\omega C}} \end{aligned}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-R}{\omega^2 LRC + \frac{L}{C} + \frac{R}{j\omega C}}$$

Otra forma de calcular [Y] es por definición (sin utilizar la matriz Z):

$$Y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{\frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{R} + j\omega C \right)}{\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{R} + j\omega C} \rightarrow Y_{11} = \frac{1 + j\omega CR}{R + j\omega L - j\omega CR}$$



• Es el "paralelo" de  $\frac{1}{j\omega L}$  y  $\frac{1}{j\omega C}$  y no "serie" porque estamos trabajando con admittancias

• Sólo hacemos el primer caso, pues el resto son análogos

⑥ [F] siempre se va a calcular a partir de [Z] o [Y].

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{j\omega L + R}{R} = j\omega \frac{L}{R} + 1$$

$$B = -\frac{1}{Z_{21}} = \frac{j\omega LR + \frac{L}{C} + \frac{R}{j\omega C}}{R} = j\omega L + \frac{L}{RC} + \frac{1}{j\omega C}$$

$$C = \frac{1}{Z_{11}} = \frac{1}{R}$$

$$D = \frac{Z_{22}}{Z_{11}} = \frac{j\omega C + R}{R} = \frac{1}{j\omega CR} + 1$$

Por tanto:

$$[F] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega \frac{L}{R} + 1 & j\omega L + \frac{L}{RC} + \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{j\omega CR} + 1 \end{bmatrix}$$

$$|F| = AD - BC = \left( j\omega \frac{L}{R} + 1 \right) \left( \frac{1}{j\omega CR} + 1 \right) - \frac{1}{R} \left( j\omega L + \frac{L}{RC} + \frac{1}{j\omega C} \right) = \cancel{c} \cancel{f} \cancel{2} + j\cancel{\omega} \cancel{L} + \cancel{1} \cancel{j\omega} \cancel{C} + 1 - j\cancel{\omega} \cancel{L} - \cancel{c} \cancel{f} \cancel{2} - \cancel{1} \cancel{j\omega} \cancel{C}$$

$$|F| = 1$$

Ejercicio 2

Dada la estructura de la Figura 2.1, donde  $e_g(t) = 1$  para  $t < 0$  y  $e_g(t) = 1 + \sin(10^{12}t)$  para  $t > 0$ .

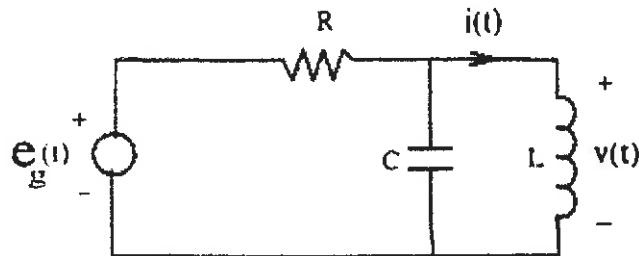


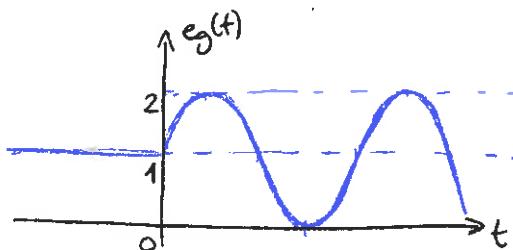
Figura 2.1

- Dibujar el circuito de la Figura 2.1 en el dominio de Laplace, incorporando las condiciones iniciales como generadores. Determinar la transformada de Laplace  $I(p)$  de la corriente  $i(t)$  en la inductancia  $L$ .
- Suponiendo  $R = 1$ ,  $C = 0.5$ ,  $L = 0.2$ , determinar la expresión temporal de la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$  en la inductancia  $L$ . Obtener la expresión del régimen permanente de  $i(t)$ . ¿Se puede aplicar el teorema del valor final para determinar  $i(\infty)$ ? Razone las respuestas.
- Determine la expresión temporal de la tensión  $v(t)$  en la inductancia  $L$ , utilizando los datos de la cuestión (b). Verifique la condición inicial de  $v(t)$ .

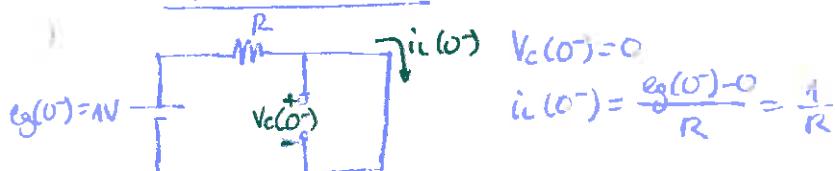
$$e_g(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 1 + \sin(10^{12}t) & t > 0 \end{cases}$$

para  $t > 0$

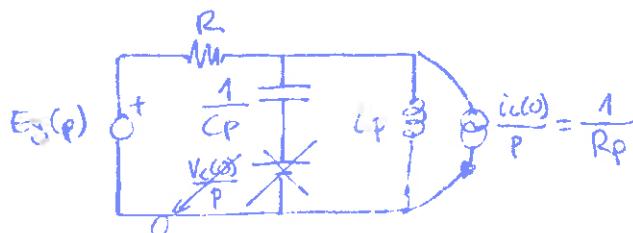
$e_g(t) = [1 + \sin(10^{12}t)] u(t)$



Ⓐ Circuito en  $t=0^-$



Circuito en el dominio de Laplace

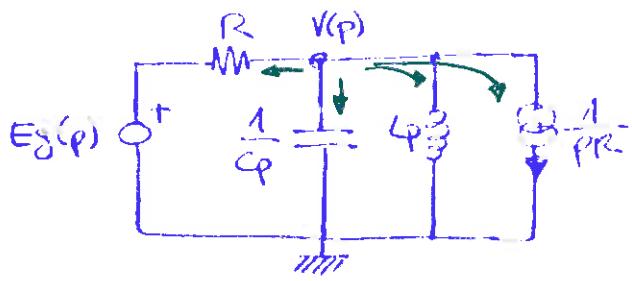


Para  $t > 0$ :

$$e_g(t) = [1 + \sin(10^{12}t)] u(t) = u(t) + \sin(10^{12}t) u(t)$$

↑ Laplace

$$E_g(p) = \frac{1}{p} + \frac{\frac{10}{10}}{p^2 + (10^{12})^2} \Rightarrow E_g(p) = \frac{1}{p} + \frac{10}{p^2 + 10^{24}}$$



$$\text{Nodo: } \frac{V(p)}{R} - \frac{E_S(p)}{L_p} + \frac{V(p)}{\frac{1}{C_p}} + \frac{V(p)}{R_p} + \frac{1}{L_p p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(p) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{L_p} \right) + \frac{1}{R_p} - \frac{E_S(p)}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(p) = \frac{\frac{E_S(p)}{R} - \frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{L_p}}$$

$$\text{Ahora: } I(p) = \frac{1}{R_p} + \frac{V(p)}{L_p} = \frac{1}{R_p} + \frac{\frac{E_S(p)}{R} - \frac{1}{R_p}}{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{L_p} \right) p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{R_p} + \frac{\frac{E_S(p)}{R} - \frac{1}{R_p}}{\frac{L_p}{R} + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{L_p} p} \Rightarrow \boxed{I(p) = \frac{1}{R_p} + \frac{\frac{E_S(p)}{R} - \frac{1}{p}}{L_p + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{L_p} p}}$$

(b)  $i(t) = \mathcal{Z}^{-1}(I(p))$

Lo haremos por el teorema de los residuos (página T-6):

Lo primero sustituimos los valores numéricos:

$$I(p) = \frac{1}{p} + \frac{\left( \frac{1}{p} + \frac{\sqrt{10}}{p^2+10} \right) - \frac{1}{p}}{\frac{1}{5}p + \frac{1}{10}p^2 + 1} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{\sqrt{10}}{p^2+10}}{\frac{2p+p^2+10}{10}} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{10\sqrt{10}}{(p^2+2p+10)(p^2+10)}}{\text{(por residuos)}}$$

$$F(p) = \frac{10\sqrt{10}}{(p^2+2p+10)(p^2+10)}, \text{ los polos son: } (p^2+2p+10)(p^2+10)=0 \quad \begin{cases} p^2+10=0 \Rightarrow p^2=-10 \Rightarrow p = \pm j\sqrt{10} \\ p^2+2p+10=0 \Rightarrow p = -1 \pm 3j \end{cases}$$

4 polos:  $\begin{cases} p_1 = +j\sqrt{10} \\ p_2 = -j\sqrt{10} \\ p_3 = -1 + 3j \\ p_4 = -1 - 3j \end{cases}$

Ahora calculamos el residuo asociado a cada polo:

$$K_1(t) = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) \frac{10\sqrt{10}}{(p^2+2p+10)(p-p_1)(p-p_2)} e^{pt} = \frac{10\sqrt{10}}{(p_1^2+2p_1+10)(p_1-p_2)} e^{pt}$$

Sustituimos

$$p_1 = j\sqrt{10}, \quad p_2 = -j\sqrt{10} \quad K_1(t) = \frac{10\sqrt{10}}{((j\sqrt{10})^2 + 2j\sqrt{10} + 10)((j\sqrt{10}) - (-j\sqrt{10}))} e^{j\sqrt{10}t} = \frac{10\sqrt{10}}{(-10 + 2j\sqrt{10} + 10)(2j\sqrt{10})} e^{j\sqrt{10}t}$$

$$\Rightarrow K_1(t) = \frac{10}{4\sqrt{10}j^2} e^{j\sqrt{10}t} = -\frac{10}{4\sqrt{10}} e^{j\sqrt{10}t} = -\frac{\sqrt{10}}{4} e^{j\sqrt{10}t}$$

$$e^{jb} = \cos b + j \sin b$$

$$\Rightarrow K_1(t) = -\frac{\sqrt{10}}{4} (\cos(\sqrt{10}t) + j \sin(\sqrt{10}t))$$

$$K_2(t) = K_1^*(t) \Rightarrow K_2(t) = -\frac{\sqrt{10}}{4} (\cos(\sqrt{10}t) - j \sin(\sqrt{10}t))$$

$$K_3(t) = \lim_{p \rightarrow p_3} (p - p_3) F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_3} (p - p_3) \frac{\frac{10\sqrt{10}}{(p-p_3)(p-p_4)(p^2+10)}}{p^2 + 2p + 10} e^{pt} = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{(p_3-p_4)(p_3^2+10)}}{p_3^2 + 2p_3 + 10} e^{pt}$$

sustituimos

$$\begin{aligned} p_3 &= -1 + 3j \\ p_4 &= -1 - 3j \end{aligned} \Rightarrow K_3(t) = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{(-1+3j) - (-1-3j)((-1+3j)^2 + 10)}}{e^{(-1+3j)t}} = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{6j(-8-6j+10)}}{e^{-t} e^{3jt}} = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{6j(-8-6j+10)}}{e^{-t} e^{3jt}}$$

$$(-1+3j)(-1-3j) = 1 - 3j - 3j + 9j^2 = 10$$

$$K_3(t) = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{36+12j}}{e^{-t} e^{3jt}} = \frac{\frac{10\sqrt{10}}{38e^{j0'32}}}{e^{-t} e^{3jt}} = 0'83 e^{-t} e^{3jt} e^{-j0'32} = 0'83 e^{-t} e^{j(3t - 0'32)}$$

$$\begin{cases} p = \sqrt{36^2 + 12^2} = 38 \\ \theta = \arctg \frac{12}{36} = 0'32 \end{cases}$$

$$K_3(t) = 0'83 e^{-t} (\cos(3t - 0'32) + j \sin(3t - 0'32))$$

$$K_4(t) = K_3^*(t) \rightarrow K_4(t) = 0'83 e^{-t} (\cos(3t - 0'32) - j \sin(3t - 0'32))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t) = \left[ \underbrace{K_1(t)}_{2\operatorname{Re}(K_1(t))} + \underbrace{K_2(t)}_{2\operatorname{Re}(K_2(t))} + \underbrace{K_3(t)}_{2\operatorname{Re}(K_3(t))} + \underbrace{K_4(t)}_{2\operatorname{Re}(K_4(t))} \right] u(t) \quad \text{Es decir, para } t \geq 0$$

$$f(t) = \left[ 2\operatorname{Re}(K_1(t)) + 2\operatorname{Re}(K_3(t)) \right] u(t) = \left[ 2 \left( -\frac{\sqrt{10}}{4} \cos(\sqrt{10}t) \right) + 2 \left( 0'83 e^{-t} \cos(3t - 0'32) \right) \right] u(t)$$

$$f(t) = \left[ 1'66 e^{-t} \cos(3t - 0'32) - \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(\sqrt{10}t) \right] u(t)$$

$$\text{Finalmente } I(p) = \frac{1}{p} + F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} i(t) = u(t) + f(t)$$

$$i(t) = \left[ 1 + 1'66 e^{-t} \cos(3t - 0'32) - \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(\sqrt{10}t) \right] u(t)$$

No se puede aplicar el teorema del valor final puesto que  $pI(p)$  tiene polos sobre el eje  $j\omega$   
 $(p_1 = j\sqrt{10}, p_2 = -j\sqrt{10})$  (ver página T-5)



Para obtener el régimen permanente:

$$i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + 1'66 e^{-t} \cos(3t - 0'32) - \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(\sqrt{10}t) \right) = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(\sqrt{10}t)$$

$$i(\infty) = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(\sqrt{10}t)$$

③

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0,2 \left[ -1,66 e^{-t} \cos(3t - 0,32) - 1,66 e^{-t} \sin(3t - 0,32) \cdot 3 + \frac{\sqrt{10}}{2} \sin(17\pi t) \sqrt{10} \right]$$

$$v(t) = -0,33 e^{-t} \cos(3t - 0,32) - e^{-t} \sin(3t - 0,32) + \sin(17\pi t)$$

Efectivamente:

$$v(0^+) = -0,33 \underset{1}{e}^{-0} \cos(-0,32) - \underset{1}{e}^{-0} \sin(-0,32) + \sin 0 = -0,316 - (-0,316) = 0 \quad \checkmark$$

Ejercicio 4

Considere el filtro de la Fig. 4.1, cuya función de transferencia se define por  $H_B(s) = E_2/E_g$ . Si aplicamos la transformación de frecuencias  $\tilde{s} = (s^2 + 4)/s$  al filtro de la Fig. 4.1, se pide:

- (a) Obtener la nueva estructura del filtro transformado con los valores de sus elementos. Dibujar la respuesta en amplitud del filtro transformado, indicando los valores más significativos.
- (b) Desnormalizar la estructura obtenida en (a) con respecto a la pulsación  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/seg}$  y a la resistencia  $R_0 = 1 K\Omega$ . Determinar los nuevos valores de los elementos. Dibujar la respuesta en amplitud, indicando los valores más significativos.

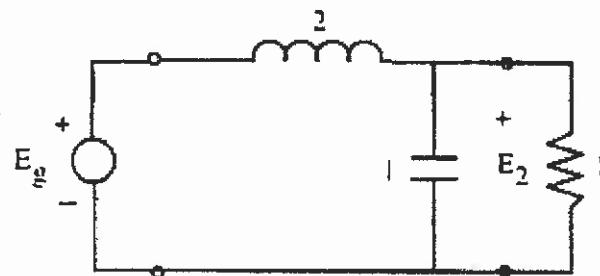


Fig. 4.1

Ejercicio 1

Sean los cuadripolos A y B de la figura 1:

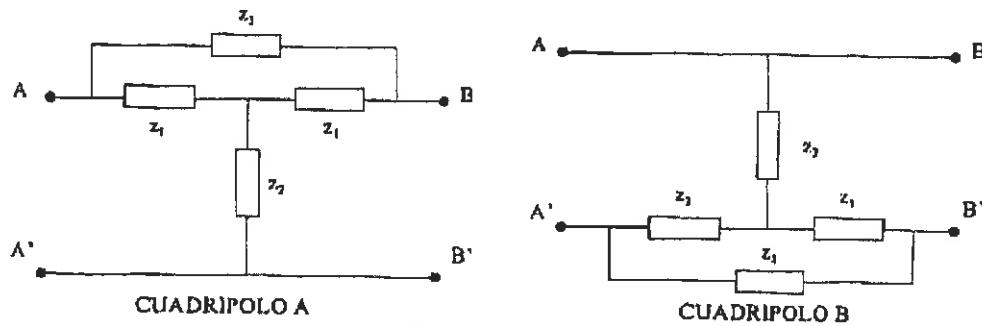


Figura 1

y los cuadripolos C y D resultantes de las asociaciones de la figura 2:

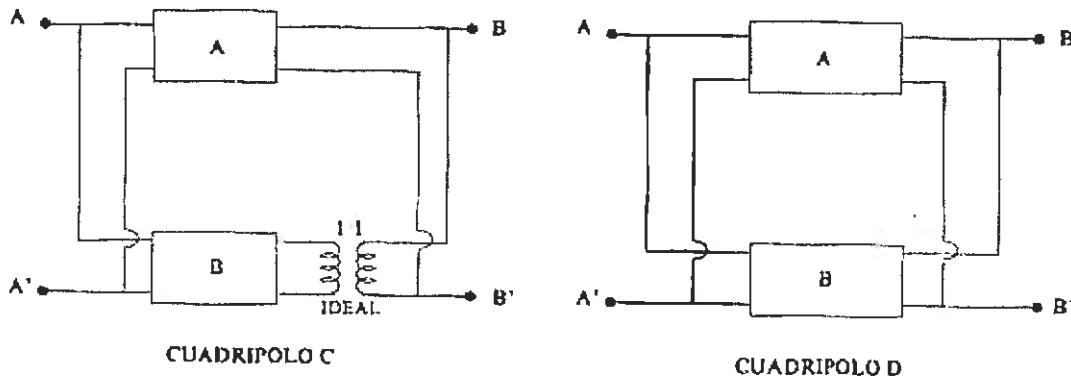


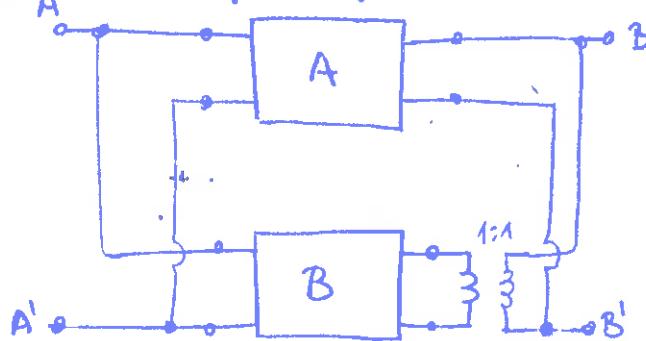
Figura 2

- Calcular la matriz  $[Y_C]$  de parámetros admitancia del cuadripolo C. (1 punto)
- Calcular la matriz de parámetros híbridos "h" del cuadripolo D. (1 punto)

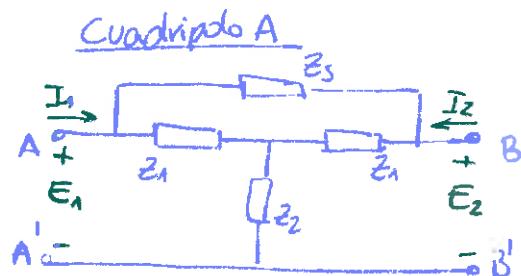
④ Por efecto del transformador no existen corrientes circulatorias,  $I_C = 0$  (página TG-12)

Por tanto se cumple que  $[Y_C] = [Y_A] + [Y_B]$

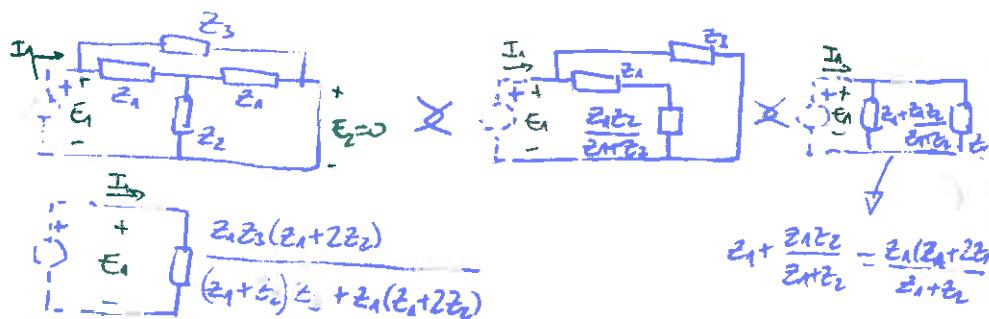
Asociación paralelo-paralelo:



Analizamos cada cuadripolo por separado (A y B):



$$U_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0}$$



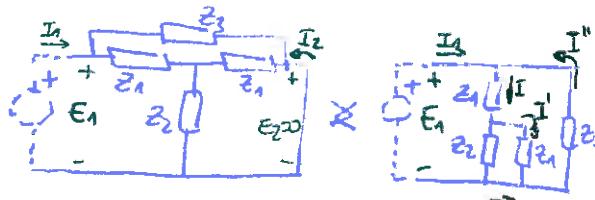
$$\Rightarrow U_{11} = \frac{Z_1(Z_1+2Z_2) + Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)}$$

Análogamente:  $U_{22} = U_{11}$

Ahora:

$$I_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0}$$

$$\Rightarrow U_{21} = -\frac{Z_2Z_3 + Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_3Z_1(Z_1+2Z_2)}$$



$$I = \frac{E_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{E_1(Z_1+Z_2)}{Z_1(Z_1+2Z_2)} = I$$

Divisor de corriente:  $I' = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} I$

$$I' = \frac{E_1 Z_2}{Z_1 (Z_1+2Z_2)}, I'' = -\frac{E_1}{Z_3}$$

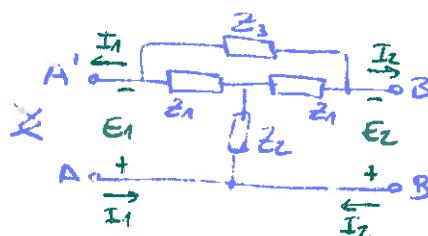
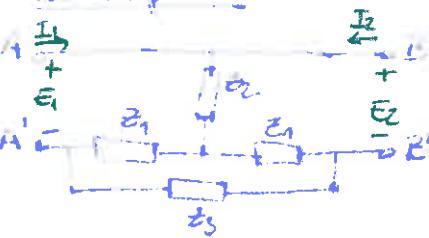
$$I_2 = I'' - I'$$

$$I_2 = -\frac{E_1 Z_2 Z_3}{Z_3 Z_1 (Z_1+2Z_2)} - \frac{E_1 Z_1 (Z_1+2Z_2)}{Z_1 Z_3 (Z_1+2Z_2)}$$

$U_{12} = U_{21}$  por ser un cuadripolo RLC

$$[Y_{1A}] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_1+2Z_2) + Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)} & -\frac{Z_2Z_3 + Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)} \\ -\frac{Z_2Z_3 + Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)} & \frac{Z_1(Z_1+2Z_2) + Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)} \end{bmatrix}$$

Cuadripolo A



$$U_{11} = \frac{-I_1}{-E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0}$$

$$U_{21} = \frac{-I_2}{-E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0}$$

por lo que da lo mismo que en el cuadripolo A en los dos parámetros.  
[Y\_B] = [Y\_A]

En TKE, conclusion:  $[Y_B] = [Y_A] + [Y_B] = 2[Y_A]$

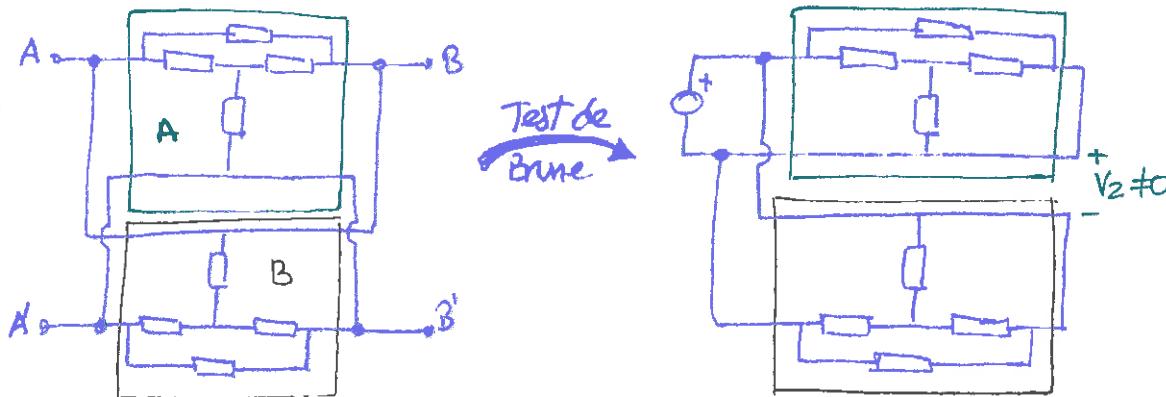
$$2 \frac{Z_1(Z_1+2Z_2) + Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)}$$

$$-2 \frac{Z_2Z_3 + Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)}$$

$$-2 \frac{Z_2Z_3 + Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)}$$

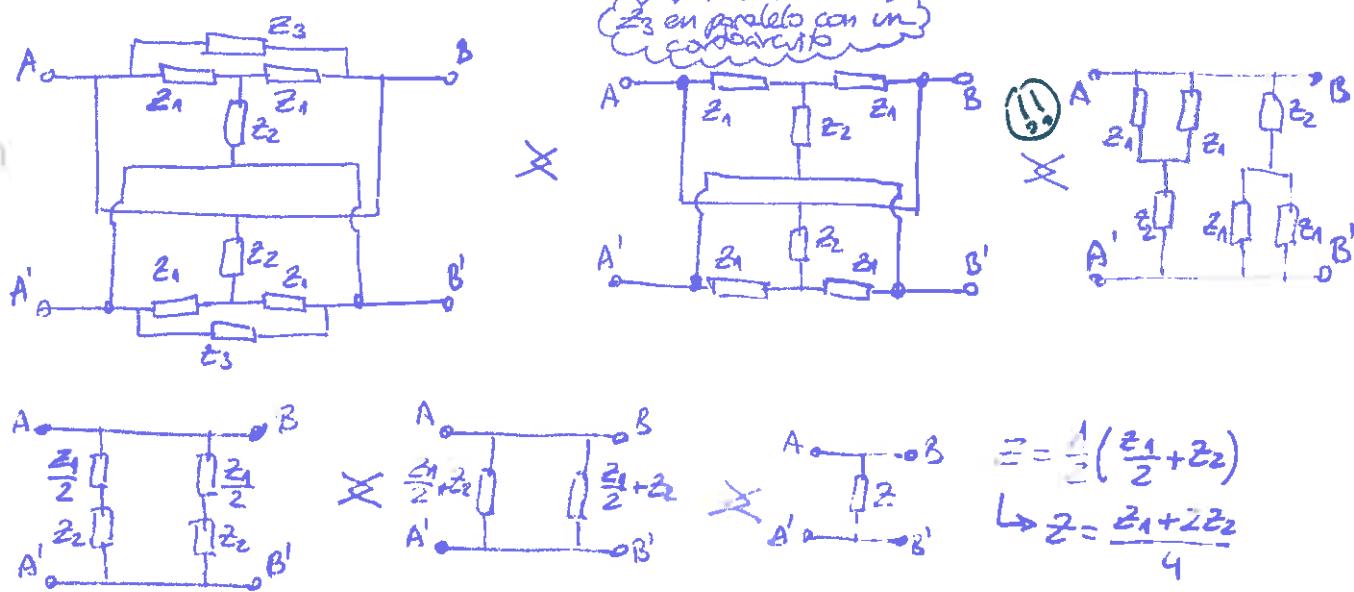
$$2 \frac{Z_1(Z_1+2Z_2) + Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_3(Z_1+2Z_2)}$$

⑥ Para ver si existen corrientes circulatorias lo hacemos los tests de Brune:

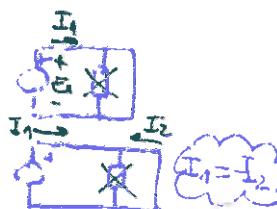


$V_2 \neq 0 \Rightarrow$  Hay corrientes circulatorias  $\Rightarrow$  En general:  $[Y_B] \neq [Y_A] + [Y_B]$

Por tanto, estudiaremos el quadripolo completo:



$$h_{11} = \frac{E_1}{I_1} \Big|_{E_2=0} \rightarrow h_{11} = 0$$



NOTA: Para ser un quadripolo RLC se cumple  $Z_{12} = Z_{21}, Y_{12} = Y_{21}$

$$h_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0} \rightarrow h_{21} = -1$$

Pero, sin embargo,  $h_{12} \neq h_{21}$

$$h_{12} = \frac{E_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow h_{12} = 1$$

Para ser simétrico:  $Z_{11} = Z_{22}, Y_{11} = Y_{22}$

$$h_{22} = \frac{I_2}{E_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow h_{22} = \frac{1}{Z_2} \Rightarrow h_{22} = \frac{4}{Z_1 + 2Z_2}$$



$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{4}{Z_1 + 2Z_2} \end{bmatrix}$$

Pero, sin embargo:  $h_{11} \neq h_{22}$

Ejercicio 2

En el circuito de la figura 3, se supone condiciones iniciales nulas en  $t = 0^-$ . Los interruptores se cierra en el instante  $t = t_0 = \frac{3\pi}{4}$ :

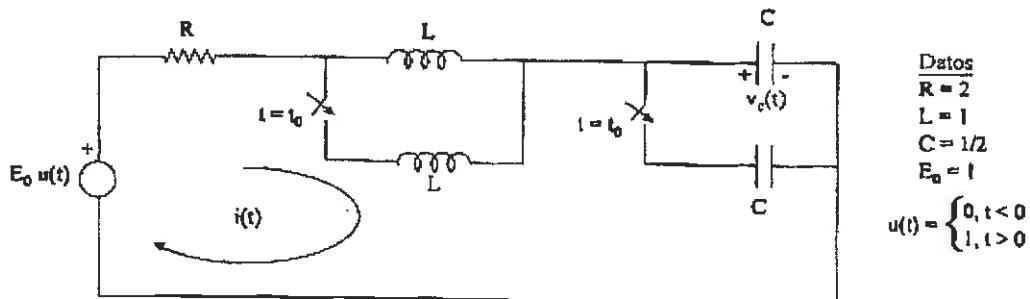
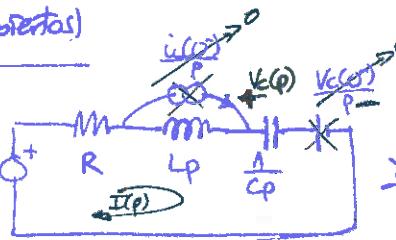
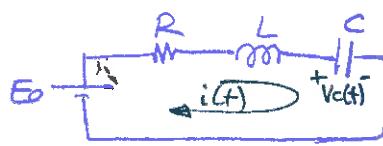


Figura 3

- a) Determinar  $i(t)$  y  $v_c(t)$  para  $t < 3\pi/4$ .  
 b) Obtener  $i(t)$  para  $t > 3\pi/4$ .

① Condiciones iniciales nulas  $\Leftrightarrow \begin{cases} i(0^-) = 0 \\ v_c(0^-) = 0 \end{cases}$

Circuito en  $0 < t < \frac{3\pi}{4}$  (interruptores abiertos)



$$E_0 u(t) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{E_0}{P} = 1$$



Circuito en el dominio de Laplace para  $t > \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Malla: } \frac{1}{p} - I(p) \left( R + L_p + \frac{1}{C_p} \right) = 0 \Rightarrow I(p) = \frac{\frac{1}{p}}{R + L_p + \frac{1}{C_p}}$$

$$I(p) = \frac{\frac{1}{p}}{2 + p + \frac{1}{p}} = \frac{\frac{1}{p}}{2p + p^2 + 2} = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} \Rightarrow I(p) = \frac{1}{(p+1)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{Z}} i(t) = e^{-t} \sin(t)$$

$$i(t) = e^{-t} \sin(t), \quad 0 < t < \frac{3\pi}{4}$$

$$e^{-at} \sin(wt) u(t) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{w}{(pt+a)^2 + w^2}$$

$$V_C(p) = I(p) \cdot \frac{1}{C_p} = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} \cdot \frac{2}{p} = \frac{2}{p(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 2} \Rightarrow 2 = A(p^2 + 2p + 2) + p(Bp + C)$$

$$\begin{aligned} Op^2 + Opt + 2 &= (A+B)p^2 + (2A+C)p + 2A \\ A + B &= 0 \\ 2A + C &= 0 \\ 2A &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \underline{A=1, B=-1, C=-2}$$

$$V_C(p) = \frac{1}{p} + \frac{-p-2}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{p} - \frac{p+2}{(p+1)^2 + 1} = \frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} - \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

$$V_C(t) = 1 - e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t), \quad 0 < t < \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} e^{-at} \cos(wt) u(t) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{pt+a}{(pt+a)^2 + w^2} \\ e^{-at} \sin(wt) u(t) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{w}{(pt+a)^2 + w^2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \quad t_0 = \frac{3\pi}{4}; \quad t' = t - t_0 \Rightarrow t' = t - \frac{3\pi}{4}$$

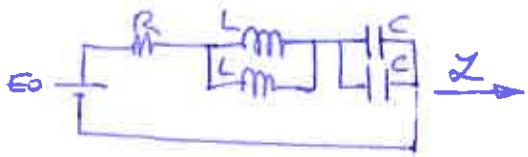
Necesitamos las condiciones iniciales en  $t=t_0 = \frac{3\pi}{4}$

Para ello particularizaremos las soluciones del apartado \(\textcircled{a}\) en ese instante:

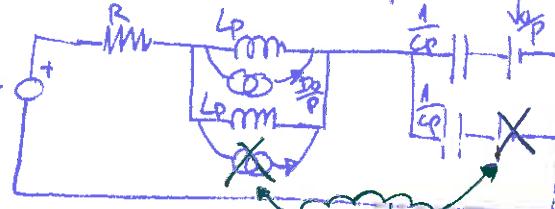
$$i(t) = e^{t-t_0} u(t) \Rightarrow i(t=\frac{3\pi}{4}) = e^{-\frac{3\pi}{4}} \sin \frac{3\pi}{4} = e^{-\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow I_0 = \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$v_c(t) = 1 - e^{t-t_0} (\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}) = 1 - e^{-\frac{3\pi}{4}} (\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}) = 1 - e^{-\frac{3\pi}{4}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow V_0 = 1$$

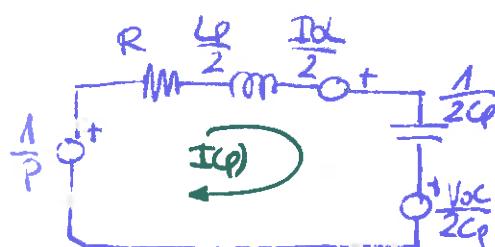
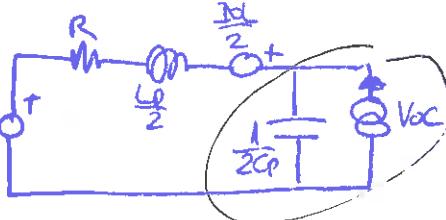
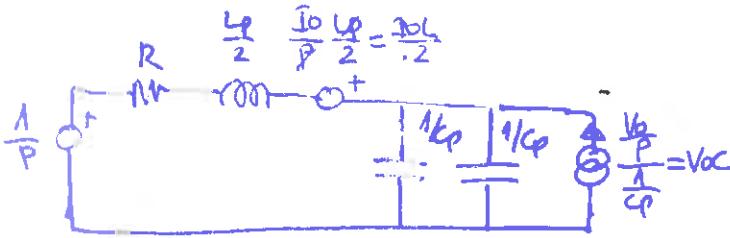
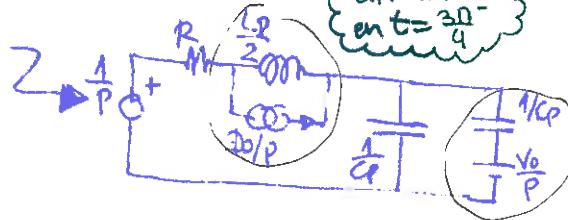
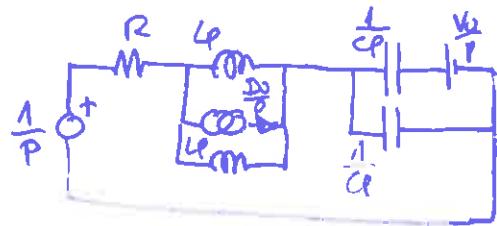
Circuito en  $t > \frac{3\pi}{4}$



Circuito en el dominio de Laplace



Recuerda que:  
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



$$I(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{30L}{2}}{\frac{L}{2} + R + \frac{1}{2CP}} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{30}{2}}{\frac{L}{2} + 2 + \frac{1}{p}} = \frac{2+30P-1}{p^2+4p+2}$$

$$I(p) = \frac{1+30P}{p^2+4p+2} = \frac{1+30P}{(p+2+\sqrt{2})(p+2-\sqrt{2})}$$

$$p^2+4p+2=0 \quad p=-2+\sqrt{2}$$

$$p=-2-\sqrt{2}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1+30P}{(p+2-\sqrt{2})(p+2+\sqrt{2})} = \frac{A}{p+2-\sqrt{2}} + \frac{B}{p+2+\sqrt{2}} \Rightarrow 1+30P = A(p+2+\sqrt{2}) + B(p+2-\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1+30(\sqrt{2}-2)}{2\sqrt{2}} \\ B = \frac{1-30(\sqrt{2}+2)}{-2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Finalmente:

$$I(p) = \frac{A}{p+2-\sqrt{2}} + \frac{B}{p+2+\sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} i(t') = Ae^{-(-2-\sqrt{2})t'} u(t') + Be^{-(-2+\sqrt{2})t'} u(t')$$

e<sup>-at</sup> u(t)  $\xrightarrow{\mathcal{Z}}$   $\frac{1}{p+a}$

sustituyendo A y B

$$i(t') = \left[ \frac{1+30(\sqrt{2}-2)}{2\sqrt{2}} e^{-(-2-\sqrt{2})t'} + \frac{1-30(\sqrt{2}+2)}{-2\sqrt{2}} e^{-(-2+\sqrt{2})t'} \right] u(t')$$

Sustituyendo  $I_0$  y  $t' = t - \frac{3\pi}{4}$ :

$$i(t) = \frac{e^{-2(t-\frac{3\pi}{4})}}{2\sqrt{2}} \cdot \left[ \left( 1 + e^{-\frac{3\pi}{4}(1+\sqrt{2})} \right) e^{\sqrt{2}(t-\frac{3\pi}{4})} - \left( 1 - e^{-\frac{3\pi}{4}(1+\sqrt{2})} \right) e^{-\sqrt{2}(t-\frac{3\pi}{4})} \right] u(t-\frac{3\pi}{4})$$

Ejercicio 4

Dado el circuito de la figura 5, donde los amplificadores se suponen ideales y con la ganancia de tensión finita.

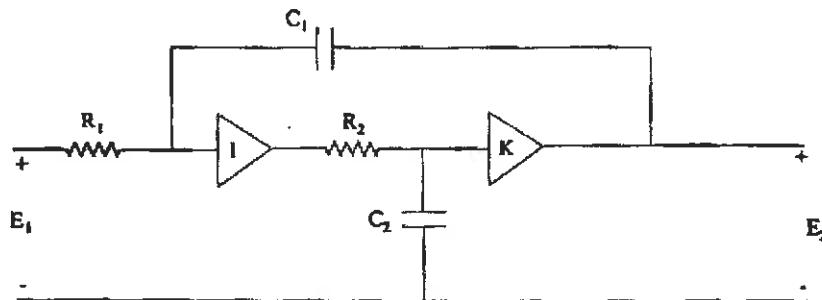
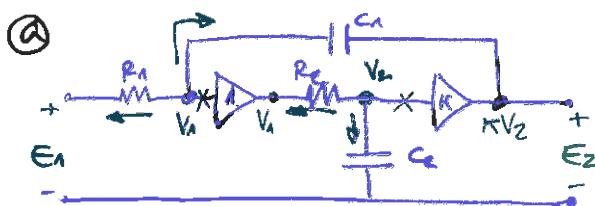


Figura 5

- a) Calcular la función de transferencia  $H(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)}$  en función de los parámetros

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \text{ y } K.$$

- b) Determinar los valores de los parámetros del apartado a) para que  $H(s)$  corresponda a la función de transferencia de un filtro de Butterworth de orden 2, cuya atenuación a la pulsación  $\omega = \omega_c = 1$ , sea  $\alpha(\omega_c) = 0,5 \text{ dB}$ .
- c) Desnormalizar el filtro para que la atenuación de 0,5 dB se produzca a la frecuencia  $f_c = 10 \text{ kHz}$ .
- d) Dibujar los diagramas de módulo  $|H(j\omega)|$  y fase  $\arg\{H(j\omega)\}$  del filtro desnormalizado.



$$H(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)}$$

$$\text{Nudo 1: } \frac{V_1 - E_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{sC_1}} = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = -(V_1 - E_1)C_1 s + \frac{E_1}{R_1}$$

$$V_1 = E_2 C_1 s R_1 - V_1 C_1 s R_1 + E_1$$

$$V_1 + V_1 C_1 s R_1 = E_2 C_1 s R_1 + E_1 \Rightarrow V_1 = \frac{E_1 + E_2 C_1 s R_1}{1 + s C_1 R_1}$$

$$\text{Nudo 2: } \frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2 - 0}{\frac{1}{sC_2}} = 0 \Rightarrow \frac{E_2}{K R_2} - \frac{V_1}{R_2} + \frac{E_2}{K s C_2} = 0$$

Sustituyendo el  $V_1$  calculado en el nudo 1 en la ecuación del nudo 2:

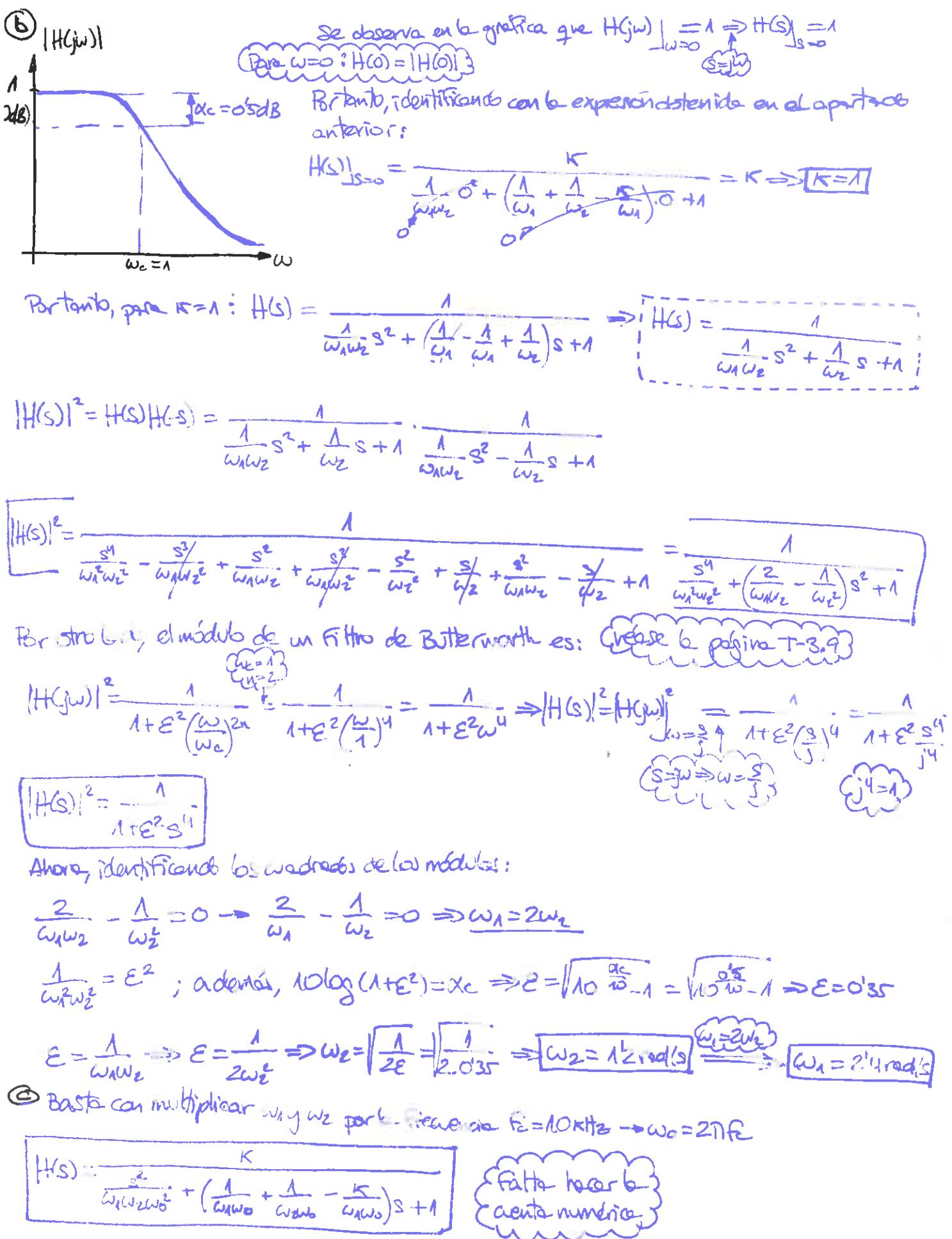
$$\frac{E_2}{K R_2} - \frac{E_1 + E_2 C_1 s R_1}{R_2 + s C_1 R_1 R_2} + \frac{E_2 s C_2}{K} = 0 \Rightarrow E_2 \left( \frac{1}{K R_2} - \frac{s C_1 R_1}{R_2 + s C_1 R_1 R_2} + \frac{s C_2}{K} \right) = \frac{E_1}{R_2 + s C_1 R_1 R_2}$$

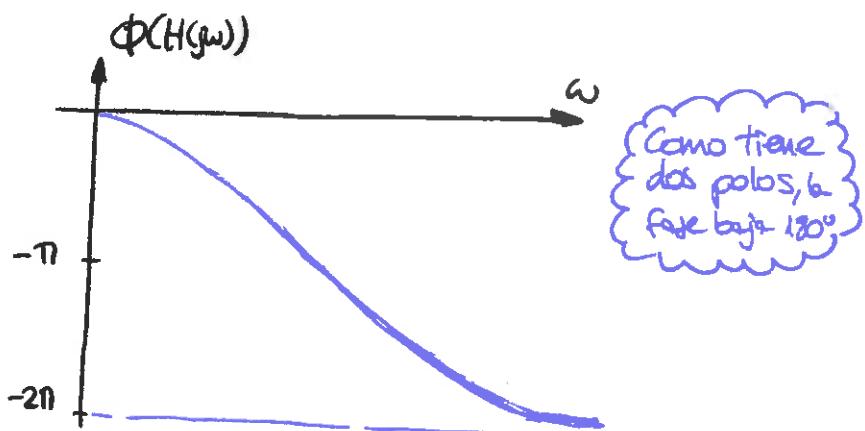
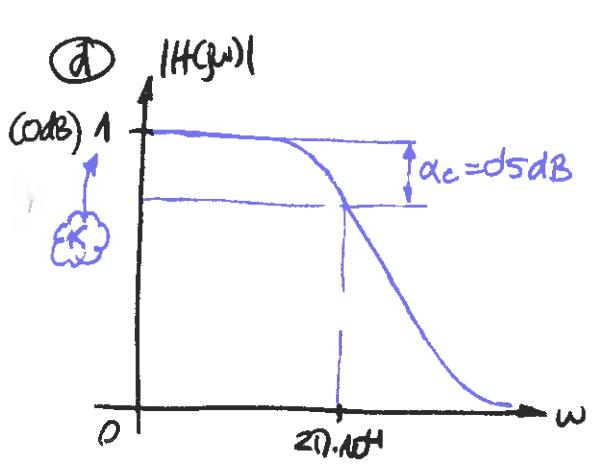
$$E_2 \left( \frac{R_2 + s C_1 R_1 R_2 - s C_1 R_1 R_2 K + s C_2 R_2 (R_2 + s C_1 R_1 R_2)}{K R_2 (R_2 + s C_1 R_1 R_2)} \right) = \frac{E_1}{R_2 + s C_1 R_1 R_2}$$

$$H(s) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{K}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s(C_1 R_1 + C_2 R_2 - C_1 R_1 K) + K} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_1 \omega_2} s^2 + \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} - \frac{K}{\omega_1} \right) s + 1}$$

$$H(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_1 \omega_2} s^2 + \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} - \frac{K}{\omega_1} \right) s + 1}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{C_1 R_1} \\ \omega_2 &= \frac{1}{C_2 R_2} \end{aligned}$$





Ejercicio 3

En el circuito de capacidades conmutadas de la Figura 3, se pide:

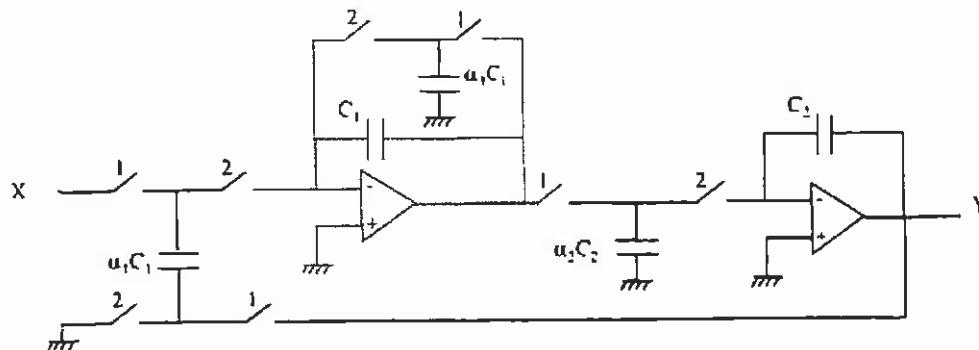


Figura 3

- Obtener  $H_{11}(z) = \frac{Y^{(1)}(z)}{X^{(1)}(z)}$ , esto es, el cociente de transformadas z de las secuencias impares. (1 punto)
- Considerando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_3 = 1$ , indicar si el filtro es o no estable. Dibujar la respuesta en amplitud del filtro, esto es,  $|H_{11}(e^{j\omega T})|$ , donde T es el periodo de ambas fases de reloj. (1 punto)

Ejercicio 4

El circuito de la Figura 4 es un filtro paso bajo de tercer orden cuya impedancia de entrada  $Z_{in}$  es  $Z_{in}(\hat{s}) = \frac{\hat{s}^3 + \hat{s}^2 + 2\hat{s} + 1}{\hat{s}^2 + \hat{s} + 1}$

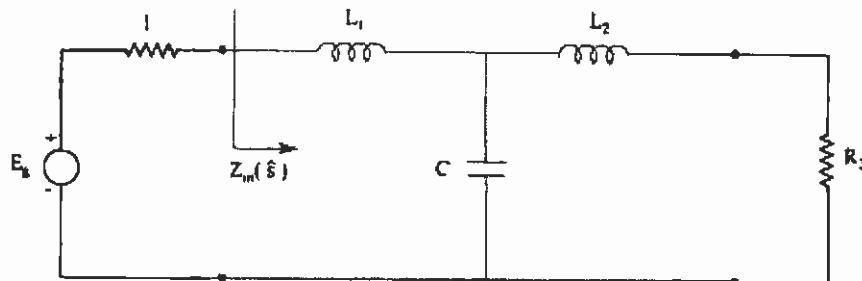


Figura 4

- Calcular los valores  $L_1$ ,  $C$ ,  $L_2$  y  $R_2$  utilizando un algoritmo similar a la tercera forma canónica de Cauer. (1 punto)
- Determinar la transformación de frecuencias  $\hat{s} = F(s)$ , siendo  $F$  una función real positiva impar, que transforme el filtro de la Figura 4 en otro filtro con dos bandas de paso y dos bandas eliminadas con las siguientes características: la primera banda de paso incluye  $\omega = 0$  con  $|F(0)| = 0$ , la segunda banda de paso incluye  $\omega = +4$  con  $|F(j4)| = 0$ , la primera banda eliminada incluye  $\omega = +3$  con  $|F(j3)| = \infty$ , la segunda banda eliminada situada en  $\omega = +\infty$ , y además  $F(s) \rightarrow \frac{1}{s}$  para  $s \rightarrow \infty$ . (1 punto)
- Sintetizar el dipolo correspondiente a la rama  $C$  del filtro multibanda, por la primera forma canónica. Sintetizar los dipolos correspondientes a las ramas  $L_1$  y  $L_2$  del filtro multibanda, por la segunda forma canónica. Dibujar la estructura del filtro multibanda con los correspondientes valores de sus componentes. (1 punto)

Ejercicio 1

Se define el cuadripolo simétrico Q como una estructura en "T" formada por dos inductancias de valor normalizado  $L = 2$  y una capacidad de valor normalizado  $C=1$  (véase Figura 1).

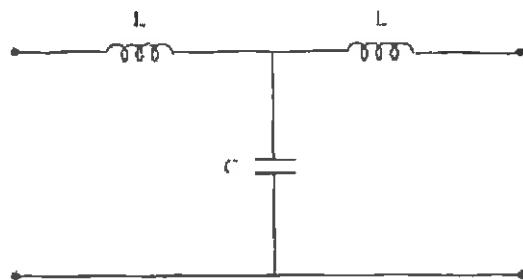
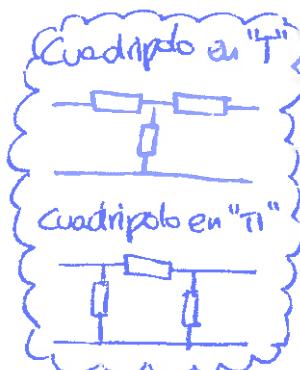


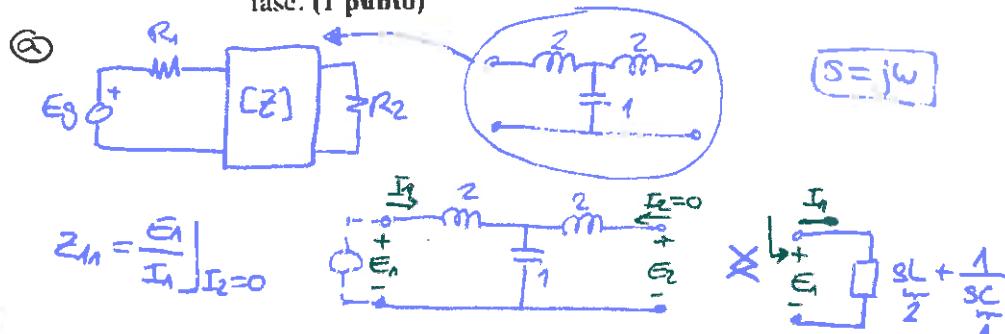
Figura 1

Se conecta la puerta 1 del cuadripolo Q a un generador de tensión  $E_g$  que tiene una impedancia interna resistiva de valor normalizado  $R_1=2$ .

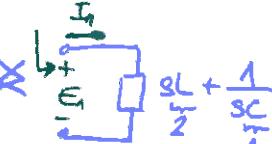
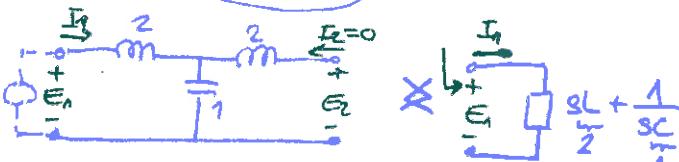
Se conecta la puerta 2 de dicho cuadripolo a una carga resistiva de valor normalizado  $R_2=2$ .

Se pide:

- Calcular la matriz de impedancias  $Z(s)$  del cuadripolo Q. (1 punto)
- Determinar la relación  $H(s) = \frac{E_2(s)}{E_g(s)}$  en función de la matriz  $Z(s)$  y de  $R_1$  y  $R_2$ , siendo  $E_2$  la tensión en  $R_2$ . (1 punto)
- Determinar la expresión de la respuesta en amplitud  $|H(j\omega)|$  y la respuesta en fase  $\arg(H(j\omega))$  en función de  $\omega$ . Dibuje aproximadamente las curvas de amplitud y fase. (1 punto)



$$Z_{11} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$



$$Z_{11} = 2L + \frac{1}{SC} = \frac{1 + S^2 LC}{SC} \Rightarrow Z_{11} = \frac{1 + 2S^2}{S}$$

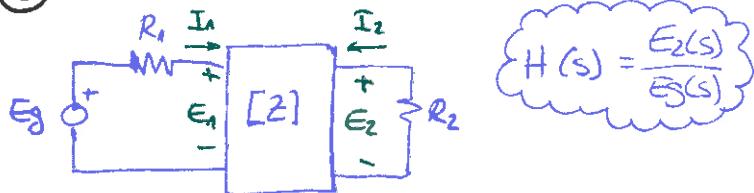
$$Z_{22} = \left. \frac{E_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \xrightarrow{\text{cuadripolo simétrico}} Z_{22} = \frac{1 + 2S^2}{S}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{SC} \xrightarrow{C=1} Z_{21} = \frac{1}{S}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{E_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \xrightarrow{\begin{array}{l} E_2 = Z_{21} \\ \text{Por ser un cuadripolo RLC} \\ (\text{no tiene generadores dependientes}) \end{array}} Z_{12} = \frac{1}{S}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + 2S^2}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{1}{S} & \frac{1 + 2S^2}{S} \end{bmatrix}$$

(b)



$$H(s) = \frac{E_2(s)}{E_g(s)}$$

- $$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{E_g - E_1}{R_1} &= I_1 \Rightarrow E_1 = E_g - R_1 I_1 \\ \textcircled{2} \quad E_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ \textcircled{3} \quad E_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ \textcircled{4} \quad \frac{E_2}{R_2} &= -I_2 \end{aligned}$$

4 ecuaciones, 5 incógnitas:  $E_1, E_2, E_g, I_1, I_2$

Resolvemos:

$$\text{Sustituyendo } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{4} \text{ en } \textcircled{2}: E_g - R_1 I_1 = Z_{11} I_1 - Z_{12} \frac{E_2}{R_2}$$

$$\text{Sustituyendo } \textcircled{4} \text{ en } \textcircled{3}: E_2 = Z_{21} I_1 - Z_{22} \frac{E_2}{R_2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{Z_{21}} \left( E_2 + Z_{22} \frac{E_2}{R_2} \right)$$

Finalmente sustituimos  $I_1$  en  $\textcircled{2}$ :

$$E_g + Z_{12} \frac{E_2}{R_2} = (R_1 + Z_{11}) I_1 \Rightarrow E_g + Z_{12} \frac{E_2}{R_2} = (R_1 + Z_{11}) \frac{1}{Z_{21}} \left( E_2 + Z_{22} \frac{E_2}{R_2} \right)$$

$$E_g = E_2 \left( (R_1 + Z_{11}) \frac{1}{Z_{21}} \left( 1 + \frac{Z_{22}}{R_2} \right) - \frac{Z_{12}}{R_2} \right) \Rightarrow E_g = E_2 \frac{(R_1 + Z_{11}) R_2 \left( 1 + \frac{Z_{22}}{R_2} \right) - Z_{12} Z_{22}}{Z_{21} R_2}$$

$$\hookrightarrow H(s) = \frac{E_2}{E_g} = \frac{Z_{21} R_2}{(R_1 + Z_{11}) R_2 \frac{R_2 + Z_{22}}{R_2} - Z_{12} Z_{22}} \Rightarrow H(s) = \frac{Z_{21} R_2}{(R_1 + Z_{11})(R_2 + Z_{22}) - Z_{12} Z_{22}}$$

(c)

$$R_1 = 2, R_2 = 2$$

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{21} \\ Z_{11} &= Z_{22} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{-2 Z_{21}}{(2+Z_{11})(2+Z_{22}) - Z_{11} Z_{22}} = \frac{2 Z_{21}}{(2+Z_{11})^2 - Z_{22}^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{s}}{\left(2 + \frac{2s^2 + 1}{s}\right)^2 - \left(\frac{1}{s}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{2 \cdot \frac{1}{j\omega}}{\left(2 + \frac{2(j\omega)^2 + 1}{j\omega}\right)^2 - \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2} = \frac{\frac{2}{j\omega}}{\frac{(2j\omega - 2\omega^2 + 1)^2}{(j\omega)^2} - \frac{1}{(j\omega)^2}} = \frac{2j\omega}{(2j\omega - 2\omega^2 + 1)^2 - 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(2j\omega - 2\omega^2 + 1)^2 - 1^2} \stackrel{\text{diferencia de cuadrados}}{=} \frac{2j\omega}{(2j\omega - 2\omega^2 + 1 + 1)(2j\omega - 2\omega^2 + 1 - 1)} = \frac{2j\omega}{(2j\omega - 2\omega^2 + 2)(2j\omega - 2\omega^2)}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(2j\omega - 2\omega^2 + 2)(j\omega + j\omega)} = \frac{1/2}{(j\omega - \omega^2 + 1)(1+j\omega)}$$

$$H(j\omega) \in \mathbb{C}, \text{ para representarlo tenemos que calcular su módulo}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega - \omega^2 + 1)(1+j\omega)} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\frac{1}{2}}{|j\omega - \omega^2 + 1| \cdot |1+j\omega|} = \frac{1/2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \sqrt{1+\omega^2}}$$

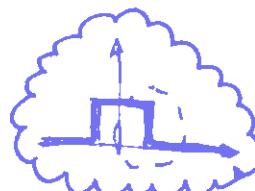
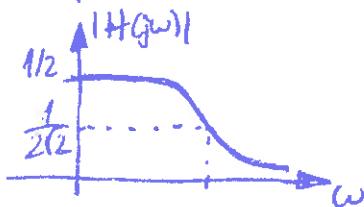
$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \quad |Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/2}{\sqrt{1+\omega^2 + \omega^4 - 2\omega^2} \sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{1+\omega^4 - \omega^2} \sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{1+\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 - \omega^2 - \omega^4}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}$$

Filtro Butterworth  
orden 3

No tenemos que hacer el examen exhaustivo, por teoría se sabe que la gráfica de este tipo de filtro es:

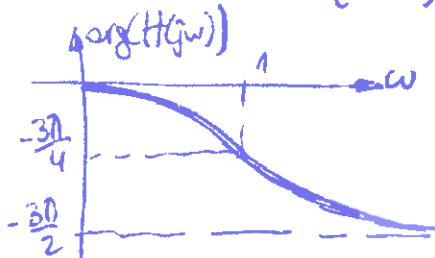


$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\omega^2+j\omega)(1+j\omega)}$$

$$\arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{2}\right) - (\arg(1-\omega^2+j\omega) + \arg(1+j\omega)) = [\arg(a+bj) = \arctg \frac{b}{a}]$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

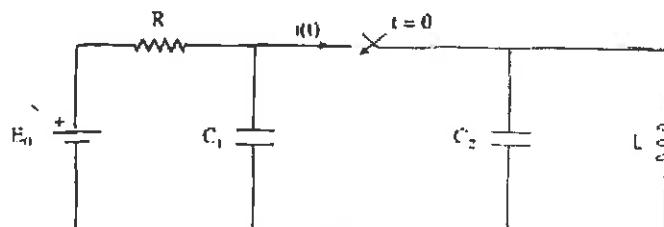
$$\arg(H(j\omega)) = 0 - \arctg\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right) - \arctg \omega$$



Baja  $\frac{\pi}{2}$  periodo pdo, como es de orden 3 baja  $\frac{3\pi}{2}$

Ejercicio 2

Considérese el circuito de la Figura 2 con los datos que se indican en la misma. El interruptor se cierra en  $t = 0$  habiendo supuesto el circuito válido en  $-\infty < t < \infty$  con tensiones y corrientes nulas en  $C_2$  y  $L$  para  $t < 0$ .



Datos Normalizados

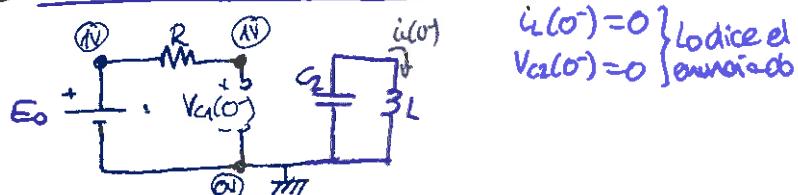
$$\begin{aligned}R &= 1/2 \\L &= 1 \\C &= C_1 = 1/2 \\E_0 &= 1\end{aligned}$$

Figura 2

Se pide:

- Dibujar el circuito en el dominio de Laplace incorporando las condiciones iniciales en  $t = 0^-$  como generadores.
- Determinar la transformada de Laplace  $I(p)$  de la corriente  $i(t)$  a través del interruptor,  $I(p) = L[i(t)]$ , calculada a partir del análisis del circuito de la cuestión (a).
- Calcular la corriente  $i(t)$ ,  $t \geq 0$  a partir del resultado de la cuestión (b). esto es,  $i(t) = L^{-1}[I(p)]$ . Interpretar físicamente el resultado.

(a) Circuito en  $t = 0^-$  ( $t < 0$ )

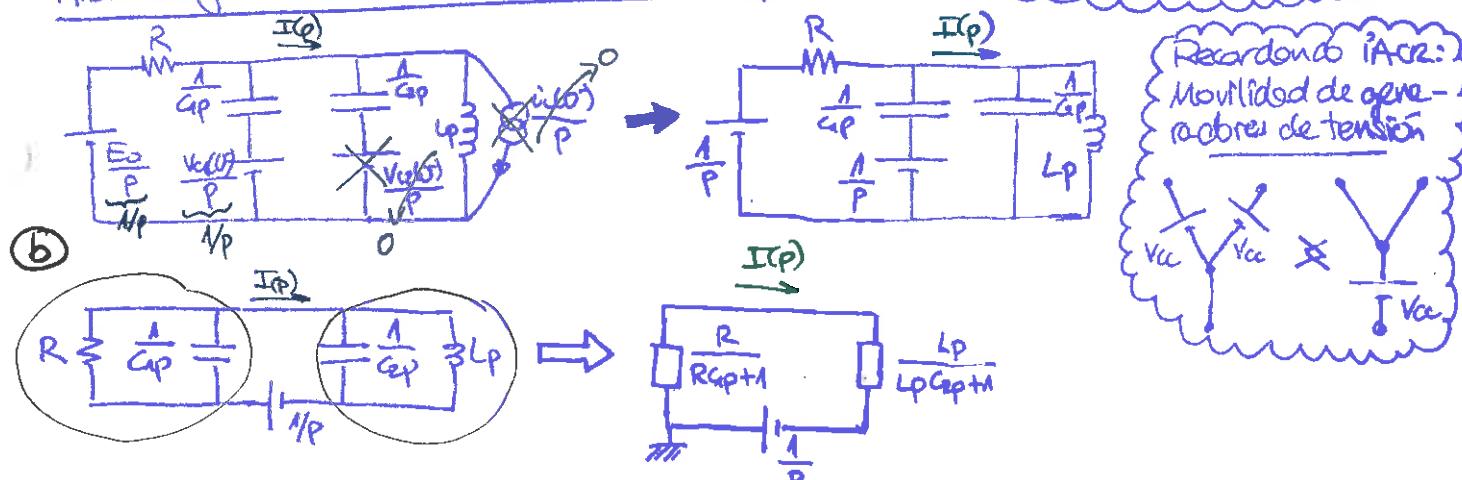


$$\begin{aligned}i(0^-) &= 0 \\V_{C1}(0^-) &= 0\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Indice el} \\ \text{enunciado} \end{array} \right.$$

$$V_{C2}(0^-) = E_0 = 1V$$

Al cerrar el interruptor, existe variación de parámetros (cACE)  
Pero al hacerlo por Laplace no tenemos que preocuparnos

Ahora dibujamos el circuito en el dominio de Laplace ( $t > 0$ ):



$$\text{Malla: } \frac{1}{P} - I(p) \left( \frac{R}{RC_1 p + 1} + \frac{Lp}{Lp C_1 p + 1} \right) = 0 \Rightarrow I(p) = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{R}{RC_1 p + 1} + \frac{Lp}{Lp C_1 p + 1}}$$

$$I(p) = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1/2}{1/2 \cdot 1/2 p + 1} + \frac{p}{1/2 p^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{2} p + 2 + \frac{p}{1/2 p^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{2(p^2+2) + 2p(p+4)}{(p+4)(p^2+2)}} = \frac{(p+4)(p^2+2)}{2p(p^2+2) + 2p^2(p+4)}$$

$$I(p) = \frac{(p+4)(p^2+2)}{2p^3 + 4p^2 + 8p^2} = \frac{(p+4)(p^2+2)}{4p^3 + 8p^2 + 4p} = \frac{(p+4)(p^2+2)}{4p(p^2+2p+1)} \Rightarrow I(p) = \frac{(p+4)(p^2+2)}{4p(p+1)^2}$$

② como el grado de numerador y denominador es el mismo no podemos descomponer en fracciones directamente tendremos que dividir los polinomios o aplicar el truco que vimos a aplicar:

$$I(p) = \frac{(p+4)(p^2+2)}{4p(p+1)^2} \stackrel{\text{!!!}}{=} \frac{(p+4)(p^2+2) + p(p+1)^2 - p(p+1)^2}{4p(p+1)^2} = \frac{(p+4)(p^2+2) - p(p+1)^2}{4p(p+1)^2} + \frac{p(p+1)^2}{4p(p+1)^2}$$

$$I(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 4p^2 + 8 - p^3 - 2p^2 - p}{4p(p+1)^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2p^2 + p + 8}{4p(p+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{A}{4p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} A=8 \\ B=-\frac{3}{2} \\ C=-\frac{9}{4} \end{array} \right\} I(p) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4p} + \frac{-3/2}{p+1} + \frac{-9/4}{(p+1)^2}$$

$$i(t) = \frac{1}{4} \delta(t) + \left[ 2 - \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{3}{2}t \right) e^{-t} \right] u(t)$$

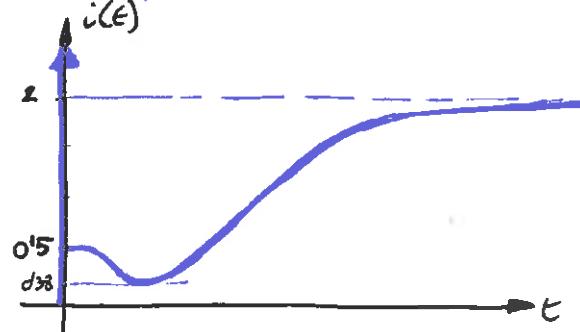
$$i(t) = \frac{1}{4} \delta(t) + 2u(t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t) - \frac{9}{4} t e^{-t} u(t)$$

$\delta(t)$  es una corriente infinita en el instante  $t=0$  que sirve para cargar el condensador

En  $t=0$ ,  $i(0)=\infty$  debido a la corriente que es necesaria para cambiar bruscamente la tensión de los condensadores (ya que existe variación de parámetros).

En  $t \rightarrow \infty$ ,  $i(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 2$  (régimen permanente)

en  $t=0^+$ ,  $i(0^+) = 0.5$ .



Ejercicio 3

Sea el circuito de capacidades comutadas de la Figura 3.

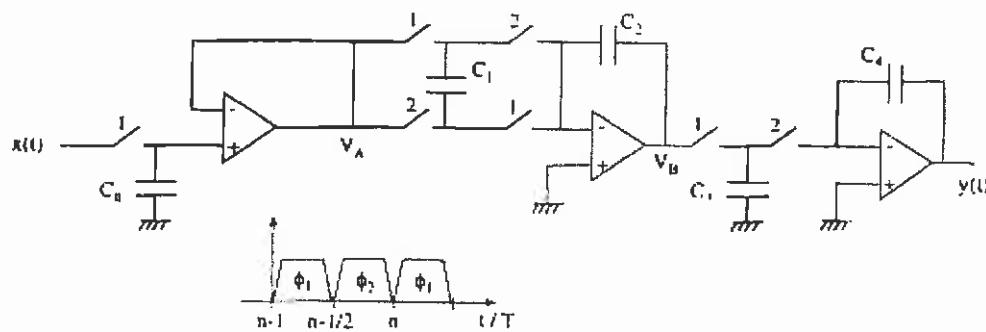


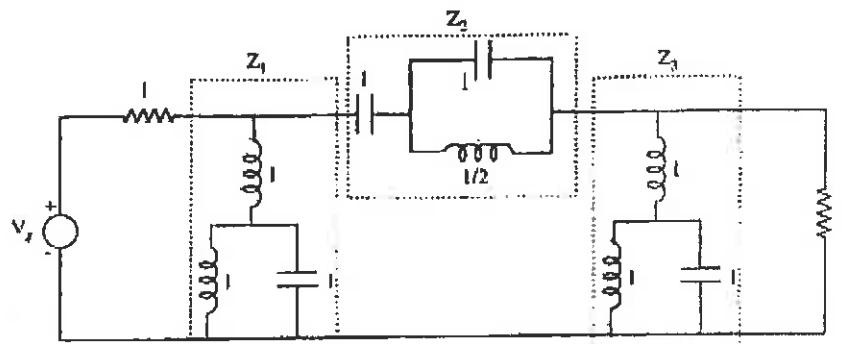
Figura 3

Se pide:

- Plantear las ecuaciones en el dominio Z, correspondientes a las dos fases de reloj. (1 punto)
- Obtener la función de transferencia  $H_{21}(z) = \frac{Y^{(2)}(z)}{X^{(1)}(z)}$ . (0.5 puntos)
- Razonar si el filtro es o no estable. (0.5 puntos)

Ejercicio 4

El circuito de la figura 4 se ha obtenido a partir de un filtro paso bajo de Butterworth de tercer orden, habiendo aplicado la transformación de frecuencias  $s = \frac{s'^2 + 1}{s' (s'^2 + 2)}$ .



En este ejercicio:  
A) Frecuencia "baja"  $\omega_1$   
B) Frecuencia "media"  $\omega_2$   
C) Frecuencia "alta"  $\omega_3$

Figura 4

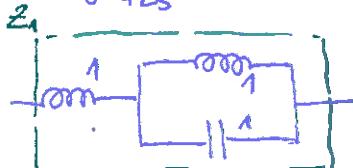
Se pide:

a) Obtener el filtro de Butterworth original.

b) Dibujar aproximadamente  $|H(j\omega)| = 2 \frac{V_2}{V_i}$ , respuesta de amplitud en función de la frecuencia del filtro multibanda.

c) Obtener un filtro equivalente al de la figura 4, sintetizando  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$  por la segunda forma canónica. Dibujar la nueva estructura del filtro.

$$\textcircled{a} \quad s = \frac{s'^2 + 1}{s'^3 + 2s'}$$



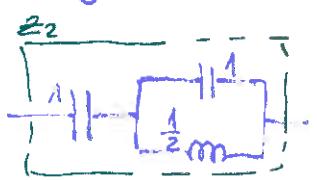
PRIMERA FORMA CANÓNICA

$$Z_1(s') = 1s' + \frac{1}{1s' + \frac{1}{1s'}} = s' + \frac{1}{s' + \frac{1}{s'}} = s' + \frac{s'}{s'^2 + 1} = \frac{s'^3 + 2s'}{s'^2 + 1} \Rightarrow Z_1(s) = \frac{1}{s}$$

$Z_1(s) = \frac{1}{s}$  es la impedancia de un condensador  $C=1$   $\rightarrow \frac{1}{s}$

$$\text{Análogamente con } Z_3(s) \Rightarrow Z_3(s) = \frac{1}{s}$$

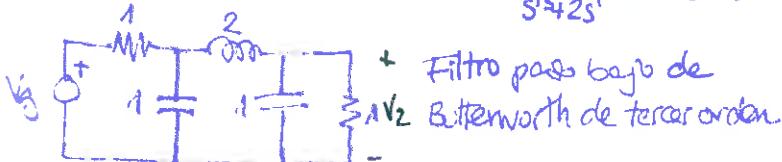
$\textcircled{b}$



PRIMERA FORMA CANÓNICA

$$Z_2(s') = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s' + \frac{1}{\frac{1}{2}s'}} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s' + \frac{2}{s'}} = \frac{1}{s'} + \frac{s'}{s'^2 + 2} = \frac{s'^2 + 2 + s'}{s'(s'^2 + 2)} = \frac{2s'^2 + 2}{s'^3 + 2s'}$$

$$Z_2(s') = 2 \frac{s'^2 + 1}{s'^3 + 2s'} \Rightarrow Z_2(s) = 2s \text{ es la impedancia de una bobina } L=2 \text{ mH}$$



Filtro paso bajo de Butterworth de tercer orden.

$\textcircled{c}$

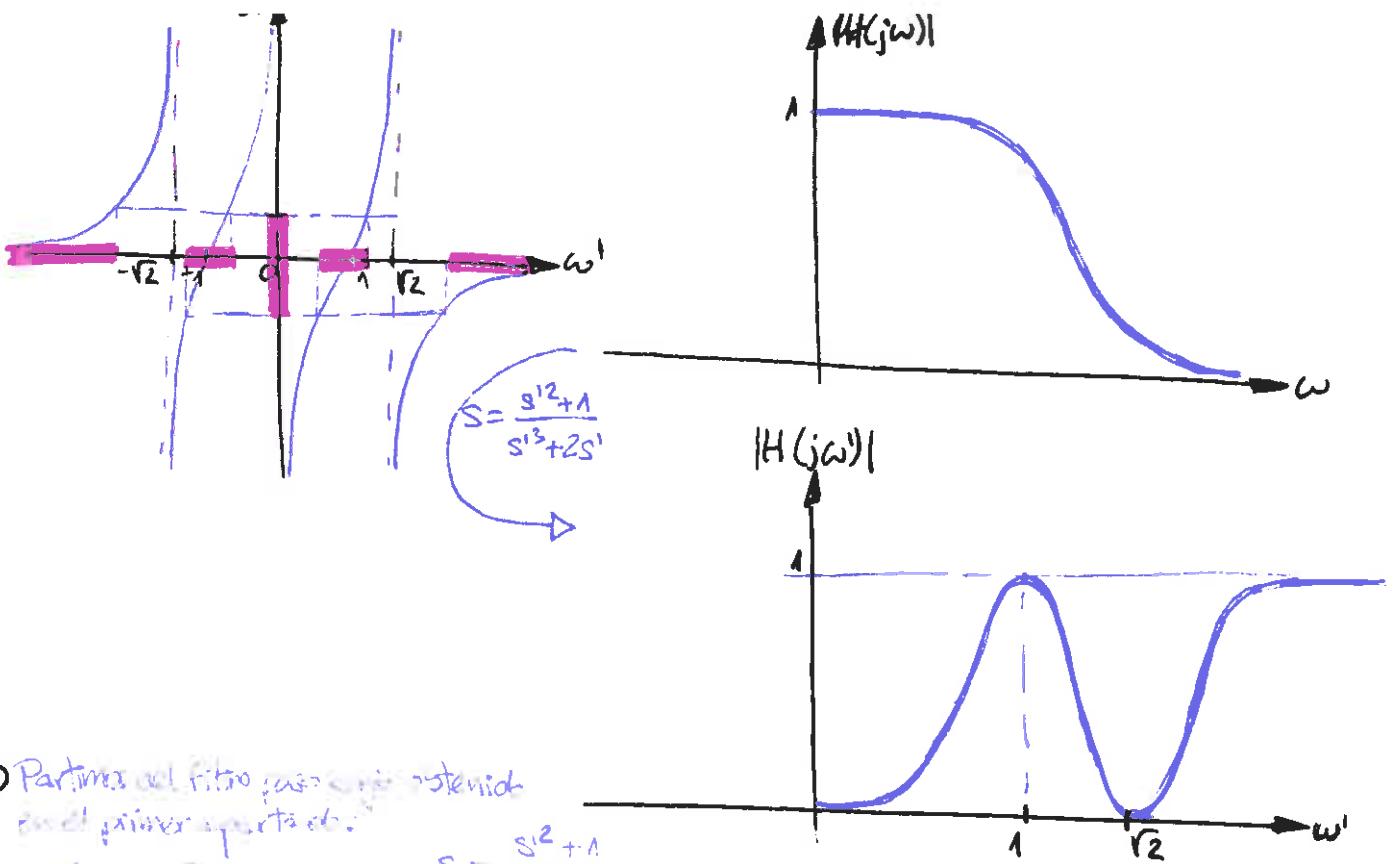
$$s = \frac{s'^2 + 1}{s'^3 + 2s'} \quad s = j\omega \quad s = j\omega \quad \frac{(j\omega)^2 + 1}{j\omega(j\omega^2 + 2j\omega)} \Rightarrow j\omega = \frac{-\omega^2 + 1}{-\omega^3 + 2\omega} = \frac{1 - \omega^2}{j(2\omega - \omega^3)}$$

$$j\omega = -j \frac{1 - \omega^2}{\omega^3 - 2\omega} \Rightarrow \boxed{j\omega = \frac{\omega^2 - 1}{\omega(\omega^2 - 2)}}$$

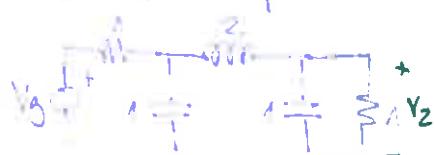
$$\text{Polos en } \left\{ \begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{2} \\ \omega = -\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Ceros en } \left\{ \begin{array}{l} \omega = 1 \\ \omega = -1 \end{array} \right.$$

Para dibujar  $|H(j\omega)|$  en ningún caso se calcula  $H(j\omega)$  analizando el circuito



② Partimos del filtro para su implementación en el primer apartado:



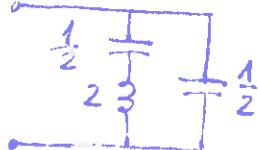
$$S = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2}$$

2.1.  $S = G(s) = \frac{V_2}{V_g}$

$$Z_L = 2s \rightarrow Y_L(s) = \frac{1}{s} \quad H_L(s) = \frac{s^2 + 2s^1}{2(s^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{2K_A s^1}{s^2 + 1} + K_{AO} s^1 \right)$$

$$K_A = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^1} \cdot \frac{s^3 + 2s^2}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 + 2) = 1$$

$$K_{AO} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 2s^2}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} = 1$$



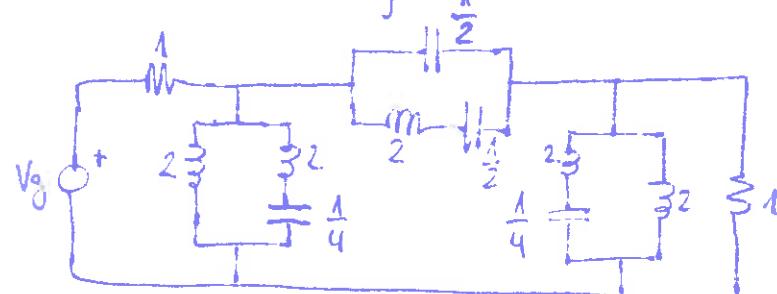
2.2. DISEÑO DE FILTRO CANÓNICO

$$Z_L = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s} \rightarrow Y_C(s) = s \Rightarrow Y_C(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \frac{K_C}{s^1} + \frac{2K_A s^1}{s^2 + 2}$$

$$K_C = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 1}{s^1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$2K_A = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 2}{s^1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2} = \frac{-2 + 1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$Y_C(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^1} + \frac{\frac{1}{2}s^1}{s^2 + 2} = \frac{1}{2s^1} + \frac{1}{2s^1 + 1} = \frac{1}{2s^1} + \frac{1}{\frac{3s^2 + 2}{2s^1 + 1}} = \frac{1}{2s^1} + \frac{1}{\frac{3s^2 + 2}{2s^1 + 1}} = \frac{1}{2s^1} + \frac{1}{\frac{3s^2 + 2}{2s^1 + 1}} = \frac{1}{2s^1} + \frac{1}{\frac{3s^2 + 2}{2s^1 + 1}}$$



Ejercicio 1

Considere el cuadripolo de la Figura 1, definido mediante sus parámetros híbridos (matriz  $[h]$ ).

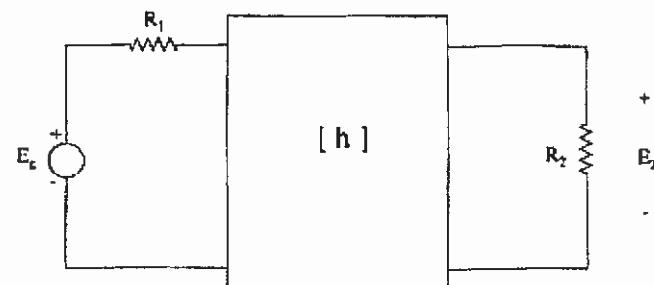
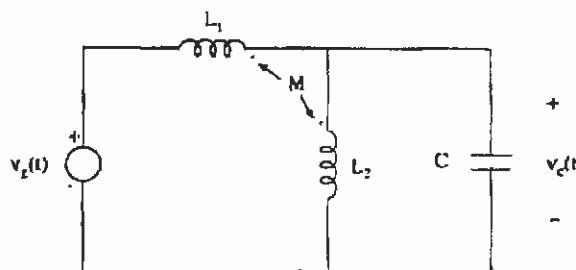


Figura 1

- Determine la relación  $\frac{E_2}{E_s}$  en función de los parámetros "h" y de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . (1 punto)
- Suponiendo que  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $h_{11} = 0$ ,  $h_{12} = -h_{21} = 1$ ,  $h_{22} = \frac{1}{j\omega}$ , dibujar las curvas de amplitud y fase de  $\frac{E_2}{E_s}$ . (1 punto)

**Ejercicio 2**

Considérese el circuito de la figura 2 con condiciones iniciales nulas.



Datos normalizados:

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ L_1 = L_2 &= 1 \end{aligned}$$

**Figura 2**

Calcule:

- La relación  $\frac{V_C(p)}{V_g(p)}$ , donde  $V(p)$  es la transformada de Laplace de  $v(t)$ ,  $t > 0$ .
- Si  $v_g(t) = \delta(t)$  calcule el coeficiente de acoplamiento  $k$  entre  $L_1$  y  $L_2$  para que la tensión en bornas del condensador sea una señal sinusoidal de pulsación  $\omega_0 = \pi/3$ .

Observación:  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , donde  $M$  es la inductancia mutua y  $0 \leq k \leq 1$  es el coeficiente de acoplamiento entre  $L_1$  y  $L_2$ .

Ejercicio 4

Considere la estructura de la Figura 4:

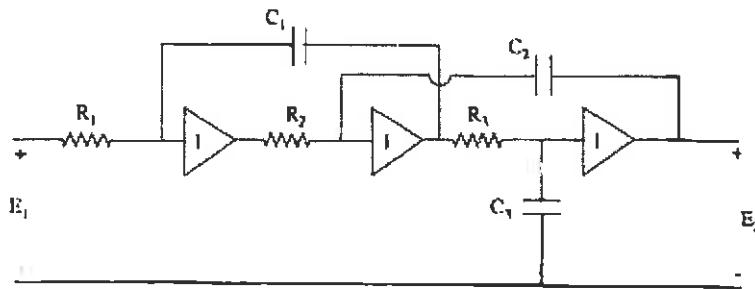


Figura 4

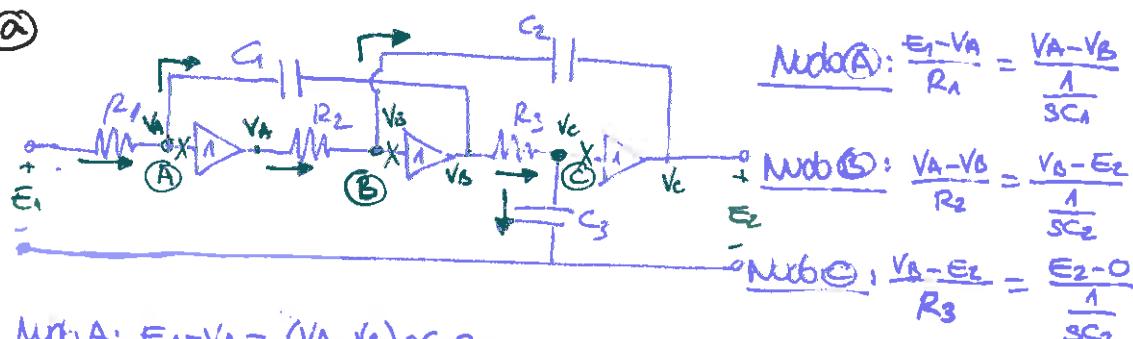
- a) Calcular la respuesta  $H(s) = \frac{E_2}{E_1}$  del filtro paso bajo de tercer orden. Considere

$$\text{que } \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \text{ y } \omega_3 = \frac{1}{R_3 C_3}.$$

- b) Calcule los valores de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , para que el circuito de la figura 4 tenga una respuesta  $H(s)$  de Butterworth de tercer orden, con  $\omega_c = 1$  pulsación de corte a 3dB.

- c) Dibuje aproximadamente los gráficos de Módulo y Fase de  $H(j\omega)$ .

(a)



$$\text{Nodo A: } E_1 - V_A = (V_A - V_B) s C_1 R_1$$

$$\text{Nodo B: } V_A - V_B = (V_B - E_2) s C_2 R_2$$

$$\text{Nodo C: } V_B - E_2 = E_2 s C_3 R_3 \Rightarrow V_B - E_2 = \frac{s E_2}{\omega_3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sumando...} \\ \omega_3 = \frac{1}{s C_3 R_3} \end{array} \right\}$$

$$V_A - E_2 = \frac{s^2 E_2}{\omega_2 \omega_3} + \frac{s E_2}{\omega_3} \Rightarrow V_A = E_2 \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_2 \omega_3} + \frac{s}{\omega_3} \right) \quad (2)$$

$$\text{Ahora sustituimos el nodo B en el nodo A: } E_1 - V_A = \frac{s^2 E_2}{\omega_2 \omega_3} s C_1 R_1 \Rightarrow E_1 - V_A = \frac{s^3 E_2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (1)$$

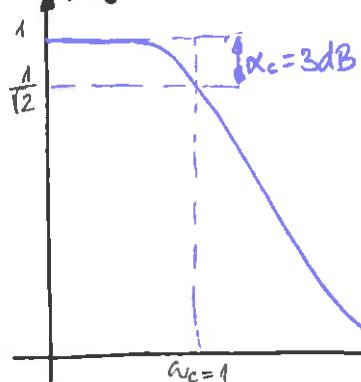
Finalmente, sustituimos (2) en (1):

$$E_1 - E_2 \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_2 \omega_3} + \frac{s}{\omega_3} \right) = \frac{s^3 E_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \Rightarrow E_1 = E_2 \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_2 \omega_3} + \frac{s^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + \frac{s^3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \right)$$

$$H(s) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_2 \omega_3} + \frac{s^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + \frac{s^3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 + s \omega_1 \omega_2 + s^2 \omega_1 + s^3}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{s^3 + \omega_1^2 s^2 + \omega_1 \omega_2 s + \omega_1 \omega_2 \omega_3}$$

⑤  $|H(j\omega)|$



$$\text{Para los filtros de Butterworth: } |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\frac{\omega}{\omega_c})^n}$$

Tenemos que  $n=3$  y  $\omega_c=1$ , por tanto:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^6}$$

$$\text{Ahora, como } s=j\omega: |H(s)|^2 = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\frac{s}{j})^6} = \frac{1}{1 - \epsilon^2 s^6}$$

Ahora tenemos que calcular el módulo de  $H(s)$  obtenido en el apartado anterior:

$$|H(s)|^2 = \frac{w_1 w_2 w_3}{s^3 + w_1 s^2 + w_1 w_2 s + w_1 w_2 w_3} \cdot \frac{w_1 w_2 w_3}{-s^3 + w_1 s^2 - w_1 w_2 s + w_1 w_2 w_3}$$

$$|H(s)|^2 = \frac{w_1 w_2 w_3}{-s^6 + (w_1^2 - w_1 w_2 w_3^2 + w_1 w_2 w_3 s^3 - w_1^2 s^4 + w_1^2 s^5 - w_1^2 w_2 s^3 + w_1^2 w_2 w_3 s^2 - w_1 w_2 s^4 + w_1^2 w_2 s^3 - w_1 w_2 s^2 + w_1 w_2 w_3 s^2 - w_1 w_2 w_3 s^3 + w_1^2 w_2 w_3 s^2 - w_1^2 w_2 w_3 s^4) + s^6}$$

$$|H(s)|^2 = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_1^2 w_2^2 w_3^2 + (w_1^4 - 2w_1 w_2 w_3^2 + (2w_1^2 w_2 w_3 - w_1^2 w_2^2)) s^2 - s^6}$$

$$\text{Ahora, identificamos con: } |H(s)|^2 = \frac{1}{1 - \epsilon^2 s^6}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 = -\epsilon^2 \\ w_1^2 - 2w_1 w_2 = 0 \\ 2w_1^2 w_2 w_3 - w_1^2 w_2^2 = 0 \\ 1 = w_1^2 w_2^2 w_3^2 \end{array} \right\}$$

4 ecuaciones con 4 incógnitas:  
 $w_1, w_2, w_3, \epsilon$

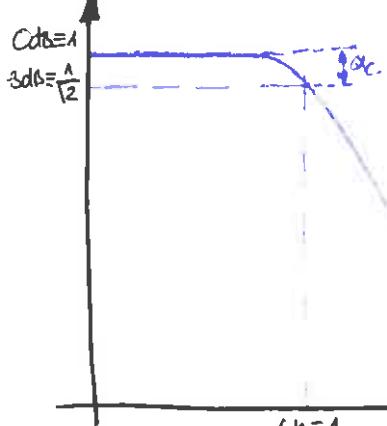
**NOTA:** También se puede calcular  $\epsilon$  con la fórmula de la página T-3.9:  
 $10 \log(1+\epsilon^2) = \alpha_c \Rightarrow 1+\epsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_c}{20}} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_c}{20}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{3}{20}} - 1} \Rightarrow \epsilon = 0.999$

$$w_1^2 - 2w_1 w_2 = 0 \Rightarrow w_1(w_1 - 2w_2) = 0 \Rightarrow w_1 = 2w_2$$

$$2w_1^2 w_2 w_3 - w_1^2 w_2^2 = 0 \Rightarrow w_1^2 w_2 (2w_3 - w_2) = 0 \Rightarrow w_2 = 2w_3 \Rightarrow w_3 = \frac{w_2}{2}$$

$$w_1^2 w_2^2 w_3^2 = 1 \Rightarrow (w_1^2)^2 w_2^2 \left(\frac{w_2}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow w_1^2 w_2^2 w_3^2 = 1 \Rightarrow w_1^2 = 1 \Rightarrow w_1 = 1 \quad w_2 = 2 \quad w_3 = 1 \quad \epsilon = 1$$

⑥  $|H(j\omega)|$



Para la fase: lo primero sustituimos  $w_1, w_2$  y  $w_3$  en  $H(s)$ :

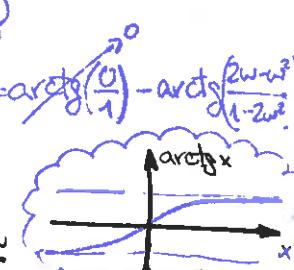
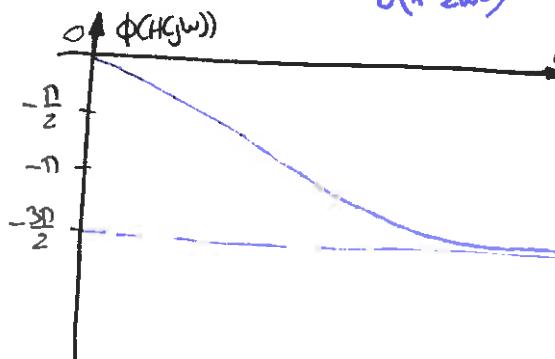
$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad \text{Ahora obtenemos } H(j\omega):$$

$$H(j\omega) = |H(s)| \frac{1}{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 - 2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\phi(H(j\omega)) = \arg(1 - 2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)) = \arctg\left(\frac{2\omega - \omega^3}{1 - 2\omega^2}\right)$$

$$\phi(H(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{2\omega - \omega^3}{1 - 2\omega^2}\right)$$

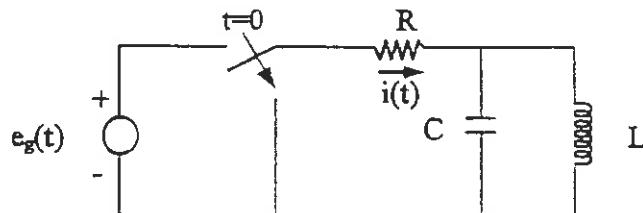


$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

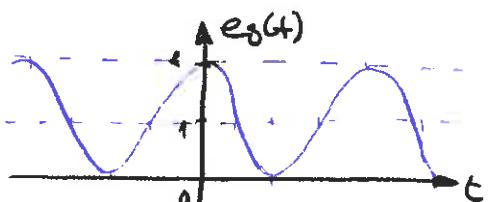
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3dB$$

Ejercicio 1

Dado el circuito de la figura



Datos:  
 $C = L = 1$   
 $R = 1/2$



Considerando  $e_g(t) = 1 + \cos(t)$ , para  $-\infty < t < +\infty$ , se pide:

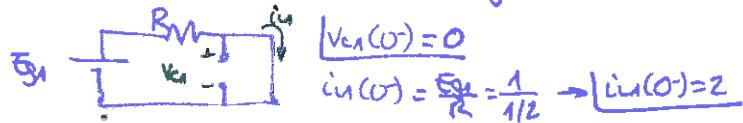
- Determinar las condiciones iniciales en  $t = 0$ .
- Determinar  $I(p)$ , transformada de Laplace de la corriente  $i(t)$  a través de la resistencia  $R$ .
- Calcular  $i(t)$ ,  $t > 0$ , a partir de la transformada inversa de Laplace de  $I(p)$ .

Ⓐ Circuito en  $t = 0^-$  ( $t < 0$ )

$$e_g(t) = E_{g1} + e_{g2}(t) = 1 + \cos t$$

Superposición:

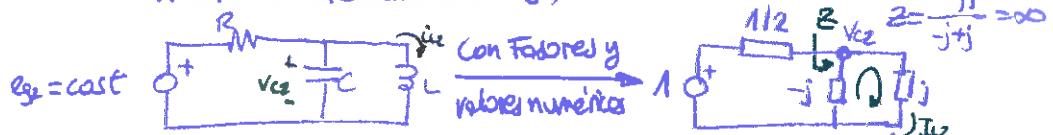
• En continua CC (sumamos  $e_{g2}(t)$ ):



$$v_{c1}(0^-) = 0$$

$$i_{u1}(0^-) = \frac{E_{g1}}{R} = \frac{1}{1/2} = 2 \rightarrow i_{u1}(0^-) = 2$$

• En alterna RMS (sumamos  $E_{g2}$ ):



$$v_{c2} = E_{g2} \rightarrow v_{c2} = 1 \text{ ya que por la resistencia no pasa corriente}$$

$$i_{u2} = \frac{v_{c2}}{j} = \frac{1}{j} \rightarrow i_{u2} = -j$$

Pasando los factores al tiempo:

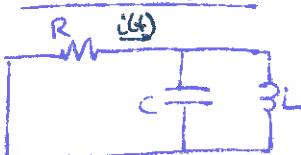
$$v_{c2} = 1 \rightarrow v_{c2}(t) = \cos t \rightarrow v_{c2}(0^-) = 1$$

$$i_{u2} = -j = 1 e^{j\frac{\pi}{2}} \rightarrow u_{u2}(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} t \rightarrow i_{u2}(0^-) = 0$$

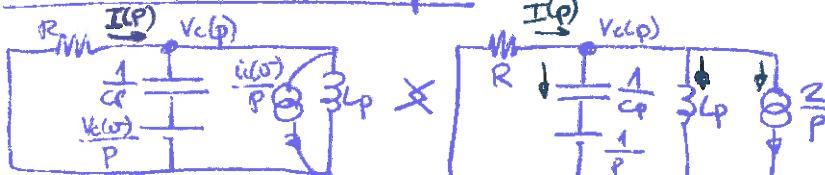
Finalmente:  $v_c(0^-) = v_{c1}(0^-) + v_{c2}(0^-) = 0 + 1 \rightarrow v_c(0^-) = 1$

$$i_u(0^-) = i_{u1}(0^-) + i_{u2}(0^-) = 2 + 0 \rightarrow i_u(0^-) = 2$$

Ⓑ Circuito en  $t = 0^+$



Circuito en el dominio de Laplace



Nodo:  $\frac{-V_c(p)}{R} = \frac{V_c(p)}{1/p} - \frac{1}{R} + \frac{V_c(p)}{Lp} + \frac{2}{Lp} \Rightarrow -2V_c(p) = p(V_c(p) - \frac{1}{R}) + \frac{V_c(p)}{p} + \frac{2}{p} \Rightarrow 2V_c(p) + pV_c(p) + \frac{V_c(p)}{p} = 1 - \frac{2}{p}$

$$V_c(p) = \frac{1 - \frac{2}{p}}{2 + p + \frac{1}{p}} \Rightarrow I(p) = \frac{-V_c(p)}{R} = -\frac{V_c(p)}{1/2} = -2V_c(p) \Rightarrow I(p) = \frac{-2 + \frac{4}{p}}{2 + p + \frac{1}{p}} \Rightarrow I(p) = \frac{-2p + 4}{p^2 + 2p + 1}$$

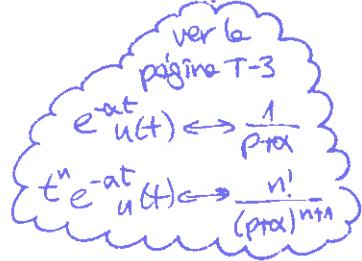
C)  $p^2 + 2p + 1 = 0 \Rightarrow (p+1)^2 = 0 \Rightarrow p = -1$  (double)

$$I(p) = \frac{-2p+4}{p^2+2p+1} = \frac{4-2p}{(p+1)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} \Rightarrow \frac{4-2p}{(p+1)^2} = \frac{A(p+1)+B}{(p+1)^2} \Rightarrow 4-2p = A(p+1)+B$$

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 6 \end{cases} \text{(Operando)}$$

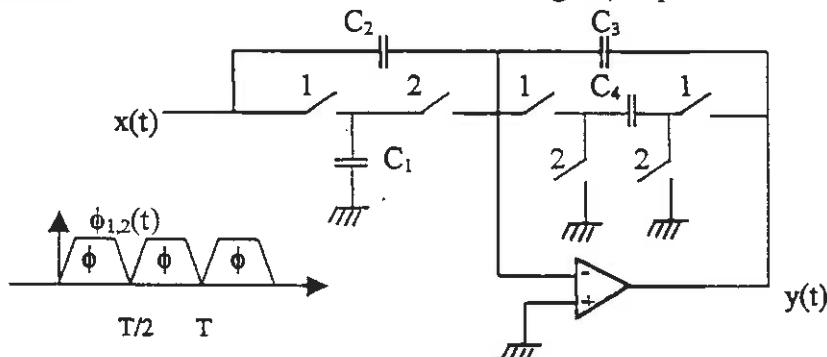
Por tanto:

$$I(p) = \frac{4-2p}{p^2+2p+1} = \frac{-2}{p+1} + \frac{6}{(p+1)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} i(t) = -2e^{-t} + 6te^{-t}, t \geq 0 \Leftrightarrow i(t) = (-2e^{-t} + 6te^{-t})u(t)$$



Ejercicio 2

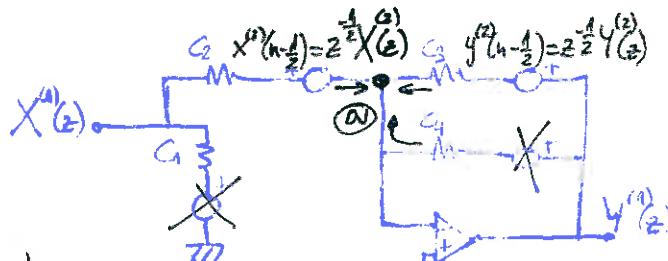
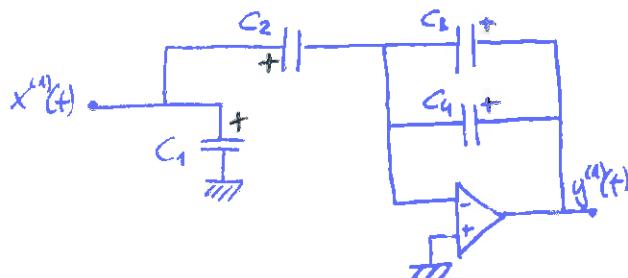
En el circuito de condensadores conmutados de la figura, se pide:



- Dibujar los circuitos, en el dominio Z, para cada una de las fases de reloj y plantear las ecuaciones resultantes del análisis por nudos.
- Encontrar la matriz  $[H(z)]$  que relaciona las dos secuencias de entrada con las dos secuencias de salida. Razonar en qué condiciones el circuito es estable.

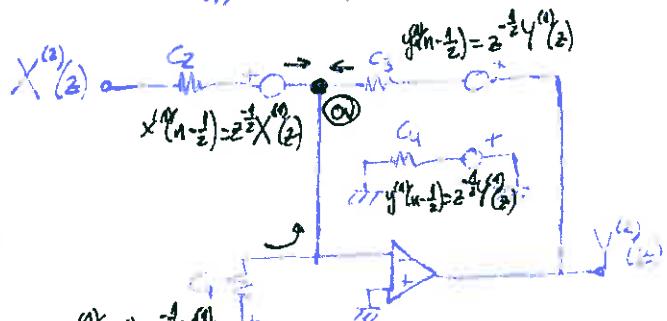
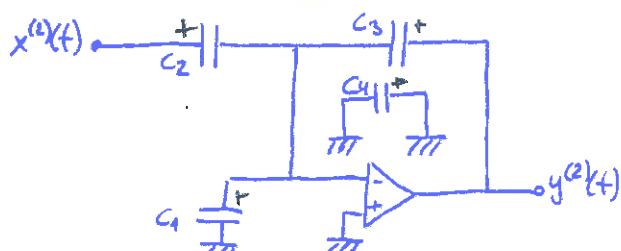
②

Fase  $\phi_1$ : interruptores 1 cerrados



$$\text{Nudo: } C_2 \left[ X^{(1)} - z^{-\frac{1}{2}} X^{(2)} \right] + C_3 \left[ Y^{(1)} - z^{-\frac{1}{2}} Y^{(2)} \right] + C_4 Y^{(1)} = 0 \quad X^{(1)}(n-\frac{1}{2}) = z^{\frac{1}{2}} X^{(2)}(z)$$

Fase  $\phi_2$ : interruptores 2 cerrados



③ Ordenando ambas ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} C_2 & -C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ (C_1 - C_2) z^{\frac{1}{2}} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_3 + C_4 & -C_3 z^{-\frac{1}{2}} \\ -C_3 z^{-\frac{1}{2}} & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (Y^{(1)}) \\ (Y^{(2)}) \end{cases} = [H(z)] \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_3 + C_4 & -C_3 z^{-\frac{1}{2}} \\ -C_3 z^{-\frac{1}{2}} & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 & C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ (C_1 - C_2) z^{\frac{1}{2}} & -C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 + C_4 & -C_3 z^{-\frac{1}{2}} \\ -C_3 z^{-\frac{1}{2}} & C_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_2 & C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ (C_1 - C_2) z^{\frac{1}{2}} & -C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{C_3(C_3+C_4)-C_3^2z^{-1}} \begin{pmatrix} C_3 & C_3z^{-\frac{1}{2}} \\ C_3z^{-\frac{1}{2}} & C_3+C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_2 & C_2z^{-\frac{1}{2}} \\ (C_2+C_4)z^{-\frac{1}{2}} & -C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

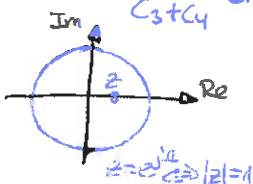
$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{C_3(C_3+C_4)-C_3^2z^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -C_3C_2 + C_3(C_2-C_1)z^{-1} & 0 \\ -C_2C_3z^{-\frac{1}{2}} + (C_2-C_1)(C_3+C_4)z^{-\frac{1}{2}} & C_2C_3z^{-\frac{1}{2}} - C_2(C_3+C_4) \end{pmatrix}}_{[H(z)]} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$[H(z)] = \frac{1}{C_3(C_3+C_4)-C_3^2z^{-1}} \begin{pmatrix} -C_3C_2 + C_3(C_2-C_1)z^{-1} & 0 \\ -C_2C_3z^{-\frac{1}{2}} + (C_2-C_1)(C_3+C_4)z^{-\frac{1}{2}} & C_2C_3z^{-\frac{1}{2}} - C_2(C_3+C_4) \end{pmatrix}$$

Para ver si el circuito es estable calculamos los polos de  $[H(z)]$ :

$$C_3(C_3+C_4)-C_3^2z^{-1}=0 \Rightarrow C_3+C_4-C_3z^{-1}=0 \Rightarrow C_3z^{-1}=C_3+C_4 \Rightarrow z=\frac{C_3}{C_3+C_4} \text{ único polo, } z \in \mathbb{R}$$

Por tanto, círculo estable  $\Leftrightarrow C_4 \neq 0$  ( $C_4 > 0$ )



Ejercicio 2

Dado el circuito de la Figura 1:

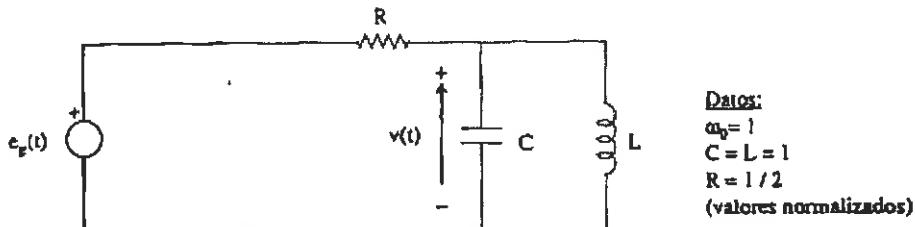
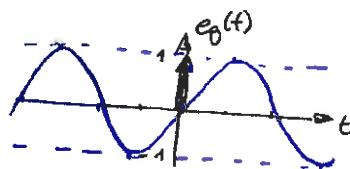


Figura 1

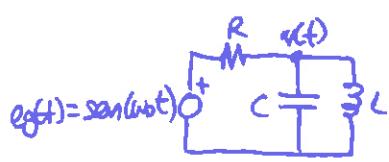


Considerando  $e_g(t) = \delta(t) + \sin(\omega_0 t)$ , para  $-\infty < t < +\infty$

Se pide:

- El circuito equivalente de Laplace, incluyendo las condiciones iniciales como generadores.
- Determinar  $V(p)$ , transformada de Laplace de la tensión  $v(t)$ ,  $t > 0$ , en bormas de la capacidad  $C$ .
- La expresión de  $v(t)$ ,  $t > 0$ , a partir de la transformada inversa de Laplace de  $V(p)$ .

Ⓐ \* Circuito en  $t < 0$ :

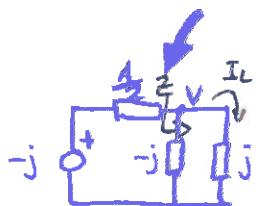


Estamos en RPS (regimen permanente sinusoidal)  $\Rightarrow$  FASORES

$$e_g(t) = \sin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow E_g = 1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$C \rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j} \Rightarrow Z_C = -j$$

$$L \rightarrow Z_L = j\omega_0 L \Rightarrow Z_L = j$$



$$Z = \frac{-j \cdot j}{-j + j} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \text{No circula corriente por la fuente ni la resistencia. Por lo que la corriente que hay en el circuito está pasando por el condensador y la bobina.}$$

Como no circula corriente por la resistencia

no hay caída de tensión, por lo que:  $V = E_g = -j$ . Así pues, pasando al tiempo:

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{-j}{j} \Rightarrow I_L = -1$$

$$\begin{cases} V = -j = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \rightarrow v(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v(t) = -\sin t \\ I_L = -1 = 1 \cdot e^{j\pi} \rightarrow i(t) = \cos(t + \pi) \Rightarrow i(t) = -\cos t \end{cases}$$

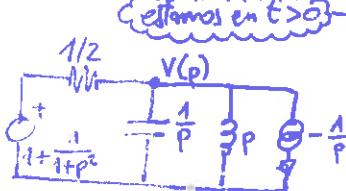
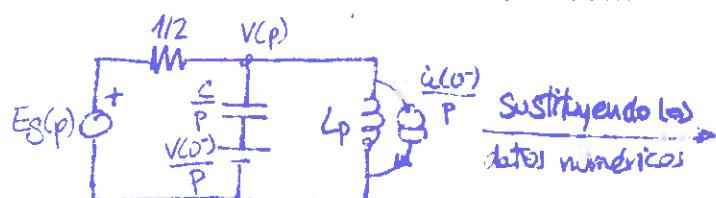
Luego, para  $t < 0$ :  $\begin{cases} v(t) = -\sin t \\ i(t) = -\cos t \end{cases}$

Particularizando para  $t = 0^-$

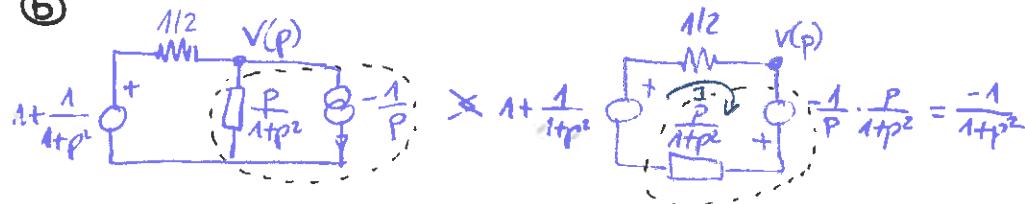
obtenemos las condiciones iniciales  $\Rightarrow v(0^-) = \sin 0 \Rightarrow v(0^-) = 0$   
 $i(0^-) = -\cos 0 \Rightarrow i(0^-) = -1$

Una vez obtenidas las condiciones iniciales...

\* Circuito en el dominio de Laplace (para  $t > 0$ ):  $e_g(t) = \delta(t) + \sin(\omega_0 t)v(t)$   $\xleftrightarrow{\mathcal{L}}$   $E_g(p) = 1 + \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$



⑥



$$\text{Malla: } 1 + \frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{2} I + \frac{-1}{1+p^2} - \frac{P}{1+p^2} I = 0 \Rightarrow I = \left( \frac{1}{2} + \frac{P}{1+p^2} \right) I \Rightarrow I = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{P}{1+p^2}}$$

$$\text{Ahora calculamos } V(p): V(p) + \frac{-1}{1+p^2} - \frac{P}{1+p^2} I = 0 \Rightarrow V(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{P}{1+p^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{P}{1+p^2}} = \frac{1}{1+p^2} + \frac{P}{(1+p^2)(\frac{1}{2} + \frac{P}{1+p^2})}$$

$$V(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{P}{(1+p^2) \frac{1+p^2+2P}{2(1+p^2)}} \Rightarrow V(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{2P}{p^2+2P+1} \Rightarrow V(p) = \frac{1+p^2+2P+2P(1+p^2)}{(1+p^2)(1+p^2+2P)}$$

$$V(p) = \frac{2P^3 + P^2 + 4P + 1}{(P^2 + 1)(P + 1)^2}$$

$$\textcircled{c} \quad v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(p))$$

$$\text{Lo hacemos por residuos: Polos de } V(p) \Rightarrow (P^2 + 1)(P + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P^2 + 1 = 0 \rightarrow P = \pm j \\ (P + 1)^2 = 0 \Rightarrow P = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Ver página 7-63  
Ejemplo 3

$$P_1 = +j \text{ simple}, P_2 = -j \text{ simple}, P_3 = -1 \text{ doble.}$$

$$\text{Residuo asociado a } P_1: K_1(t) = \lim_{P \rightarrow +j} (P - j) \frac{2P^3 + P^2 + 4P + 1}{(P - j)(P + j)(P + 1)^2} e^{Pt} = \frac{2j^3 + j^2 + 4j + 1}{(j + i)(j + 1)^2} e^{jt} = \frac{-2i + 4j}{2j(j + 1)^2} e^{jt} = \frac{2j}{2j(1+j)^2} e^{jt} = \frac{e^{jt}}{j^2 + 2j + 1}$$

$$K_1(t) = \frac{1}{2j} e^{jt}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{Residuo asociado} \\ \rightarrow P_2}} K_2(t) = \frac{1}{2(-j)} e^{-jt}$$

$$K_2(t) = \frac{-1}{2j} e^{-jt}$$

$$K_3(t) = \lim_{P \rightarrow P_3} \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} ((P - P_3)^2 V(p) e^{Pt}) = \lim_{P \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} ((P + 1)^2 V(p) e^{Pt}) = \lim_{P \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left( (P + 1)^2 \frac{2P^3 + P^2 + 4P + 1}{(P^2 + 1)(P + 1)^2} e^{Pt} \right)$$

$$K_3(t) = \lim_{P \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left( \frac{(-P^3 + P^2 + 4P + 1)e^{Pt}}{P^2 + 1} \right) = \lim_{P \rightarrow -1} \frac{[(6P^2 + 2P + 4)e^{Pt} + (2P^3 + P^2 + 4P + 1)t e^{Pt}] (P^2 + 1) - (2P^3 + P^2 + 4P + 1)e^{Pt} \cdot 2P}{(P^2 + 1)^2}$$

$$K_3(t) = \frac{2(8e^{-t} - (te^{-t}) - 8e^{-t})}{4} = 4e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} \Rightarrow K_3(t) = (2 - 2t)e^{-t}$$

$$\text{Finalmente: } v(t) = [K_1(t) + K_2(t) + K_3(t)] u(t) = \left[ \frac{1}{2j} e^{jt} - \frac{1}{2j} e^{-jt} + (2 - 2t)e^{-t} \right] u(t) = \left[ \underbrace{\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}}_{\text{sent}} + (2 - 2t)e^{-t} \right] u(t)$$

$$v(t) = [2\text{ant} + (2 - 2t)e^{-t}] u(t) \Leftrightarrow v(t) = \text{sent} + (2 - 2t)e^{-t}, t > 0$$

## SEPTIEMBRE 2000

### Ejercicio 3

En el circuito de condensadores conmutados de la Figura 3 se pide:

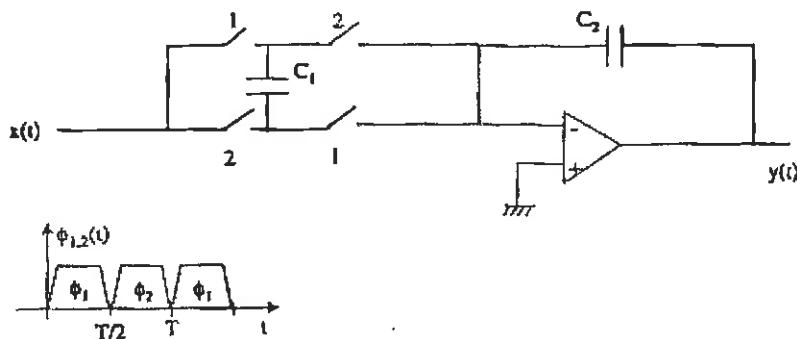
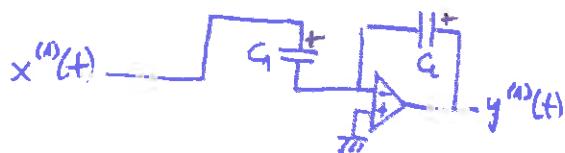
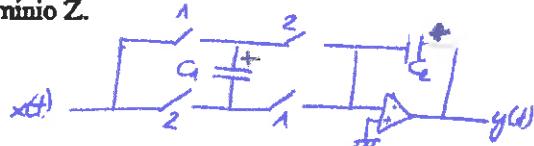


Figura 3

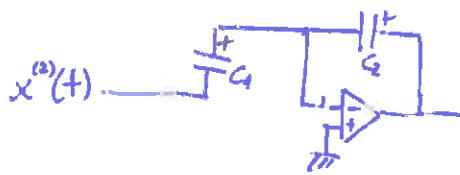
- Determinar las ecuaciones circuitales para la fase 1 y fase 2 en el dominio Z.
- Encontrar la matriz de transferencia del circuito,  $[H(z)]$ .

¿Es el circuito estable en sentido BIBO? Razoné la respuesta.

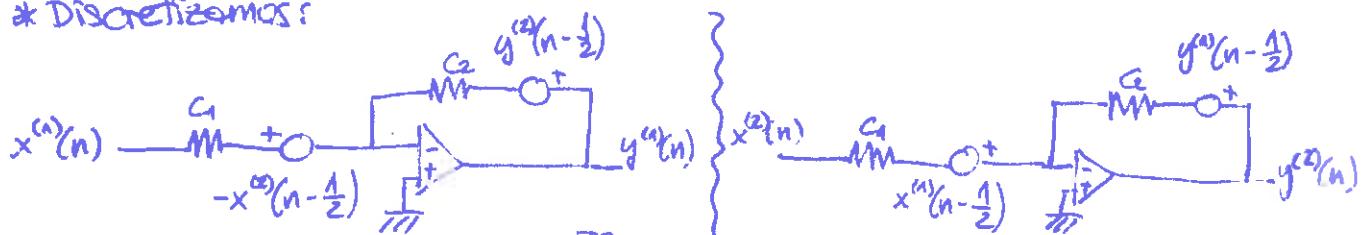
① • Fase 1:  $\phi_1$  -> (interruptor 1 cerrado)  
interruptor 2 abierto)



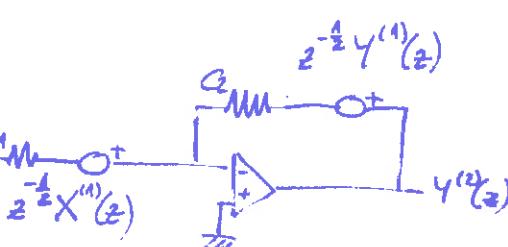
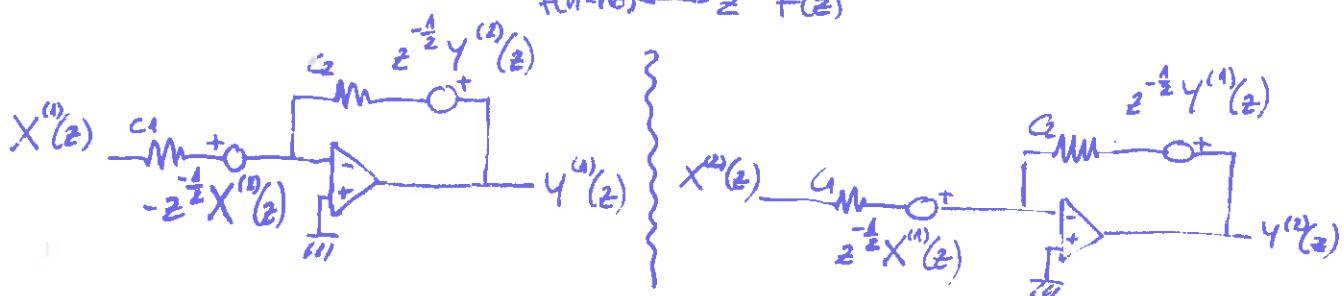
• Fase 2:  $\phi_2$  -> (interruptor 1 abierto)  
interruptor 2 cerrado)



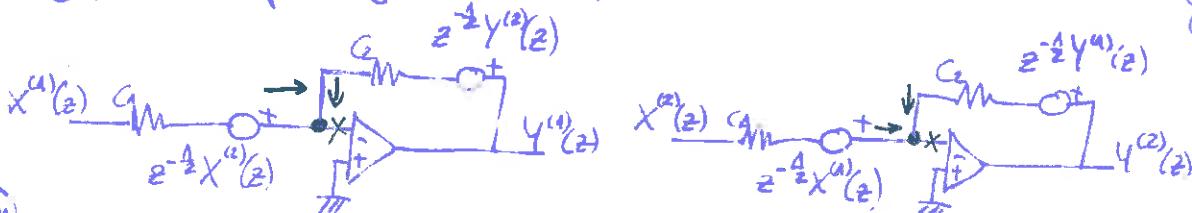
\* Discretizamos:



\* Pasamos a transformada Z:  $f(n) \xleftrightarrow{Tz} F(z)$   
 $f(n-n_0) \xleftrightarrow{Tz} z^{-n_0} F(z)$



Converting to positive on one position:



Recordemos  
 $I = \frac{V}{R}$   
 $I = VG$  condensador

(d)

$$[x^{(1)}(z) + z^{-\frac{1}{2}}X^{(2)}(z)]G_1 + [(Y^{(1)}(z) - z^{-\frac{1}{2}}Y^{(2)}(z)) - 0]C_2 = 0$$

(e)

$$[x^{(2)}(z) + z^{-\frac{1}{2}}X^{(1)}(z)]C_1 + [(Y^{(2)}(z) - z^{-\frac{1}{2}}Y^{(1)}(z)) - 0]G_2 = 0$$

Ahora simplificamos

$$\begin{cases} (x^{(1)} + z^{-\frac{1}{2}}X^{(2)})G_1 + (Y^{(1)} - z^{-\frac{1}{2}}Y^{(2)})G_2 = 0 \\ (X^{(2)} + z^{-\frac{1}{2}}X^{(1)})C_1 + (Y^{(2)} - z^{-\frac{1}{2}}Y^{(1)})G_2 = 0 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_1 z^{-\frac{1}{2}} \\ C_1 z^{-\frac{1}{2}} & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 & -C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ -C_2 z^{-\frac{1}{2}} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = [H(z)] \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & -C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ -C_2 z^{-\frac{1}{2}} & C_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1 & C_1 z^{-\frac{1}{2}} \\ C_1 z^{-\frac{1}{2}} & C_1 \end{pmatrix}}_{[H(z)]} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = - \frac{1}{C_2 - C_2 z^{-1}} \begin{pmatrix} C_2 & C_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ C_2 z^{-\frac{1}{2}} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_1 z^{-\frac{1}{2}} \\ C_1 z^{-\frac{1}{2}} & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

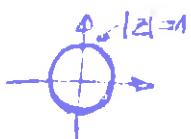
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = - \frac{1}{C_2(1-z^{-1})} \begin{pmatrix} C_1 z_2 + C_1 z_2 z^{-1} & C_1 z_2 z^{-\frac{1}{2}} + C_1 z_2 z^{-\frac{1}{2}} \\ C_1 z_2 z^{-\frac{1}{2}} + C_1 z_2 z^{-\frac{1}{2}} & C_1 z_2 z^{-1} + C_1 z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1(1+z^{-1}) & -2C_1 z^{-1/2} \\ C_2(1-z^{-1}) & C_2(1-z^{-1}) \\ -2C_1 z^{-1/2} & -C_1(1+z^{-1}) \\ C_2(1-z^{-1}) & C_2(1-z^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow [H(z)] = \begin{pmatrix} -C_1(1+z^{-1}) & -2C_1 z^{-1/2} \\ C_2(1-z^{-1}) & C_2(1-z^{-1}) \\ -2C_1 z^{-1/2} & -C_1(1+z^{-1}) \\ C_2(1-z^{-1}) & C_2(1-z^{-1}) \end{pmatrix}$$

BIBO = Bounded In Bounded Out Circuito estable BIBOS

$$\text{Polar } [H(z)] : C_2(1-z^{-1}) = 0 \Rightarrow 1-z^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = z^{-1} \Rightarrow |z| = 1$$



Circuito NO estable porque el polo no está en |z| < 1

Ejercicio 4

Considere las funciones de transferencia siguientes:

$$H_1(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

- a) Determine y dibuje  $|H_1(j\omega)|$  y  $|H_2(j\omega)|$ .
- b) Exponga razonadamente las posibles utilidades de dos circuitos cuyas funciones de transferencia fueran, respectivamente,  $H_1(s)$  y  $H_2(s)$ .

① ②

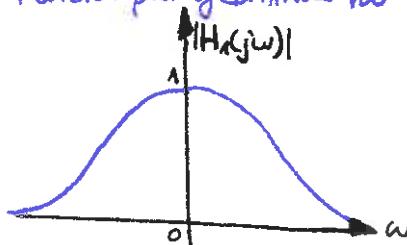
$$H_1(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s^2 + s + s + 1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$H_1(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \rightarrow H_1(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} = \frac{1}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1} = \frac{1}{1 - 2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)}$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1}{|1 - 2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)|} = \frac{1}{|(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega^4 - 4\omega^2 + 4\omega^2 + \omega^6 - 4\omega^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}}$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} \quad \omega = 0 \rightarrow |H_1(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0^6}} = 1 \quad \omega \rightarrow \infty \rightarrow |H_1(j\infty)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty^6}} = 0$$

Función par y continua  $\forall \omega$



Un circuito con esta función de transferencia hace la función de filtro paso bajo.

$$H_2(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

$$H_2(j\omega) = H_2(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{1}{-j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j(\omega - \omega^3)}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{|1 - \omega^2 + j(\omega - \omega^3)|} = \frac{1}{|(1 - \omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4 - 2\omega^2 + \omega^2 + \omega^6 - 2\omega^4}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^6 - \omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^6 - \omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

$|H_2(j\omega)|$  es par

$$|H_2(j\cdot 1)| = \frac{1}{|(1 - 1^2 - 1^2 + 1)} = \infty$$

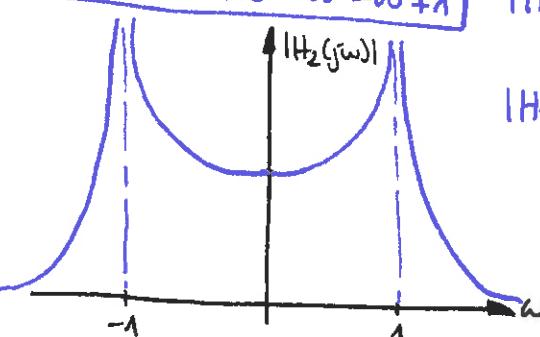
$$|H_2(j(-1))| = \frac{1}{|(-1)^6 - (-1)^4 - (-1)^2 + 1} = \infty$$

$$|H_2(j0)| = \frac{1}{|0^6 - 0^4 - 0^2 + 1} = 1$$

$$|H_2(j\infty)| = \frac{1}{\infty^6 - \infty^4 - \infty^2 + 1} = 0.$$

$H_2(s)$  no sería un filtro estable por tener polos en el eje  $j\omega$ .  
NO ES ÚTIL COMO FILTRO

Sin embargo podría emplearse como oscilador.



Ejercicio 1

Considere el cuadripolo de la Figura 1, definido mediante sus parámetros impedancia (matriz [Z]).

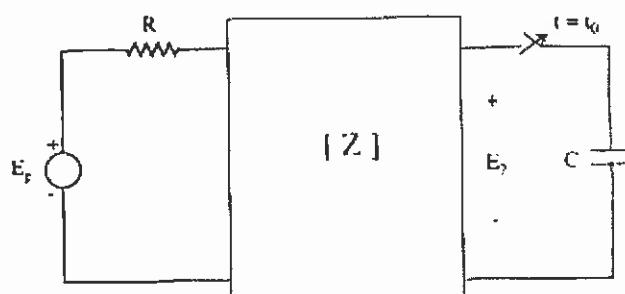


Figura 1

- Con la capacidad de carga  $C$  conectada a la salida del cuadripolo (interruptor de la Figura 1 cerrado), determine la relación  $\frac{E_2}{E_r}$  en función de los parámetros  $[Z]$ , de la resistencia  $R$  y la capacidad  $C$ .
- Suponiendo que en  $t=t_0$  se abre un interruptor entre la capacidad de carga  $C$  y la salida del cuadripolo (interruptor de la Figura 1 abierto), determine la expresión de  $E_2$  para  $t > t_0$ , con los datos:

$$e_r(t) = u(t - t_0)$$

$$R = 1, \quad C = 1$$

$$Z_{11} = Z_{22} = p, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{p+1}$$

Ejercicio 2

En el circuito de capacidades comutadas de la Figura 2 se pide:

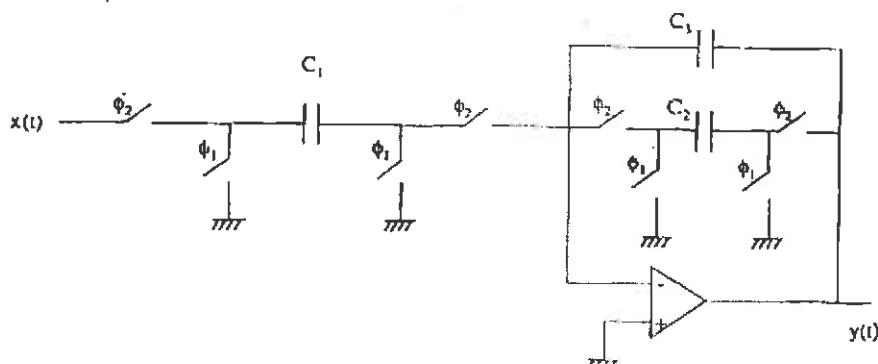


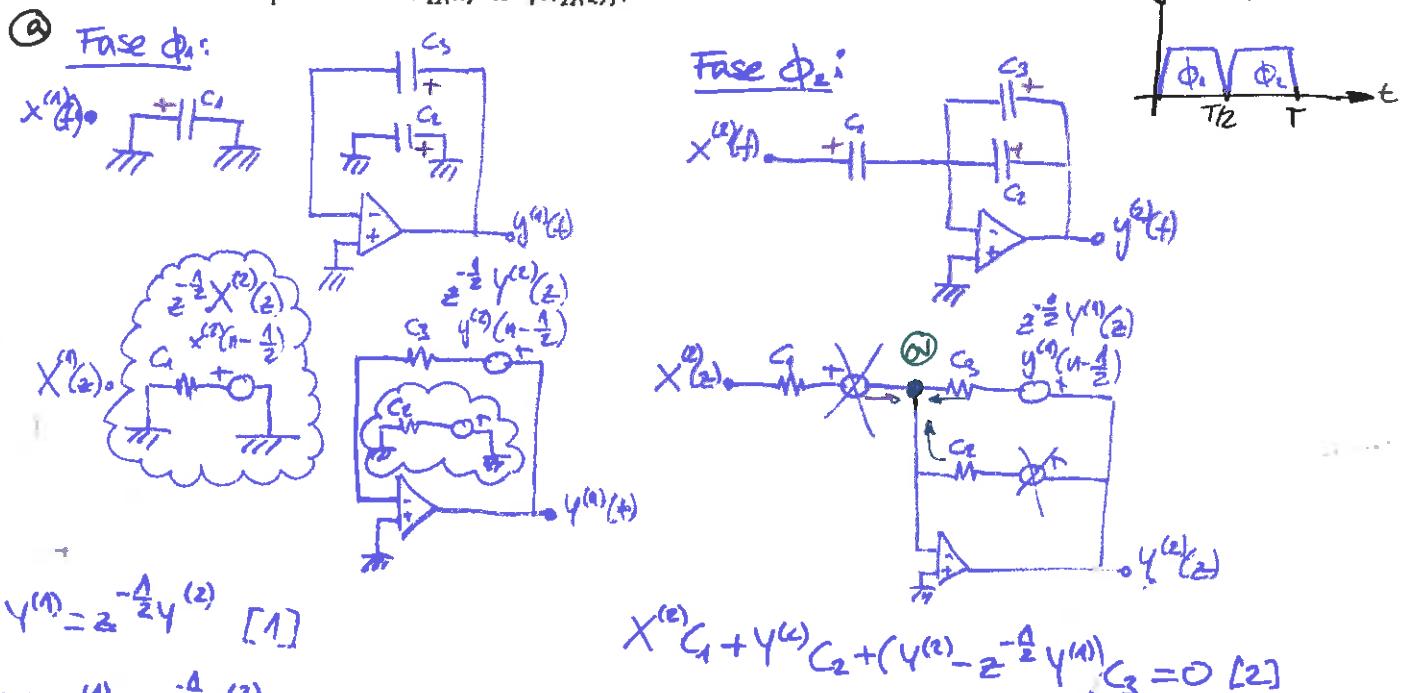
Figura 2

a) Obtener  $H_{22}(z) = \frac{Y^{(2)}(z)}{X^{(2)}(z)}$ , esto es, el cociente de las transformadas Z de las secuencias pares.

b) Sabiendo que  $\frac{C_1}{C_3} = 1, \frac{C_2}{C_3} = 1$ :

b1) Indique si el sistema es estable

b2) Represente gráficamente el módulo de la respuesta en frecuencia  $H_{22}(\omega)$  correspondiente a  $h_{22}(n) = Z^{-1}/H_{22}(z)$ .



$$[1] \quad Y^{(1)} = z^{-\frac{1}{2}} Y^{(2)}$$

$$[2] \quad X^{(2)} C_1 + Y^{(2)} C_2 + (Y^{(2)} - z^{-\frac{1}{2}} Y^{(2)}) C_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{2 ecuaciones y} \\ \text{3 incógnitas} \end{array} \right.$$

Sustituyendo [1] en [2]:

$$X^{(2)} C_1 + Y^{(2)} C_2 + (Y^{(2)} - z^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} Y^{(2)}) C_3 = 0 \Rightarrow X^{(2)} C_1 + Y^{(2)} C_2 + (1 - z^{-1}) Y^{(2)} C_3 = 0$$

$$X^{(2)} C_1 = (z^{-1} C_3 - C_3 - C_2) Y^{(2)}$$

$$\boxed{H_{22}(z) = \frac{Y^{(2)}(z)}{X^{(2)}(z)} = \frac{C_1}{z^{-1} C_3 - C_3 - C_2}}$$

⑥  $\frac{C_1}{C_3} = 1 \Rightarrow C_1 = C_3$  }  $\Rightarrow C_1 = C_2 = C_3$  sustituyendo:  $H_{22}(z) = \frac{z}{z^{-1}C - C - C} = \frac{z}{(z^{-1}-2)C} = \frac{1}{z^{-1}-2}$

$\frac{C_2}{C_3} = 1 \Rightarrow C_2 = C_3$



$|z| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$  Sistema estable

⑦ Polos en:  $z^{-1}-2=0 \Rightarrow z^{-1}=2 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$

⑧  $H_{22}(z) = \frac{1}{z^{-1}-2} = \frac{z}{z(z^{-1}-2)} = \frac{z}{1-2z}$

$H_{22}(e^{j\omega}) = H_{22}(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{1-2e^{j\omega}}$

$H_{22}(j\omega) = H_{22}(e^{j\omega})|_{\omega=j\omega} \Leftrightarrow H_{22}(j\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{1-2e^{j\omega T}}$  Tenemos que representar el módulo de  $H_{22}(j\omega)$

$$|H_{22}(j\omega)| = \left| \frac{e^{j\omega T}}{1-2e^{j\omega T}} \right| = \frac{|e^{j\omega T}|}{|1-2e^{j\omega T}|} = \frac{1}{|1-(2\cos(\omega T)+j2\sin(\omega T))|} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}[1-(2\cos(\omega T)+j2\sin(\omega T))]}^2 + \text{Im}[1-(2\cos(\omega T)+j2\sin(\omega T))]}^2}$$

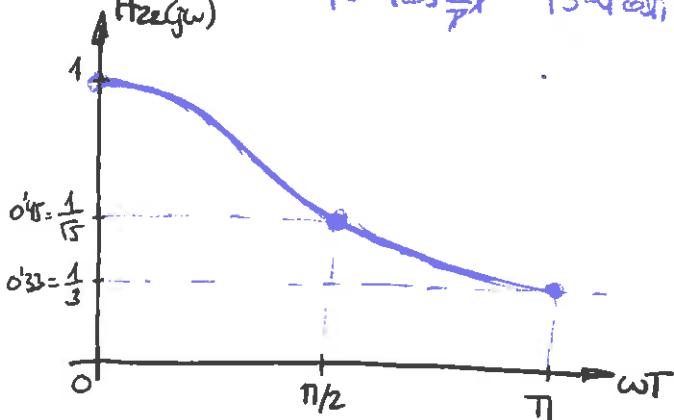
$$|H_{22}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\cos(\omega T))^2 + (2\sin(\omega T))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2(\omega T)-4\cos(\omega T)+4\sin^2(\omega T)}} \Rightarrow |H_{22}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\omega T)}}$$

Para saber qué tipo de filtro es probaremos con algunos valores:

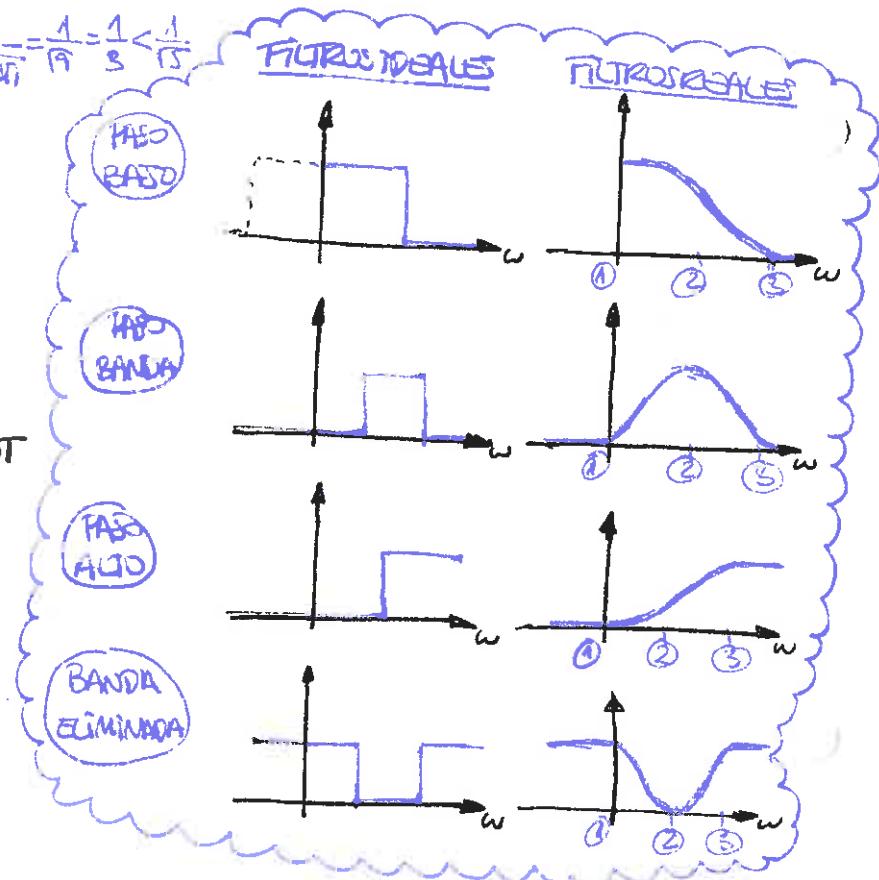
①  $\omega = 0 \rightarrow |H_{22}(j0)| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos 0}} = \frac{1}{\sqrt{5-4}} = 1 \neq 0^\circ$  solo puede ser paso bajo (banda eliminada)

②  $\omega = \frac{\pi}{2T} \rightarrow |H_{22}(j\frac{\pi}{2T})| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$

③  $\omega = \frac{\pi}{T} \rightarrow |H_{22}(j\frac{\pi}{T})| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\frac{\pi}{T})}} = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\frac{\pi}{T})}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$



Conclusión: es un filtro pasabajo

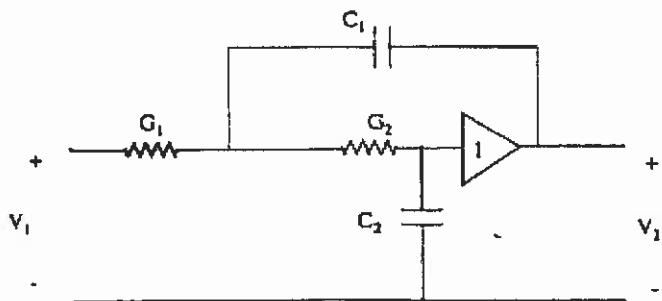


Ejercicio 3

La Figura 3 muestra la estructura de un filtro paso bajo de segundo orden, con función de

$$\text{transferencia: } H(s) = \frac{\frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2}\right)s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}} = \frac{V_2}{V_1}$$

Figura 3



Se desea que este filtro tenga una característica de transferencia de Butterworth, con 3 dB de atenuación a la frecuencia de corte

- Obtenga  $|H(\omega)|^2$  y  $H(s)$  para una frecuencia de corte normalizada  $\omega_c = 1$ .
- Obtenga  $H(s)$  para una frecuencia de corte  $\omega_c = 10^3 \text{ rad/seg}$ . Calcule los valores de  $\frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}$  y de  $\left(\frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2}\right)$
- La figura 4 muestra la estructura de un filtro paso alto. Sin analizarlo, obtenga su función de transferencia sabiendo que es el complementario (según se indica en el gráfico de la derecha de la Figura 4) del filtro del apartado a).

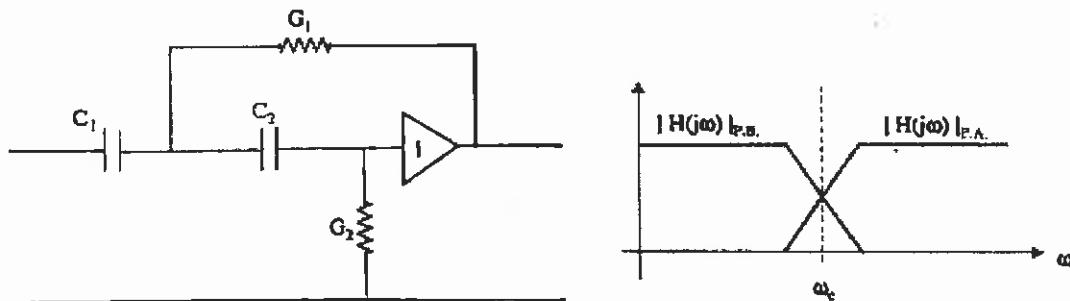


Figura 4

**Ejercicio 4**

Considere el filtro paso-bajo de tercer orden de la Figura 5, donde los valores de los elementos están normalizados:

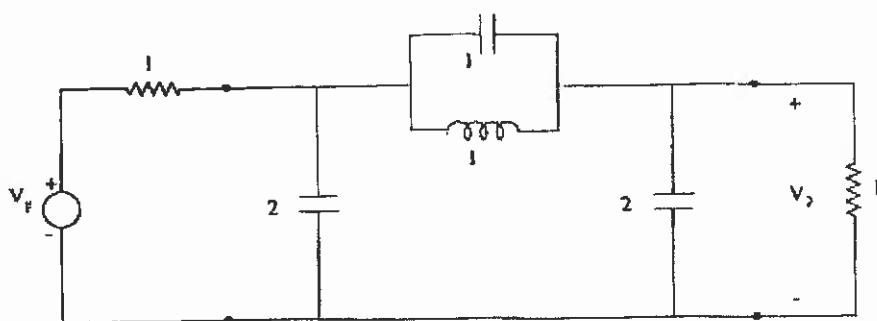


Figura 5

Se pide:

- Determinar la función de transferencia  $H(s) = 2 \frac{V_2}{V_r}$ . Compruebe que  $H(s=j) = 0$ . Determinar los ceros y los polos de  $H(s)$ .
- Calcular la transformación "paso-bajo a paso-banda" que hay que aplicar al circuito de la Figura 5 para crear dos ceros de transmisión (ceros de la función de transferencia) en el filtro paso-banda, en las pulsaciones  $\omega_1 = 2$  y  $\omega_2 = 4$ . Obtener la nueva estructura del filtro paso-banda.
- Determinar el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia del filtro paso-banda obtenido en b).

Ejercicio 1

Considere el circuito de la Figura 1, con los datos que se representan en la misma:

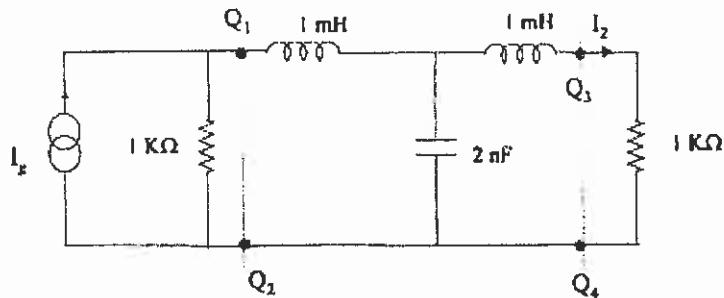


Figura 1

- Determinar los parámetros A, B, C, D (matriz [F]) en función de los parámetros impedancia (matriz [z]) de un cuadripolo. Aplíquese dicha relación al cuadripolo comprendido entre "Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>" y "Q<sub>3</sub>, Q<sub>4</sub>" de la Figura 1.
- Determine la respuesta en frecuencia  $H(j\omega) = \frac{I_2}{I_x}$  mediante el procedimiento que se estime más oportuno.
- Dibuje aproximadamente la amplitud y la fase de H(jω) en función de ω.

Ejercicio 4

El cuadripolo de la Figura 5 representa un filtro paso bajo con una atenuación de  $\alpha$  dB a la pulsación normalizada  $\hat{\omega}_c = 1$ .

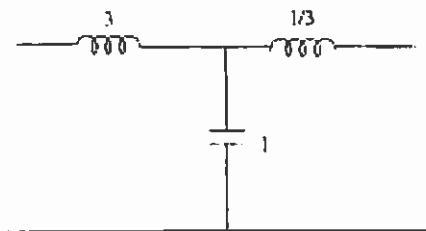


Figura 5

- Calcule la transformación de frecuencias  $\hat{s} = f(s)$  para convertir al filtro de la figura 5 en otro filtro con una banda eliminada centrada en  $\omega_c = 3$ . Dicha transformación empleará una constante de proporcionalidad  $k_0 = 1$ .
- ¿Cuál es el ancho de banda eliminada definido por las dos pulsaciones cuya atenuación es  $\alpha$  dB?
- Calcule y represente el cuadripolo resultante de la transformación de frecuencias. En el cuadripolo resultante calcule el parámetro  $y_{11}$  de su matriz de admitancias.

Ejercicio 1

Sea el circuito de la figura 1.1:

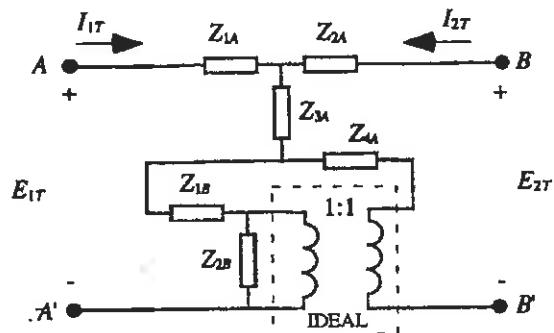


Figura 1.1

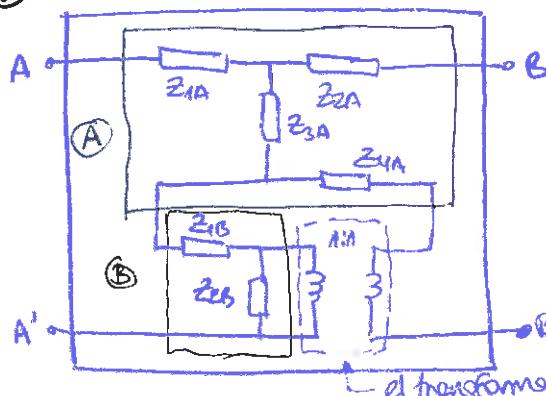
- Calcule los parámetros  $Z$  del cuadripolo comprendido entre las bornas  $AA'$  (puerta de entrada) y  $BB'$  (puerta de salida).
- Si el transformador ideal se sustituye por el circuito de la figura 1.2:



Figura 1.2

- Calcule los nuevos parámetros  $Z$  del cuadripolo definido en la figura 1.1. Justifique de manera razonada los diferentes resultados obtenidos en a) y b).
- Si se conecta una fuente de tensión  $E_g$  en los terminales  $AA'$ , determine cuál es el circuito equivalente de Thévenin en los terminales  $BB'$  para los cuadripolos descritos en a) y b).

(a) Asociación serie - serie



Gracias al transformador No hay corrientes circulatorias, por tanto, se cumple que la matriz de impedancias:  $[Z] = [z_a] + [z_b]$  (No hay que comprobar las condiciones de Brune)

(i) caso solo se pide separar el cuadripolo en dos si  $I_c = 0$

{ver página T-4.12}

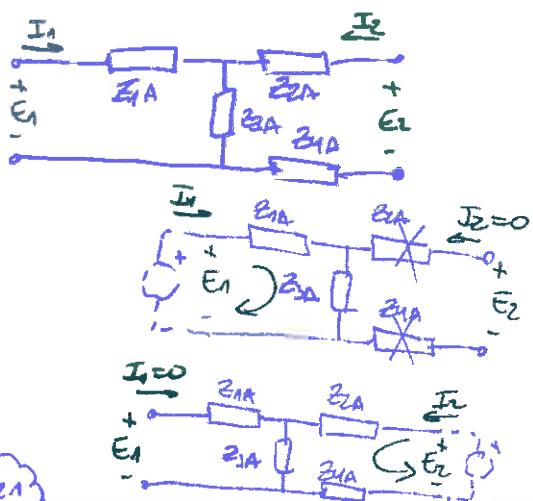
Estudiamos el cuadripolo A:

$$Z_{11} = \frac{E_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \rightarrow Z_{11} = Z_{1A} + Z_{3A}$$

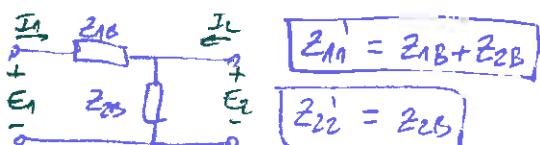
$$Z_{22} = \frac{E_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow Z_{22} = Z_{2A} + Z_{3A} + Z_{4A}$$

$$Z_{12} = \frac{E_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow Z_{12} = Z_{3A}$$

$$Z_{21} = \frac{E_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \rightarrow Z_{21} = Z_{3A}$$



Estudiando el cuadríptodo B:

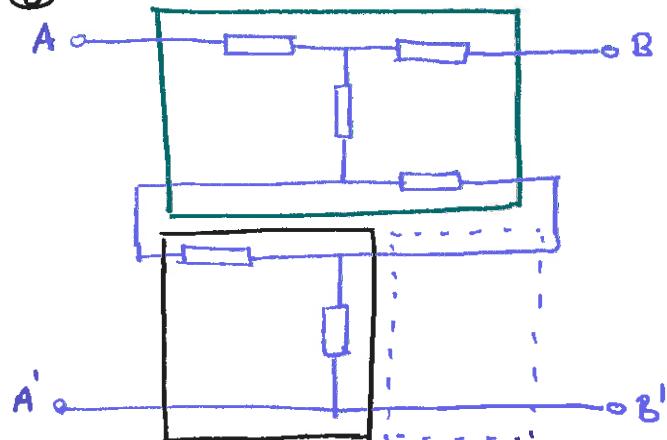


$$Z_{12} = Z_{2B}$$

$$Z_{21} = Z_{2B}$$

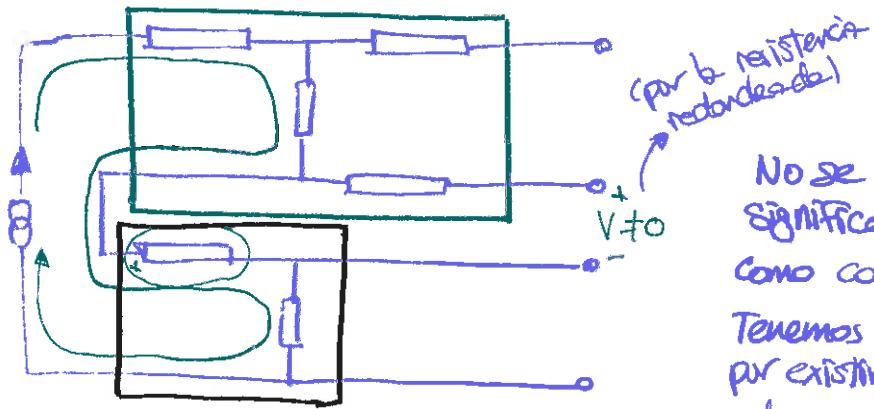
$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] = \begin{bmatrix} Z_{1A} & Z_{3A} \\ Z_{3D} & Z_{2A} + Z_{3A} + Z_{4A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1B} + Z_{2B} & Z_{2B} \\ Z_{2B} & Z_{2B} \end{bmatrix} \Rightarrow [Z] = \begin{bmatrix} Z_{1A} + Z_{3A} + Z_{1B} + Z_{2B} & Z_{3A} + Z_{2B} \\ Z_{3A} + Z_{2B} & Z_{2A} + Z_{3A} + Z_{4A} + Z_{2B} \end{bmatrix}$$

⑥



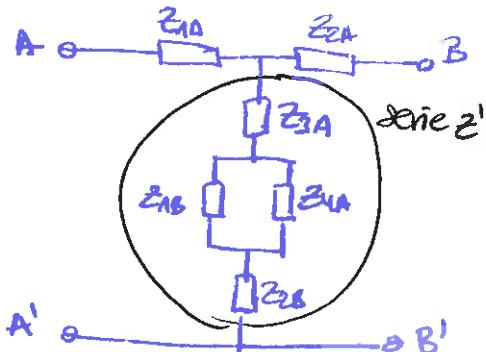
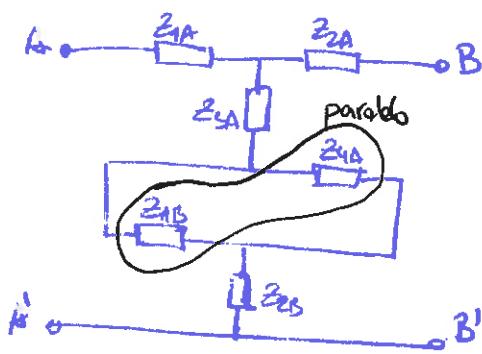
En ⑥ damos por hecho que no hay corrientes circulatorias (por haber un transformador)

Test de Brune (ver página T-4.8)



No se cumple el test de Brune, lo que significa que existen corrientes circulatorias. Como consecuencia,  $[Z_T] \neq [Z] + [Z']$

Tenemos pues, que estudiar el circuito completo para existir corrientes circulatorias, es decir, no podemos estudiar cada cuadríptodo por separado.



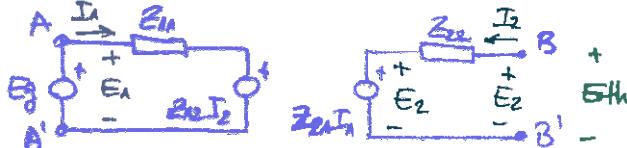
$$Z' = Z_{3A} + Z_{2B} + Z_{1B}/Z_{1A}$$

$$\begin{aligned} E_1 = \frac{E_1}{I_1 - I_2 = 0} \rightarrow Z_{11} = Z_{1A} + Z' \\ Z_{22} = \frac{E_2}{I_2 - I_1 = 0} \rightarrow Z_{22} = Z_{2B} + Z' \\ Z_{12} = \frac{E_1}{I_2 - I_1 = 0} \rightarrow Z_{12} = Z' \\ Z_{21} = \frac{E_2}{I_1 - I_2 = 0} \rightarrow Z_{21} = Z' \end{aligned}$$

Los resultados de ⑥ y ⑥ no coinciden ya que en el caso del apartado ⑥ no existen corrientes circulatorias y en el apartado ⑥ sí.

Los resultados de ⑥ y ⑥ no coinciden ya que en el caso del apartado ⑥ no existen corrientes circulatorias y en el apartado ⑥ sí.

③ Para cualquiera de los dos casos (a) ó (b), el circuito equivalente es:

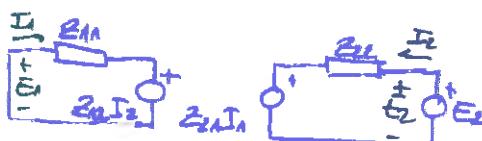


• Cálculo de  $E_{th}$ : borramos B, B' en circuito abierto  $\Rightarrow E_{th} = E_2 = Z_{2A}I_1$   
porque BB' está en circuito abierto

$$\text{Malla izquierda: } E_g - I_1 Z_{1A} - Z_{12} I_2 = 0 \Rightarrow E_g = I_1 Z_{1A} \Rightarrow I_1 = \frac{E_g}{Z_{1A}}$$

$$Z_{th} = Z_{2A} \frac{E_g}{Z_{1A}}$$

• Cálculo de  $Z_{th}$ : anulamos el generador independiente y ponemos un generador de prueba:  $Z_{th} = \frac{E_2}{I_2}$



$$\text{Malla izquierda: } I_1 Z_{1A} + I_2 Z_{2A} = 0 \Rightarrow I_1 = -I_2 \frac{Z_{2A}}{Z_{1A}}$$

$$\text{Malla derecha: } E_2 = I_1 Z_{1A} + I_2 Z_{2A} \Rightarrow E_2 = -I_2 \frac{Z_{1A} Z_{2A}}{Z_{1A} + Z_{2A}}$$

$$\text{Finalmente: } \frac{E_2}{I_2} = Z_{2A} - \frac{Z_{1A} Z_{2A}}{Z_{1A} + Z_{2A}} \Rightarrow Z_{th} = Z_{2A} - \frac{Z_{1A} Z_{2A}}{Z_{1A} + Z_{2A}}$$

Sustituimos para el caso (a):

$$E_{th} = \frac{Z_{3A} + Z_{2B}}{Z_{1A} + Z_{3A} + Z_{1B} + Z_{2B}} E_g$$

$$Z_{th} = Z_{2A} + Z_{3A} + Z_{4A} + Z_{2B} + \frac{(Z_{3A} + Z_{2B})^2}{Z_{1A} + Z_{3A} + Z_{1B} + Z_{2B}}$$

Sustituimos para el caso (b):

$$E_{th} = \frac{Z_{3A} + Z_{2B} + \frac{Z_{1B} Z_{4A}}{Z_{1B} + Z_{4A}}}{Z_{1A} + Z_{3A} + Z_{2B} + \frac{Z_{1B} Z_{4A}}{Z_{1B} + Z_{4A}}} E_g$$

$$Z_{th} = Z_{2A} + Z_{3A} + Z_{2B} + \frac{Z_{1B} Z_{4A}}{Z_{1B} + Z_{4A}} - \frac{\left( Z_{3A} + Z_{2B} + \frac{Z_{1B} Z_{4A}}{Z_{1B} + Z_{4A}} \right)^2}{Z_{1A} + Z_{3A} + Z_{2B} + \frac{Z_{1B} Z_{4A}}{Z_{1B} + Z_{4A}}}$$

Ejercicio 2

Sea el circuito de la figura 2 en el cual el interruptor se cierra en el instante  $t=0$ .

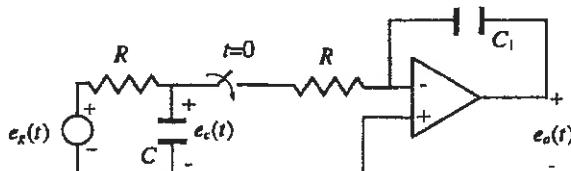


Figura 2

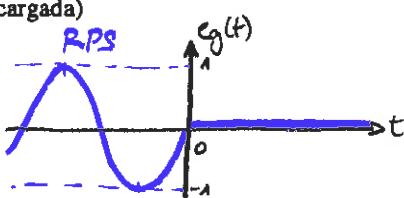
Donde la fuente  $e_s(t)$  proporciona una tensión dada por la siguiente expresión:

$$e_s(t) = \begin{cases} \sin(t) & -\infty < t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

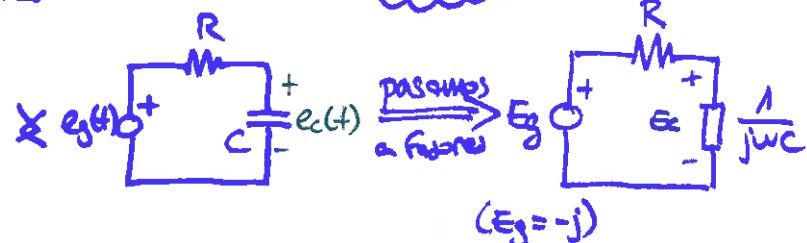
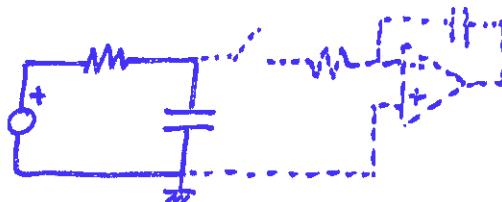
Considerando que  $R=1$ ,  $C=C_1=1$ ,

- Determine el valor de la tensión en la capacidad  $C$  en el instante  $t=0$ , denominada como  $e_c(0)$ . Independientemente del resultado de a), suponga a partir de ahora que  $e_c(0) = -1/2$ .
- Calcule  $e_c(t)$  en el dominio del tiempo en el intervalo  $t>0$ .
- Determine la tensión  $e_o(t) > 0$  así como su transformada de Laplace  $E_o(p)$  (suponga que la capacidad  $C$ , está inicialmente descargada)

$$e_g(t) = \begin{cases} \sin t & -\infty < t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



② Circuito en  $t > 0$  (el circuito está en RPS)



Es un divisor de tensión:

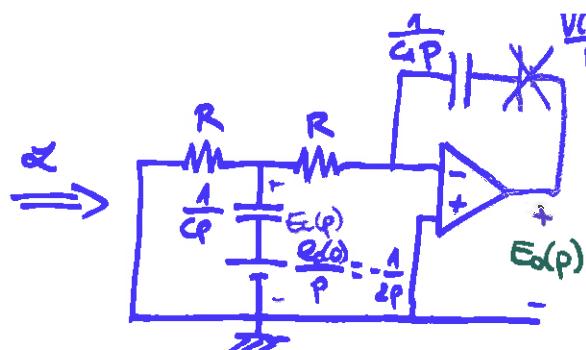
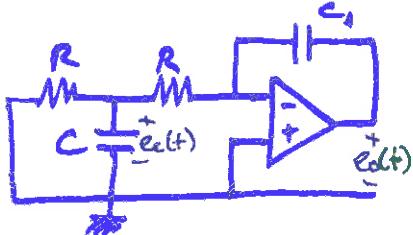
$$E_c = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} E_g = \frac{1}{1 + j\omega CR} E_g \downarrow \frac{1}{1 + j \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} (-j) = \frac{-j}{1+j} = \frac{-j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{-j-1}{2}$$

$$\hookrightarrow E_c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \quad \text{Ahora: } E_c = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow e_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

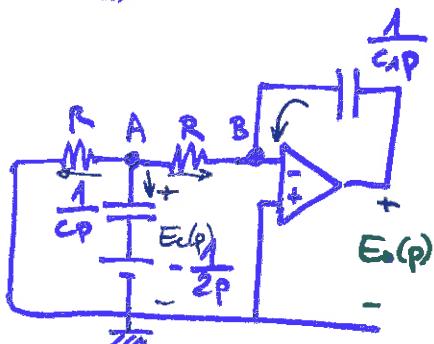
Particularizando en  $t=0^+$ :

$$e_c(0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{e_c(0^+) = -\frac{1}{2}}$$

⑥ Circuito en  $t > 0$ :



$\frac{V(0)}{P} \neq 0$  porque en  $t < 0$  por  $C_1$  no pasa corriente, luego no cae tensión.



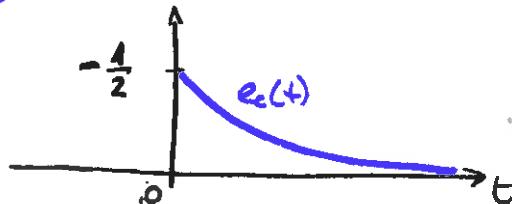
$$\text{Nodo A: } \frac{E_c}{R} + \frac{E_c}{R} + \frac{E_c - \left(\frac{-1}{2p}\right)}{\frac{1}{C_p}} = 0$$

$$E_c \left( \frac{2}{R} + C_p \right) = -\frac{1}{2p} C_p \Rightarrow E_c(p) = \frac{-\frac{1}{2} C}{\frac{2}{R} + C_p} \stackrel{R=1}{=} \frac{-\frac{1}{2} C}{2+C_p}$$

$$E_c(p) = \frac{-1/2}{2+p}$$

Cuya transformada inversa es inmediata

$$E_c(p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e_c(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} u(t)$$



c)

$$\text{Nodo B: } \frac{E_c(p)}{R} + \frac{E_o(p)}{\frac{1}{C_p}} = 0 \Rightarrow E_o(p) = -\frac{E_c(p)}{R C_p} = +\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+p}}{1 \cdot 1 \cdot p} \Rightarrow E_o(p) = \frac{1/2}{p(p+2)}$$

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ R &= 1 \\ E_c(p) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2+p} \end{aligned}$$

Finalmente calculamos  $\mathcal{L}^{-1}(E_o(p))$ :

$$E_o(p) = \frac{1/2}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} \stackrel{!}{=} \frac{1/4}{p} - \frac{1/4}{p+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e_o(t) = \frac{1}{4} u(t) - \frac{1}{4} e^{-2t} u(t)$$

$$\begin{aligned} A &= 1/4 \\ B &= -1/4 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Sea el circuito de condensadores comutados mostrado en la figura 3 en el que se representan las dos fases  $\Phi_e$ ,  $\Phi_s$  para los intervalos pares e impares respectivamente de periodo  $2T$ .

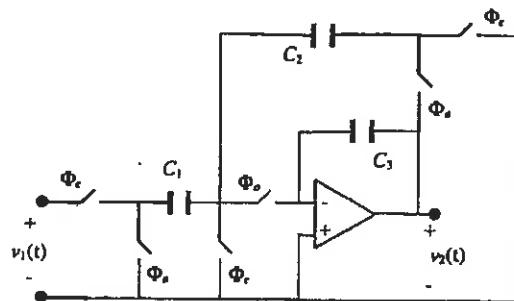
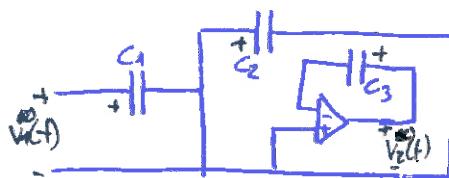


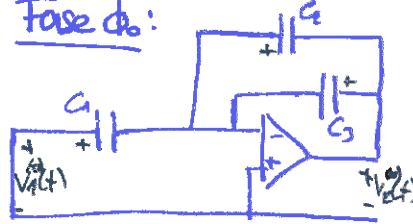
Figura 3

- Represente los circuitos equivalentes de ambas fases en el dominio Z.
- Calcule las funciones de transferencia  $H_{ee}(z) = \frac{V_2^{(e)}(z)}{V_1^{(e)}(z)}$ ,  $H_{ss}(z) = \frac{V_2^{(s)}(z)}{V_1^{(s)}(z)}$
- Justifique la estabilidad de los sistemas discretos obtenidos en b).
- Calcule la respuesta en frecuencia del sistema continuo equivalente de las funciones de transferencia  $H_{ee}(z)$ ,  $H_{ss}(z)$  suponiendo que el periodo de las fases es  $2T=1$ .

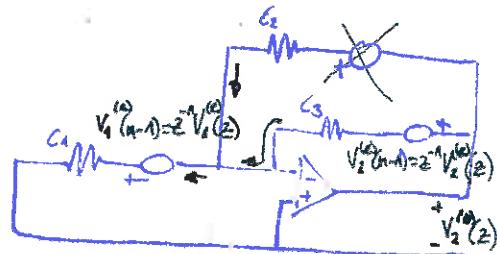
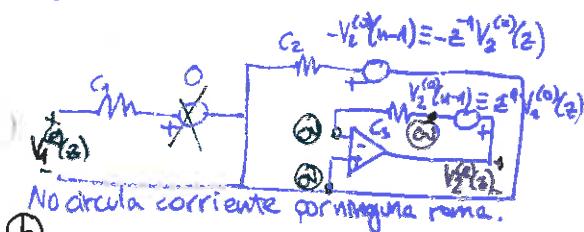
Ⓐ Fase  $\Phi_e$ :



Fase  $\Phi_s$ :



Discretizando y transformando z (a la vez)



Ⓑ  $V_2^{(e)} = z^{-n} V_2^{(e)}$

$C_3(V_2^{(e)} - z^{-n} V_2^{(e)}) + C_2 V_2^{(e)} = C_1 z^{-n} V_1^{(e)}$

$V_1^{(e)} = \frac{(C_2 + C_3)V_2^{(e)} - C_3 z^{-n} V_2^{(e)}}{C_2 z^{-n}}$

$V_1^{(e)} = \frac{(C_2 + C_3)V_2^{(e)} - C_3 z^{-n-1} V_2^{(e)}}{C_1 z^{-n}} \rightarrow V_1^{(e)} = \frac{C_2 + C_3 - C_3 z^{-2}}{C_1 z^{-1}} V_2^{(e)}$

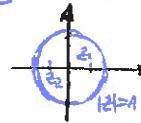
$$H_{ee} = \frac{V_2^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{C_1 z^{-n}}{C_2 + C_3 - C_3 z^{-2}} = \frac{C_1 z^{-n}}{1 - \frac{C_3}{C_2 + C_3} z^{-2}}$$

$$H_{ee} = \frac{V_2^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{z^{-n} V_2^{(e)}}{V_1^{(e)}} = z^{-n} H_{ee} = \frac{C_1 z^{-n}}{1 - \frac{C_3}{C_2 + C_3} z^{-2}}$$

$$H_{ee} = \frac{V_2^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{\frac{C_1}{C_2 + C_3} z^{-2}}{1 - \frac{C_3}{C_2 + C_3} z^{-2}}$$

② Polos de  $[H]$ :  $1 - \frac{c_3}{c_2+c_3} z^{-2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{c_3}{c_2+c_3} z^{-2} \Rightarrow z^2 = \frac{c_3}{c_2+c_3} \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}} < 1 \Leftrightarrow c_2 \neq 0 (c_2 > 0)$

Conclusión: el sistema es estable  $\Leftrightarrow c_2 \neq 0 (c_2 > 0)$



Si fuese  $c_2 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_3}{c_3}} = \pm 1$

Sistema inestable en este caso

③ Sustituimos  $z = e^{j\omega}$  (estamos particularizando la Transformada Z en la Transformada de Fourier discreta)

$H_{ZT}(e^{j\omega}) = \frac{c_1}{c_2+c_3} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{c_3}{c_2+c_3} e^{-j2\omega}}$

$H_{FT}(e^{j\omega}) = \frac{c_1}{c_2+c_3} \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{c_3}{c_2+c_3} e^{-j2\omega}}$

①  $z = e^{j\omega}$

④ Ahora sustituimos  $\Omega = \omega T$ , siendo en este caso  $2T=1 \rightarrow \Omega = \omega \cdot \frac{1}{2} = \frac{\omega}{2}$

(estamos pasando de tiempo discreto al tiempo continuo de Transformada de Fourier discreta a Transformada de Fourier continua)

$H_{FT}(j\omega) = \frac{c_1}{c_2+c_3} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{c_3}{c_2+c_3} e^{-j\omega}}$

$H_{FT}(j\omega) = \frac{c_1}{c_2+c_3} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{c_3}{c_2+c_3} e^{-j\omega}}$

②  $\Omega = \omega T$

Podemos ver la relación  
en la página T-2.3

Ejercicio 4

Considere el circuito de la figura 4, cuyos elementos tienen valores normalizados,

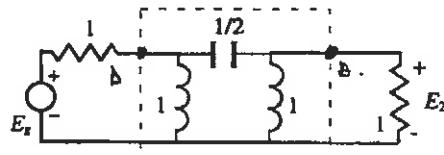


Figura 4

$$\text{y defina la función de transferencia } H(s) = \frac{2E_2}{E_g}$$

El que no tengan unidad  
quiere decir que están los  
valores normalizados

- Compruebe que dicho circuito es un filtro paso alto de Butterworth con pulsación de corte a 3 dB igual a la unidad, es decir,  $|H(j\omega)|_{\omega=1} = 1/\sqrt{2}$ . Dibuje de manera aproximada la respuesta en amplitud  $|H(j\omega)|$ .
- Considere la transformación de frecuencias  $\hat{s} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$ , donde  $\hat{s} = j\hat{\omega}$  representa a la variable frecuencial "origen" y  $s = j\omega$  es la variable frecuencial "destino". Dibuje la nueva estructura del filtro, detallando los valores de los elementos, que resulta de aplicar la citada transformación al filtro de la figura 4.
- Determine la nueva función de transferencia del filtro obtenido en b). Dibuje de manera aproximada su respuesta en amplitud.

Ⓐ

Nodo A:  $\frac{E_A - E_g}{1} + \frac{E_A - 0}{s} + \frac{E_A - E_B}{\frac{2}{s}} = 0$

Nodo B:  $\frac{E_B - 0}{1} + \frac{E_B - 0}{s} = \frac{E_A - E_B}{\frac{2}{s}}$

2 ecuaciones con 4 incógnitas:  $E_g, E_2, E_A, E_B$ . Pero  $E_2 = E_B \Rightarrow 3$  incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} E_A \left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \right) - E_B \frac{s}{2} - E_g = 0 \\ E_B \left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \right) - E_A \frac{s}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{2} & 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos  $E_B = E_2$  por Cramer:

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} & E_g \\ -\frac{s}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{2} & 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s}{2} E_g}{\left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \right)^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{\frac{s}{2} E_g}{\left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} + \frac{s}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \right)} = \frac{\frac{s}{2} E_g}{\left( 1 + s + \frac{1}{s} \right) \left( 1 + \frac{1}{s} \right)}$$

$$H(s) = \frac{2E_2}{E_g} = \frac{s}{\left( 1 + s + \frac{1}{s} \right) \left( 1 + \frac{1}{s} \right)} = \frac{s}{s + s^2 + 1} \cdot \frac{s+1}{s} \Rightarrow H(s) = \frac{s^3}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{(j\omega)^3}{((j\omega)^2 + j\omega + 1)(j\omega + 1)} = \frac{-j\omega^3}{(\omega^2 + j\omega + 1)(j\omega + 1)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|-j\omega^3|}{|(\omega^2 + j\omega + 1)(j\omega + 1)|} = \frac{|-j\omega^3|}{|\omega^2 + j\omega + 1||j\omega + 1|}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega^3}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2(1+\omega^2)}} = \frac{\omega^3}{\sqrt{1+\omega^4 - 2\omega^2 + \omega^2}} = \frac{\omega^3}{\sqrt{(1+\omega^4 - \omega^2)(1+\omega^2)}} = \frac{\omega^3}{\sqrt{1+\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 - \omega^2}} = \frac{\omega^3}{\sqrt{\omega^6}} = \frac{\omega^3}{\omega^3} = 1$$

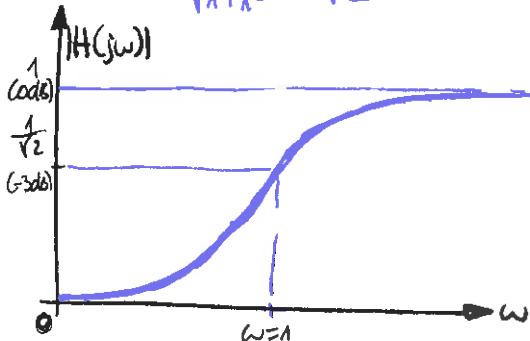
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$$

representa el módulo de un filtro paso alto, ya que:

$$|H(j0)| = \frac{\omega^3}{1+0^6} = 0$$

$$|H(j\omega)| \underset{\omega \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^3}{\sqrt{1+\omega^6}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^3}{\omega^3} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^3}{\omega^3} = 1$$

$$|H(j)| = \frac{1^3}{\sqrt{1+0^6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



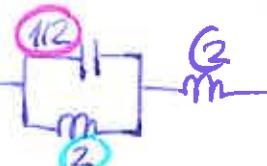
⑥  Primera forma canónica

$$Z_C = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{2}{s}} = \frac{2}{s} = 2 \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1} = 2 \left( \frac{2s^2 s}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 1} \right)$$

$$2K_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s} \cdot \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 + 2) = 1$$

$$K_{00} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} = 1$$

$$Z_L = \frac{2s}{s^2 + 1} + 2s = \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2s}} + 2s \rightarrow$$

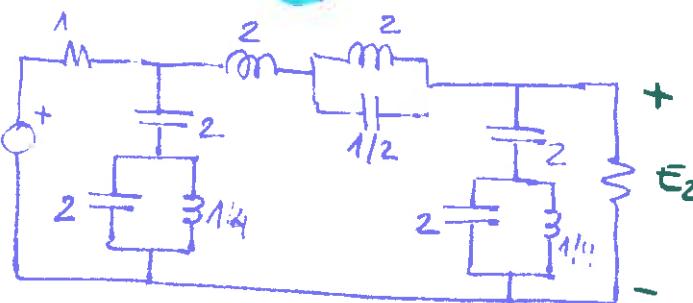
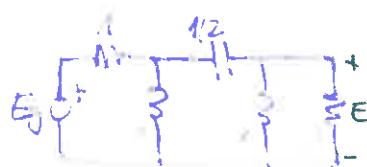
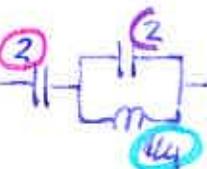


L Primera forma canónica

$$-m Z_L = \hat{s}L = \hat{s} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{2ms}{s^2 + 2}$$

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{s^2 + 1}{s}}{s(s^2 + 2)} = \frac{1}{2} \quad 2K_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + 2s}{s} \cdot \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$Z_L = \frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2 + 2} = \frac{1}{0s} + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2s}} \rightarrow$$



$$\textcircled{C} \quad H(s) = \frac{s^3}{(s^2+s+1)(s+1)}$$

$$H(s) = H(\hat{s}) = \frac{\left(\frac{s^2+1}{s(s^2+2)}\right)^3}{\left(\left(\frac{s^2+1}{s(s^2+2)}\right)^2 + \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} + 1\right) \left(\frac{s^2+1}{s(s^2+2)} + 1\right)}$$

$$H(s) = \frac{\left(\frac{s^2+1}{s(s^2+2)}\right)^3}{\frac{(s^2+1)^2 + (s^2+1)s(s^2+2) + s^2(s^2+2)^2}{s^2(s^2+2)^2} \cdot \frac{s^2+1 + s(s^2+2)}{s(s^2+2)}}$$

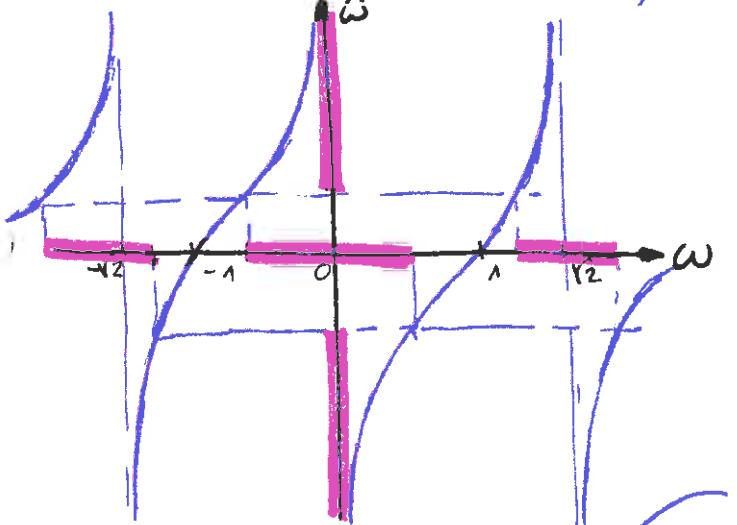
$$H(s) = \frac{(s^2+1)^3}{(s^4+1+2s^2+8s^5+2s^3+s^3+2s+s^6+4s^2+4s^4)(s^2+1+s^3+2s)}$$

$$H(s) = \frac{(s^2+1)^3}{(s^6+s^5+5s^4+3s^3+6s^2+2s+1)(s^3+s^2+2s+1)}$$

Ahora, para dibujar  $|H(s)|$ :

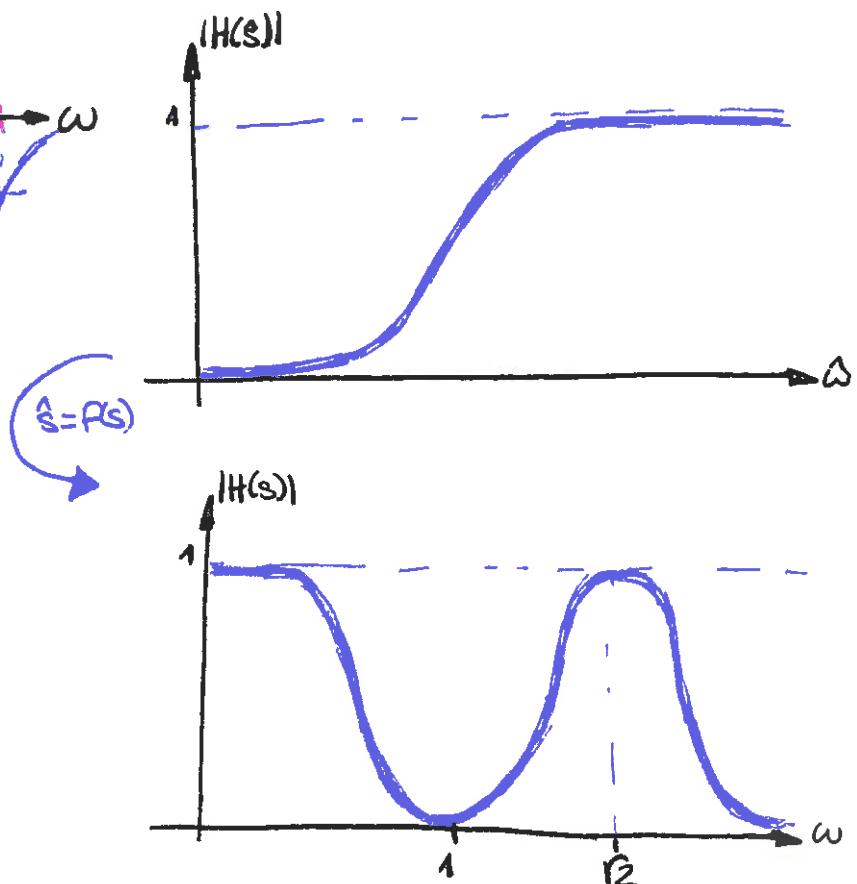
$$\hat{s} = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} \Rightarrow j\hat{\omega} = \frac{-\omega^2+1}{j\omega(-\omega^2+2)} \Rightarrow j\hat{\omega} = (-j) \frac{1-\omega^2}{(2-\omega^2)\omega} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{\omega^2-1}{\omega(2-\omega^2)}$$

función impar



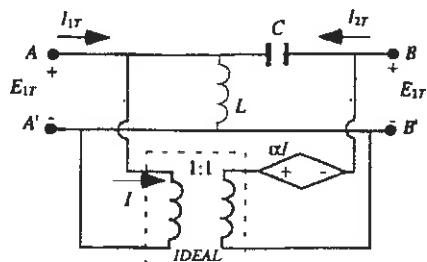
polos:  $\omega(2-\omega^2)=0$   
 $\omega=0$   
 $\omega=j\sqrt{2}$   
 $\omega=-j\sqrt{2}$

ceros:  $\omega^2-1=0$   
 $\omega=1$   
 $\omega=-1$



Ejercicio 1

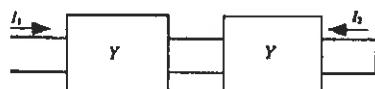
En el circuito de la figura se presenta una asociación de cuadripolos en régimen permanente sinusoidal:



- a) Calcule los parámetros  $Y$  admittance del circuito global.

Suponga para el resto del ejercicio que conoce dichos parámetros  $Y$  del cuadripolo anterior.

- b) Si conectamos el cuadripolo anterior con otro idéntico en cascada, y cortocircuitamos los terminales de la salida, esto es,

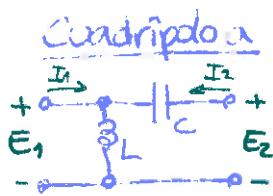
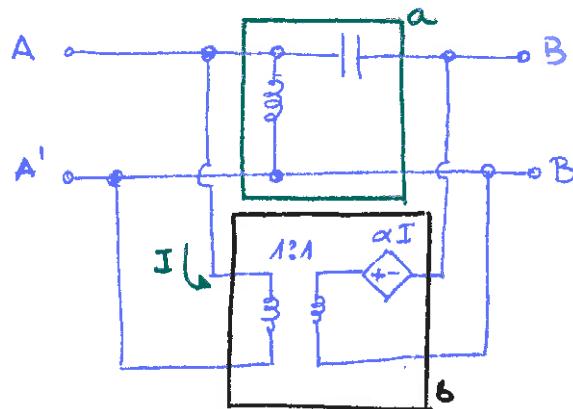


Calcule la función de transferencia  $I_2/I_1$  expresando el resultado exclusivamente en función de los parámetros  $Y$ .

Ⓐ Asociación paralelo-paralelo de dos cuadripolos

Por efecto del transformador ideal no hay corrientes circulatorias, es decir;

$[Y] = [Y_a] + [Y_b]$ , se puede estudiar cada cuadripolo por separado.

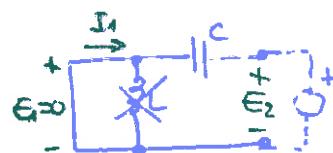
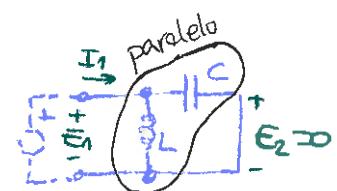


$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{E_1} \right|_{E_2=0} \rightarrow Y_{11} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{E_2} \right|_{E_1=0} \rightarrow Y_{22} = j\omega C$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{E_2} \right|_{E_1=0} \quad \text{III} \rightarrow Y_{12} = -j\omega C$$

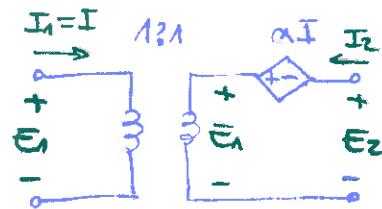
$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{E_1} \right|_{E_2=0} \rightarrow Y_{21} = -j\omega C$$



Como se trata de un cuadripolo RLC,  $Y_{12} = Y_{21}$

## Cuadripolo b

ver página T-412  
sobre transformadores



$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{\alpha} = -1 \Rightarrow I_2 = -I_1 = -I$$

$$\text{Por tanto: } \xrightarrow{\alpha I} \xrightarrow{-I} \xrightarrow{\alpha I} \xrightarrow{-I}$$

Por lo que el cuadripolo b es equivalente a:



$$Y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0} \rightarrow Y_{11} = \frac{1}{\alpha}$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{E_2} \Big|_{E_1=0} \rightarrow Y_{22} = \frac{1}{\alpha}$$

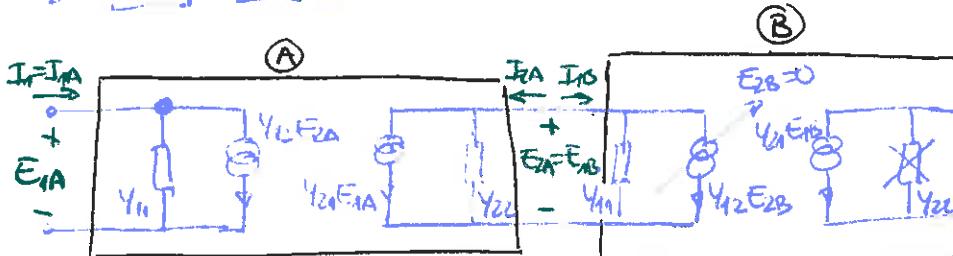
$$Y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Big|_{E_1=0} \rightarrow Y_{12} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0} \rightarrow Y_{21} = -\frac{1}{\alpha}$$

$\left\{ \begin{array}{l} Y_{12} = Y_{21} \text{ por trámite} \\ \text{de un cuadripolo RLC} \end{array} \right.$

definitivamente:  $[Y] = [Y_{11}] + [Y_{12}]$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{\alpha} - j\omega C \\ -\frac{1}{\alpha} - j\omega C & \frac{1}{\alpha} + j\omega C \end{bmatrix}$$



$$E_{2A} = E_{1B}$$

$$I_1 = I_{1A}$$

$$I_{2A} = I_{1B}$$

$$I_2 = I_{2B}$$

$$E_{2B} = 0$$

① Parte izquierda:  $I_2 = I_{2B} = Y_{21} E_{1B}$

$$Y_{21} E_{1A} = E_{1B} (Y_{11} + Y_{12})$$

② Parte central:  $Y_{21} E_{1A} = -E_{1B} (Y_{11} + Y_{12})$

③ Parte derecha:  $I_1 = I_{1A} = Y_{11} E_{1A} + Y_{12} E_{2A}$  (por el nudo)

Sustituciones para sustituir incógnitas:  $I_1, I_2, E_{1B} = E_{2A}$

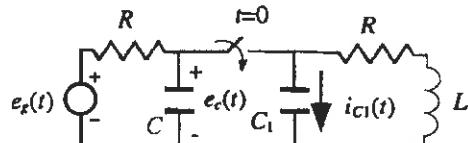
desde ③  $\rightarrow I_1 = -Y_{11} \frac{Y_{11} + Y_{12}}{Y_{21}} E_{1B} + Y_{12} E_{2A} \xrightarrow{E_{1B}} I_1 = E_{1B} \left( Y_{12} - \frac{Y_{11}(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{21}} \right)$

sustituir en ①:  $I_2 = \frac{Y_{21} I_1}{Y_{12} - \frac{Y_{11}(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{21}}}$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21}^2}{Y_{12} Y_{21} - Y_{11}(Y_{11} + Y_{12})}$$

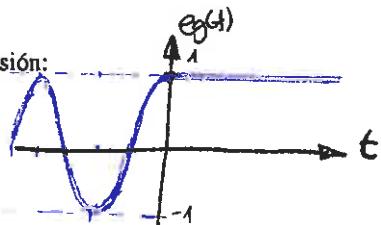
**Ejercicio 2**

Considere el circuito de la figura en el cual el interruptor se cierra en el instante  $t=0$ .



donde la fuente  $e_r(t)$  proporciona una tensión dada por la siguiente expresión:

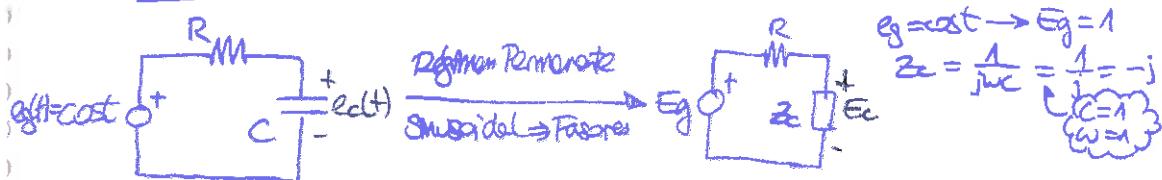
$$e_r(t) = \begin{cases} \cos t & -\infty < t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



considerando asimismo que  $R=1$ ,  $C=C_1=1$ ,  $L=2$  (valores normalizados).

- Determine el valor de la tensión en la capacidad  $C$  en el instante  $t=0^-$ , denominada como  $e_c(0^-)$ . Independientemente del resultado obtenido considere para el resto del ejercicio que  $e_c(0^-)=1/2$ .
- Calcule  $E_c(p)$ , como la transformada de Laplace de  $e_c(t)$  para  $t>0^+$ ; determine  $e_c(0^+)$  aplicando el teorema del valor inicial. Explique el resultado.
- Determine el valor de la corriente  $i_{C1}(t)$  que circula por el condensador  $C_1$  una vez cerrado el interruptor. Comente el resultado.

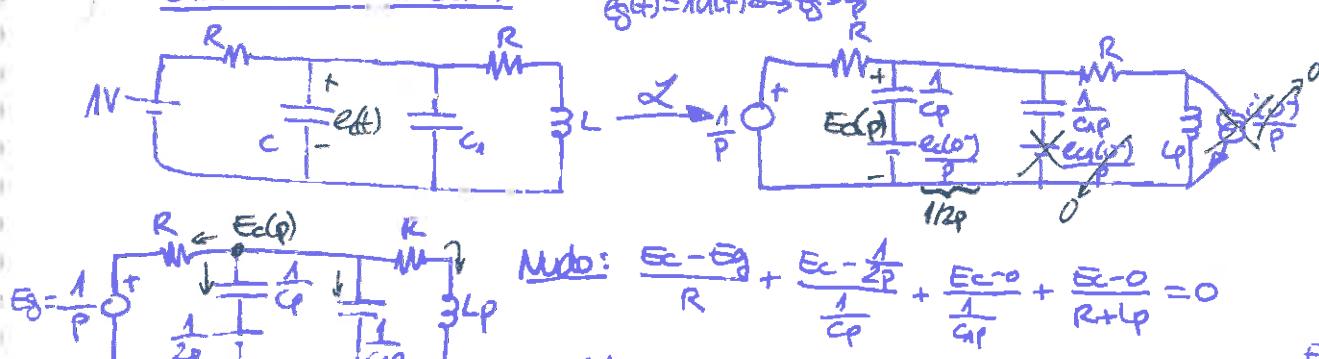
**④ Circuito en  $t=0^-$  ( $t<0$ )**



$$\text{Divisor de tensión: } E_Z = \frac{Z_C}{R+Z_C} E_g = \frac{-j}{1-j} = \frac{j}{1-j} = \frac{1}{1-\frac{1}{j}} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$e_C(t) = \frac{1}{2} \cos(t - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{Particularmente en } t=0^-} e_C(0^-) = \frac{1}{2} \cos(0 - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow e_C(0^-) = \frac{1}{2}$$

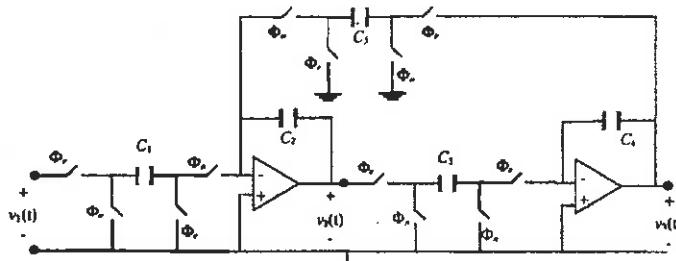
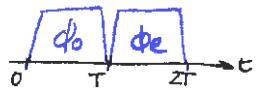
**⑤ Circuito en  $t=0^+$  ( $t>0$ )**



$$E_C(p) = \frac{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}}{\frac{(1+2p)^2 + 1}{4p}} = \frac{2+2p}{(1+2p)^2 + 1} = \frac{(2+p)(1+2p)}{2p(1+2p)^2 + 2p} = \frac{2p^2 + 5p + 2}{8p^3 + 8p^2 + 4p} \Rightarrow E_C(p) = \frac{2p^2 + 5p + 2}{8p^3 + 8p^2 + 4p}$$

**Ejercicio 3**

Sea el circuito de condensadores conmutados mostrado en la figura siguiente en el que se representan las dos fases  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  para intervalos pares e impares respectivamente de periodo  $2T$ .



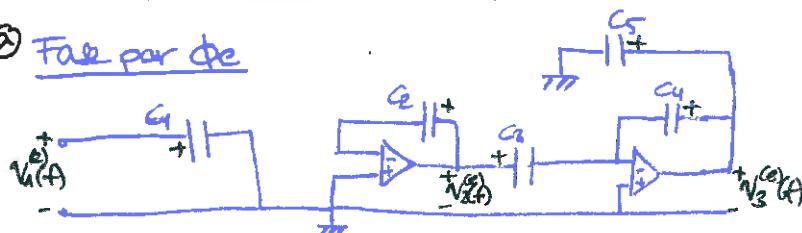
donde  $v_1(t)$  es la tensión de entrada (excitación) y  $v_2(t)$  y  $v_3(t)$  son tensiones de salida (respuestas).

- Represente los circuitos equivalentes de ambas fases en el dominio Z.
- Analice por el método de nudos los circuitos obtenidos en a). Resuelva las ecuaciones resultantes verificando que se obtiene la función de transferencia siguiente:

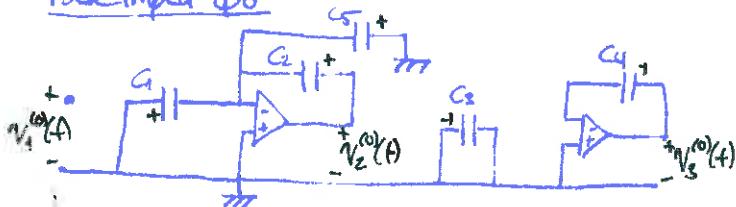
$$H(z) = \frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = -\frac{C_1 C_3}{C_2 C_4} \frac{z^2}{z^4 - \left(2 - \frac{C_3 C_5}{C_2 C_4}\right) z^2 + 1}$$

- Suponiendo que se verifica que  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5$ , dibuje el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia  $H(z)$  dada en b) y razoné en base a ello si el circuito es o no estable BIBO (Entrada acotada – Salida acotada).

② Fase par  $\Phi_2$

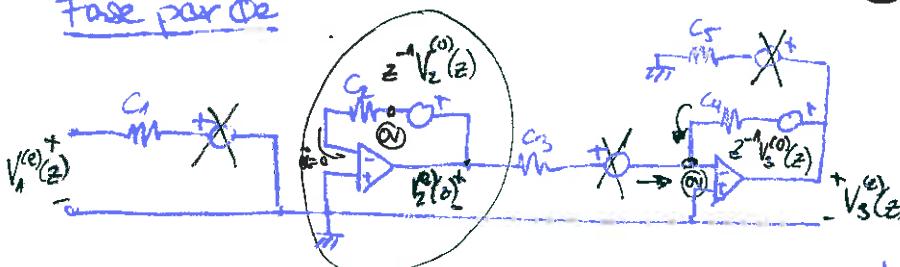


Fase impar  $\Phi_1$

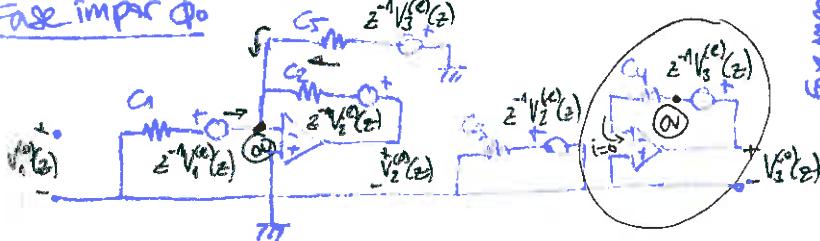


En el dominio Z:

Fase par  $\Phi_2$



Fase impar  $\Phi_1$



⑤

$$\text{Nudo: } V_2^{(e)} V_3 + [V_3^{(e)} - z^{-1} V_2^{(e)}] C_4 = 0 \quad [1]$$

$$V_2^{(e)} = z^{-1} V_2^{(e)} \quad [2]$$

$$\text{Nudo: } -z^{-1} V_3^{(e)} C_5 + (V_2^{(e)} - z^{-1} V_2^{(e)}) C_2 - z^{-1} V_1^{(e)} C_4 = 0 \quad [3]$$

$$V_3^{(e)} = z^{-1} V_3^{(e)} \quad [4]$$

4 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$V_1^{(e)}, V_2^{(e)}, V_3^{(e)}, V_4^{(e)}, V_5^{(e)}$$

Sustituimos la [4] en la [1] y la [2] en la [3]

$$V_2^{(e)}C_3 + (V_3^{(e)} - z^{-2}V_3^{(e)})C_4 = 0 \Rightarrow V_2^{(e)}C_3 = C_4V_3^{(e)}(z^{-2}-1) \quad (I)$$

$$-z^{-2}V_3^{(e)}C_5 + (V_2^{(e)} - z^{-1}V_2^{(e)})C_4 - z^{-1}V_1^{(e)}C_1 = 0 \Rightarrow V_2^{(e)}C_2(1-z^{-2}) = z^{-1}V_3^{(e)}C_5 + z^{-1}V_1^{(e)}C_1 \quad (II)$$

2 ecuaciones con  
4 incógnitas:  
 $V_1^{(e)}, V_2^{(e)}, V_3^{(e)}, V_4^{(e)}$

Rectificando la [2]:

$$(I) z^{-1}V_2^{(e)}C_3 = C_4V_3^{(e)}(z^{-2}-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ ecuaciones con} \\ 3 \text{ incógnitas:} \end{array} \right.$$

$$(II) V_2^{(e)}C_2(1-z^{-2}) = z^{-1}V_3^{(e)}C_5 + z^{-1}V_1^{(e)}C_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ incógnitas:} \\ V_1^{(e)}, V_3^{(e)}, V_2^{(e)} \end{array} \right.$$

Despejamos  $V_2^{(e)}$  de (I):

$$V_2^{(e)} = \frac{C_4V_3^{(e)}(z^{-2}-1)}{z^{-1}C_3}$$

Sustituimos  $V_2^{(e)}$  en (II):

$$\frac{C_4V_3^{(e)}(z^{-2}-1)}{z^{-1}C_3} C_2(1-z^{-2}) = z^{-1}V_3^{(e)}C_5 + z^{-1}V_1^{(e)}C_1 \Rightarrow \left[ \frac{C_4(z^{-2}-1)}{z^{-1}C_3} C_2(1-z^{-2}) - z^{-1}C_5 \right] V_3^{(e)} = z^{-1}V_1^{(e)}C_1$$

$$\frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{\frac{C_4(z^{-2}-1)}{z^{-1}C_3} C_2(1-z^{-2}) - z^{-1}C_5}{z^2C_2C_4(z^{-2}-1)(1-z^{-2}) - z^{-1}C_5C_3} \cdot \frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

$$\frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{\frac{z^2C_1C_3}{z^4C_2C_4(z^{-2}-1)(1-z^{-2}) - z^2C_3C_5}}{z^4C_2C_4(z^{-2}-1-z^{-4}+z^{-2}) - z^2C_3C_5} = \frac{-z^2C_1C_3}{z^2C_3C_5 - (z^2-z^4-1)C_2C_4}$$

$$\frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = \frac{\frac{-z^2C_1C_3}{z^2C_3C_5 - (z^2-z^4-1)C_2C_4}}{\frac{z^2C_3C_5 - (z^2-z^4-1)C_2C_4}{C_2C_4}} = -\frac{C_1C_3}{C_2C_4} \frac{z^2}{z^2C_3C_5 - 2z^2+z^4+1}$$

$$\boxed{\frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = -\frac{C_1C_3}{C_2C_4} \frac{z^2}{z^4 - (2 - \frac{C_3C_5}{C_2C_4})z^2 + 1}}$$

$$\textcircled{c} \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = c$$

sustituyendo en la expresión obtenida en el apartado anterior nos queda:

$$H(z) = \frac{V_3^{(e)}}{V_1^{(e)}} = -\frac{c}{c} \frac{z^2}{z^4 - (2 - \frac{c}{c})z^2 + 1} \Rightarrow H(z) = -\frac{z^2}{z^4 - z^2 + 1}$$

• Ceros de  $H(z)$  (puntos donde se anula el numerador):  $z^2=0 \rightarrow z=0$ , cero doble

Además  $z=\infty$  también es un cero doble ya que  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{z^4 - z^2 + 1} = 0$ ; es decir "H( $\infty$ )=0"

• Polos de  $H(z)$  (puntos donde se anula el denominador):  $z^4 - z^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x=z^2} x^2 - x + 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j = 1 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{x=z^2} z = \sqrt{x} \rightarrow z_a = \sqrt{e^{\pm j\frac{\pi}{3}}} = r_a \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, r_a = q_a$$

$$K=0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \rightarrow z_1 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad K=1 \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \rightarrow z_2 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$K=2 \rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6} \rightarrow z_3 = 1 \cdot e^{j\frac{5\pi}{6}} \quad K=1 \rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \rightarrow z_4 = 1 \cdot e^{j\frac{5\pi}{3}}$$

$$\boxed{r_{pej\theta} = r_{\varphi} \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt[4]{1} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + 2k\pi \end{cases}, K=0, \dots, n-1}}$$

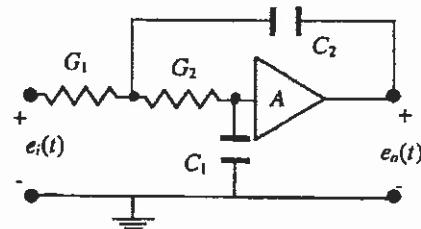
El circuito no es estable en sentido  $B_1B_2B_3B_4$  ya que hay polos sobre la circunferencia unitaria.



Ejercicio 4

Dado el circuito del filtro activo de la figura,

a) Calcule la expresión de la función de transferencia  $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ :



Si se desea diseñar un filtro paso bajo de Butterworth con una atenuación en el extremo de la banda de paso de 1dB correspondiente a una frecuencia de corte  $\omega_c=1$  rad/seg. y con una atenuación de al menos 20 dB para frecuencias mayores de 5 rad/seg,

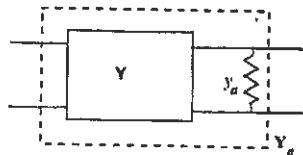
b) Obtenga los parámetros del filtro: orden ( $n$ ) y rizado ( $\varepsilon$ ).

c) Suponiendo  $A=1$ ,  $G_1=G_2=1$ , determine los valores que deben tomar las capacidades  $C_1$ ,  $C_2$  para que la estructura de la figura implemente el filtro diseñado en b).

Ejercicio 1

Sobre un cuadripolo RLC en régimen permanente sinusoidal se han realizado las siguientes medidas: con el puerto 1 en circuito abierto se obtiene una tensión  $v_1(t) = 0.5\cos(t)$ , cuando en el puerto 2 se tiene  $v_2(t) = \cos(t)$ ,  $i_2(t) = 3\sin(t)$ . Con el puerto 1 en cortocircuito aplicando en el puerto 2 una tensión  $v_2(t) = \cos(t)$  se obtiene una corriente  $i_2(t) = \sin(t)$ .

- Calcule los parámetros  $\mathbf{Y}$  de dicho cuadripolo particularizados para  $\omega=1$ .
- Si conectamos al cuadripolo anterior una admisión de valor  $y_a$  en el puerto 2 tal como se muestra en la figura siguiente, determine el nuevo conjunto de parámetros  $\mathbf{Y}_a$ .



- Si aplicamos en el puerto 1 una fuente de tensión real representada en el dominio fasorial por la fuente ideal  $E_f$  y una impedancia  $Z_f$ , determine el equivalente de Thévenin en los terminales del puerto 2.

$$v(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V = A e^{j\phi}$$

fasor ~ número complejo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ \cos\alpha &= \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

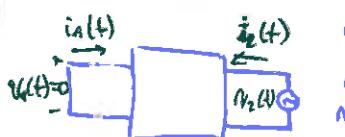
$$\begin{aligned} \operatorname{cost} &\xrightarrow{F} 1 \\ \operatorname{sent} &\xrightarrow{F} j \end{aligned}$$

Medida 1



$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0.5\cos t \Rightarrow E_1 = 0.5 \\ v_2(t) &= \cos t \Rightarrow E_2 = 1 \\ i_2(t) &= 3\sin t \Rightarrow I_2 = -3j \\ i_2(t) &= 3\sin t = 3\cos(t - \frac{\pi}{2}) \\ I_2 &= 3e^{-j\frac{\pi}{2}} = -3j \end{aligned}$$

Medida 2



$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0 \\ v_2(t) &= \cos t \Rightarrow E_2 = 1 \\ i_2(t) &= \sin t \Rightarrow I_2 = -j \\ v_1(t) &= 0 \Rightarrow E_1 = 0 \end{aligned}$$

②  $I_1 = Y_{11}E_1 + Y_{12}E_2$   
 $I_2 = Y_{21}E_1 + Y_{22}E_2$

sustituyendo las medidas ① y ② tenemos:

Medida ①  $\begin{cases} 0 = Y_{11} \cdot 0.5 + Y_{12} \cdot 1 \\ -3j = Y_{21} \cdot 0.5 + Y_{22} \cdot 1 \end{cases}$

4 ecuaciones y 5 incógnitas:  $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}, I_1$

Pero como el cuadripolo es RLC (dato), entonces  
 $Y_{12} = Y_{21} \Rightarrow 4$  incógnitas.

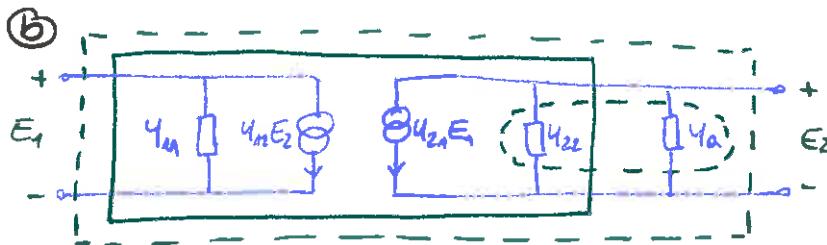
Medida ②  $\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot 0 + Y_{12} \cdot 1 \\ -j = Y_{21} \cdot 0 + Y_{22} \cdot 1 \end{cases}$

4<sup>a</sup> ecuación:  $Y_{22} = -j$

2<sup>a</sup> ecuación:  $-3j = 0.5Y_{12} - j \Rightarrow -2j = \frac{Y_{12}}{2} \Rightarrow Y_{12} = -4j = Y_{21}$

Ecación:  $\circ = \text{ds}u_1 + u_2 \Rightarrow \circ = \frac{u_1}{2} - u_1 = u_1$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8j & -4j \\ -4j & -j \end{bmatrix}$$

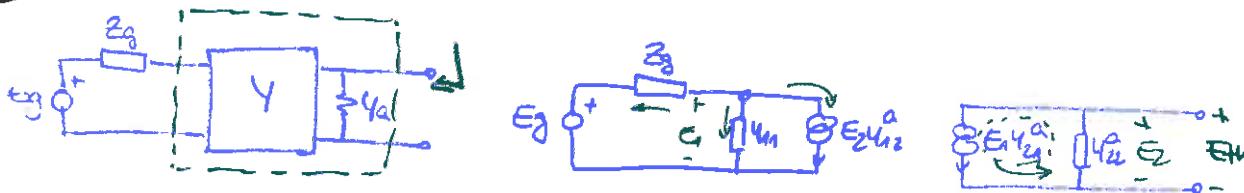


$$[Y_a] = \begin{bmatrix} Y_{11}^a & Y_{12}^a \\ Y_{21}^a & Y_{22}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8j & -4j \\ -4j & -j + 4a \end{bmatrix}$$

iaso! son  
admitancias

$$Y_{22}^a = Y_{22} / Y_a = Y_{22} + Y_a$$

(c)



Cálculo de  $E_{th} = E_2$

Puerto 1: (nudo)  $\frac{E_1 - E_g}{Z_g} + (E_1 - 0) \cdot Y_{11} + E_2 Y_{12}^a = 0$

Puerto 2: (malla)  $E_2 = -\frac{E_1 Y_{21}^a}{Y_{22}^a} \rightarrow E_1 = -\frac{Y_{22}^a}{Y_{21}^a} E_2$

$$E_1 \left( \frac{1}{Z_g} + Y_{11} \right) + E_2 Y_{12}^a - \frac{E_g}{Z_g} = 0 \Rightarrow -\frac{Y_{22}^a}{Y_{21}^a} E_2 \left( \frac{1}{Z_g} + Y_{11} \right) + E_2 Y_{12}^a - \frac{E_g}{Z_g} = 0 \Rightarrow$$

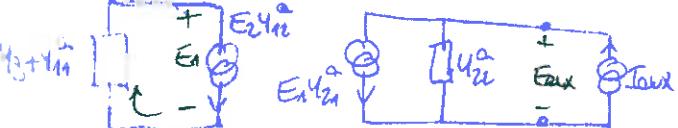
$$\Rightarrow E_2 \left[ -\frac{Y_{22}^a}{Y_{21}^a} \left( \frac{1}{Z_g} + Y_{11} \right) + Y_{12}^a \right] = \frac{E_g}{Z_g} \Rightarrow E_2 = \frac{\frac{E_g}{Z_g}}{-\frac{Y_{22}^a}{Y_{21}^a} \left( \frac{1}{Z_g} + Y_{11} \right) + Y_{12}^a} = \frac{\frac{E_g}{Z_g} Y_{12}^a}{Y_{22}^a - Y_{21}^a \left( \frac{1}{Z_g} + Y_{11} \right)} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{\frac{E_g}{Z_g} Y_{12}^a}{\frac{Y_{12}^a Y_{21}^a - Y_{22}^a Y_{11}^a - Y_{21}^a}{Z_g} + Y_{12}^a} \Rightarrow E_2 = \frac{-\frac{E_g}{Z_g} Y_{21}^a}{Y_{22}^a + Y_{12}^a Z_g} = E_{th}$$

Cálculo de  $Z_{th}$ : Se anulan fuentes independientes, en este caso sólo  $E_g$ .

\* Para hacer paralelos  
hacemos sumando admitancias

$$Y_g = \frac{1}{Z_g}$$



$$Z_{th} = \frac{E_{aux}}{I_{aux}}$$

$$\text{Puerta 1: } E_1 = \frac{-Y_{12}E_2}{Y_B + Y_{11}}$$

Puerta 2:  $Y_{21}E_1 + E_2 Y_{22} = I_{aux} \Rightarrow Y_{21} \left[ \frac{-Y_{12}E_2}{Y_B + Y_{11}} \right] + E_2 Y_{22} = I_{aux} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{aux} \left[ \frac{-Y_{12}Y_{21}}{Y_B + Y_{11}} + Y_{22} \right] = I_{aux} \Rightarrow \frac{E_{aux}}{I_{aux}} = \frac{1}{Y_{22} - \frac{-Y_{12}Y_{21}}{Y_B + Y_{11}}} = \frac{Y_B + Y_{11}}{Y_{22}Y_B + Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_{aux}}{I_{aux}} = \frac{\frac{1}{Z_2} + Y_{11}}{\frac{Y_{22}-1}{Y_B} + (Y_{11})} = \frac{1 + Y_{11}Z_2}{Y_{22} + Z_2(Y_{11})} \Rightarrow \boxed{Z_{th} = \frac{1 + Y_{11}Z_2}{Y_{22} + Y_{11}Z_2}}$$

## Ejercicio 2

Sea el circuito de la figura 2.2 donde la fuente de tensión causal tiene una forma de onda, indefinida por la derecha y nula  $t < 0$ , tal como representamos en la figura 2.4.

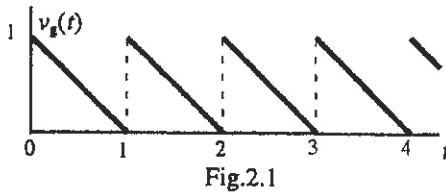
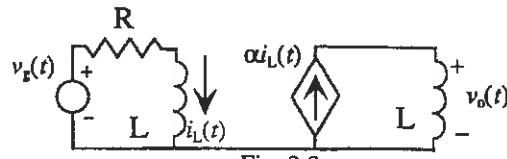


Fig.2.1

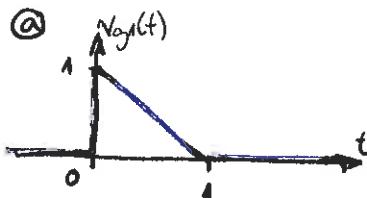


**Fig. 2.2**

- a) Si denominamos  $v_{gl}(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ , demuestre que se cumple la siguiente identidad entre sus correspondientes transformadas de Laplace:

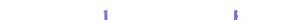
$$V_s(p) = \frac{V_{g1}(p)}{1 - e^{-p}}$$

- b) Calcule  $V_g(p)$  como la transformada de Laplace de  $v_g(t)$ ,  $t > 0$ .  
 c) Calcule la expresión de  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , mediante el análisis del circuito anterior suponiendo  $\alpha=1$ ,  $L=1 \text{ H}$ ,  $R=1 \Omega$ .



$$v_g(t) = v_{g_1}(t) + v_{g_2}(t-1) + v_{g_3}(t-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} v_{g_k}(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{g_k}(t) * \delta(t-k)$$


x(t-t<sub>0</sub>) = x(t) \* δ(t-t<sub>0</sub>) } !!

$$v_g(t) = v_{g_1}(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$


$$V_g(t) = V_{g1}(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$

page T-3:  $\delta(t) \rightarrow 1$

$$\text{pagina T-3: } \delta(t) \Leftrightarrow 1 \\ \text{pagina T-2: } F(t-k)U(t-k) \Leftrightarrow F(p)e^{-pk} \Rightarrow v_g(t) = v_{g1}(t) * (\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \dots) \Leftrightarrow v_g(p) = v_{g1}(p)(1 + e^{-p} + e^{-2p} + \dots)$$

$$Vg(p) = Vg_1(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp} \implies Vg(p) = Vg_1(p) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-p})^k \xrightarrow{k \text{ free}} Vg(p) = Vg_1(p) \frac{1}{1-e^{-p}} \Leftrightarrow Vg(p) = \frac{Vg_1(p)}{1-e^{-p}}$$

⑥ Primero calcularemos la transformada de Laplace de  $y_3(t)$ , es decir  $\mathcal{L}(y_3(t)) = Y_3(s)$ . Vamos a rotular  $Y_3(s)$  con la definición de transformada.

Vamos a calcular  $V_{f1}(p)$  con la definición de transformadas de Laplace:

$$Y_1(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Leftrightarrow Y_1(p) = \int_0^{\infty} Y_1(t) e^{-pt} dt = \int_0^1 (1-t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} 0 e^{-pt} dt = \int_0^1 (1-t) e^{-pt} dt$$

(para  $t=1$ ) definición de transformada de Laplace

$u = 1-t \quad du = -dt$

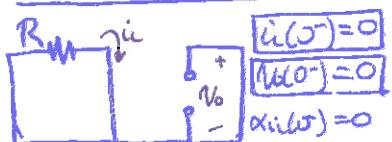
$$V_{g_1}(p) = \left[ -\frac{(1-t)e^{-pt}}{p} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p} e^{-pt} (dt) = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} [e^{-pt}]_0^1$$

$$V_{81}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}(e^p - 1)$$

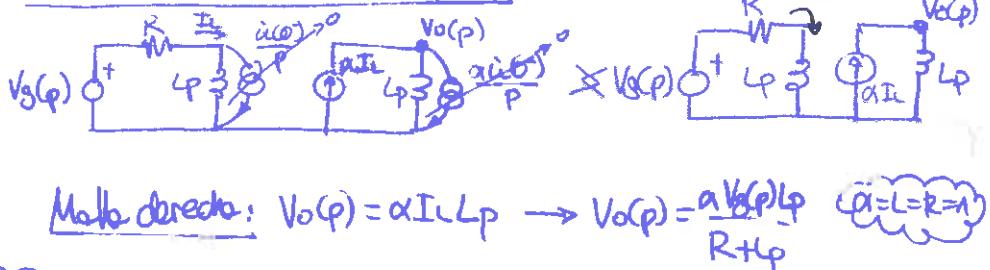
Ahora, con la expresión obtenida en el apartado (c),  $V_0(p) = \frac{V_{01}(p)}{1-e^{-P}} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{p^2}{e^P}(e^{-P}-1)}{1-e^{-P}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}(1-e^P)}{1-e^{-P}}$

$$Vg(p) = \frac{1}{p(1-e^{-p})} = \frac{1}{pe}$$

(c) Circuito en  $t=0^-$  ( $t < 0$ )



Circuito en el dominio de Laplace



$$\text{Malla izquierda: } I_L = \frac{V_g(p)}{R+Lp}$$

$$\text{Malla derecha: } V_o(p) = \alpha I_L L p \rightarrow V_o(p) = \frac{\alpha V_g(p) L p}{R+Lp}$$

$$V_o(p) = \frac{P}{1+p} V_g(p) \quad (\text{Vg(p) del apartado } \textcircled{2}) \rightarrow V_o(p) = \frac{P}{1+p} \left( \frac{1}{P(1-e^{-t})} - \frac{1}{P^2} \right) \rightarrow V_o(p) = \frac{1}{(1+p)(1-e^{-t})} - \frac{1}{p(1+p)}$$

Ahora calculamos la transformada inversa,  $\mathcal{L}^{-1}$ :

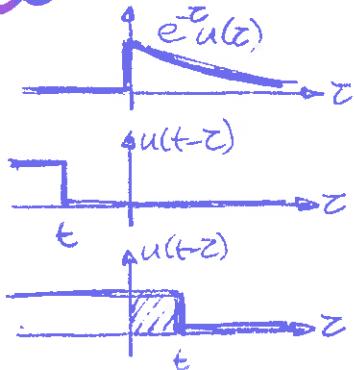
$$V_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(1+p)(1-e^{-t})} - \frac{1}{p(1+p)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{1+p} \cdot \frac{1}{1-e^{-t}} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+p} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{1+p} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{1+p} \right)$$

$$V_o(t) = e^{-t} u(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k) - u(t) * e^{-t} u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} u(t) * \delta(t-k) - u(t) * e^{-t} u(t)$$

ver apartado  $\textcircled{2}$

(!!)  $x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0)$

$$V_o(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t-k)} u(t-k) - u(t) * e^{-t} u(t) \quad \xrightarrow{\text{convolución gráfica (STLN)}}$$



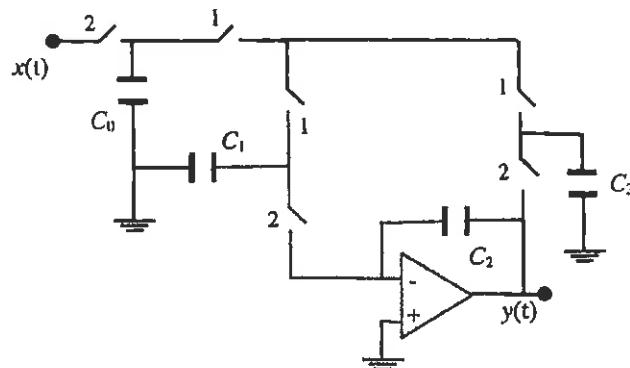
$$t < 0 \rightarrow u(t) * e^{-t} u(t) = 0$$

$$t > 0 \rightarrow u(t) * e^{-t} u(t) = \int_0^t e^{-z} dz = [-e^{-z}]_0^t = -e^{-t} - (-e^0) = 1 - e^{-t}$$

$$V_o(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t-k)} u(t-k) - (1 - e^{-t}) u(t)$$

Ejercicio 3

Sea el circuito de condensadores commutados de la figura, donde se indica la fase de activación (1 ó 2) de cada uno de los interruptores.



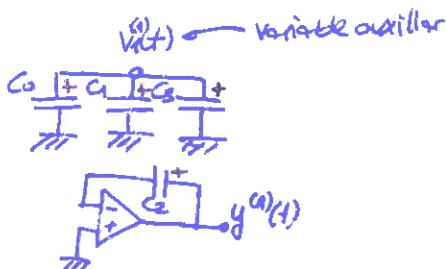
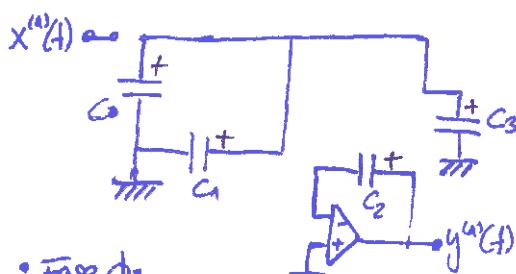
a) Determine las ecuaciones circuitales de ambas fases en el dominio Z.

b) Suponiendo  $C_1 = C_2 = 1$ ,  $C_0 = C_3 = 2$ , calcule la función de transferencia  $H_{22}(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)}$

donde el subíndice indica la fase correspondiente.

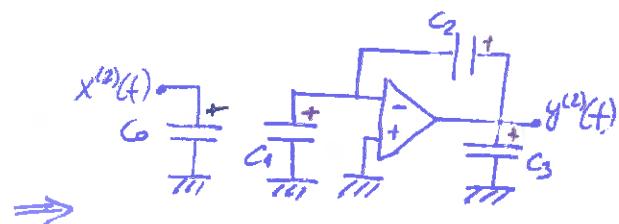
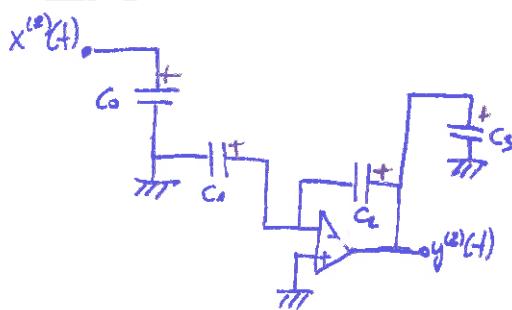
c) Analice la estabilidad del circuito a partir de dicha función de transferencia.

Ⓐ Fase  $\phi_1$ : interruptores 1 cerrados

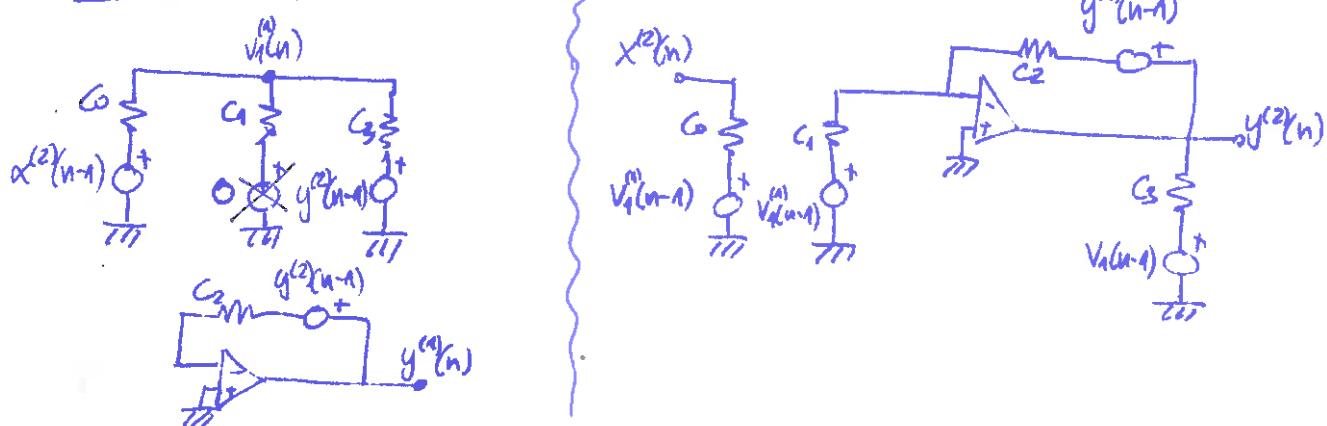


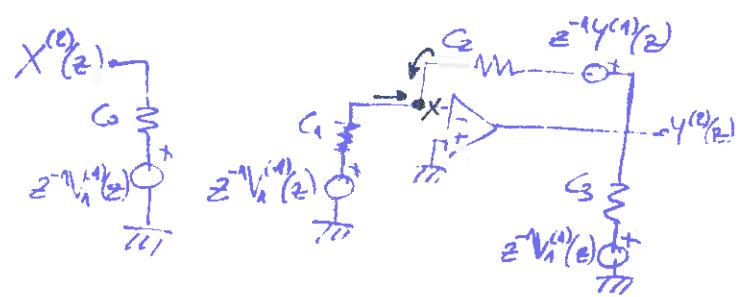
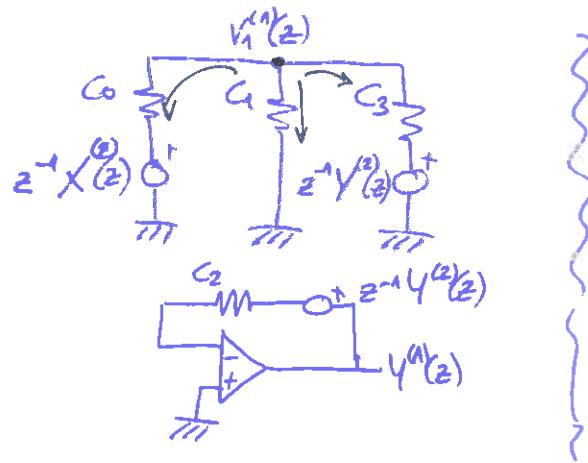
Por omisión suponemos un reloj de período constante:  
1/(2\*pi\*f) de V

Ⓑ Fase  $\phi_2$



Ⓒ Discretizamos





$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} (V_1^{(1)} - z^{-1}X^{(2)})C_0 + (V_1^{(1)} - 0)C_1 + (V_1^{(1)} - z^{-1}Y^{(2)})C_3 = 0 \\ \textcircled{2} Y^{(1)} - z^{-1}Y^{(2)} = 0 \quad (\text{comp no pasa corriente en la resistencia no es terminal} \Rightarrow \text{corta}) \\ \textcircled{3} (z^{-1}V_1^{(1)} - 0)C_1 + (Y^{(2)} - z^{-1}Y^{(1)})C_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{b} \quad H_{22}(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{Y^{(2)}(z)}{X^{(2)}(z)}$$

Introduciendo \textcircled{2} en \textcircled{3} despejamos  $V_1^{(1)}$  en función de  $Y^{(2)}$ :

$$z^{-1}V_1^{(1)}C_1 + (Y^{(2)} - z^{-2}Y^{(2)})C_2 = 0 \Rightarrow V_1^{(1)}(z) = \frac{-C_2(Y^{(2)} - z^{-2}Y^{(2)})}{z^{-1}C_1}$$

Ahora, operando en \textcircled{1} queda:

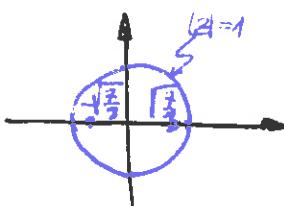
$$(C_0 + C_1 + C_3)V_1^{(1)} - z^{-1}X^{(2)}C_0 - z^{-1}Y^{(2)}C_3 = 0 \Rightarrow (C_0 + C_1 + C_3) \frac{-C_2(Y^{(2)} - z^{-2}Y^{(2)})}{z^{-1}C_1} - z^{-1}X^{(2)}C_0 - z^{-1}Y^{(2)}C_3 = 0$$

$$H_{22}(z) = \frac{Y^{(2)}(z)}{X^{(2)}(z)} = \frac{z^{-1}C_0}{-(C_0 + C_1 + C_3) \frac{C_2(1 - z^{-2})}{z^{-1}C_1} - z^{-1}C_3} = \frac{z^{-1}}{-1 \frac{2(1 - z^{-2})}{z^{-1}} - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{\frac{-8 + 8z^{-2}}{z^{-1}} - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{-8 + 7z^{-2}}$$

$$H_{22}(z) = \frac{z^{-1}}{-8 + 7z^{-2}} \Rightarrow H_{22}(z) = \frac{2z^{-2}}{-8 + 7z^{-2}}$$

$$\textcircled{c} \quad \text{Polar de } H_{22}(z); -8 + 7z^{-2} = 0 \Rightarrow 7z^{-2} = 8 \Rightarrow z^{-2} = \frac{8}{7} \Rightarrow z^2 = \frac{7}{8} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{7}{8}} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{7}{8}} < 1$$

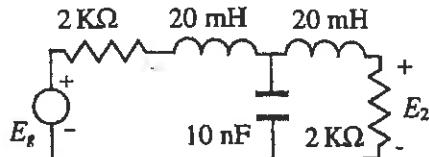
Sistema estable



Ejercicio 4

Considere el filtro LC de tercer orden de la figura en el cual definimos la función de transferencia

$$H(\hat{s}) = 2 \frac{E_2(\hat{s})}{E_1(\hat{s})}$$



- Normalice la estructura del filtro anterior considerando que la resistencia de normalización es  $R_0 = 2 \text{ k}\Omega$ , y la pulsación de normalización es  $\omega_0 = 10^3 \text{ rad/seg}$ .
- Determine la respuesta en amplitud  $|H(j\hat{\omega})|$  del circuito de la figura comprobando que es un filtro paso bajo de Butterworth. (Nota: puede utilizar la estructura normalizada obtenida en a) si lo considera conveniente).
- Si sobre el filtro de la figura aplicamos la siguiente transformación de frecuencias,

$$\hat{s} = 10 \frac{s^2 + 10^8}{s}$$

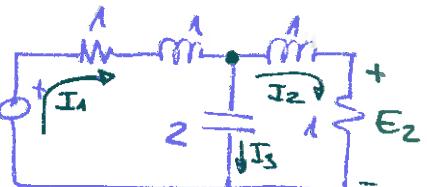
se obtiene un filtro paso banda. Dibuje el circuito de la estructura paso banda especificando los valores de sus elementos y determine su respuesta en amplitud.

$$(2) R_n = \frac{R}{R_0} = \frac{2k\Omega}{2k\Omega} \rightarrow R_n = 1$$

$$L_n = \frac{L \omega_0}{R_0} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2} = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^2} \rightarrow L_n = 1$$

$$C_n = R_0 C \omega_0 = 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3 \rightarrow C_n = 2$$

Circuito normalizado



(6)

$$\text{Malla izquierda: } E_g - I_1 - \hat{s}I_1 - I_3 \frac{1}{2\hat{s}} = 0 \quad \left. \right\} \Rightarrow E_g - I_1 - \hat{s}I_1 - I_1 \frac{1}{2\hat{s}} + I_2 \frac{1}{2\hat{s}} = 0$$

$$\text{Malla derecha: } -\hat{s}I_2 - I_2 + I_3 \frac{1}{2\hat{s}} = 0 \quad \left. \right\} \Rightarrow -\hat{s}I_2 - I_2 + I_1 \frac{1}{2\hat{s}} - I_2 \frac{1}{2\hat{s}} = 0$$

$$\text{Nudo: } I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_2$$

$$I_2 = E_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} & -\frac{1}{2\hat{s}} \\ -\frac{1}{2\hat{s}} & 1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} & E_g \\ -\frac{1}{2\hat{s}} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} & -\frac{1}{2\hat{s}} \\ -\frac{1}{2\hat{s}} & 1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{E_g}{2\hat{s}}}{a - b} = \frac{\frac{E_g}{2\hat{s}}}{\underbrace{(1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}})^2 - (\frac{1}{2\hat{s}})^2}_{a-b}} = \frac{\frac{E_g}{2\hat{s}}}{\underbrace{(1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} + \frac{1}{2\hat{s}})(1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}} - \frac{1}{2\hat{s}})}_{a+b}}$$

$$E_2 = \frac{\frac{E_g}{2\hat{s}}}{(1 + \hat{s} + \frac{1}{2\hat{s}})(1 + \hat{s})} \rightarrow H(s) = \frac{2E_g}{E_2} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{s + \hat{s}^2 + 1}{s} (s + \hat{s})} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{(-\omega^2 + j\omega + 1)(1 + j\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega - \omega^2||1 + j\omega|} = \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot 1 + \omega^2} = \frac{1}{(1 + \omega^4 - \omega^2)(1 + \omega^2)} = \frac{1}{1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^2 - \omega^2 - \omega^4} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

comprobaremos que es un filtro pass bajo:

$$\Delta = 0 \rightarrow |H(j0)| = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

$$\Delta \rightarrow \infty \rightarrow |H(j\infty)| = \frac{1}{1+\infty^2} = 0$$

Y por último comprobaremos que es de Butterworth, para ello lo identificaremos con la expresión general de la

página T-3.9:  $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}$

$\omega_c = 1$

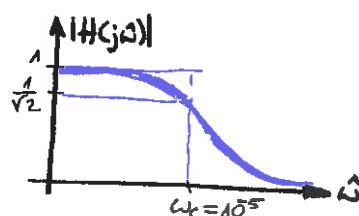
$\omega_c = 1$   
porque el filtro esté normalizado

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}}$$

Identificando, vemos que, efectivamente, es un filtro de Butterworth de orden  $n=3$  y  $\varepsilon^2=1$

② Lo primero desnormalizamos el filtro:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + (\Delta \omega_c)^6} = \frac{1}{1 + (10^5 \omega)^6}$$



$$|H(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot \omega = -10 \frac{\omega^2 - 10^8}{\omega} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \left(-10 \frac{\omega^2 - 10^8}{\omega}\right)^6} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega^2 - 10^8}{\omega} \cdot 10^6\right)^6}$$

USAMOS LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA

$L = 20 \text{ mH}$

$Z = Ls = 0'02s = 0'02 \cdot 10 \frac{s^2 + 10^8}{s} = 0'2 \frac{s^2 + 10^8}{s} \Rightarrow Y = \frac{s}{0'2(s^2 + 10^8)} = \frac{5s}{s^2 + 10^8} = \frac{5}{s^2 + 10^8}$

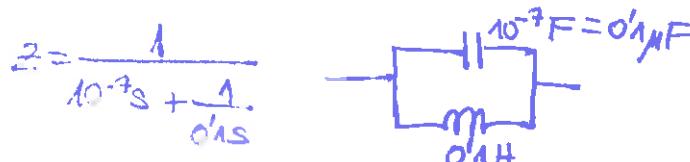
$Y = 5 \frac{1}{s + \frac{1}{10^4}} = \frac{1}{\frac{1}{5}s + \frac{1}{5 \cdot 10^8}s}$

$\text{USAMOS LA PRIMERA FORMA CANÓNICA}$

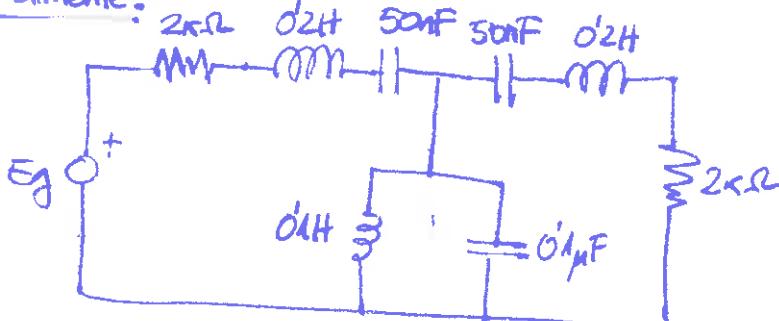
$Z = \frac{1}{Cs} \Rightarrow Y = Cs \Rightarrow 10^{-7}s = 10^{-7} \cdot 10 \frac{s^2 + 10^8}{s} \Rightarrow Z = \frac{1}{10^{-7} \cdot \frac{s^2 + 10^8}{s}} = \frac{1}{10^{-7}(s + \frac{10^8}{s})}$

$Z = \frac{1}{10^{-7}s + \frac{1}{0'1s}}$

$10^{-7}F = 0'1\mu F$

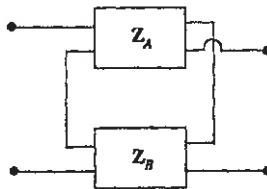


Finalmente:



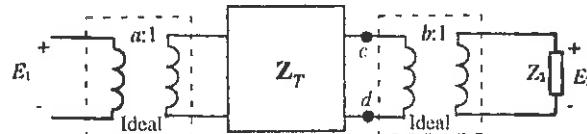
**Ejercicio 1**

Sean dos cuadripolos A, B, caracterizados por sus correspondientes matrices de impedancia  $Z_A$ ,  $Z_B$ , conectados tal como se muestra en la figura siguiente, sabiendo que la corriente circulatoria es nula:



- a) Calcule la matriz de impedancias total  $Z_T$  del cuadripolo equivalente en función de los parámetros  $Z_A$  y  $Z_B$ . (Nota: se recomienda realizar el análisis a partir de los circuitos equivalentes).

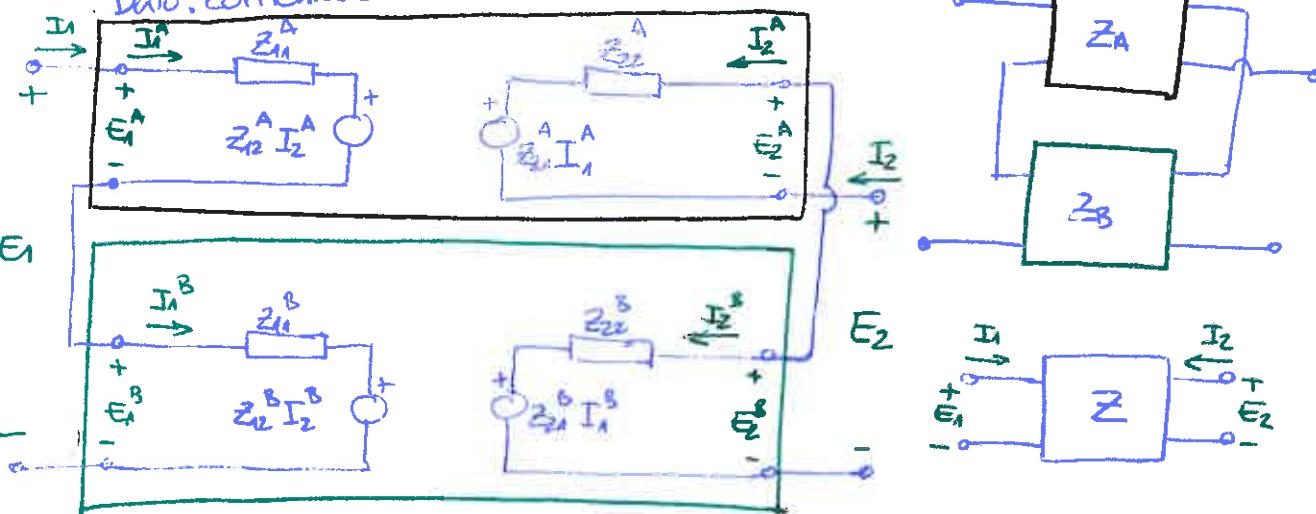
Suponiendo conocida  $Z_T$ , dicho cuadripolo equivalente se interconecta tal como se muestra en la figura siguiente.



- b) Calcule la impedancia equivalente de Thévenin  $Z_{TH}$ , observada en los terminales 'cd' hacia la derecha.  
c) Suponiendo  $Z_{TH}$  conocido, calcule la expresión de la función de transferencia  $E_2/E_1$ .

(a)

Dato: corrientes circulatorias nulas,



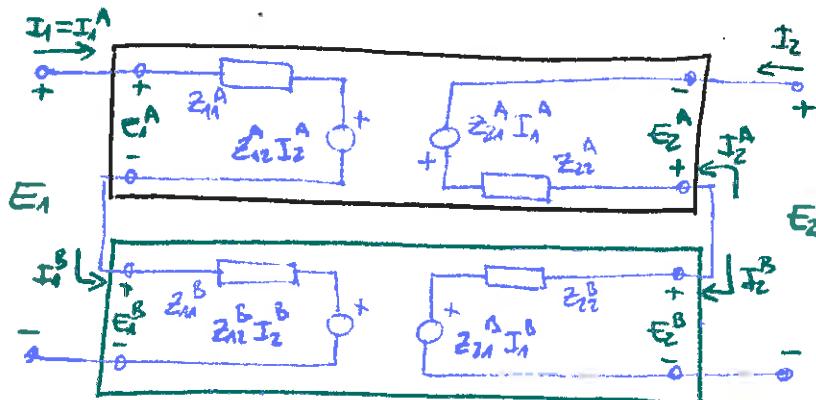
Se observa:

$$I_1 = I_1^A = I_1^B$$

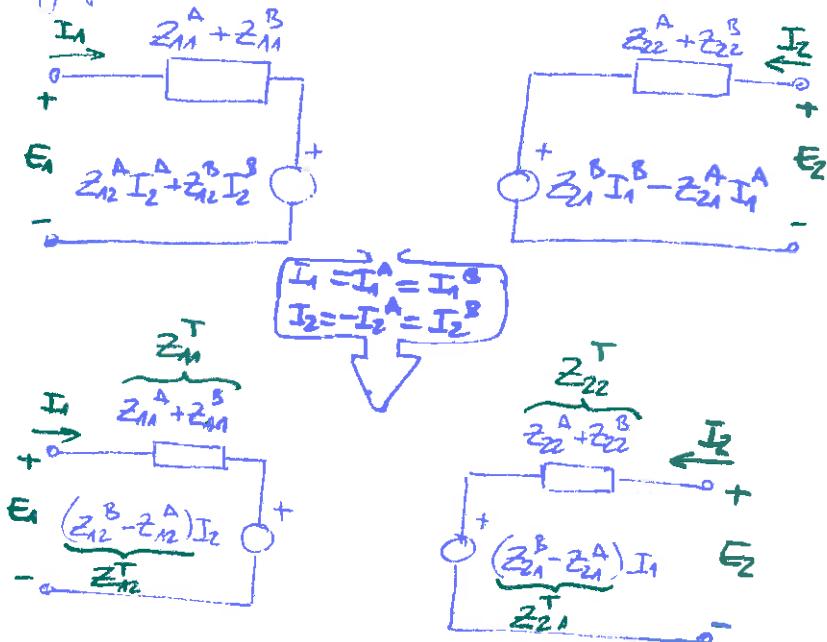
$$E_1 = E_1^A + E_1^B$$

$$I_2 = -I_2^A = I_2^B$$

III)  $E_2 = E_2^B - E_2^A$

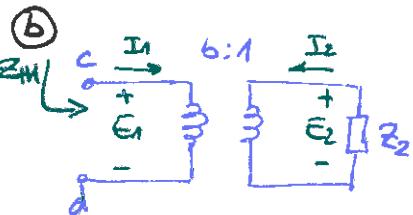


Agrupando elementos:



Por tanto, identificando:

$$[Z^T] = \begin{bmatrix} Z_{11}^T & Z_{12}^T \\ Z_{21}^T & Z_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^A + Z_M^T & Z_{12}^B - Z_{12}^A \\ Z_{21}^B - Z_{21}^A & Z_{22}^A + Z_{22}^B \end{bmatrix}$$



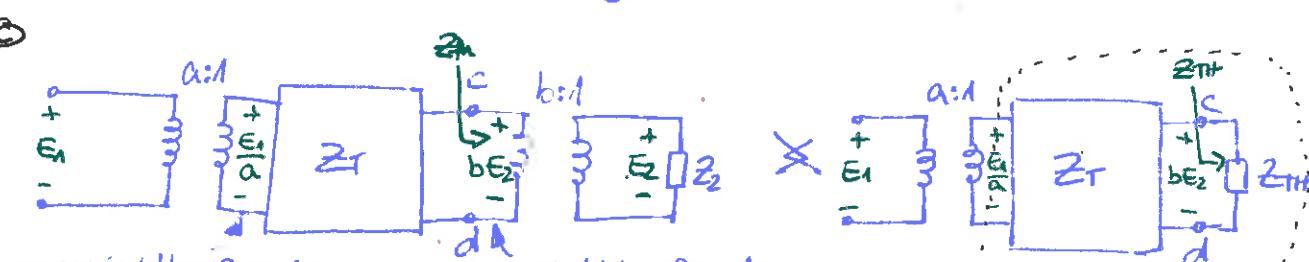
Ecucciones del transformador:

$$\textcircled{1} \frac{E_1}{E_2} = b \quad \textcircled{2} \frac{I_1}{I_2} = \frac{-1}{b}$$

$$\text{Además: } E_2 = -I_2 Z_2 \textcircled{3}$$

$$\text{Por tanto: } Z_{TH} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{b E_2}{I_1} = \frac{b E_2}{-I_2 b} = \frac{b^2 E_2}{-I_2} = \frac{+b^2 I_2 / Z_2}{+I_2} \Rightarrow Z_{TH} = b^2 Z_2$$

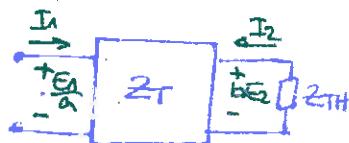
Ecucciones del transformador  
(página 4.12)



Ecucciones del transformador

Ecucciones del transformador

Vamos a analizar:



Planteamos las ecucciones:

$$\textcircled{1} \frac{E_1}{a} = Z_{11}^T I_1 + Z_{12}^T I_2$$

$$\textcircled{2} b E_2 = Z_{21}^T I_1 + Z_{22}^T I_2$$

$$\textcircled{3} b E_2 = -I_2 Z_{TH}$$

Sistema de 3 ecucciones con 4 incógnitas:  $I_1, I_2, E_1, E_2$

Resolvemos por eliminación:

$$\begin{vmatrix} Z_{11}^T & \frac{E_1}{a} \\ Z_{21}^T & b E_2 \end{vmatrix} \rightarrow Z_{11}^T b E_2 - Z_{21}^T \frac{E_1}{a}$$

DE. \textcircled{3}:  $I_2 = -\frac{b E_2}{Z_{TH}}$

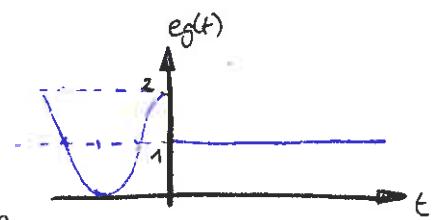
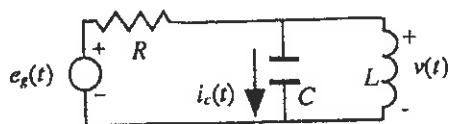
$$\frac{Z_{11}^T b E_2 - Z_{21}^T \frac{E_1}{a}}{Z_{11}^T Z_{21}^T - Z_{21}^T Z_{11}^T} \rightarrow$$

$$\frac{E_2}{E_1} = ab \frac{Z_{21}^T Z_{TH}}{[Z_{11}^T (Z_{21}^T + Z_{TH}) - Z_{21}^T Z_{11}^T]}$$

$$-b E_2 (Z_{11}^T Z_{21}^T - Z_{21}^T Z_{11}^T) - Z_{TH} (Z_{11}^T Z_{21}^T - Z_{21}^T Z_{11}^T) \rightarrow -b E_2 (Z_{11}^T Z_{21}^T - Z_{21}^T Z_{11}^T - Z_{TH} Z_{11}^T) = +\frac{Z_{TH} Z_{21}^T}{a} E_1$$

Ejercicio 2

Dado el circuito de la figura en donde  $R=1\Omega$ ,  $L=1 H$ ,  $C=1 F$ ,



$$\text{y la fuente de tensión es: } e_s(t) = \begin{cases} 1 + \cos t & -\infty < t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

- Determinar las condiciones iniciales en el condensador y en la bobina.
- Determinar la corriente  $I_c(p)$  como la transformada de Laplace de  $i_c(t)$ ,  $t \geq 0$ .
- Aplicando los teoremas del valor inicial y final, calcule  $i_c(0^+)$ ,  $i_c(\infty)$ .
- Calcule  $v(t)$ ,  $t \geq 0$ , a partir de la transformada inversa de Laplace  $V(p)$ .

$$\textcircled{a} \quad e_g(t) = 1 + \cos t = V_1 + V_2(t) \quad e_g(t) \underset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{p} V_1 + V_2(p)$$

Aplicamos superposición

$$\textcircled{a} \quad \text{Fuente continua } V_1 \text{ (condemos } V_2(t)) \left\{ \begin{array}{l} \text{Circuito: } V_1 \text{ en paralelo con } R \text{ y } M \\ \text{Corriente: } i_{c1}(0^-) \end{array} \right.$$

$$V_{c1}(0^-) = 0 \quad \text{debido a cortocircuito}$$

$$i_{c1}(0^-) = \frac{V_1}{R} \Rightarrow i_{c1}(0^-) = 1 \text{ A}$$

$$\textcircled{a} \quad \text{Fuente alterna } V_2(t) \text{ (condemos } V_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Circuito: } V_2(t) \text{ en paralelo con } M \text{ y } Z_L \\ \text{Corriente: } i_{c2}(0^-) \\ \text{Fase: } V_2(t) \rightarrow V_2 \end{array} \right.$$

$$i_{c2}(0^-) = \frac{V_2}{Z_L} \Rightarrow i_{c2}(0^-) = 1 \text{ A} \quad \text{Sustituyendo datos numéricos}$$

$$V_2(t) = \cos t \Rightarrow V_2 = 1 \cdot e^{j0} = 1$$

$$Z_R = R = 1$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j$$

$$Z_L = j\omega L = j$$

$$V_{c2} = V_2 = 1 = 1 \cdot e^{j0}$$

$$i_{c2} = \frac{V_{c2}}{Z_L} = \frac{1}{j} = -j = 1 \cdot e^{-j\pi/2}$$

$$\rightarrow \text{Pasando al tiempo: } V_{c2}(t) = \cos t$$

$$i_{c2}(t) = \cos t - \frac{1}{2} = \text{sent}$$

$$\frac{-j}{-j + 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

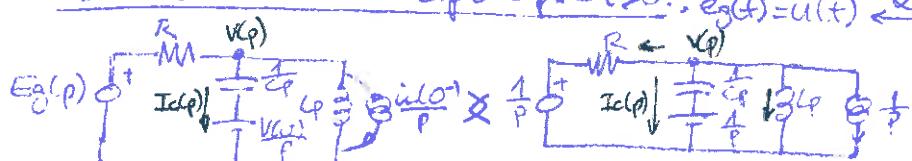
Del paralelo a la izquierda no circula corriente

$$\text{Particularizando en } t = 0^- \Rightarrow \begin{cases} V_{c2}(0^-) = 1 \text{ V} \\ i_{c2}(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Finalmente, haciendo superposición: } \begin{cases} V_c(0^-) = V_{c1}(0^-) + V_{c2}(0^-) \\ i_c(0^-) = i_{c1}(0^-) + i_{c2}(0^-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_c(0^-) = 1 \text{ V} \\ i_c(0^-) = 1 \text{ A} \end{cases}$$

$$\textcircled{b} \quad \text{Circuito en el dominio de Laplace para } t > 0: e_g(t) = u(t) \leftrightarrow E_g(p) = \frac{1}{p}$$



$$\text{Nudo: } \frac{V(p) - E_g(p)}{R} + \frac{V(p) - \frac{1}{p}}{\frac{1}{Cp}} + \frac{V(p) - 0}{Lp} + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow V(p) \left[ \frac{1}{R} + Cp + \frac{1}{Lp} \right] - \frac{E_g(p)}{R} - \frac{C}{p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$\text{Entonces: } V(p) \left( 1 + p + \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow V(p) = \frac{1}{1 + p + \frac{1}{p}} \Rightarrow V(p) = \frac{p}{p^2 + p + 1}$$

Y ahora calculamos  $I_c(p)$ :

$$I_c(p) = \frac{V(p) - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p}} = p(V(p) - \frac{1}{p}) = pV(p) - 1 = \frac{p^2}{p^2 + p + 1} - 1 = \frac{p^2 - p^2 - p - 1}{p^2 + p + 1} \Rightarrow I_c(p) = -\frac{p + 1}{p^2 + p + 1}$$

$$\textcircled{1} \quad i_c(\omega^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p I_c(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{-p-1}{p^2+p+1} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{-p^2-p}{p^2+p+1} \Rightarrow i_c(\omega^+) = -1A$$

(verde  
página T-5)

$$i_c(\omega^-) = \lim_{p \rightarrow 0} p I_c(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-p-1}{p^2+p+1} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-p^2-p}{p^2+p+1} \Rightarrow i_c(\omega^-) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad v(t) = \mathcal{Z}^{-1}(V(p)) \quad \text{Lo hacemos por residuos.}$$

$$\text{Los polos de } V(p) \text{ son } p^2+p+1=0 \Rightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm 3j}{2} \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & \text{simple} \\ p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & \text{simple} \end{cases}$$

$$\text{Residuo de } p_1: K_1(t) = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1)V(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1) \frac{p}{p^2+p+1} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1) \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)} e^{pt}$$

$$K_1(t) = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{pe^{pt}}{p-p_2} = \frac{p_1 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}}{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$K_1(t) = \frac{-j}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} = \left(\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} \Rightarrow K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} e^{j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j}_{\times} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}$

$$K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$K_2(t) = K_1(t)^*$$

$$K_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) - j \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

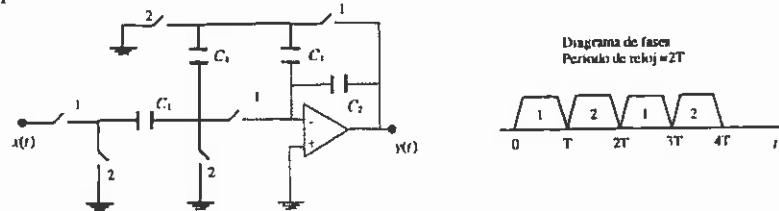
$$v(t) = [K_1(t) + K_2(t)] u(t) = (K_1(t) + K_1(t)^*) u(t) = 2R_d(u(t)) u(t)$$

$$V(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) u(t)$$

$$\Leftrightarrow V(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right), t \geq 0$$

**Ejercicio 3**

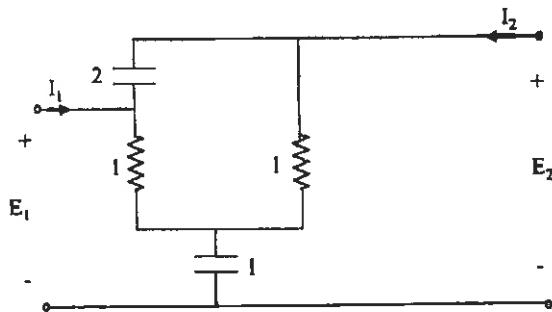
Considere el circuito de capacidades conmutadas de la figura con las fases de reloj indicadas sobre los interruptores.



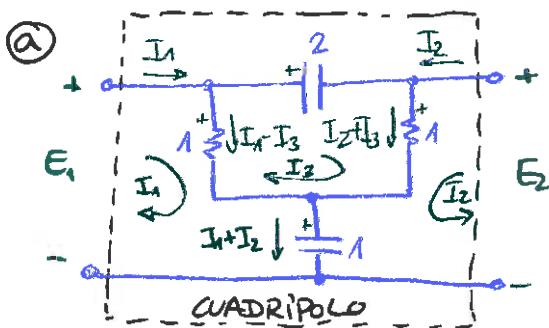
- Dibuje los circuitos equivalentes en el dominio Z, correspondientes a las dos fases de reloj, y escriba las ecuaciones resultantes del análisis de cada circuito.
- Determine la función de transferencia  $H_{11}(z)=Y_1(z)/X_1(z)$ , donde los subíndices se refieren a las fases de reloj. Justifique las condiciones bajo las cuales el circuito es estable BIBO.
- Si  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 100 \text{ pF}$ , y el periodo de reloj es  $10 \mu\text{s}$ , determine la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo continuo  $H(j\omega)$  equivalente a  $H_{11}(z)$ . Dibuje aproximadamente su respuesta en amplitud.

Ejercicio 1

Dado el cuadripolo de la figura, se pide:



- Analizar el circuito por el método de mallas en régimen permanente senoidal (fasores)
- Determinar la matriz  $[Z]$  (parámetros de impedancias) en función de la frecuencia.
- Determinar la admitancia de la puerta 1 con la puerta 2 cortocircuitada.



Aplicando mallas:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Malla 1: } E_1 - 1 \cdot (I_1 - I_3) - \frac{1}{j\omega 1} (I_1 + I_2) &= 0 \\ \textcircled{2} \text{ Malla 2: } E_2 - 1 \cdot (I_2 + I_3) - \frac{1}{j\omega 1} (I_1 + I_2) &= 0 \\ \textcircled{3} \text{ Malla 3: } -\frac{1}{j\omega 2} \cdot I_3 - 1 \cdot (I_2 + I_3) + 1 \cdot (I_1 - I_3) &= 0 \end{aligned}$$

(b)  $\begin{cases} E_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \\ E_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} \end{cases}$  ← Buscamos esto. Tenemos que manipular nuestras ecuaciones hasta llegar con ello. (Tenemos que deshacernos de  $I_3$ )

Despejamos  $I_3$  de la malla 3:  $(-\frac{1}{2j\omega} - 1 - 1)I_3 - I_2 + I_1 = 0$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{I_2 - I_1}{-\frac{1}{2j\omega} - 2} \Rightarrow I_3 = \frac{I_1 - I_2}{2 + \frac{1}{2j\omega}}$$

Sustituyendo en las mallas 1 y 3:

$$\begin{aligned} E_1 &= I_1 - I_3 + \frac{1}{j\omega} I_1 + \frac{1}{j\omega} I_2 \\ E_2 &= I_2 + I_3 + \frac{1}{j\omega} I_1 + \frac{1}{j\omega} I_2 \end{aligned} \Rightarrow I_3 = \frac{I_1 - I_2}{2 + \frac{1}{2j\omega}}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(1 + \frac{1}{j\omega}\right) I_1 + \frac{1}{j\omega} I_2 - \frac{I_1 - I_2}{2 + \frac{1}{2j\omega}} \\ E_2 &= \frac{1}{j\omega} I_1 + \left(1 + \frac{1}{j\omega}\right) I_2 + \frac{I_1 - I_2}{2 + \frac{1}{2j\omega}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \left[1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2 + \frac{1}{2j\omega}}\right] I_1 + \left[\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2j\omega}}\right] I_2 \\ E_2 = \left[\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2j\omega}}\right] I_1 + \left[1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2 + \frac{1}{2j\omega}}\right] I_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2j\omega}} = \frac{2j\omega}{4j\omega + 1}$$

Identificando:

$$Z_{11} = 1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1} ; Z_{12} = \frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1}$$

$$Z_{21} = \frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1} ; Z_{22} = 1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1}$$

$Z_{12} = Z_{21}$  por ser un  
 wedri polo RLC (sin  
 generadores dependientes)  
 $Z_{11} = Z_{22}$  por ser un  
 wedri polo simétrico

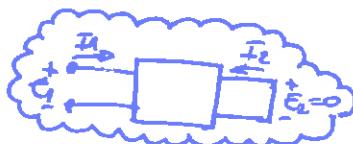
Con lo que:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1} & \frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1} \\ \frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1} & 1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1} \end{bmatrix}$$

c)

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{E_1} \right|_{E_2=0}$$

← Esto es lo que nos  
están pidiendo



$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} - Z_{12} & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

← este es el que buscamos.

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{|Z|} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}^2 - Z_{12}^2} = \frac{1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1}}{\left(1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1}\right)^2}$$

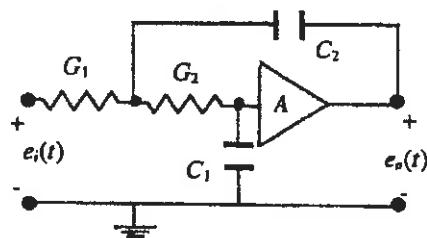
$$Y_{11} = \frac{1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1}}{\left[1 + \frac{1}{j\omega} - \frac{2j\omega}{4j\omega+1}\right]^2 - \left[\frac{1}{j\omega} + \frac{2j\omega}{4j\omega+1}\right]^2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Dado el circuito del filtro activo de la figura,

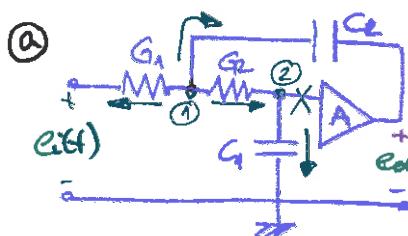
a) Calcule la expresión de la función de transferencia  $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ :



Si se desea diseñar un filtro paso bajo de Butterworth con una atenuación en el extremo de la banda de paso de 1dB correspondiente a una frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/seg. y con una atenuación de al menos 20 dB para frecuencias mayores de 5 rad/seg.

b) Obtenga los parámetros del filtro: orden ( $n$ ) y rizado ( $\varepsilon$ ).

c) Suponiendo  $A=1$ ,  $G_1=G_2=1$ , determine los valores que deben tomar las capacidades  $C_1$ ,  $C_2$  para que la estructura de la figura implemente el filtro diseñado en b).



$$\left. \begin{array}{l} \text{Nodo ①: } (E_1 - E_2)G_1 + \frac{E_1 - E_0}{1/sC_2} + (E_1 - E_2)G_2 = 0 \\ \text{Nodo ②: } (G - E_2)G_2 = \frac{E_2 - 0}{1/sC_1} \end{array} \right\}$$

$$\text{Además: } E_0 = AE_2$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1(G_1 + G_2 + sC_2) - E_1G_1 - E_0sC_2 - E_2G_2 = 0 \\ E_2(G_2 + sC_1) - E_1G_2 = 0 \rightarrow E_2 = \frac{E_1G_2}{G_2 + sC_1} \Rightarrow E_1 = E_2 \frac{G_2 + sC_1}{G_2} \Rightarrow E_1 = E_0 \frac{G_2 + sC_1}{AG_2} \end{array} \right\}$$

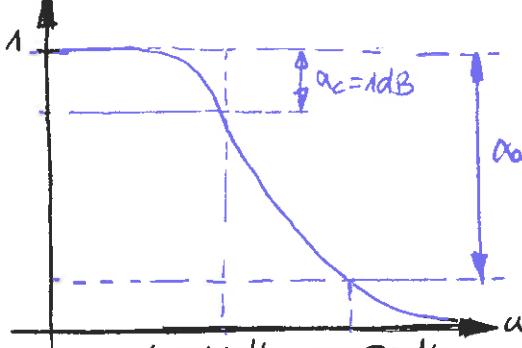
Ahora en la ecuación del nodo ①:  $E_1(G_1 + G_2 + sC_2) - E_1G_1 - E_0sC_2 - E_2G_2 = 0$

$$E_0 \frac{G_2 + sC_1}{AG_2} \cdot (G_1 + G_2 + sC_2) - E_0sG_2 - \frac{E_0}{A}G_2 = E_1G_1 \Rightarrow \frac{E_0}{E_1} = \frac{G_1}{\frac{G_2 + sC_1}{AG_2}(G_1 + G_2 + sC_2) - sC_2 - \frac{G_1}{A}}$$

$$E_0 = \frac{AG_1G_2}{(G_2 + sC_1)(G_1 + G_2 + sC_2) - sC_2AG_2 - G_2^2} = \frac{AG_1G_2}{G_1G_2 + G_2^2 + sG_1G_2 + sG_1G_2 + s^2G_1G_2 - sAG_1G_2 - \frac{G_1}{A}}$$

$$H(s) = \frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{AG_1G_2}{C_1C_2s^2 + ((1-A)G_1G_2 + C_1(G_1 + G_2))s + G_1G_2}$$

⑤  $|H(j\omega)|$



$$\alpha_c = 1 \text{ dB}$$

$$\alpha_a = 20 \text{ dB}$$

Resolviendo:

$$10 \log(1+\varepsilon^2) = \alpha_c \Rightarrow \log(1+\varepsilon^2) = \frac{\alpha_c}{10} \Rightarrow 1+\varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_c}{10}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_c}{10}} - 1} \rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} \rightarrow \boxed{\varepsilon = 0.509}$$

$$10 \log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n}\right) = \alpha_a \Rightarrow 1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{\alpha_a}{10}} \Rightarrow \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} = \frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}}}{\varepsilon^2}$$

$$\log\left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} = \log \frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2} \Rightarrow 2n \log \frac{\omega_a}{\omega_c} = \log \frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2} \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2 \log\left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)} \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{20}{10}} - 1}{0.509^2}\right)}{2 \log\left(\frac{5}{1}\right)}$$

$$n = 1.84 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

⑥ Sustituyendo valores en la expresión de ④:

$$(-s)^2 = s^2$$

$$s = j\omega$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 C_1 C_2 + 2sC_1 + 1} \quad \Rightarrow |H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{s^2 C_1 C_2 + 2sC_1 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 C_1 C_2 - 2sC_1 + 1}$$

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{s^4 C_1^2 C_2^2 - 2s^3 C_1^2 C_2 + s^2 C_1 C_2 + 2s^3 C_1^2 C_2 - 4s^2 C_1^2 + 2sC_1 + s^2 C_1 C_2 - 2sC_1 + 1}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{s^4 C_1^2 C_2^2 + s^2 (2C_1 C_2 - 4C_1^2) + 1}$$

$$\text{Ahora identificamos con la expresión de la página T-3.9: } |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^2}$$

$$\omega_c = 1$$

$$n = 3$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\omega)^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^4} \Rightarrow |H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^4}$$

Identificando ambos como ④ tenemos:

$$\textcircled{1}$$

$$\textcircled{1}$$

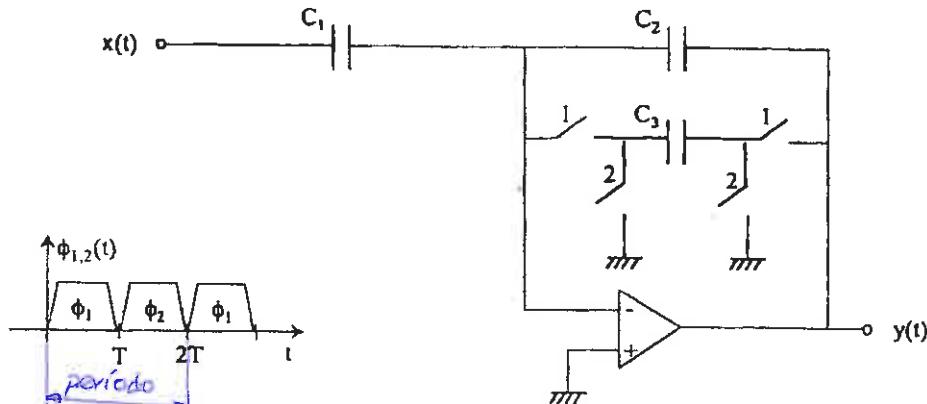
$$\frac{1}{s^4 C_1 C_2 + 2s^3 C_1^2 C_2 + C_1^2 C_2^2 s^4} = \frac{1}{\textcircled{1} + \varepsilon^2 s^4} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 C_2 - 4C_1^2 = 0 \Rightarrow 2\cancel{C_1}(C_2 - 2C_1) = 0 \Rightarrow C_2 = 2C_1 \\ C_1^2 C_2^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow C_1 C_2 = \varepsilon \Rightarrow 2C_1^2 = \varepsilon \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{cases}$$

$$C_2 = 2C_1$$

$$C_1 \neq 0 \Rightarrow C_1 \approx 1$$

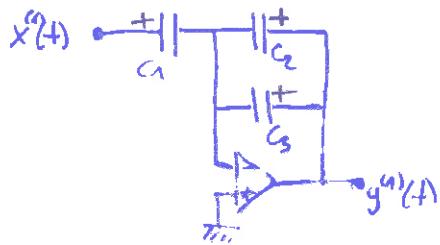
Ejercicio 3

En el circuito de capacidades conmutadas de la figura, se pide:

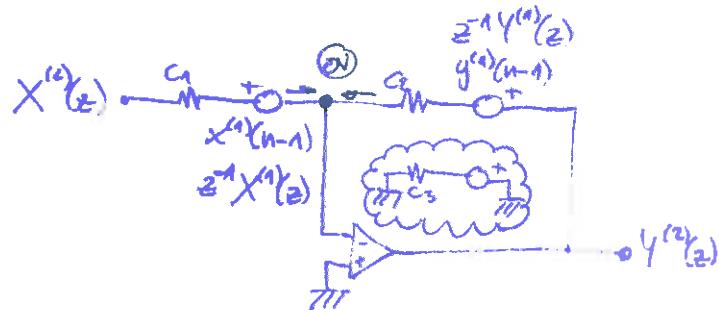
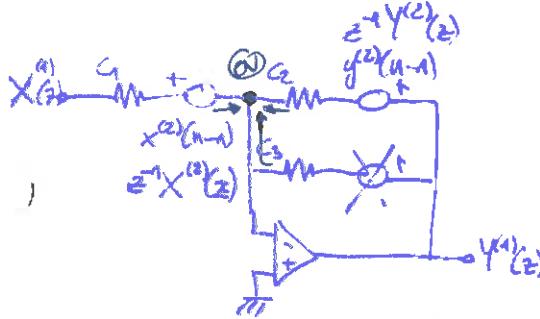
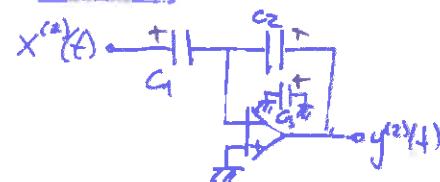


- Dibujar los circuitos equivalentes en el dominio Z para cada una de las fases de reloj, y plantear las ecuaciones resultantes del análisis por nudos.
- Encontrar la matriz  $[H(z)]$  que relaciona las dos secuencias de entrada con las dos secuencias de salida. Obtener razonadamente para qué valores de las capacidades, el circuito es estable, siendo por tanto estables las 4 componentes de la matriz.
- Obtener la matriz respuesta en frecuencia correspondiente.

① Fase  $\phi_1$ :



Fase  $\phi_2$ :



$$(X^{(1)} - z^{-1} X^{(2)}) C_1 + (Y^{(1)} - z^{-1} Y^{(2)}) C_2 + Y^{(1)} C_3 = 0 \quad [1] \quad (X^{(2)} - z^{-1} X^{(1)}) C_1 + (Y^{(2)} - z^{-1} Y^{(1)}) C_2 = 0 \quad [2]$$

⑥

$$\left. \begin{aligned} [1] & (Y^{(1)} + C_2 Y^{(2)} - C_2 z^{-1} Y^{(2)} + C_1 X^{(1)} - C_1 z^{-1} X^{(2)}) = 0 \\ [2] & -C_2 z^{-1} Y^{(1)} + C_2 Y^{(2)} - C_1 z^{-1} X^{(1)} + C_1 X^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_2 + C_3 & -C_2 z^{-1} \\ -C_2 z^{-1} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 z^{-1} \\ -C_1 z^{-1} & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_2 + C_3 & -C_2 z^{-1} \\ -C_2 z^{-1} & C_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 z^{-1} \\ -C_1 z^{-1} & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{-1}{C_2(C_2 + C_3) - C_2^2 z^{-2}} \begin{pmatrix} C_2 & C_2 z^{-1} \\ C_2 z^{-1} & C_2 + C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 z^{-1} \\ -C_1 z^{-1} & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

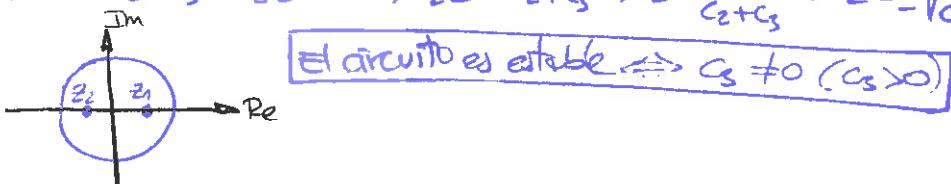
$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{-1}{C_2(C_2 + C_3) - C_2^2 z^{-2}} \begin{pmatrix} C_1 C_2 (1 - z^{-2}) & 0 \\ -C_1 C_3 z^{-1} & C_1(C_2 + C_3) - C_1 C_2 z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(a b)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} (d \ b \ -c \ a)}$$

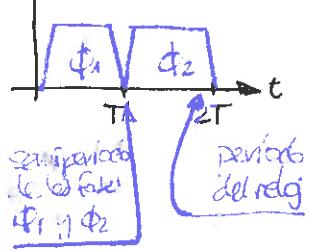
Portanto:

$$[H(z)] = \begin{pmatrix} -C_1(1-z^{-2}) & 0 \\ \frac{C_2+C_3-C_2z^{-2}}{C_2(C_2+C_3)-C_2^2z^{-2}} & -\frac{C_1}{C_2} \end{pmatrix}$$

Poles:  $C_2 + C_3 - C_2 z^{-2} = 0 \Rightarrow C_2 z^2 = C_2 + C_3 \Rightarrow z^2 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{C_2}{C_2 + C_3}} < 1 \Leftrightarrow C_3 \neq 0 \quad (C_3 > 0)$



c)



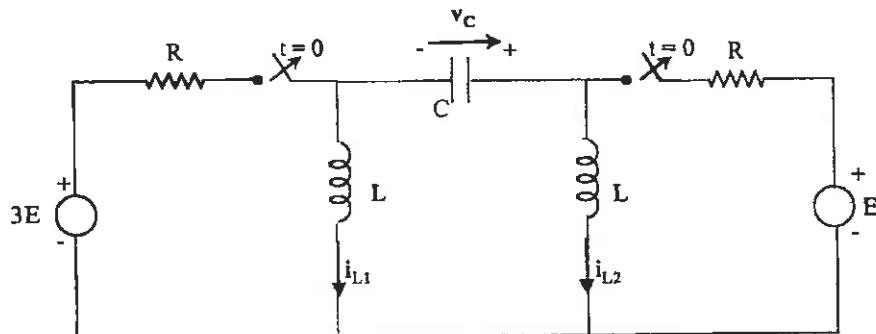
$$\left. \begin{array}{l} H(e^{j\omega}) = H(z) \\ z = e^{j\omega T} \end{array} \right\} \text{Introduciendo ambas condiciones: } H(j\omega) = H(z) \Big|_{z = e^{j\omega T}}$$

$$\left. \begin{array}{l} H(j\omega) = H(e^{j\omega T}) \\ \omega = \omega T \end{array} \right\} \text{¡OJO!} \quad \text{(!)}$$

$$H(j\omega) = \begin{pmatrix} -C_1(1-e^{-j\omega 4T}) & 0 \\ \frac{C_2+C_3-C_2e^{-j\omega 4T}}{C_2(C_2+C_3)-C_2^2e^{-j\omega 4T}} & -\frac{C_1}{C_2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

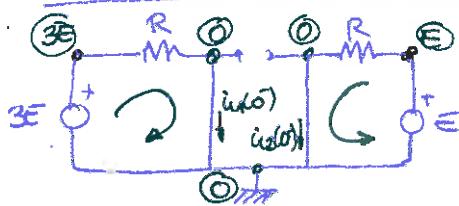
Considere el circuito de la figura, en el que inicialmente los dos interruptores están cerrados y ambos se abren en  $t=0$ .



Son datos los valores:  $\frac{2L}{R} = \omega_0$ ;  $\frac{1}{2LC} = \omega_0^2$ . Responda a las siguientes cuestiones:

- Calcule las condiciones iniciales en  $t=0^-$  para  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$  y  $v_C$ .
- Calcule  $v_C(t)$  para  $t > 0$ .
- Razone cuánto vale  $i_{L1}$  en  $t=0^+$ .

(a) Estudiamos el circuito en  $t=0^-$  (interruptores cerrados)

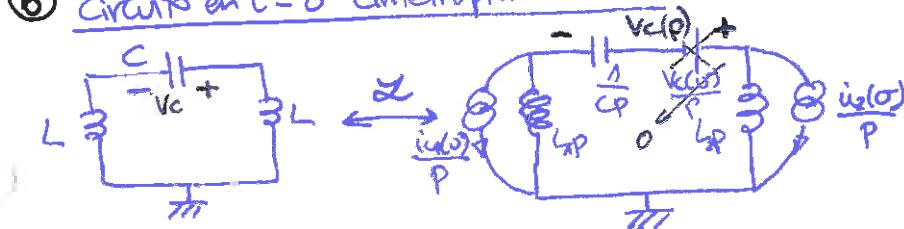


$$v_C(0^-) = 0 \quad \text{Porque ambas bornas están cortocircuitadas.}$$

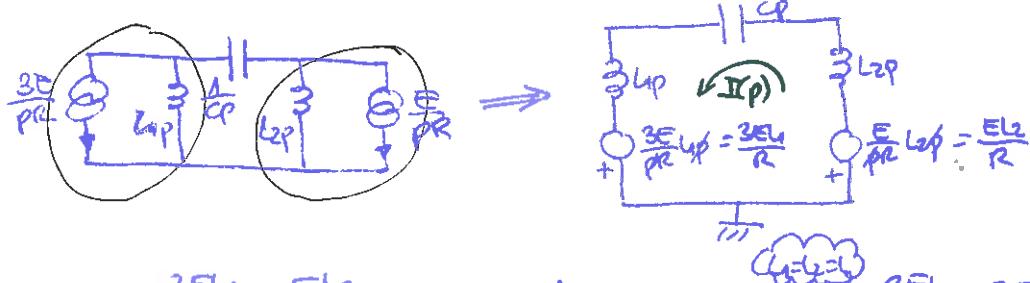
$$i_{L1}(0^-) = \frac{3E - 0}{R} \rightarrow i_{L1}(0^-) = \frac{3E}{R}$$

$$i_{L2}(0^-) = \frac{E - 0}{R} \rightarrow i_{L2}(0^-) = \frac{E}{R}$$

(b) Circuito en  $t=0^+$  (interruptores abiertos)



\* La flecha del generador de corriente va en el mismo sentido y dirección que  $i_{L1}(0^-)$



$$\text{Molar: } \frac{3EL}{R} - \frac{EL^2}{R} - IL_{2p} - I\frac{1}{Cp} - IL_{1p} = 0 \Rightarrow \frac{2EL}{R} - 2IL_{1p} - I\frac{1}{Cp} = 0 \Rightarrow \frac{2EL}{R} = I\left(2L_{1p} + \frac{1}{Cp}\right)$$

$$I(p) = \frac{\frac{2EL}{R}}{2L_{1p} + \frac{1}{Cp}}$$

Ahora, ley de Ohm en el condensador:

$$V_C = I \frac{1}{C_p} = \frac{\frac{2E}{R}}{2Lp + \frac{1}{C_p}} \cdot \frac{1}{C_p} = E \frac{\frac{2L}{R}}{2LC_p^2 + 1}$$

$$\frac{2L}{R} = \omega_0$$

$$\frac{1}{2LC} = \omega_0^2$$

$$E = \frac{\omega_0}{\frac{1}{\omega_0^2 p^2 + 1}} = E \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} = E \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$V_C(p) = E \omega_0^2 \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$\xleftarrow{Z}$

página T-3  
Tabla de transformadas

$V_C(t) = E \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) u(t)$

o bien:  $v_C(t) = E \omega_0^2 \sin(\omega_0 t), t \geq 0$

② Teorema del valor inicial:  $(\lim_{t \rightarrow 0} F(t)) = (\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p))$

Página T-5

$$I(p) = \frac{\frac{2E}{R}}{2Lp + \frac{1}{C_p}} = \frac{\frac{2E}{R}}{\frac{2LC_p^2 + 1}{C_p}} = \frac{2E \frac{L}{R} C_p}{1 + 2LC_p^2}$$

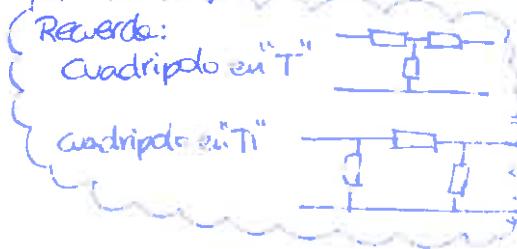
$$i_L(0^+) = (\lim_{t \rightarrow 0} i_L(t)) = (\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{\frac{2E \frac{L}{R} C_p}{1 + 2LC_p^2}}{1 + 2LC_p^2}) = (\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2E \frac{L}{R} C_p^2}{1 + 2LC_p^2}) = \frac{\cancel{2E} \cancel{\frac{L}{R}} \cancel{C_p^2}}{\cancel{1} \cancel{+ 2LC_p^2}}$$

$i_L(0^+) = \frac{E}{R}$

NOTA: Fijarse que  $i_L(0^+) = \frac{E}{R} \neq i_L(0^-) = \frac{3E}{R} \Rightarrow$  Hay variación de parámetros



Ejercicio 1



Se persigue encontrar un cuadripolo en  $\pi$  que presente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_1 &= (1+j)E_1 + j E_2 \\ I_2 &= j E_1 + (1+j)E_2 \end{aligned}$$

Donde  $I_1$  y  $E_1$  son la intensidad y tensión de entrada al cuadripolo respectivamente, e  $I_2$ ,  $E_2$  las de salida, según se definen habitualmente, siendo " $j$ " la unidad imaginaria. Suponga para la frecuencia un valor genérico dado por  $\omega = \omega_0$ .

- Encontrar los elementos circuitales RLC que podrían componer cada rama del cuadripolo, y sus valores. Dibujar el cuadripolo.
- Si se conecta el cuadripolo del enunciado en paralelo con otro igual, calcule la matriz de parámetros admitancia  $[Y_T]$  del cuadripolo resultante (verifique previamente el test de Brune).
- Se persigue ahora un cuadripolo que presente las ecuaciones:

$\xrightarrow{\text{RLC}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= (1+j)E_1 + j E_2 \\ I_2 &= -j E_1 + (1+j)E_2 \end{aligned}$$

Dibuje un cuadripolo equivalente que presente estas ecuaciones.

②

$$I_1 = (1+j)E_1 + j E_2$$

$$I_2 = j E_1 + (1+j)E_2$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=0} \Rightarrow Y_{11} = Y_1 + Y_2$$

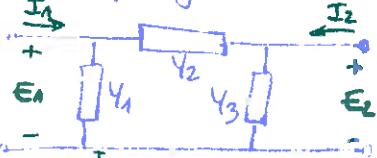
$$Y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Big|_{E_1=0} \Rightarrow Y_{12} = -Y_2$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0} \Rightarrow Y_{21} = -Y_2 \quad (\text{analogamente})$$

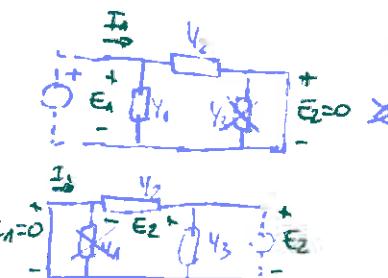
$$Y_{22} = \frac{I_2}{E_2} \Big|_{E_1=0} \Rightarrow Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

Pensamos en:  $I_1 = Y_{11}E_1 + Y_{12}E_2$   
 $I_2 = Y_{21}E_1 + Y_{22}E_2$

Cuadripolo genérico en "T"



Admitancias en paralelo se suman.



Identificando:

$$Y_{11} = 1+j \Rightarrow Y_1 + Y_2 = 1+j \Rightarrow Y_1 - j = 1+j \Rightarrow Y_1 = 1+2j$$

$$Y_{12} = j \Rightarrow -Y_2 = j \Rightarrow Y_2 = -j$$

$$Y_{21} = j \Rightarrow -Y_2 = j \Rightarrow Y_2 = -j$$

$$(1+j) - j \Rightarrow Y_1 + Y_3 = 1+j \Rightarrow Y_3 = 1+2j$$

conductancia  
condensador

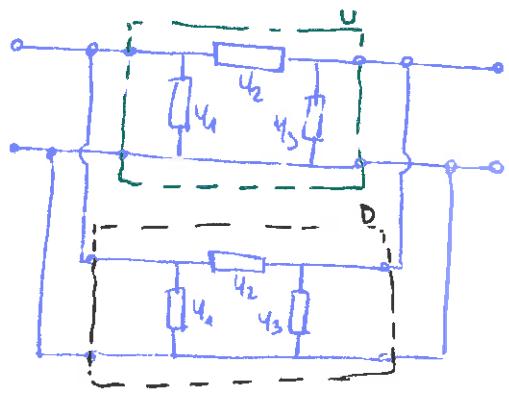
paralelo

paralelo

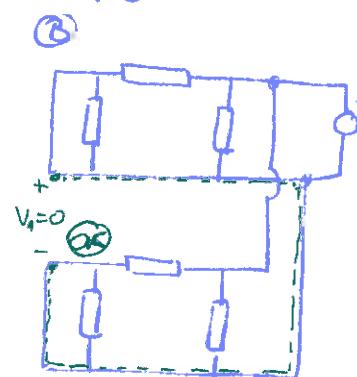
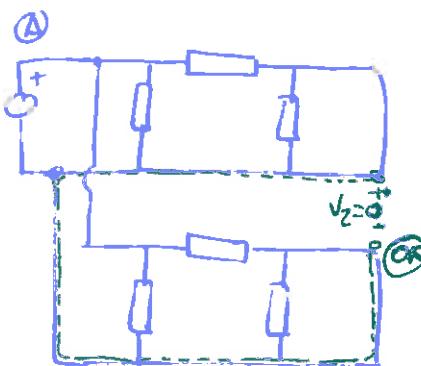
condensador

paralelo

⑤ Conexión paralelo-paralelo:



Verifiquemos los test de Brune (página T4.7)



Se cumplen los dos test de Brune  $\Rightarrow$  No hay corrientes circulatorias, ( $I_C = 0$ )

$$\text{No hay corrientes circulatorias } (I_C = 0) \Rightarrow [Y_T] = [Y_U] + [Y_D]$$

$$\text{Así pues: } [Y_T] = [Y_U] + [Y_D] = \begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & -1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & 1+j \end{bmatrix} \Rightarrow [Y_T] = \begin{bmatrix} 2+2j & 2j \\ 2j & 2+2j \end{bmatrix}$$

⑥

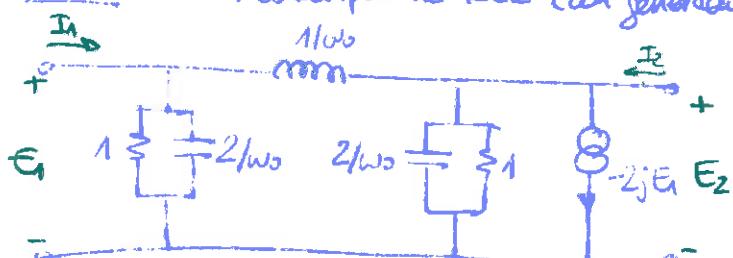
$$I_1 = (1+j)E_1 + jE_2$$

$$I_2 = -jE_1 + (1+j)E_2$$

$$Y_{12} = Y_{21}$$

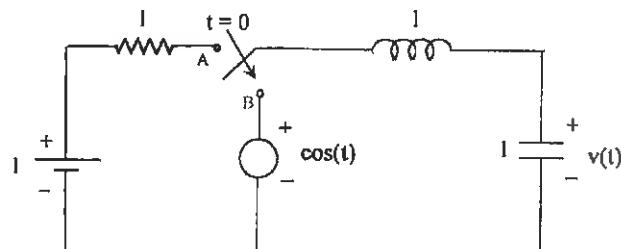
$Y_{12} = -Y_{21}$  No existe la posibilidad de representar mediante un cuadripolo RLC (pasivo) estas ecuaciones, ya que para cualquier cuadripolo RLC se cumple siempre que  $Z_{12} = Z_{21} \Rightarrow Y_{12} = Y_{21}$  y en nuestro caso tenemos que  $Y_{12} = j \neq Y_{21} = -j$

Nota: Con un cuadripolo no RLC (con generadores dependientes)



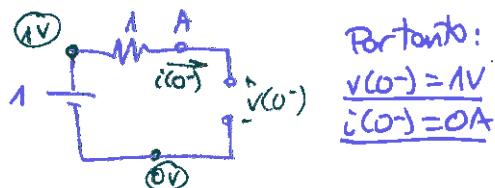
Ejercicio 2

Considere el circuito de la Figura con los elementos normalizados indicados en la misma, donde el interruptor cambia de la posición "A" a la posición "B" en el instante  $t=0$ . Se pide



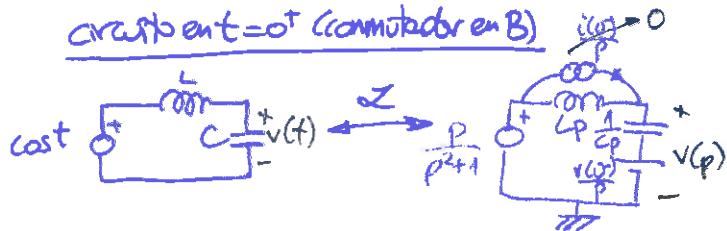
- Determinar la transformada de Laplace de la tensión  $v(t)$ ,  $t > 0$ , en bornas de la capacidad.
- Calcular la respuesta temporal  $v(t)$ ,  $t > 0$ , utilizando el resultado de (a).
- Interpretar físicamente los resultados obtenidos. ¿Existe régimen permanente para  $v(t)$ ? ¿Se podría utilizar el método de fasores para obtener el régimen permanente senoidal? Razone las respuestas.

(a) Circuito en  $t=0^-$  (comutador en A)



Recuerda:  
en corriente continua

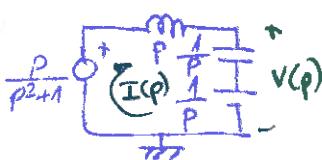
Circuito en  $t=0^+$  (comutador en B)



$$\text{cost} \xrightarrow{\text{página 3}} \frac{P}{P^2+1}$$

$$\text{cost} \xrightarrow{\text{página 3}} \frac{P}{P^2+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ v(0^+) = 1 \\ L = 1 \\ C = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ v(0^+) = 1 \\ L = 1 \\ C = 1 \end{array}$$



$$\text{Método: } \frac{P}{P^2+1} - iP - I \frac{1}{P} - \frac{1}{P} = 0 \Rightarrow \frac{P}{P^2+1} - \frac{1}{P} = I \left( P + \frac{1}{P} \right) \Rightarrow \frac{P}{P^2+1} - \frac{1}{P} = I \left( \frac{P^2+1}{P} \right)$$

$$I(P) = \frac{P}{P^2+1} \left( \frac{P}{P^2+1} - \frac{1}{P} \right)$$

$$\text{Ahora: } v(p) = \frac{1}{P} + I \frac{1}{P} = \frac{1}{P} + \frac{P}{P^2+1} \left( \frac{P}{P^2+1} - \frac{1}{P} \right) \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P^2+1} \left( \frac{P}{P^2+1} - \frac{1}{P} \right) = \frac{1}{P} + \frac{P}{(P^2+1)^2} - \frac{1}{P(P^2+1)}$$

$$v(p) = \frac{1}{P} + \frac{P}{(P^2+1)^2} - \frac{1}{P(P^2+1)}$$

$$v(p) = \frac{P}{(P^2+1)^2} + \frac{1}{P} - \frac{1}{P(P^2+1)} = \frac{P}{(P^2+1)^2} + \frac{P^2+1-1}{P(P^2+1)} = \frac{P}{(P^2+1)^2} + \frac{P}{P(P^2+1)} = \frac{P}{(P^2+1)^2} + \frac{1}{P^2+1}$$

Propiedad página T-2:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(p)}{dp} \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{dF(p)}{dp}\right) = -tf(t)$$

propiedad T-2

$$\cos(\omega t)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{P}{P^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

$$(Z^{-1})$$

Ahora:

$$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \frac{dF(p)}{dp} = \frac{-2p\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{dF(p)}{dp}\right) = -t \operatorname{sen}(\omega_0 t) u(t)$$

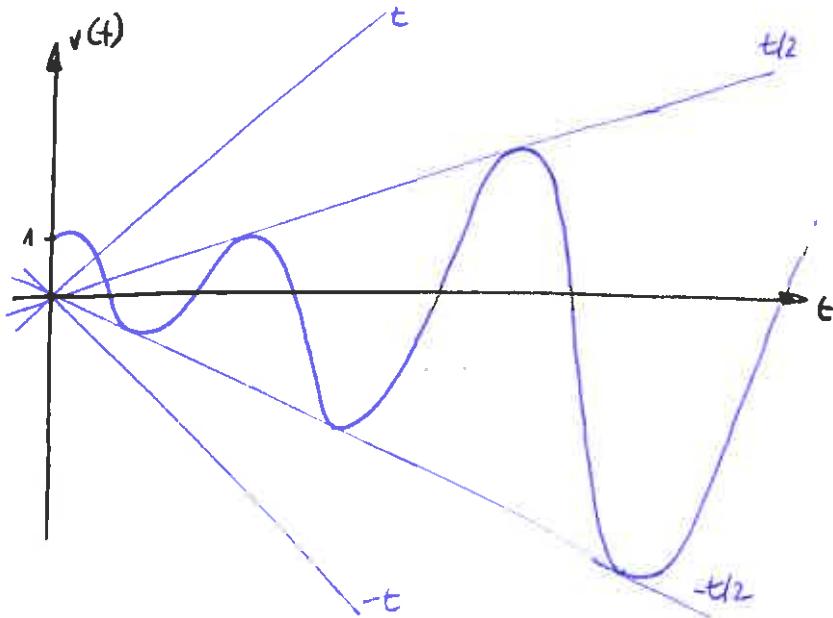
$\downarrow$   
sen( $\omega_0 t$ )

Así pues:  $\frac{-2p\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -t \operatorname{sen}(\omega_0 t) u(t)$  ó bien:  $\frac{p\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{t}{2} \operatorname{sen}(\omega_0 t) u(t)$

$$v(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p}{p^2 + 1} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} v(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen} u(t) + \operatorname{cost} u(t)$$

- ③ El transitorio existe para  $t \rightarrow \infty$  ya que si  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $v(t) \rightarrow \infty$ . Luego el circuito nunca alcanza el régimen permanente sinusoidal (RPS) y por tanto no es válido el método de factores.

$$v(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen} u(t) + \operatorname{cost} u(t)$$



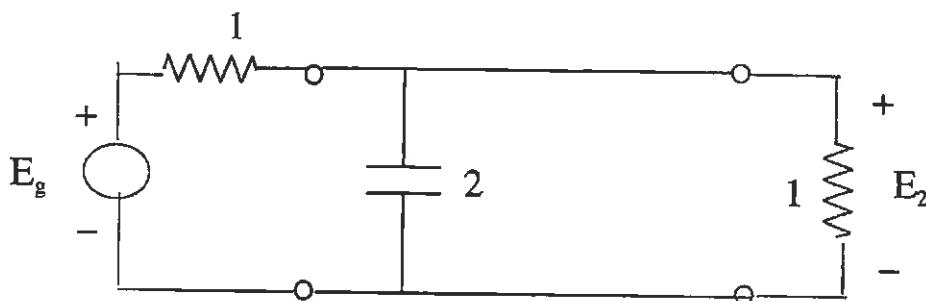
Ejercicio 3

Considere el filtro de primer orden de la Figura con los valores normalizados de sus elementos, indicados en la misma. Considere también la siguiente transformación de frecuencias

$$\hat{s} = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$

donde  $\hat{s}$  es la variable del circuito de partida y  $s$  es la nueva variable tras la aplicación de la transformación. Se pide:

- Dibujar la nueva estructura del filtro indicando los valores de sus elementos, suponiendo que se utiliza la primera forma canónica (Foster) para la realización de dipolos.
- Determinar la función de transferencia  $H(s) = \frac{2E_2(s)}{E_1(s)}$  del nuevo filtro.
- Dibujar aproximadamente las respuestas de amplitud  $|H(j\omega)|$  y de fase  $\arg(H(j\omega))$  del nuevo filtro.



②  $\hat{s} = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$

PRIMERA FORMA CANÓNICA

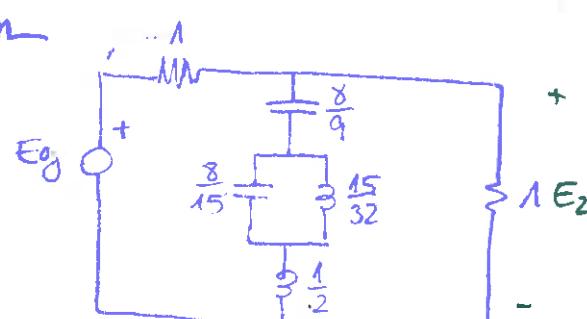
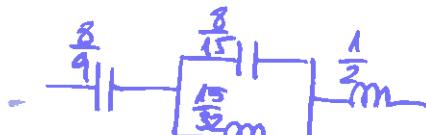
$$Z_C(\hat{s}) = \frac{1}{\hat{s}} = \frac{1}{2\hat{s}} \Rightarrow Z_C(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{2s(s^2 + 4)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{K_0}{s} + \frac{2K_1 s}{s^2 + 4} + K_{\infty} s \right]$$

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{(0+1)(0+9)}{(0+4)} = \frac{9}{4}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 4 - (s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s^2} = \frac{(-4+1)(-4+9)}{-4} = \frac{-3 \cdot 5}{-4} = \frac{15}{4}$$

$$K_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s^2(s^2 + 4)} = 1$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{\frac{15}{4}s}{s^2 + 4} + s \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{15}{4}s} + \frac{1}{2}s \right] = \frac{1}{2s} + \frac{1}{\frac{15}{4}s} + \frac{1}{2}s$$



⑤ Lo que hacemos es calcular la función de transferencia del filtro inicial  $H(s)$ , y después aplicamos la transformación en frecuencias

$$\begin{array}{c}
 \text{Circuitos:} \\
 \text{Izquierdo: } \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{E_2} \\
 \text{Derecho: } \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{E_2} \\
 \text{Relaciones:} \\
 E_2 = E_g \frac{1}{2+2s} \Rightarrow E_2 = E_g \frac{1}{2(1+s)} \Rightarrow \frac{2E_2}{E_g} = \frac{1}{1+s}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2s}}{1 + \frac{1}{2s}} = \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{2s+1}{2s}} = \frac{1}{2s+1} = \frac{1}{1+2s} \\
 E_2 &= E_g \frac{Z}{1+Z} = E_g \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s}} = E_g \frac{\frac{1}{1+2s}}{\frac{2+2s}{1+2s}} = E_g \frac{1}{2+2s}
 \end{aligned}$$

Por tanto:  $H(s) = \frac{1}{1+2s}$  es la función de transferencia del filtro inicial (el del enunciado)

Ahora, la función de transferencia del nuevo filtro obtenido en el apartado anterior es:

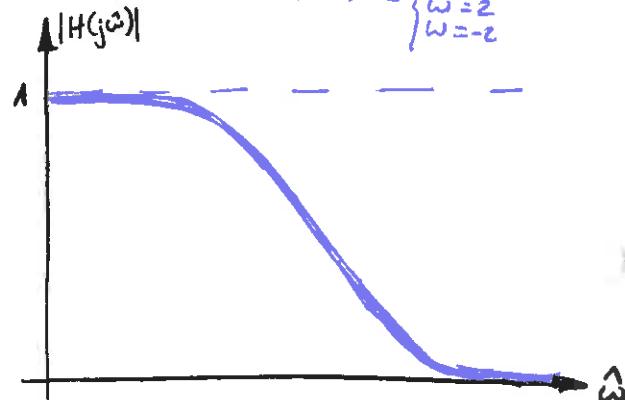
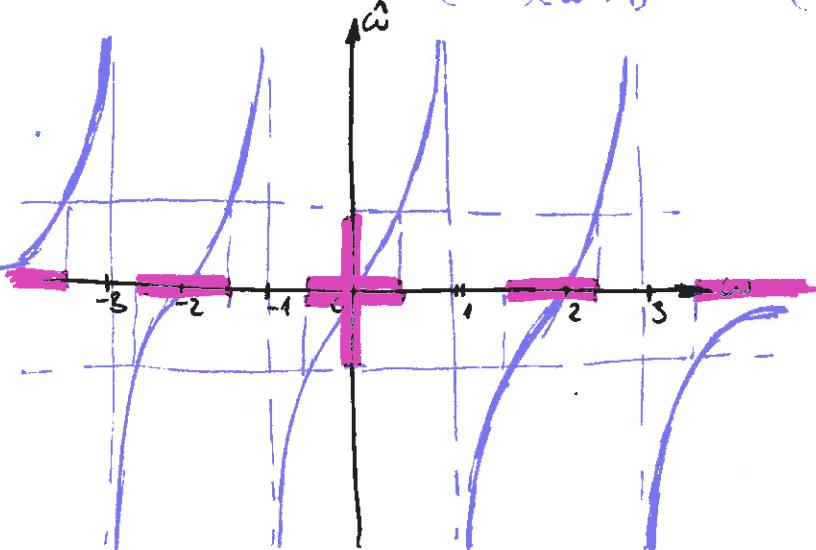
$$\begin{aligned}
 H(s) &= H(s) \\
 \hat{s} &= \frac{s(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+9)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+9)}} = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+9) + s(s^2+4)}
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{(s^2+1)(s^2+9) + s(s^2+4)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^4 + 10s^2 + 9 + s^3 + 4s} \Rightarrow H(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^4 + s^3 + 10s^2 + 4s + 9}$$

⑥

$$\hat{s} = \frac{s(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+9)} \rightarrow j\hat{\omega} = \frac{j\omega(-\omega^2+4)}{(\omega^2+1)(-\omega^2+9)} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{\omega(4-\omega^2)}{(1-\omega^2)(9-\omega^2)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{poles: } &(1-\omega^2)(9-\omega^2) = 0 \quad \begin{cases} \omega = 1 \\ \omega = -1 \\ \omega = 3 \\ \omega = -3 \end{cases} \\
 \text{zeros: } &\omega(4-\omega^2) = 0 \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = 2 \\ \omega = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



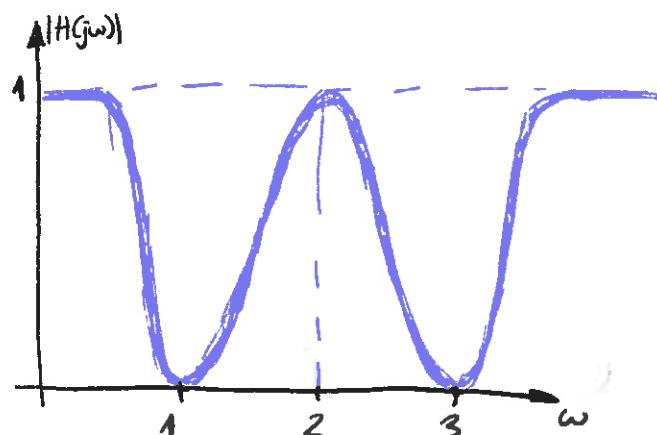
Veamos ahora qué tipo de filtro es el filtro inicial (el del enunciado):

$$H(s) = \frac{1}{1+2s} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

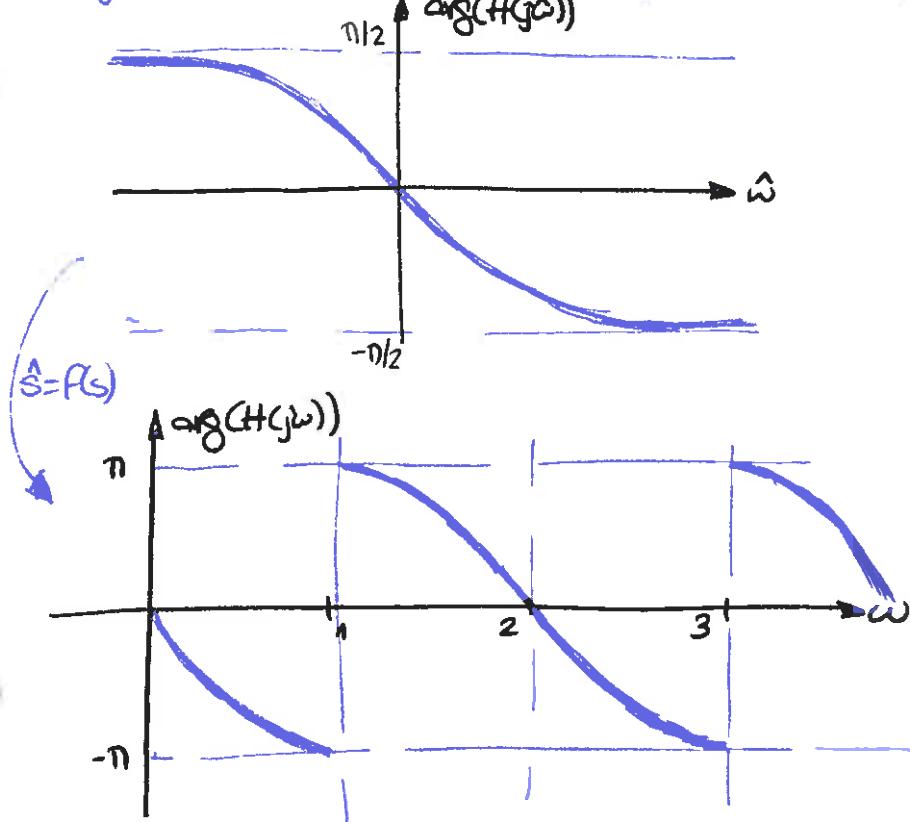
$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\hat{\omega} = 0 \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Filtro paso} \\ \text{bajo.} \end{array} \right.$$

$$\hat{\omega} \rightarrow \infty \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

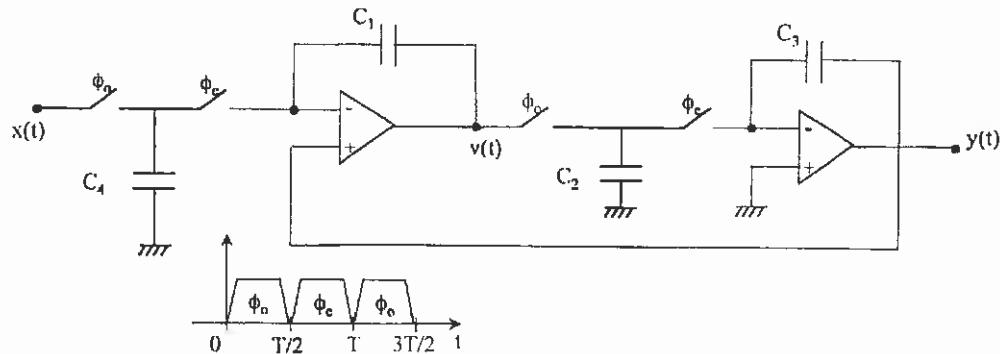


$$\arg(H(j\omega)) = \arg(1) - \arg(1+j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{1}\right)^0 - \arctg \omega \Rightarrow \boxed{\arg(H(j\omega)) = -\arctg \omega}$$



**Ejercicio 4**

**PROBLEMA 4 (2.5 puntos).** En el circuito de condensadores comutados de la figura, se pide:



**Figura**

- Analice los circuitos equivalentes en el dominio Z y plantee las ecuaciones de los nudos situados a la entrada de los amplificadores operacionales, en ambas fases (utilice como variable de apoyo la tensión  $v(t)$  ).
- Resuelva las ecuaciones para calcular la función de transferencia que liga entrada y salida en fase impar, es decir  $H_{oo}(z) = \frac{Y^{(o)}(z)}{X^{(o)}(z)}$ , sabiendo que  $C_4 = 4C_1$  y  $C_3 = 2C_2$ .

Suponiendo que con una cierta combinación de valores de los  $C_i$  se puede obtener la función de transferencia:  $H_A(z) = \frac{2}{2z^2 - z - \frac{1}{2}}$ , y con otra combinación la función:

$$H_B(z) = \frac{4}{2z^2 + z + 1}; \text{ para cada una de estas funciones:}$$

- Represente el diagrama de polos y ceros.
- Represente gráficamente el módulo de la respuesta en frecuencia digital  $|H(e^{j\Omega})|$ , razonando su forma en función de la posición de los polos y los ceros de la función de transferencia.
- Comente brevemente el tipo de filtrado que realiza.

Ejercicio 2

Se desea diseñar un filtro paso banda mediante la conexión en cascada de dos etapas [Figura a)]. La primer etapa realiza un filtrado paso bajo con pulsación de corte  $\omega_{c1}$  y la segunda etapa realiza un filtrado paso alto con pulsación de corte  $\omega_{c2}$ . Además  $\omega_{c1} \gg \omega_{c2}$ . Ambas etapas tienen la misma topología y es la que se representa en la figura b).

1. Analizando cada etapa por separado, demuestre que la pulsación de corte a -3dB es  $\omega_{c1} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1}$ ; para el filtro paso bajo y que  $\omega_{c2} = \frac{1}{R_2 \cdot C_2}$ ; para el filtro paso alto
2. A partir de la función de transferencia de cada etapa, halle la función de transferencia del filtro paso banda utilizando la siguiente aproximación  $\omega_{c1} + \omega_{c2} \approx \omega_c$
3. Para dicho filtro paso banda, y manteniendo la aproximación anterior, halle las expresiones analíticas de  $|H(j\omega)|^2$  y la fase de  $H(j\omega)$  y representelas aproximadamente.
4. Se desea realizar un filtro paso banda entre  $f_{c2} = 100$  Hz y  $f_{c1} = 10.000$  Hz utilizando la topología de la figura a) y únicamente condensadores de 0.1 F. Calcule  $R_1$  y  $R_2$ .
5. Para el ancho de banda del apartado anterior, calcule la ganancia entre la tensión de salida y la de entrada a 5.000Hz, junto con la fase para esa frecuencia

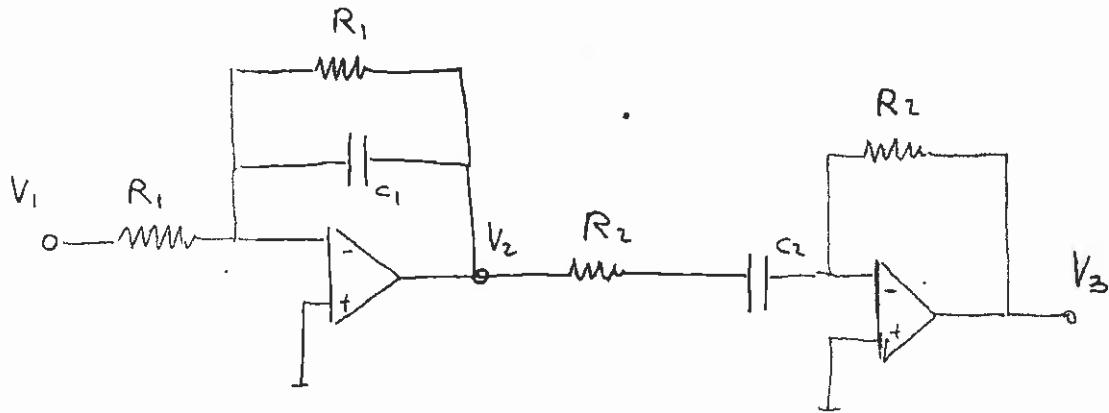


Figura a

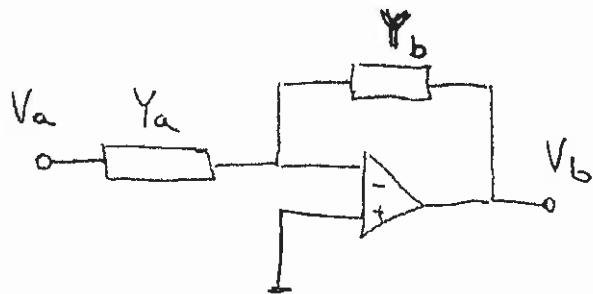


Figura b

Ejercicio 4

En el circuito de condensadores comutados de la figura 1, donde se produce una conmutación de los interruptores cada  $T/2$  segundos, se pide: (2.5 puntos).

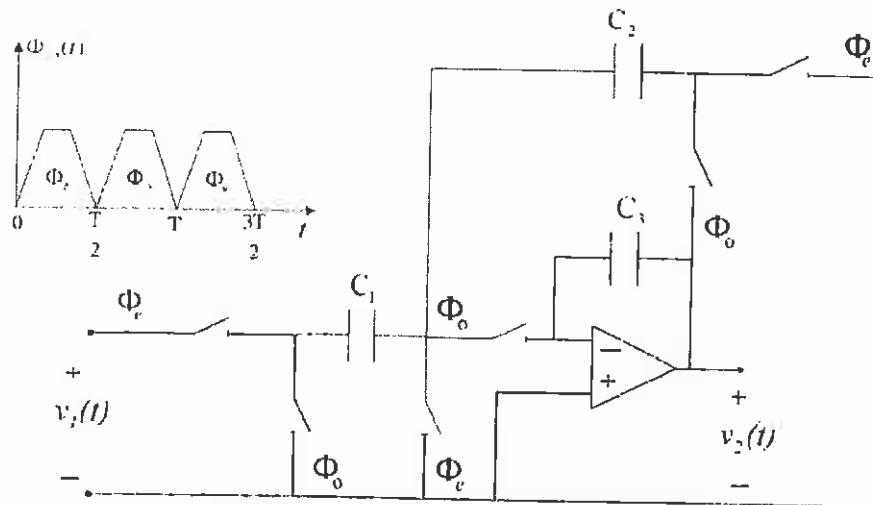


Figura 1

- Analice los circuitos equivalentes en el dominio Z y plante las ecuaciones que ligan la entrada ( $V_1(z)$ ) y la salida ( $V_2(z)$ ), en ambas fases. (1 punto)
- Resuelva las ecuaciones para calcular las 4 funciones de transferencia que ligan entrada y salida en cada una de las fases, es decir  $H_{oo}(z), H_{oc}(z), H_{eo}(z), H_{ee}(z)$ . Presente la relación entrada-salida en forma matricial. (0.7 puntos)
- Represente el diagrama de polos y ceros de  $H_{ee}(z) = \frac{V_2^{(e)}(z)}{V_1^{(e)}(z)} \Big|_{V_1^{(ee)}=0}$ . (0.2 puntos)
- Dados los valores  $C_1 = C_2 = C_3/5$ ; represente gráficamente el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia digital  $|H_{ee}(e^{j\Omega})|$ , correspondiente a la relación entre la entrada y la salida en fase par. Razone su forma en función de la posición de los polos y los ceros de la función de transferencia. (0.3 puntos)
- Dados los valores  $C_1 = C_2 = 5C_3$ ; represente gráficamente el módulo de la respuesta en frecuencia digital  $|H_{ee}(e^{j\Omega})|$ , y compárela con la obtenida en el apartado anterior. Comente los tipos de filtrados que realizan ambas. (0.3 puntos)

Ejercicio 4

Dado un filtro paso bajo de Butterworth de tercer orden cuya característica de transferencia se muestra en la figura 1 y otro filtro transformado cuya característica de transferencia (paso banda y alto) se muestra en la figura 2. Siendo:

$$H_2(j\omega) = 2 \frac{E_2}{E_g}$$

- Calcule la transformación de frecuencias que permita obtener el filtro que corresponde a la figura 2 a partir del filtro que corresponde a la figura 1 sabiendo que  $\hat{\omega} = -\frac{3}{4}$  se transforma en  $\omega = 2$ .
- La realización del filtro correspondiente a la característica de la figura 2 se muestra en la figura 3. Habiendo realizado los cuadripolos resultantes en la segunda forma canónica de Foster, determinar la estructura del filtro paso bajo que corresponde a la característica de la figura 1.

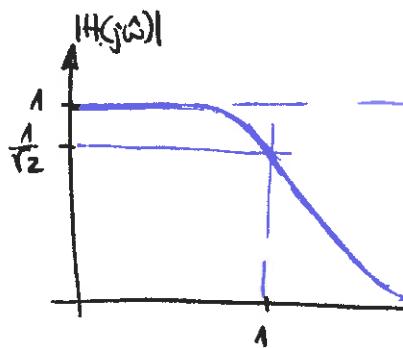


Figura 1

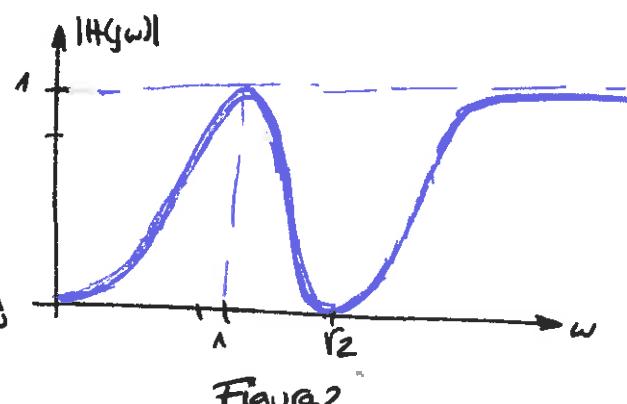


Figura 2

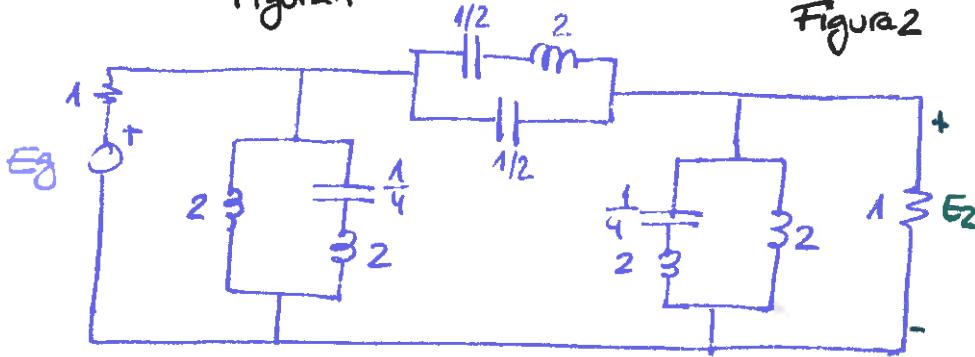


Figura 3

① DATO:  $\hat{\omega} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \omega = 2$

② Deberá cumplir las condiciones para paso-banda (página T-3.6):

$$\hat{s} = K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$$

③ También deberá cumplir las condiciones para paso alto (página T-3.5):

$$\hat{s} = \frac{K_0}{s}$$

④ También debe eliminar la banda entorno a  $\sqrt{2}$  (página T-3.7):

$$\hat{s} = K_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Uniendo las tres transformaciones:  $\hat{s} = K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \hat{s} = K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$

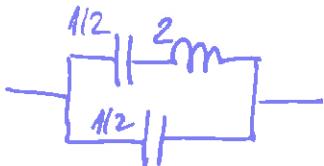
$$\text{De la figura 2 sacamos: } \begin{cases} \omega_b = 1 \\ \omega_n = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{s} = K_0 \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

Para calcular  $K_0$  tenemos en dato:  $\hat{\omega} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \omega = 2$

$$\hat{s} = K_0 \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \Rightarrow j\hat{\omega} = K_0 \frac{-\omega^2 + 1}{j\omega(\omega^2 + 2)} \Rightarrow j\hat{\omega} = -jK_0 \frac{1 - \omega^2}{\omega(2 - \omega^2)} \Rightarrow \hat{\omega} = K_0 \frac{\omega^2 - 1}{\omega(2 - \omega^2)}$$

$$-\frac{3}{4} = K_0 \frac{2^2 - 1}{2(2 - 2^2)} \Rightarrow -\frac{3}{4} = K_0 \frac{3}{-4} \Rightarrow [K_0 = 1] \Rightarrow \boxed{\hat{s} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}}$$

⑥



$$Y(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} = \frac{\frac{3}{2}}{2s + \frac{2}{s}} = \frac{\frac{3}{2}}{2s + \frac{1}{s}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2s^2 + 1}{s}} = \frac{\frac{3}{2}s}{2s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{2}s}{2(s^2 + \frac{1}{4})} = \frac{\frac{3}{2}(s^2 + 1) + s}{2(s^2 + 1)} = \frac{\frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2} + s}{2s^2 + 2} = \frac{\frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}}{2(s^2 + 1)} = \frac{1}{2s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2 + 1} \Rightarrow Z(s) = 2s^2 + 1 \Rightarrow \boxed{Z(s) = 2s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{4}s}} = \dots = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \hat{s} \Rightarrow Z(s) = \frac{1}{\hat{s}} \Rightarrow \boxed{Z(s) = s^2 + 2}$$

