TEMA 1: REDES DE DOS PUERTAS (CUADRIPOLOS)

- **Matrices:**

[Y]: $I_1 = Y_{11} \cdot E_1 + Y_{12} \cdot E_2$
$I_2 = Y_{21} \cdot E_1 + Y_{22} \cdot E_2$

[Z]: $E_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$
$E_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$

[h]: $E_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot E_2$
$I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot E_2$

[g]: $I_1 = g_{11} \cdot E_1 + g_{12} \cdot I_2$
$E_2 = g_{21} \cdot E_1 + g_{22} \cdot I_2$

[F]: $E_1 = A \cdot E_2 + B \cdot I_2$
$I_1 = C \cdot E_2 + D \cdot I_2$

- **Test de Brune:**

a) Puertas en conexión serie :

Circuito abierto en estas puertas, y un generador en las otras.
¿ V = 0 entre las puertas en serie (en circuito abierto) ?

b) Puertas en conexión paralelo :

Cortocircuito de cada una de las puertas, y un generador en las otras.
¿ V = 0 entre las puertas en paralelo (en cortocircuito) ?

Si se cumple el test en las puertas de entrada y de salida, la corriente circulatoria de la asociación de cuadripolos será cero ($I_c = 0$).

- **Asociación de cuadripolos:**

a) Paralelo : $[Y] = [Y^a] + [Y^b]$
b) Serie : $[Z] = [Z^a] + [Z^b]$
c) Serie - Paralelo : $[h] = [h^a] + [h^b]$
d) Paralelo - Serie : $[g] = [g^a] + [g^b]$

(a)–(d): Sólo si la asociación cumple el test de Brune

e) Cascada : $[F] = [F^a] \cdot [F^b]$

- **Unidades de transmisión:**

Si P_2 es la potencia (activa) en una carga Z_r a la salida y P_{20} lo mismo sin el cuadripolo:

$$P_2 = \frac{1}{2} \Re e\left[E_2^* \cdot I_2 \right] = \frac{1}{2} |I_2|^2 \cdot R_r = \frac{1}{2} |E_2|^2 \cdot G_r$$

a) Pérdidas de inserción :
$$\left(\frac{P_{20}}{P_2}\right)_{dB} = 10 \cdot \lg \frac{P_{20}}{P_2} = 20 \cdot \lg \left|\frac{E_{20}}{E_2}\right| = 20 \cdot \lg \left|\frac{I_{20}}{I_2}\right|$$

$$\left(\frac{P_{20}}{P_2}\right)_{Nep} = \ln \sqrt{\frac{P_{20}}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{20}}{P_2} = \ln \left|\frac{E_{20}}{E_2}\right| = \ln \left|\frac{I_{20}}{I_2}\right| \quad ; \quad 1 \text{ Nep} = 20 \lg e = 8{,}656 \text{ dB}$$

b) Pérdidas de transmisión : $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{dB}$ (P_1: potencia entregada al cuadripolo)

TEMA 2: T.L. EN EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

• Definición y propiedades de la T.L.:

Se define la T.L. de $f(t)$, $F(p)$, si $f(t),\ t \geq 0,$ es de orden exponencial: $\left| f(t) \right| \leq Me^{\alpha t}$.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt \qquad \text{(Transformada directa de Laplace)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p)\, e^{pt} dp \qquad \text{(Transformada inversa de Laplace)}$$

a) Linealidad: $K_1 \cdot f_1(t) + K_2 \cdot f_2(t) \rightarrow K_1 \cdot F_1(p) + K_2 \cdot F_2(p)$

b) Desplazamiento: $f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) \rightarrow F(p) \cdot e^{-pt}$, $\qquad f(t) \cdot e^{-\alpha t} \rightarrow F(p+\alpha)$

c) Cambio de escala en t: $f(at) \rightarrow \dfrac{1}{a} F(\dfrac{p}{a}), \quad a > 0$

d) Derivación: $f^{(n)}(t) \rightarrow p^n \cdot F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} \cdot f^{(k+1)}(0)$, $\qquad t^n \cdot f(t) \rightarrow (-1)^n \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n F(p)}{\mathrm{d} p^n}$

e) Integración en t: $f^{(-n)}(t) \rightarrow \dfrac{F(p)}{p^n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(-k)}(0)}{p^{n-k+1}}$

f) Convolución: $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$, $\qquad f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow F_1(p) * F_2(p)$

• T.L. de funciones elementales:

a) Constante: $K \cdot u(t) \rightarrow \dfrac{K}{p}$

b) Potencial por exponencial: $t^n \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t) \rightarrow \dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

c) Sinusoidal: $sen(\omega_0 t) \cdot u(t) \rightarrow \dfrac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$, $\qquad \cos(\omega_0 t) \cdot u(t) \rightarrow \dfrac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

• Relaciones tensión-corriente:

a) Resistencia: $v(t) = R \cdot i(t) \rightarrow V(p) = R \cdot I(p)$

b) Capacidad: $v(t) = \dfrac{1}{C} \int i(t)\, dt = \dfrac{1}{C} \int_0^t i(t)\, dt + v(0) \rightarrow V(p) = \dfrac{1}{C \cdot p} I(p) + \dfrac{v(0)}{p}$

c) Inductancia: $i(t) = \dfrac{1}{L} \int v(t)\, dt = \dfrac{1}{L} \int_0^t v(t)\, dt + i(0) \rightarrow I(p) = \dfrac{1}{L \cdot p} V(p) + \dfrac{i(0)}{p}$

• Análisis en el dominio de Laplace:

1. Extracción de las condiciones iniciales (como generadores).
2. Transformación del circuito al dominio de Laplace.
3. Análisis del circuito (como si fuera en R.P.S.).
4. Resolución de los sistemas de ecuaciones en el dominio de Laplace.
5. Respuesta temporal con la transformada inversa de Laplace del resultado.

• Derivadas sucesivas del escalón unidad:

$$u_n(t) = \frac{d^{n+1} u(t)}{d t^{n+1}} \qquad \leftrightarrow \qquad L[u_n(t)] = p^n$$

- **Teoremas límites:**

a) Teorema del valor inicial : $\lim\limits_{p\to\infty} p\cdot F(p) = \lim\limits_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+)$

b) Teorema del valor final : Si $p\cdot F(p)$ analítica en $\Re e[p]\geq 0$:

$$\lim_{p\to 0} p\cdot F(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$$

- **Transformada inversa de Laplace:**

a) T.L. inversa de funciones racionales :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + \ldots + b_1 p + b_0}, \quad m \geq n$$

$$\left.\begin{array}{l} F(p) = A_l p^l + \ldots + A_1 p + A_0 + \dfrac{a'_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a'_0}{b_n p^n + \ldots + b_0} = \displaystyle\sum_{i=0}^{l} A_i p^i + \frac{A'(p)}{B(p)} \\ B(p) = b_n \cdot (p-p_1)^q \cdot (p-p_2)\cdot\ldots\cdot(p-p_r), \qquad r = n-q \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad F_1(p) = \frac{A'(p)}{B(p)} = \frac{k_{11}}{p-p_1} + \ldots + \frac{k_{1q}}{(p-p_1)^q} + \frac{k_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{k_r}{p-p_r}$$

$$k_{1j} = \lim_{p\to p_1}\left[\frac{1}{(q-j)!}\frac{d^{q-j}}{d\,p^{q-j}}\big((p-p_1)^q \cdot F_1(p)\big)\right], \qquad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$k_i = \lim_{p\to p_i}\big((p-p_i)\cdot F_1(p)\big), \qquad i = 2, 3, \ldots, r$$

$$F(p) = \sum_{i=0}^{l} A_i p^i + \sum_{j=1}^{q}\frac{k_{1j}}{(p-p_1)^j} + \sum_{i=2}^{r}\frac{k_i}{(p-p_i)}$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i\, u_i(t) + e^{p_1 t}\cdot\sum_{j=1}^{q} k_{1j}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\cdot u(t) + \sum_{i=2}^{r} k_i\, e^{p_i t}\cdot u(t)$$

b) Teorema de residuos con la T.L. inversa : [Si $F(p)$ no es una función racional]

✓ Si $F(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p)\, e^{pt} dp = \sum_i k_i(t)\, u(t)$

$k_i(t)$ son los residuos en los polos p_i de orden N_i de $F(p)$:

$$k_i(t) = \lim_{p\to p_i}\left[\frac{1}{(N_i - 1)!}\frac{d^{N_i - 1}}{d\,p^{N_i - 1}}\big((p-p_i)^{N_i}\cdot F(p)\cdot e^{pt}\big)\right]$$

✓ Si $F(\infty) \neq 0 \;\Rightarrow\; F(p) = F_1(p) + F_2(p)$, donde $F_1(p)$ se pueda resolver de forma inmediata y $F_2(p)$ por el teorema de residuos.

- **Casos prácticos de la transformación de Laplace (transitorios):**

a) Excitación periódica : $e_g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_0(t-nT)$

$$E_g(p) = \sum_{n=0}^{\infty} L[f_0(t-nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp}\cdot L[f_0(t)] = F_0(p)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = F_0(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}}$$

TEMA 3: RESPUESTA TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE CIRCUITOS LINEALES

- **Respuesta de un circuito al impulso. Respuesta temporal:**

Sistemas lineales: $y(t) = x(t) * h(t);$ si $x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t) \equiv$ Respuesta al impulso.
Circuito lineal: Ec. dif. lin. y de coef. ctes., y condiciones iniciales nulas.

- **Función de red. Respuesta frecuencial:**

Circuito lineal: $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k X(s)$

$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} \equiv$ Función de red.

✓ $H(s)$ es una función racional, en la que los polos y los ceros aparecen por pares conjugados.

✓ Con la frecuencia, $s \to j\omega$, $H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k} = \prod_{k=1}^{l} H_k(j\omega) \to \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = \sum_{k=1}^{l} 20 \log |H_k(j\omega)| \\ arg[H(j\omega)] = \sum_{k=1}^{l} arg[H_k(j\omega)] \end{cases}$

- **Estabilidad de circuitos:**

Sistema estable si entradas de amplitud finita implican salidas limitadas en amplitud, $t \to \infty$.
Si $h(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$, el circuito es estable $\equiv$ Polos de $H(s)$ en $\Re e[s] < 0$.

✓ Los circuitos RLC son estables.
✓ Los circuitos LC no son estables.

- **Conceptos de filtrado. Tipos de filtros:**

Circuito estable que favorece la transmisión de unas frecuencias y rechaza o dificulta otras, escalando el módulo y modificando la fase.

✓ <u>Espectro de amplitud</u>: $|H(j\omega)|$

✓ <u>Respuesta de fase</u>: $\beta(\omega) = arg[H(j\omega)]$

✓ <u>Retardo de grupo</u>: $\tau(\omega) = -\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}$

✯ Filtro sin distorsión o de fase lineal: $\tau(\omega) = \tau = cte \Rightarrow \beta(\omega) = \tau\omega$
✯ Si la fase es no lineal $\to$ filtro con distorsión de fase.

a) <u>Tipos</u>: Paso todo, paso bajo, paso alto, y paso banda.

b) <u>Ecualizadores</u>: Filtros para compensar la distorsión de amplitud o fase del filtro original.

- **Sistemas discretos. Transformada Z:** $\left(f(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \right)$

a) <u>Propiedades</u> :

✓ Linealidad: $K_1 \cdot f_1(z) + K_2 \cdot f_2(z) \to K_1 \cdot F_1(z) + K_2 \cdot F_2(z)$
✓ Desplazamiento: $f(n - n_0) \cdot u(n - n_0) \to F(z) \cdot z^{-n_0}$
✓ Derivación en Z: $n \cdot f(n) \to -z \cdot \frac{dF(p)}{dp}$

b) Análisis de circuitos en el dominio Z :

$$\sum_k i_k(t)=0 \rightarrow \sum_k \Delta q_k^{(j)}(n)=0 \rightarrow \sum_k C_k(v_k^{(j)}-v_k^{(j-1)})=0$$

1. Se dibujan los circuitos resistivos en el dominio Z para cada conmutación, con las condiciones iniciales como generadores.

2. Analizar cada topología por el método de nudos, obteniendo un sistema de ecuaciones por cada fase del circuito.

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones conjunto:

$$Y^{(1)}(z)=H_{11}(z)\cdot X^{(1)}(z)+H_{12}(z)\cdot X^{(2)}(z)$$
$$Y^{(2)}(z)=H_{21}(z)\cdot X^{(1)}(z)+H_{22}(z)\cdot X^{(2)}(z)$$

- **Estabilidad y respuesta en frecuencia en el dominio Z (discreto):**

Un sistema discreto (circuito) es estable si: $\sum_{n=0}^{n}|h(n)|<\infty \equiv$ Polos de $H(z)$ en $|z|<1$.

$$\hat{H}_a(j\omega)=\hat{H}_a(s)\Big|_{s=j\omega}=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 20\log\left|H(e^{j\omega T})\right| \equiv \text{Respuesta en amplitud} \\ arg\left[H(e^{j\omega T})\right] \equiv \text{Respuesta en fase} \end{cases}$$

TEMA 4: INTRODUCCIÓN A LA SÍNTESIS DE CIRCUITOS LINEALES

• Propiedades generales de las funciones de red:

Condic. inic. nulas $\rightarrow$ Circuito causal.

a) <u>Funciones reales positivas</u>: ($\Re e[F(s)] \geq 0,$ en $\Re e[s] \geq 0$) [f.r.p.]

- ✓ Funciones racionales de s con coeficientes reales.
- ✓ Los polos y ceros de $F(s)$ están en $\Re e[s] \leq 0$.
- ✓ Polos y ceros en $s = j\omega$ son simples; residuos en los polos son reales y positivos.
- ✓ El grado del numerador y el del denominador se diferencian como mucho en 1.

• Realización de inmitancias LC. Estructuras canónicas:

$$F(s) \text{ impar } [\text{ f.r.p.i.}] \Leftrightarrow F(-s) = -F(s) \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Función racional de coef. ctes. y positivos} \\ \text{Polos y ceros, simples y en el eje } j\omega \\ \text{Residuos en polos, reales y positivos} \\ \Re e[F(j\omega)] = 0 \Rightarrow \text{ Inmitancias LC} \end{cases}$$

✮ Teorema de Foster: $F(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1 s}{s^2+\omega_1^2} + \ldots + \frac{2k_n s}{s^2+\omega_n^2} + k_\infty s, \quad k_i \equiv$ Residuos en polos $s = j\omega_i$

a) <u>1ª forma canónica de Foster</u>: $F(s)$ como una impedancia $Z(s)$.

b) <u>2ª forma canónica de Foster</u>: $F(s)$ como una admitancia $Y(s)$.

c) <u>1ª forma canónica de Cauer</u>: (extrayendo sucesivamente polos en el infinito)

$$F(s) = k_\infty s + F_1(s) = k_\infty s + \frac{1}{k'_\infty s + F_2(s)} = k_\infty s + \frac{1}{k'_\infty s + \frac{1}{k''_\infty s + \frac{1}{\cdots}}}$$

d) <u>2ª forma canónica de Cauer</u>: (extrayendo sucesivamente polos en el origen)

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + F_1(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + F_2(s)} = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \ldots}}$$

• Diseño de filtros:

Obtención de $H(s)$: $\left(|H(j\omega)|^2\right)_{\omega^2=-s^2} = H(s)\cdot H(-s)$

Por conveniencia: $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\cdot F_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}$; $\begin{cases} 0 \leq F_n^2(x) \leq 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ F_n^2(x) >> 1, & x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ll} -20\log|H(j\omega)| \leq \alpha_c \ (dB), & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ -20\log|H(j\omega)| \geq \alpha_a \ (dB), & \omega \geq \omega_a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \omega_c \equiv \text{Banda de paso} \\ \omega_a \equiv \text{Banda atenuada} \end{array}$$

a) <u>Butterworth</u>: (filtro paso bajo)

$$F_n(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2(\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}} \quad \rightarrow \quad H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2(-\frac{s^2}{\omega_c^2})^n}$$

Polos: $s_k = \omega_c \varepsilon^{-\frac{1}{n}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$ [“Circunferencia de polos”]

$$H(s) = \frac{b_0}{\prod_{k=0}^{n-1}(s-s_k)}, \qquad b_0 = \frac{\omega_c^{-n}}{\varepsilon}$$

b) Chebychef:

$$F_n(x)=\begin{cases}\cos(n\cdot\cos^{-1}x), & 0\le x\le 1\\ \mathrm{ch}(n\cdot\mathrm{ch}^{-1}x), & x>1\end{cases}$$

Polos: $s_k=-\mathrm{sen}\,\frac{(2k+1)\pi}{2n}\,\mathrm{sh}\varphi+j\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\,\mathrm{ch}\varphi,\quad k=0,1,\dots,n-1$ ["Elipse de polos"]

$$H(s)=\frac{b_0}{\prod_{k=0}^{n-1}(s-s_k)},\qquad b_0=\prod_{k=0}^{n-1}s_k$$

c) Cauer:

$$F_n(x)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1-x_k^2\cdot x^2}{x^2-x_k^2}\,x, & n \text{ impar}\\ \prod_{k=1}^{n/2}\dfrac{1-x_k^2\cdot x^2}{x^2-x_k^2}, & n \text{ par}\end{cases}$$

["Curva cerrada de polos"]

$$H(s)=b_0\,\frac{\prod_k(s^2+\omega_k^2)}{\prod_k(s-s_k)},\qquad \begin{cases}\omega_k\equiv \text{ceros de } H(s) \text{ en el eje } j\omega\\ s_k\equiv \text{polos en el semiplano izquierdo}\end{cases}$$

- **Realización filtros mediante cuadripolos LC:**

$$|H(j\omega)|^2=\left|\frac{E_2}{E_{20}}\right|^2=\frac{P_2}{P_{20}},\qquad \begin{cases}P_2\equiv \text{Potencia entregada a la } R \text{ de carga (}\textbf{con}\text{ el cuadripolo)}\\ P_{20}\equiv \text{Potencia entregada a la } R \text{ de carga (}\textbf{sin}\text{ el cuadripolo)}\end{cases}$$

$$|H(j\omega)|^2=\left|\frac{E_2}{E_{20}}\right|^2\quad\Rightarrow\quad\frac{E_2}{E_{20}}\quad\Rightarrow\quad \text{Parámetros } [Y] \text{ o } [Z].$$

- **Normalización de parámetros y transformaciones de frecuencias:**

a) Parám. normalizados: $R_n=\dfrac{R}{R_0},\quad L_n=\dfrac{L\,\omega_0}{R_0},\quad C_n=C\,R_0\,\omega_0\quad \begin{cases}R_0\equiv R \text{ de normalización}\\ \omega_0\equiv\omega \text{ de normalización}\end{cases}$

b) Transformaciones de frecuencias: [Filtro paso bajo: $H(\hat{s})$]

✓ P.B. → Paso alto: $\hat{s}=\dfrac{k_0}{s}$

✓ P.B. → Paso banda: $\hat{s}=k_0\,\dfrac{s^2+\omega_0^2}{s}$, verificando $\omega_1\cdot\omega_2=\omega_0^2$ y $\omega_2-\omega_1=\hat{\omega}_c/k_0$

✓ P.B. → Banda eliminada: $\hat{s}=k_0\,\dfrac{s}{s^2+\omega_\infty^2}$, verificando $\omega_1\cdot\omega_2=\omega_\infty^2$ y $\omega_2-\omega_1=k_0/\hat{\omega}_c$

✓ P.B. → Multi-banda: $\hat{s}=k_0\,\dfrac{s\,(s^2+\omega_{01}^2)\,(s^2+\omega_{02}^2)\dots}{(s^2+\omega_{\infty1}^2)\,(s^2+\omega_{\infty2}^2)\dots},\qquad \omega_{\infty1}<\omega_{01}<\omega_{\infty2}<\omega_{02}<\dots$

- **Filtros activos RC:**

Circuitos (filtros) con: R + C + A.O.

Análisis por nudos → $H(s)=\dfrac{a}{s^2+bs+c}$ → a,b,c → Filtro de Butterworth