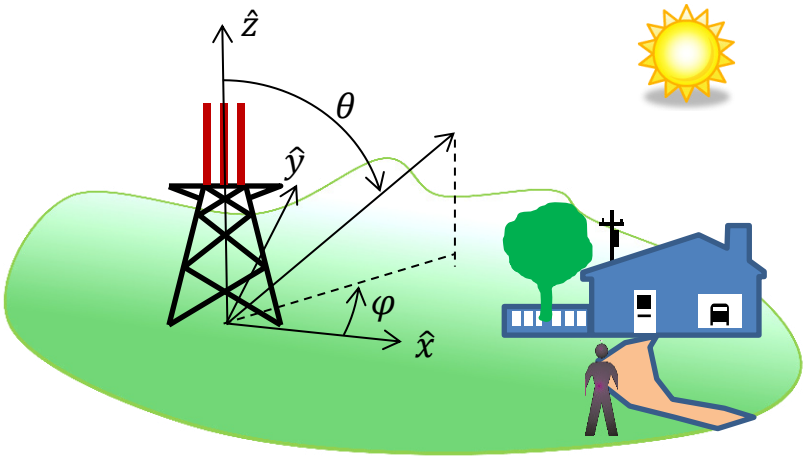
CAMPOS Y ONDAS EN TELECOMUNICACIÓN

Ejercicio Propuesto 2.a



Una estación de comunicaciones genera un campo electromagnético monocromático (GHz) cuyos valores en el dominio de la frecuencia (para m) son:

$$\begin{array}{lll} \vec{E} & n\theta \text{ —— } \hat{\theta}\left(\frac{V}{m}\right) & \left\{ \begin{array}{l} \theta < {}^{\pi}/_{2} \\ \varphi \end{array} \right. \\ \vec{H} & n\theta \text{ —— } \hat{\varphi}\left(\frac{A}{m}\right) & \end{array}$$

siendo $\sqrt{\quad}$ $\left(\frac{1}{m}\right)$, $\left(\frac{1}{s}\right)$, (Ω) la impedancia intrínseca del vacío y A real.

Escriba la expresión campo eléctrico en el dominio del tiempo y determine su valor a 100 m de distancia en el instante t= 0.

Sabiendo que el valor medio de la potencia entregada por las fuentes es de , determine el valor de la amplitud A.

Represente la expresión del valor medio de la densidad de potencia en función de θ para una distancia de 100 m indicando los valores máximo y mínimo de dicha función.

Una esfera dieléctrica de radio $R_0 = 20$ cm, permitividad relativa y permeabilidad relativa $\mu_r = 1$, se sitúa a una distancia de la estación $_0$ en la dirección $\theta = {}^{\pi}/_{2}$. Determine la potencia interceptada por dicho objeto. Realice las aproximaciones que considere oportunas.

Suponiendo que toda la potencia interceptada es absorbida por la esfera, y que el campo en el interior de la misma es uniforme, calcule la intensidad de campo eléctrico en su interior.

Ejercicio Propuesto 2.b

Se considera un medio material que ocupa un volumen V, limitado por una superficie S, en el interior del cual existe un campo electromagnético con variación temporal arbitraria. Dada la ecuación de balance de energías (teorema de Poynting) en forma integral y en el dominio del tiempo:

$$\int -\vec{J} \quad (\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)dV \quad \oiint \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\cdot d\vec{A} + \int \vec{J}_{ind}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)dV \quad \int\left(\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{} \quad \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{}\right)dV$$

Escriba la particularización de esta expresión en cada uno de los siguientes casos:

a) El volumen V está limitado por un conductor perfecto y en su interior no existen fuentes de campo.

b) No existen corrientes debidas al fenómeno de conducción.

c) El medio material cumple las relaciones constitutivas $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mu(\vec{r})\,\vec{H}(\vec{r},t)$. Indique en este caso qué representa el último término de la ecuación de balance de energías.

EJERCICIO PROPUESTO 2

Ejercicio propuesto 2.a

$f_0 = 2{,}5\ GHz$

$$r>5m \begin{cases} \bar{E} = A\,\text{sen}\theta\ \dfrac{e^{-j\beta r}}{r}\ \hat{\theta}\ \left(\dfrac{V}{m}\right) \\ \bar{H} = A\,\text{sen}\theta\ \dfrac{e^{-j\beta r}}{\eta_0 r}\ \hat{\varphi}\ \left(\dfrac{A}{m}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} 0<\theta<\pi/2 \\ 0<\varphi<2\pi \\ 5m<r \end{cases}$$

$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\ \left(\frac{rad}{m}\right)$

$\omega = 2\pi f_0\ \left(\frac{rad}{s}\right)$

$\eta_0 = 120\pi\ (\Omega)$

$A \in \mathbb{R}$

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\text{sen}\varphi$

Expresión del campo eléctrico en t:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r},t)} = \text{Re}\{\bar{E}e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{A\,\text{sen}\theta\ \frac{e^{-j\beta r}}{r}\hat{\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{A\,\text{sen}\theta}{r}\hat{\theta}\cdot e^{j(\omega t-\beta r)}\right\} =$$

$$= \frac{A\,\text{sen}\theta}{r}\hat{\theta}\ \text{Re}\{\cos(\omega t-\beta r) + j\,\text{sen}(\omega t-\beta r)\} = \boxed{\frac{A\,\text{sen}\theta}{r}\cos(\omega t-\beta r)\,\hat{\theta}}\ \left(\frac{V}{m}\right)$$

Valor del campo en $r=100m$, $t=0$

$$\boxed{\bar{E}(r=100,t=0)} = \frac{A\,\text{sen}\theta}{100}\cdot\cos(0-\beta\cdot 100)\cdot\hat{\theta} = \frac{A\,\text{sen}\theta}{100}\cdot\cos(\beta\cdot 100)\,\hat{\theta}$$

cos x cos función par

$$= A\cdot\frac{\text{sen}\theta}{100}\cos\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cdot 100\right)\hat{\theta} = A\cdot\frac{\text{sen}\theta}{100}\cos\left(2\pi\cdot 2{,}5\cdot 10^9\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}}\cdot 100\right)\hat{\theta} =$$

$\omega = 2\pi\cdot 2{,}5\cdot 10^9$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ (H/m)$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}\ (F/m)$

$$= A\,\frac{\text{sen}\theta}{100}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\hat{\theta} = \boxed{\frac{-A}{200}\,\text{sen}\theta\cdot\hat{\theta}\ \left(\frac{V}{m}\right)}$$

Valor de la amplitud A con $P_0 = 1{,}8\ kW$

Aplicamos el teorema de Poynting para campos monocromáticos en el dominio de la frecuencia:

$$\int_V \frac{1}{2}\text{Re}\{-\bar{J}^*_{c,fon}\cdot\bar{E}_c\}\,dV = \oint_A \frac{1}{2}\text{Re}\{\bar{E}_c\times\bar{H}^*_c\}\,d\bar{A} + \underbrace{\int_V \frac{1}{2}\sigma\bar{E}^*_c\cdot\bar{E}_c\,dV}_{0} + \frac{1}{2}\omega_0\underbrace{\int_V(\mu''\cdot\bar{H}^*_c\cdot\bar{H}_c + \varepsilon''\bar{E}^*_c\cdot\bar{E}_c)\,dV}_{0}$$

Estos dos términos se anulan porque en $r\leq 5m$, $\sigma = \mu'' = \varepsilon'' = 0$. Por tanto solo nos queda el término correspondiente al valor medio de la potencia que se escapa de V en forma de energía electromagnética:

$$\langle P_0\rangle = \oint_A \frac{1}{2}\text{Re}\{\bar{E}_c\times\bar{H}^*_c\}\,d\bar{A}\Big|_{r=5} = \left[\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{1}{2}\text{Re}\left\{\left(\frac{A\,\text{sen}\theta\,e^{-j\beta r}}{r}\right)^2\frac{1}{\eta_0}\hat{r}\cdot\hat{r}\right\}r^2\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\right]_{r=5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\text{Re}\left\{\frac{A^2\,\text{sen}^2\theta\cdot e^{-j\beta r}\cdot e^{j\beta r}}{5^2\,\eta_0}\right\}\cdot 25\cdot\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta = \frac{A^2}{2\eta_0}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\text{sen}\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \cancel{\frac{A^2}{2}\frac{1}{\eta_0}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \, \operatorname{sen}\theta \, d\theta} = A^2 \cdot \frac{1}{120\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, (1-\cos^2\theta)\, d\theta =$$

$\eta_0 = 120\pi$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$= \frac{A^2}{120} \cdot \left[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta + \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta \, d\theta\right] =$$

$$= \frac{A^2}{120} \cdot \left[-\left[\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\right] = \frac{A^2}{120}\left[-(0-1)+\left(0-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{120}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{2A^2}{360} = \frac{A^2}{180}$$

Como $P_0 = 1{,}8\ kW \Rightarrow \frac{A^2}{180} = 1{,}8k$; $\boxed{A = \sqrt{1{,}8 \cdot 180k} = 569{,}21}$ (V)

Valor medio de la densidad de potencia para 100m (M y m)

$$\boxed{\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\bar{E}_c \times \bar{H}_c^*\}} \quad \boxed{\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{A \operatorname{sen}\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \frac{A\cos\theta\, e^{j\beta r}}{\eta_0 r}\hat{r}\right\}} =$$

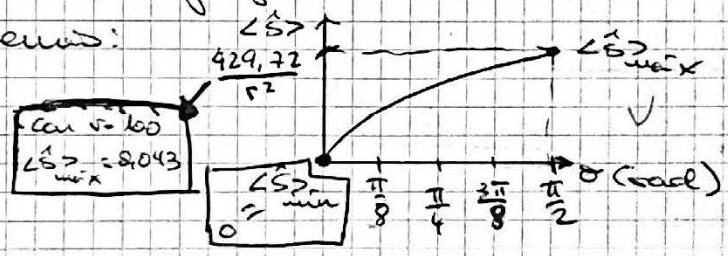
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\frac{A^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\eta_0 r^2}\hat{r}\right\} = \frac{A^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2 \cdot 120\pi \cdot r^2}\hat{r} = \frac{569{,}21^2}{240\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\hat{r} =$$

$$= \boxed{429{,}72 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\hat{r}} \ (W/m^2)$$

En $r = 100 \Rightarrow \boxed{\langle \hat{S} \rangle_{r=100m}} = \frac{429{,}72}{100^2}\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{r} = \boxed{0{,}043 \cdot \operatorname{sen}^2\theta\,\hat{r}}$ (W/m^2)

Máx en $\theta = \pi/2$
mín en $\theta = 0$

Representamos gráficamente la densidad de potencia y vemos los valores extremos:



Potencia interceptada por esfera $r_0 = 20cm$, $\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' = 40 - j10$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 20$, $\theta = \pi/2$

$$\boxed{P_{interceptada} = \iint \langle \hat{S} \rangle_{\substack{r=20 \\ \theta=\pi/2}} dS}$$

Calculamos antes $\langle \hat{S} \rangle_{\substack{r=20 \\ \theta=\pi/2}} = 429{,}72 \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}}{20^2}\hat{r} = 1{,}0743\hat{r}$

Se trata de una esfera situada muy lejos en relación a su tamaño: $r_0 << r_0$

$$\boxed{P_{interceptada} = 1{,}0743 \cdot \pi \cdot r_0^2 = 1{,}0743\pi \cdot 0{,}2^2 = 0{,}135\ W}$$

Muy bien

Intensidad del campo eléctrico en el interior

El valor medio de densidad de potencia eléc. perdida en un dieléctrico por ε'' viene dado por la expresión $\frac{\omega\varepsilon''}{2}\bar{E}_c^* \cdot \bar{E}_c$ $(\frac{V}{m^3})$.

Por tanto, podemos poner la potencia interceptada como:

$\langle P_{interceptada} \rangle = \frac{\omega_0 \cdot \varepsilon''}{2} \int_V \bar{E}_c^* \cdot \bar{E}_c \, \partial V$, ya que será la misma que se pierde.

operamos: $\langle P_{interceptada} \rangle = \frac{\omega_0 \cdot \varepsilon''}{2} \cdot \int |\bar{E}_c|^2 \, \partial V = \frac{\omega_0 \cdot \varepsilon''}{2} \cdot |\bar{E}_c|^2 \int \partial V =$

Por ser el campo uniforme, se radia igual en todas direcciones; en todo el volumen, el campo es el mismo.

$= \frac{\omega_0 \, \varepsilon''}{2} |\bar{E}_c|^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 =$

Volumen de una esfera $V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4 \omega_0 \varepsilon'' \pi}{6} \cdot |\bar{E}_c|^2 \cdot 0{,}2^3 = \frac{2}{375} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{9} \cdot \pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot |\bar{E}_c|^2 =$

$\omega_0 = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^9$

$\varepsilon'' = 10 \cdot \varepsilon_0 = 10 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$

$= 0{,}023 \cdot |\bar{E}_c|^2$

$\Rightarrow \langle P_{interceptada} \rangle = 0{,}135 = 0{,}023 \, |\bar{E}_c|^2$; $\boxed{|\bar{E}_c| = \sqrt{\frac{0{,}135}{0{,}023}} = 2{,}409 \left(\frac{V}{m}\right)}$

¡Muy bien!

Ejercicio propuesto 2.b

Teorema de Poynting en el tiempo.

$$\int_V -\bar{J}_{fuente}(\bar{r},t) \cdot \bar{E}(\bar{r},t) \cdot \partial V = \oiint_S \bar{E}(\bar{r},t) \times \bar{H}(\bar{r},t) \, d\bar{A} + \int_V \sigma_{cd}(\bar{r},t) \bar{E}(\bar{r},t) \partial V + \int_V \left(\bar{E}(\bar{r},t) \frac{\partial \bar{D}(\bar{r},t)}{\partial t} + \bar{H}(\bar{r},t) \frac{\partial \bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t} \right) dV$$

Apartado a): Volumen limitado por un conductor perfecto y sin fuentes interior

La potencia del campo que se escapa de V a través de la superficie será nula por estar limitado el volumen por un conductor perfecto.
La potencia disipada en calor por efecto Joule de las corrientes inducidas y la variación energía almacenada en V tendrán valores no nulos.
La potencia introducida al volumen a través de las corrientes fuente será nula por no existir fuentes interiores.
Con todo esto, se nos anulan los dos primeros términos, quedando:

$$\boxed{0 = \int_V \bar{J} \cdot \bar{E} \, dV + \int_V \left(\bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dV}$$

Apartado b): No existen corrientes debidas a la conducción

Con este dato solo podemos concluir que la potencia disipada en calor por efecto Joule de las corrientes inducidas $\bar{J}_{ind}$, será nula, ya que al no existir corrientes, $\bar{J}_{ind} = 0$. Por tanto, queda la expresión:

$$\boxed{\int_V -\bar{J}_{fuente} \cdot \bar{E}\, dV = \int_A \bar{E}\times\bar{H}\, d\bar{A} + \int_V \left(\bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) dV}$$

<u>Apartado c) El medio cumple $\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon(\bar{r})\bar{E}(\bar{r},t)$, $\bar{B}(\bar{r},t) = \mu(\bar{r})\bar{H}(\bar{r},t)$.</u>

Con estos datos, solo se verá afectado el término correspondiente a la variación de la energía electromagnética almacenada en V.

Veamos primero cómo queda el término: $\bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\bar{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon(\bar{r})\bar{E}(\bar{r},t)\right] + \bar{H}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu(\bar{r})\cdot\bar{H}(\bar{r},t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\bar{r})\bar{E}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu\bar{H}(\bar{r},t)\cdot\bar{H}(\bar{r},t)\right] =$$

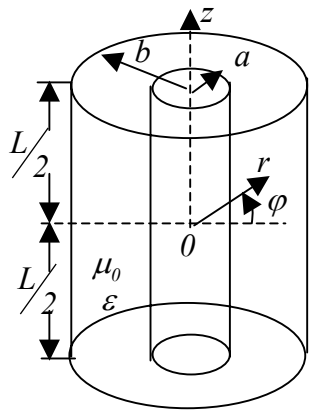
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\cdot\bar{E}^2\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu\bar{H}^2\right].$$

Por tanto, la particularización de la expresión del teorema de Poynting quedará:

$$\boxed{\int_V -\bar{J}_{fuente}\cdot\bar{E}\, dV = \int_A \bar{E}\times\bar{H}\, d\bar{A} + \int_V \bar{J}_{ind}\cdot\bar{E}\, dV + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \left[\frac{1}{2}\varepsilon\bar{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\bar{H}^2\right] dV}_{\text{que se interpreta}}}$$

E.V.

Considere un bote coaxial cerrado en ambos extremos, construido todo él con conductores perfectos y relleno de un dieléctrico homogéneo de permitividad ε y permeabilidad μ_0 y sin fuentes en su interior.



Dada la expresión del campo eléctrico monocromático:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} cos(\ pz\ )\hat{r} \quad \left(V/m\right) \quad \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -L/2 \le z \le L/2 \end{cases}$$

siendo E_0 una constante compleja y p un parámetro.

a) Compruebe que dicho campo cumple las condiciones de contorno de la geometría dada, siempre que "p" tome los valores adecuados. ¿Cuáles son éstos?

b) Determine la expresión del campo magnético correspondiente.

c) Aplicando en el volumen anteriormente definido la ecuación de Balance de Energía en forma integral en el dominio transformado:

$$\int_V -\vec{j}^*_{fuente} \cdot \vec{E} dv = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \left(\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \varepsilon^* \vec{E} \cdot \vec{E}^*\right) dv$$

Nota:
en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r}/r & \hat{\varphi} & \hat{z}/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

considere las siguientes situaciones:

c1) el dieléctrico que rellena el bote tiene una permitividad $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ y

c2) el dieléctrico que rellena el bote tiene una permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0$;

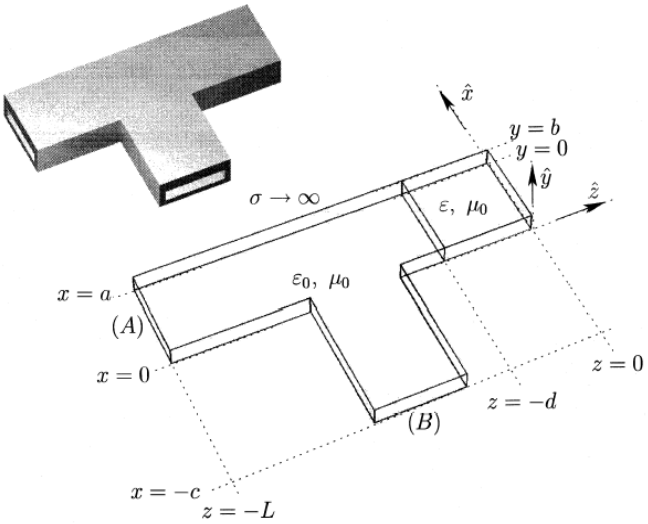
determine el valor de la amplitud E_0 en ambas situaciones.

Explique el significado de los resultados obtenidos.

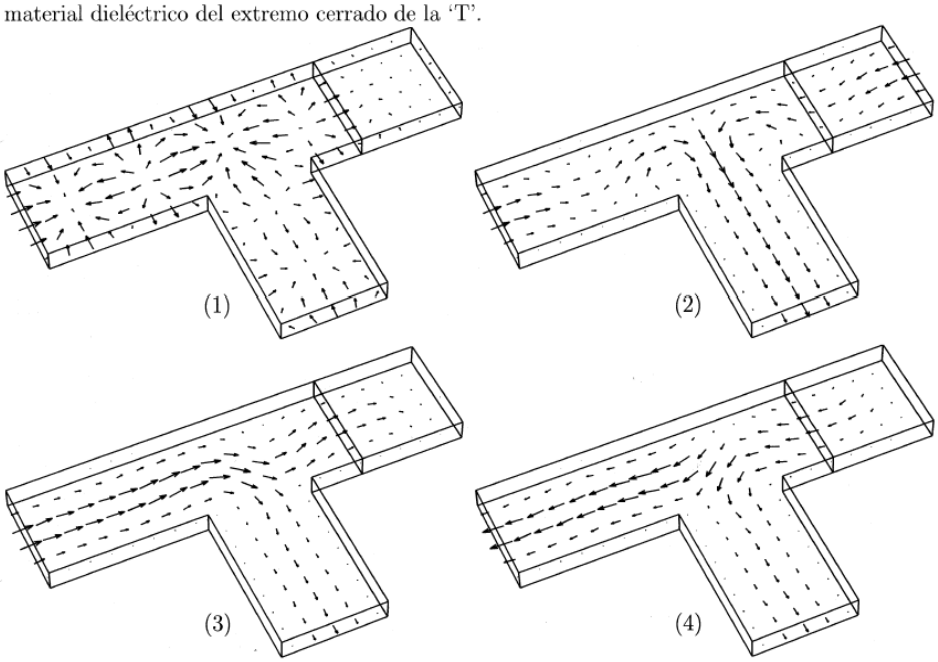
La figura representa una estructura hueca, cerrada por conductor perfecto, y con forma de 'T', así como un esquema de sus dimensiones interiores en un sistema de coordenadas cartesianas. La estructura tiene sólo dos aberturas, una en $z = -L$, la puerta (A), y la otra en $x = -c$, la puerta (B).

Su interior está vacío, salvo por un paralelepípedo de un material dieléctrico homogéneo e isótropo, que rellena el extremo cerrado de la 'T'.

En el interior no hay fuentes pero, a través de la puerta (A), un generador de frecuencia $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ produce campos en el interior de la estructura.



De las siguientes cuatro figuras, que representan el valor medio del vector de Poynting, sólo una puede ser válida. Indique cuál de ellas, y explique por qué cada una de las otras tres no puede ser una representación correcta del valor medio de $\vec{S}$. Escriba la relación constitutiva $\vec{D}(\vec{E})$, en el dominio del tiempo, para el material dieléctrico del extremo cerrado de la 'T'.



Se conocen los siguientes valores del campo electromagnético:

$$\vec{E} = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{z}{2d}\right)\hat{y} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ -d \le z \le 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} E_y &= jA\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ H_x &= -j\omega_0\varepsilon_0 dA\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ z = -L \end{cases}$$

Nota:

$$\int \mathrm{Sh}^2(ku)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{Sh}(2ku) - 2ku}{4k}$$

$$\int \mathrm{sen}^2(ku)\mathrm{d}u = \frac{2ku - \mathrm{sen}(2ku)}{4k}$$

donde A es una constante compleja.

Obtenga la expresión de la potencia que sale de la 'T' a través de la puerta (B) en función de la amplitud A, la frecuencia, las dimensiones y la permitividad de los dieléctricos.

Ejercicio Propuesto 3

Primera parte

Campo eléctrico monocromático $\left\{ \bar{E} = \frac{E_0}{r} \cdot \cos(p \cdot z)\, \hat{r} \right.$ $\begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{L}{2} \le z \le L/2 \end{cases}$

a) Comprobación de condiciones de contorno y valores de "p".

En nuestra figura nos aparecen saltos según r y según z:

Condiciones de contorno:

$$\boxed{\hat{n}_{12} \times (\bar{E}_2(\bar{r},t) - \bar{E}_1(\bar{r},t))\Big|_S = 0}$$

$$\hat{r} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En r:

- $r = a$: $\hat{n}_{12} = \hat{r} \Rightarrow \hat{r} \times (\bar{E}(r=a) - \underbrace{\cancel{E(r<a)}}_{0}) = \hat{r} \times \frac{E_0}{a} \cos(p \cdot z)\, \hat{r} = 0$ ($\hat{r} \times \hat{r} = 0$)
- $r = b$: $\hat{n}_{12} = \hat{r} \Rightarrow \hat{r} \times (\underbrace{\bar{E}(r>b)}_{0} - \bar{E}(r=b)) = 0$ ($\hat{r} \times \hat{r} = 0$)

En z:

- $z = -\frac{L}{2}$: $\hat{n}_{12} = \hat{z} \Rightarrow \hat{z} \times (\bar{E}(z = -\frac{L}{2}^+) - \underbrace{\bar{E}(z < -\frac{L}{2}^-)}_{0}) = \hat{z} \times \frac{E_0}{r} \cos(p(-\frac{L}{2}))\, \hat{r} =$

$$\hat{z} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\varphi}$$

$= \hat{\varphi} \frac{E_0}{r} \cdot \cos(-p \frac{L}{2})$

Se cumplirá la condición de contorno si esta expresión es nula: $\frac{E_0}{r} \cos(-p \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \cos(-p \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \cos(p \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow$ (cos(x) es función par)

$\Rightarrow p \cdot \frac{L}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \boxed{p = \frac{2k+1}{L} \cdot \pi}, \; k \in \mathbb{K}$

- $z = +\frac{L}{2}$: $\hat{n}_{12} = \hat{z} \Rightarrow \hat{z} \times (\underbrace{\bar{E}(z = \frac{L}{2}^+)}_{0} - \bar{E}(z = \frac{L}{2}^-)) = \hat{z} \times \left(\frac{-E_0}{r}\right) \cos(p \cdot \frac{L}{2})\, \hat{r} =$

$= -\hat{\varphi} \frac{E_0}{r} \cos(p \frac{L}{2})$

Se cumplirá la condición de contorno si $\cos(p \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \boxed{p = \frac{2k+1}{L}\pi, \; k \in \mathbb{K}}$

Por tanto, en $r=a$ y $r=b$, se cumplen las condiciones de contorno. En $z = -\frac{L}{2}$ y $z = \frac{L}{2}$, sólo se cumplen si $p = \frac{2k+1}{L}\pi, \; k \in \mathbb{K}$

b) Campo magnético correspondiente.

Si tomamos las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia:

$$TF\left\{ \nabla \times \bar{E}(r,t) = -\frac{\partial \bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t} \right\} \Rightarrow \nabla \times \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \bar{E}(\bar{r},t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial \bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t}\, e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$$

$$\nabla \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\bar{r},t)\, e^{j\omega t}\, dt}_{\bar{E}_c(\bar{r},\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-\frac{\partial \bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t}}_{j\omega \bar{B}_c(\bar{r},\omega)} e^{j\omega t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \times \bar{E}_c(\bar{r},\omega) = -j\omega \bar{B}_c(\bar{r},\omega) = -j\omega \mu_0 \bar{H}(\bar{r},\omega);$$

- Campo magnético: $\boxed{\bar{H}(\bar{r},\omega)} = \dfrac{\nabla \times \bar{E}_c(\bar{r},\omega)}{-j\omega\mu_0} = \boxed{\dfrac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \dfrac{E_0}{r} \cdot \operatorname{sen}(pz) \cdot p \cdot \hat{\varphi}}$

$$\nabla \times \bar{E}_c(\bar{r},\omega) = \begin{vmatrix} \hat{r}\cdot\frac{1}{r} & \hat{\varphi} & \hat{z}\cdot\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{E_0}{r}\cos(pz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_0}{r}\cos(pz)\right]$$

$$= \frac{E_0}{r} \cdot \hat{\varphi} \cdot (-\operatorname{sen}(pz)) \cdot p$$

c) Ec. Balance de Energía:

$$\int_V -\bar{J}^*_{fuente} \cdot \bar{E}\, dV = \oint_S (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{S} + j\omega \int_V (\mu_0 \bar{H} \cdot \bar{H}^* - \varepsilon^* \bar{E} \cdot \bar{E}^*)\, dV$$

c1) $\underline{\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''}$. Determinar el valor de la amplitud E_0.

Lo primero que podemos concluir es que el primer término es nulo ya que no tenemos fuentes en el interior del bote. $\bar{J}^*_{fuente} = 0$. También, como los conductores con los que se ha construido el bote son perfectos sabemos que no entra ni sale potencia y por tanto, el segundo término también se anula:

Con esto, nos queda una expresión:

$$0 = j\omega \int_V (\mu_0 \cdot \bar{H} \cdot \bar{H}^* - \varepsilon^* \bar{E} \cdot \bar{E}^*)\, dV \Rightarrow 0 = j\omega \int_V \mu_0 \bar{H} \cdot \bar{H}^* dV - j\omega \int_V \varepsilon^* \bar{E}\, \bar{E}^* dV \Rightarrow$$

$$0 = j\omega \int_V \mu_0 \bar{H} \cdot \bar{H}^* dV - j\omega \int_V (\varepsilon' \bar{E}\bar{E}^* + j\varepsilon'' \bar{E}\bar{E}^*)\, dV \Rightarrow$$

$$0 = j\omega \int_V \mu_0 |\bar{H}|^2 dV - j\omega \int_V \varepsilon' |\bar{E}|^2 dV + \omega \int_V \varepsilon'' |\bar{E}|^2 dV \Rightarrow$$

$$0 = j\omega \left[\int_V \mu_0 |\bar{H}|^2 dV - \int_V \varepsilon' |\bar{E}|^2 dV\right] + \omega \int_V \varepsilon'' |\bar{E}|^2 dV$$

Si esta expresión compleja es cero, implica que tanto la parte imaginaria como la real son nulas. Analizo la parte real que ha quedado más sencilla:

$$\omega \int_V \varepsilon'' |\bar{E}|^2 dV = 0 \Rightarrow \int_V |\bar{E}|^2 dV = 0 \Rightarrow \boxed{E_0 = 0}$$

Nyborg

c2) $\varepsilon = \varepsilon_0$. Determinar E_0.

Simplificamos, en este caso, la expresión del mismo modo que en el apartado anterior, pero con $\varepsilon^* = \varepsilon_0$.

$$0 = j\omega \int_V \mu_0 |\bar{H}|^2 dV - j\omega \int_V \varepsilon_0 |\bar{E}|^2 dV \; ; \; \int_V \mu_0 |\bar{H}|^2 dV = \int_V \varepsilon_0 |\bar{E}|^2 dV$$

$$|\bar{H}|^2 = \left| \frac{E_0 \operatorname{sen}(pz)\, p}{j\omega \mu_0 r} \hat{\varphi} \right|^2 = \frac{|E_0|^2 p^2 \operatorname{sen}^2(pz)}{\omega^2 \mu_0^2 r^2}$$

$$|\bar{E}|^2 = \left| \frac{E_0}{r} \cos(pz) \right|^2 = \frac{|E_0|^2 \cos^2(pz)}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \mu_0 \cdot \frac{|E_0|^2 p^2 \operatorname{sen}^2(pz)}{\omega^2 \mu_0^2 r^2} r\, dr\, d\varphi\, dz = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \frac{|E_0|^2 \cos^2(pz)}{r^2} r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{|E_0|^2 p^2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot 2\pi}{\omega^2 \mu_0} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 - \cos(2pz)\, dz = \varepsilon_0 |E_0|^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) 2\pi \cdot \frac{L}{2}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 - \cos(2pz)\, dz = \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) - \frac{1}{2p}\left[\operatorname{sen}(2pz)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L - \frac{1}{2p} 2 \operatorname{sen}\left(2p \cdot \frac{L}{2}\right) = L - \operatorname{sen}(pL) = L$$

$$p = \frac{2n+1}{L} \cdot \pi$$

$$\frac{|E_0|^2 p^2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot 2\pi \cdot L}{\omega^2 \cdot \mu_0} = \varepsilon_0 |E_0|^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) 2\pi \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|E_0|^2 p^2}{\omega^2 \mu_0} = \varepsilon_0 |E_0|^2 \Rightarrow$$ La expresión se cumple para cualquier $\boxed{E_0 = cte}$

aquí anulamos los

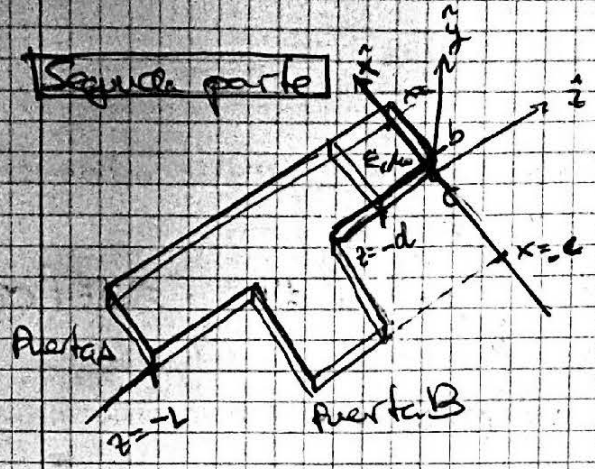
Explicación de los resultados obtenidos.

En c1) hemos obtenido $E_0 = 0$ lo que implica que el campo eléctrico es nulo ya que se transforma en calor al ser las paredes del tubo de conductor perfecto y el dieléctrico interior tiene parte compleja y por tanto, pérdidas. El campo magnético será nulo también en este caso.

En c2) hemos obtenido la expresión $\int_V \mu_0 |\bar{H}|^2 dV = \int_V \varepsilon_0 |\bar{E}|^2 dV$ por lo que podemos concluir que las energías almacenadas eléctrica y magnética son iguales.

¿y a lo sino

Segunda parte



Análisis de las cuatro figuras

En una primera inspección de las figuras, se pueden descartar la (1) y la (4) ya que la potencia que se representa no entra por donde debe. En la figura (1) vemos que entra potencia por la puerta B cuando el generador está colocado en la puerta A, por tanto, no tiene sentido. En la figura (4) vemos que sale potencia por la puerta A, cosa que tampoco tiene sentido por estar el generador en esa misma puerta.
Las figuras (2) y (3) son parecidas pero la diferencia está en que en la (2) está entrando potencia a través del conductor perfecto, que según el enunciado está cerrado en esa zona. Esto es imposible y además vemos que las líneas de $\langle \bar{S} \rangle$ se hacen más grandes en una parte de la "T" y no hay razón para ello.
Nos queda solo la figura (3) que podemos ver que solo entra potencia por la puerta A y que cuando llega al material dieléctrico va perdiendo intensidad, lo que tiene sentido e implica que hay dispersión temporal y pérdidas).

$\boxed{\text{La figura válida es la (3)}}$

Relación constitutiva $\bar{D}(\bar{E})$, en el dominio de t del dieléctrico.
Se trata de un medio homogéneo, isótropo y con dispersión temporal, por tanto, la expresión de $\bar{D}$, será:

$$\boxed{\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \varepsilon(t-t')\,\bar{E}(r,t)\,dt'}$$

Expresión de la potencia que sale de "T" a través de (B)

Tenemos la expresión del Teorema de Poynting en la frecuencia:

$$\int \frac{1}{2} Re\{-\bar{J}^*_{c\,fuen} \cdot \bar{E}_c\} dV = \oint_A \frac{1}{2} Re\{\bar{E}_c \times \bar{H}_c^*\} d\bar{A} + \int \frac{1}{2} \sigma \bar{E}_c^* \cdot \bar{E}_c dV + \frac{1}{2} \omega_0 \int_V (\mu'' \bar{H}_c^* \cdot \bar{H}_c + \varepsilon'' \bar{E}_c^* \cdot \bar{E}_c) dV$$

~~Sabemos que $\sigma = 0$, por tanto se anula el término correspondiente al valor medio de la potencia disipada en calor.~~

~~Como sabemos que hay dispersión temporal por el apartado anterior tomamos la expresión del teorema particularizado para este caso, teniendo en cuenta que no hay fuentes ($\bar{J}_{c\,fuen} = 0$)~~

$$\cancel{0 = \oint_A \frac{1}{2} Re\{\bar{E}_c \times \bar{H}_c^*\} d\bar{A} + 2\omega_0 \int_V \left(\frac{1}{4} \mu'' \bar{H}_c^* - \frac{1}{4} \varepsilon'' \bar{E}_c^* \cdot \bar{E}_c\right) dV}$$

Sabemos que $\sigma = 0$, por tanto se anula el término correspondiente al valor medio de la potencia disipada en calor. Como $\mu'' = 0$ y no hay fuentes, la expresión quedará:

$$0 = \underbrace{\oint_A \frac{1}{2} Re\{\bar{E}_c \times \bar{H}_c^*\} d\bar{A}}_{\text{V.M. Potencia que se escapa de la "T" en forma de Energía Electromagnética}} + \underbrace{\frac{\omega_0}{2} \int_V \varepsilon'' \cdot |\bar{E}_c|^2 dV}_{\text{V.M. Potencia disipada por efecto de las pérdidas.}}$$

||

Potencia que entra por la Puerta A, donde está el generador

Necesitamos calcular la potencia que sale por la puerta B, que será la diferencia entre la que se entrega por la puerta A y las pérdidas:

$$\boxed{\langle P_{\substack{\text{SALIENTE}\\ \text{PUERTA B}}} \rangle} = \oint_A \frac{1}{2} Re\{\bar{E}_c \times \bar{H}_c^*\} d\bar{A} - \frac{\omega_0}{2} \int_V \varepsilon'' \cdot |\bar{E}_c|^2 dV =$$

$$= \int_0^b \int_0^a \frac{1}{2} Re\{\underbrace{\bar{E}_c \times \bar{H}_c}_{\text{Solo me interesa la componente en } \hat{z}\text{, es decir: } E_y \hat{y} \times H_x \hat{x}}\} \hat{z}\, dx\, dy - \frac{\omega_0 \varepsilon''}{2} \int_{-L}^{0} \int_0^b \int_0^a A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{z}{2L}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a A \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \omega_0 \varepsilon_0 d \cdot A^* \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \hat{z}\hat{z} \cdot dx\, dy - \frac{\omega_0 \varepsilon''}{2} A^2 \cdot b \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx \int_{-L}^{0} \operatorname{sen}^2 h\left(\frac{1}{2L} z\right) dz$$

$$= \frac{1}{2}|\Delta|^2 \omega_0 \varepsilon_0 d \cdot b \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx - \frac{\omega_0 \varepsilon''}{2} \Delta^2 \cdot b \cdot \underbrace{\left[\frac{2\cdot\left(\frac{\pi}{a}\right)\cdot x - \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{a}x\right)}{4\cdot\frac{\pi}{a}}\right]_0^a}_{=\frac{a}{2}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sh}\left(2\cdot\frac{1}{2d}\cdot z\right) - 2\frac{1}{2d}\cdot z}{4\cdot\frac{1}{2d}}\right]_{-L}^{0}}_{-\frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{L}{d}\right)+\frac{L}{d}}{2\cdot\frac{1}{2d}}} =$$

$$= \frac{1}{2}|\Delta|^2 \omega_0 b \left[d \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{a}{2} - \varepsilon'' \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{L}{d}\right) - \frac{L}{d}}{2} \cdot d\right] =$$

$$= \frac{1}{2}|\Delta|^2 \omega_0 b \cdot \frac{a}{2}\left[d\,\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon''}{2}\cdot\left(d \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{L}{d}\right) - L\right)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{a b}{4}|\Delta|^2 \omega_0 \left[d \cdot \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon''}{2}\left(d \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{L}{d}\right) - L\right)\right]}$$

E.V.

Ejercicio de la actividad programada (3-3-14)

$f = 2{,}45\,GHz$ $\qquad \varepsilon_r' = 60$

$P = 1000\,W$ $\qquad \tan\delta = 0{,}2$

$200\,cm^3$ de leche, $\quad \mu_0, \sigma = 0.$

$A \times B = 0{,}1 \times 0{,}02\,m^2$

$\bar{E} = E_0\,\hat{y}$

$\bar{H} = 10^{-2} E_0 (-1 + 0{,}2j)\,\hat{x}$ $\quad \begin{cases} 0 \le x \le A \\ 0 \le y \le B \\ z = 0. \end{cases}$

¿E_0?

A partado 2 Valor de la intensidad de campo en la leche.

$$\underbrace{\int_V \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{-\bar{J}^*_{fon} \cdot \bar{E}\}\, dV}_{\text{Potencia entregada por las fuentes} = 1000\,W} = \int_A \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\bar{E} \times \bar{H}^*\}\, d\bar{A} + \cancel{\int_V \frac{1}{2} \sigma \bar{E}^* \cdot \bar{E}\, dV} + \frac{1}{2}\omega \int_V (\mu'' \bar{H}^* \cdot \bar{H} + \varepsilon'' \bar{E}^* \cdot \bar{E})\, dV$$

$\mu'' = 0 = \sigma \Rightarrow 1000 = \int \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\bar{E} \times \bar{H}^*\}\, d\bar{A} + \frac{1}{2}\omega \int_V \varepsilon'' |E|^2\, dV$

$\tan\delta = 0{,}2 = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}$; $0{,}2 \cdot 60 = 12 \Rightarrow \varepsilon_r'' = 12 \cdot \varepsilon_0$

$\mathrm{Re}\{\bar{E} \times \bar{H}\} = \mathrm{Re}\{E_0\,\hat{y} \times 10^{-2} E_0 (-1 + 0{,}2j)\,\hat{x}\} = 10^{-2} E_0^2\, \mathrm{Re}\{(-\hat{z})(-1 - 0{,}2j)\} =$

$= E_0^2\, \hat{z} \cdot 10^{-2}$

Por tanto: $\boxed{1000 = \frac{10^{-2}}{2} \int_A E_0^2\, \hat{z} \cdot d\bar{A} + \frac{1}{2}\omega_0 \int_V 12 \cdot |E_0|^2\, dV}$; ¿¿ que V es este

$$1000 = \frac{10^{-2}}{2} \int_{x=0}^{x=A} \int_{y=0}^{y=B} E_0^2\, dx\, dy + \frac{1}{2}\omega_0 \cdot 12\, E_0^2 \iiint_V dV ;$$

$$1000 = \frac{1}{2} E_0^2 \left(A \cdot B\, 10^{-2} + \omega_0 \cdot 12\, \varepsilon_0\, 2 \cdot 10^{-4}\right) ;$$

$$\frac{2000}{10^{-2} A \cdot B + 2\pi \cdot 2{,}45 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = E_0^2 ;$$

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2000}{10^{-2} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 + 2\pi \cdot 2{,}45 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}}} \simeq 2402} \quad (V/m)$$

Apartado 1

$$Q = \frac{\text{Potencia}}{\text{Volumen}} = \frac{1000}{200 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{6}$$

$$Q = \int_A \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{E} \times \bar{H}\} \, dA = \int_{x=0}^{x=A} \int_{y=0}^{y=B} \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{E} \times \bar{H}\} \, dA = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot 10^{-2} \, AB,$$

$$\sqrt{\frac{5 \cdot 10^{6} \cdot 2}{10^{-2} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02}} = \boxed{E_0 = 707.106{,}78} \ (V/m)$$

E.V.

Ejercicio Propuesto 4

EP4.a) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática (OPHM) que se propaga en un medio sin pérdidas, de permitividad y permeabilidad relativas $\varepsilon_r = 2$ y $\mu_r = 1$ respectivamente, está dada por:

$\vec{E} = (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\, e^{-j20\,\pi(y-z)}\ (\frac{V}{m})$

con y y z en metros.

a) Justifique que dicha expresión representa a una OPHM.
b) Caracterice dicha onda: dirección de propagación, frecuencia, potencia trasmitida.
c) Escriba la expresión del campo del campo eléctrico en el tiempo y determine su dirección en el origen de coordenadas para t=0.
d) Obtenga la expresión del campo magnético de la OPHM
e) Determine la polarización de la onda.

EP4.b) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 1\ GHz$ que se propaga por un medio de permeabilidad $\mu = \mu_0$ viene dada por la expresión:

$$\vec{E} = \left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x} - 4(1+2j)\hat{y} + \left(\sqrt{3}+j\sqrt{12}\right)\hat{z}\right]\ e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}\ (\frac{V}{m})$$

con x, y y z en metros.

a) Determine cuál es la dirección de propagación.
b) Determine la permitividad del medio por el que se propaga la onda e indique las particularidades del mismo.
c) Justifique que dicha expresión representa a una OPHM.
d) Obtenga la expresión del campo magnético.
e) Calcule el valor medio de la densidad de potencia transmitida en el punto (*x=0, y=0, z=0*).
f) Determine la polarización de la onda.

EJERCICIO PROPUESTO 4

P4.a) $\varepsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$.

$$\bar{E} = (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\, e^{-j20\pi(y-z)}$$

a) Justificación de OPHM

Voy a analizar primero que sea una onda plana, luego que sea homogénea y después que sea monocromática:

- Para que se cumpla la condición de onda plana, comprobaré que $\boxed{\bar{E}_0 \cdot \hat{u} = 0}$ Como además, el siguiente apartado pide la $\hat{u}$, lo calculo: Sabiendo, que se trata de una OPHM con forma: $\bar{E}_0\, e^{-\gamma_0(\hat{u}\cdot\bar{r})}$, podemos decir que: $-j20\pi(y-z) = -\gamma_0(\hat{u}\cdot\bar{r})$.

(*1) $-j20\pi(y-z) = -(\alpha + j\beta)(\hat{u}\cdot\bar{r}) \Rightarrow$ Vemos que la constante de propagación solo va a tener parte imaginaria (constante de fase) y su constante de atenuación es nula $\Rightarrow \alpha = 0$.

$\Rightarrow -j\beta(\hat{u}\cdot\bar{r}) = -j\beta(\hat{u}(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})) = -j20\pi(y-z)$

En principio $\hat{u} = \hat{y}-\hat{z}$, para que la expresión anterior se cumpla, pero $\hat{u}$ debe ser unitario, así que, $\boxed{\hat{u} = \frac{\hat{y}-\hat{z}}{|\hat{y}-\hat{z}|} = \frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}}}$ ✓

Veamos ya si se cumple la condición de onda plana:

$$\bar{E}_0 \cdot \hat{u} = (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\cdot(1+0+0-1) = 0 \Rightarrow \text{Es O.P}$$

- Veamos ahora si se cumple que la onda sea homogénea: $\bar{E}_0 = (1+j)(\hat{y}+\hat{z}) \Rightarrow$ Vemos que no depende de las coordenadas, por tanto se trata de una O.P.H
- Para ver que sea monocromática, miramos también la amplitud $\bar{E}_0$ y vemos que es independiente de la frecuencia, por tanto es una O.P.H.M ✓

b) Caracterización de la onda: $\hat{u}$, f_0, P_{Poynt}.

- He calculado la dirección de propagación en el apartado a) en la parte marcada con (*1): $\boxed{\hat{u} = \frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}}}$
- Dentro del cálculo de la $\hat{u}$, había llegado a una expresión como $-j\beta(\hat{u}\cdot\bar{r}) = -j20\pi(y-z)$; $\beta = \frac{20\pi(y-z)}{\frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}}\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})} \Rightarrow \beta = 20\pi\sqrt{2}\ \left(\frac{1}{m}\right)$

$\gamma = j20\pi\sqrt{2} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \frac{20\pi\sqrt{2}\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\cdot\sqrt{\varepsilon_r}} = \boxed{f_0 = 3\cdot 10^9 = 3\,GHz}$

$$P_{trans} = \boxed{w_t = \frac{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}{2} \, Re\left\{ \frac{1}{\eta^*} \right\} e^{-2\alpha(\hat{u}\cdot\bar{r})}}$$

$$\boxed{w_t} = \frac{(1+j)(\hat{y}+\hat{z})\cdot(\hat{y}+\hat{z})(1-j)}{\frac{2}{\sqrt{2}}\eta_0} = \frac{2\cdot 2}{\frac{2}{\sqrt{2}}\eta_0} = \frac{2\sqrt{2}}{120\pi} = 7{,}5026\cdot 10^{-3} \simeq \boxed{7{,}5026\,mW}$$

$\alpha = 0$

$\eta^* = \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}$

c) Expresión del campo eléctrico en el tiempo y dir en $t=0$.

$$\boxed{\bar{E}(r,t)} = Re\left\{ \bar{E}\, e^{j\omega t} \right\} = Re\left\{ (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\, e^{j(\omega t - 20\pi(y-z))} \right\} =$$

$$= (\hat{y}+\hat{z})\cos(\omega t - 20\pi(y-z)) - (\hat{y}+\hat{z})\,sen(\omega t - 20\pi(y-z)) =$$

$$= \boxed{(\hat{y}+\hat{z})\left[\cos(\omega t - 20\pi(y-z)) - sen(\omega t - 20\pi(y-z))\right]} \; (V/m)$$

En el origen de coordenadas y en $t=0$:

$$\bar{E}(r=0, t=0) = (\hat{y}+\hat{z})(1-0) = (\hat{y}+\hat{z})\cdot 1 \Rightarrow \boxed{\text{Dirección } (\hat{y}+\hat{z})}$$

d) Campo magnético de la OPHM.

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\hat{n}\times\bar{E}}{\eta}} = \frac{2}{\sqrt{2}}(1+j)e^{-j20\pi(y-z)}\cdot\hat{x}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{2(1+j)}{\sqrt{2}\cdot\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}}\hat{x}\cdot e^{-j20\pi(y-z)} = \frac{2(1+j)\hat{x}\, e^{-j20\pi(y-z)}}{120\pi} =$$

$$\frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}} \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & (1+j)e^{-j20\pi(y-z)} & (1+j)e^{-j20\pi(y-z)} \end{vmatrix} = \hat{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)e^{-j20\pi(y-z)} + \hat{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)e^{-j20\pi(y-z)}$$

$$= \boxed{\frac{(1+j)}{60\pi}\cdot e^{-j20\pi(y-z)}\cdot\hat{x}} \; (A/m)$$

e) Polarización de la onda.

Comenzaré comprobando si es lineal: se debe cumplir que $Re\{\bar{E}\} \times Im\{\bar{E}\} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} Re\{\bar{E}\} = 1\cdot(\hat{y}+\hat{z}) \\ Im\{\bar{E}\} = 1\cdot(\hat{y}+\hat{z}) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x} - \hat{x} = 0$$

Se demuestra que tiene $\boxed{\text{polarización lineal.}}$

EP4.b) $\gamma = 1+j2$, $\mu = \mu_0$ OPHM

$$\bar{E} = \left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x} - 4(1+2j)\hat{y} + (\sqrt{3}+j\sqrt{12})\hat{z}\right] e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}$$

a) <u>Dirección de propagación</u>

Como es OPHM: $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-\gamma(\hat{u}\cdot\bar{r})} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40) = -\gamma(\hat{u}\cdot\bar{r})$; $-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40) = -(\alpha+j\beta)(\hat{u}\cdot\bar{r})$

$\hat{u}\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})$ debe dar algo como $2x-\sqrt{3}y-3z$, luego, en principio $\hat{u} = 2\hat{x}+(-\sqrt{3})\hat{y}-3\hat{z}$, pero como debe ser unitario:

$$\boxed{\hat{u} = \frac{2\hat{x}+(-\sqrt{3})\hat{y}-3\hat{z}}{\sqrt{2^2+3+3^2}} = \frac{2\hat{x}+(-\sqrt{3})\hat{y}-3\hat{z}}{4}}$$

b) <u>Permitividad del medio y particularidades</u>

$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} = j\,2\pi\,10^9\sqrt{\left(\frac{1}{c_0}\right)^2\varepsilon_r} = j\,\frac{2\pi\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\sqrt{\varepsilon_r}$

Por otro lado: $\gamma = \alpha+j\beta$

$-(\alpha+j\beta)(\hat{u}\cdot\bar{r}) = -(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)$; $\alpha+j\beta = (1+j40)\cdot 4$

Igualamos: $j\,\frac{2\pi\cdot 10}{3}\sqrt{\varepsilon_r} = (1+j40)\cdot 4$; $\boxed{\varepsilon_r = \left(\frac{4\cdot 3(1+j40)}{j\,2\pi\cdot 10}\right)^2 = 58{,}325 - 2{,}918j}$

Por tanto: $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r = \frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot(58{,}325-2{,}918j) = 5{,}157\cdot 10^{-10} - 2{,}58\cdot 10^{-11}j}$ (F/m)

$\varepsilon\cdot 10^{10} = 5{,}157 - 0{,}258j \Rightarrow$ Como $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$, se trata de un dieléctrico con <u>bajas pérdidas</u>.

c) <u>Justificación de OPHM</u>

Voy a comprobar primero que es una onda plana:

$$\bar{E}\cdot\hat{u} = \left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x} - 4(1+2j)\hat{y} + (\sqrt{3}+j\sqrt{12})\hat{z}\right] e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}\cdot\frac{2\hat{x}-\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z}}{4} =$$

$$= \underbrace{\left(-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\cdot\frac{2}{4} + \frac{4(1+2j)\sqrt{3}}{4} - \frac{3(\sqrt{3}+j\sqrt{12})}{4}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{4}j + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}j - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{12}}{4}j = \sqrt{3}-\sqrt{3}+j\left(-\frac{2\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0} e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{E}\cdot\hat{u} = 0}$

Calculo ahora el producto $\hat{u}\times\bar{E}_0$ para tener una idea de cómo va a ser $\bar{H}_0$ y así intuir si también se cumple que $\bar{H}\cdot\hat{u} = 0$.

$$\hat{u}\times\bar{E}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right) & -4(1+2j) & \sqrt{3}+j\sqrt{12} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+j\sqrt{12})\hat{x} - (1+j)\hat{z} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{y} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{z} - 3(1+2j)\hat{x}$$

$$-\frac{1}{2}(3+j\sqrt{12})\hat{y} =$$

$$= \hat{x}\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+j\sqrt{12}) - 3(1+2j)\right] + \hat{y}\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}+j\right) - \frac{1}{2}(3+j\sqrt{12})\right] - \hat{z}\left[24j + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+j\right)\right] =$$

$$= \hat{x}\left[-\frac{15}{4} - \frac{15}{2}j\right] + \hat{y}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{4}j - \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{12}}{2}\right] - \hat{z}\left[24j + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}j\right] =$$

$$= \hat{x}\left(-\frac{15}{4} - \frac{15}{2}j\right) + \hat{y}\left(-0{,}85 - 0{,}433j\right) - \hat{z}\left(\frac{19}{8} + \frac{19}{4}j\right)$$

$$\bar{H} = \frac{\hat{u}\times\bar{E}}{\eta} \Rightarrow \eta\bar{H}\cdot\hat{u} = \left(-\frac{15}{4} - \frac{15}{2}j\right)\cdot\frac{1}{2} - (-0{,}85 - 0{,}433j)\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{19}{8} + \frac{19}{4}j\right) = 0{,}2744j \simeq 0$$

Se trata por tanto de una O.P al amplitud $\bar{E}\cdot\hat{u} = \bar{H}\cdot\hat{u} = 0$

Analizamos ahora $\bar{E}_0 = -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x} - 4(1+2j)\hat{y} + (\sqrt{3}+j\sqrt{12})\hat{z}$

Podemos ver que no depende ni de la posición (homogénea) ni de la frecuencia (monocromática), por tanto, hemos justificado que se trata de una OPHM

d) $$\bar{H} = \frac{\hat{u}\times\bar{E}}{\eta} = \frac{1}{\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r' + \varepsilon_r''}}}\cdot(\hat{u}\times\bar{E}) = \frac{\sqrt{58{,}25 - 2{,}18j}}{120\pi}\cdot(\hat{u}\times\bar{E}) \simeq 0{,}0202(\hat{u}\times\bar{E})$$ (bajas pérdidas)

$$= 0{,}0202\left[\left(-\frac{15}{4} - \frac{15}{2}j\right)\hat{x} + (-0{,}85 - 0{,}433j)\hat{y} + \left(-\frac{19}{8} - \frac{19}{4}j\right)\hat{z}\right]\cdot e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(4j(0))} \quad (A/m)$$

e) $$\boxed{W_t = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2}\cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\} e^{-2\alpha(\hat{u}\cdot\bar{r})}} = \langle S \rangle$$

En $x=y=z=0$: $e^{-2\alpha(\hat{u}\cdot\bar{r})} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{W_t\Big|_{origen}} = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2}\cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\} = \frac{0{,}0202}{2}\cdot\left[\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - 4\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}\right) + \left(-\sqrt{3}\hat{x} - 8\hat{y} + \sqrt{12}\hat{z}\right)j}_{\bar{E}}\right]\cdot$$

En el apartado d) tenemos $\eta \simeq \frac{120\pi}{\sqrt{58{,}25}} = 49{,}395$

$$\cdot\left[\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - 4\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}\right) + \left(+\sqrt{3}\hat{x} + 8\hat{y} - \sqrt{12}\hat{z}\right)j}_{\bar{E}_0^*}\right] = 0{,}101\cdot\left[\frac{3}{4} + 16 + 3 + \left(-\frac{3}{2} - 32 - 6\right)j + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{3}{2} + 32 + 6\right)j - \left(3 - 8^2 - 12\right)\right] = 98{,}75\cdot 0{,}101 = \boxed{9{,}9996}\ W/m^2$$

f) Polarización de la onda

Comenzaré viendo si es lineal:

$\mathrm{Re}\{\bar{E}_0\} \times \mathrm{Im}\{\bar{E}_0\} = 0$ ✓ correcto, pues de esperar

$\mathrm{Re}\{\bar{E}_0\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - 4\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}$

$\mathrm{Im}\{\bar{E}_0\} = -\sqrt{3}\hat{x} - 8\hat{y} + \sqrt{12}\hat{z}$

$$\boxed{\mathrm{Re}\{\bar{E}_0\} \times \mathrm{Im}\{\bar{E}_0\}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -8 & \sqrt{12} \end{vmatrix} =$$

$$= -4\sqrt{12}\,\hat{x} + 4\sqrt{3}\,\hat{z} - 3\hat{y} - 4\sqrt{3}\,\hat{z} + 8\sqrt{3}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}{2}\hat{y} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} = \underline{\underline{0}}$$

Por lo tanto, la onda tiene <u>polarización lineal</u>

E.V.

Ejercicio Propuesto 5

EP5.a) Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 3\ GHz$, elípticamente polarizada a derechas, con semieje mayor de la elipse en dirección x, y de doble amplitud que el semieje menor, transmite una potencia de $W_0\ (W)$ en dirección $\hat{z}$.
a) Escriba el vector campo eléctrico de dicha onda en el dominio de la frecuencia y del tiempo.
b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que puede tener el campo eléctrico en cualquier instante de tiempo?

EP5.b) Considere un medio material con las siguientes características: permitividad: $\varepsilon_0\ ({}^{F}/_{m})$; permeabilidad $\mu_0\ ({}^{H}/_{m})$ y conductividad $\sigma = 2.5 \cdot 10^4 ({}^{S}/_{m})$

a) Realice una representación de la relación entre las corrientes de conducción y desplazamiento en función de la frecuencia en el intervalo $0 < f < 1\ THz$. Indique sobre la gráfica los diferentes comportamientos del material. (Nota: utilice ejes de escala logarítmica).

Obtenga las expresiones de:

b) la constante de propagación, c) la velocidad de fase (v_f) y d) velocidad de grupo (v_g) de una onda plana homogénea que se propague en dicho medio.

e) Calcule los valores de v_f y v_g a 10 GHz. ¿Es un medio dispersivo?

f) Determine la atenuación que sufre una OPHM de frecuencia 100 MHz cuando se propaga una longitud de onda.

EJERCICIO PROPUESTO 5

EP5. a) $f_0 = 3\,GHz$, polariz. elíptica a derechas semieje mayor en $\hat{x}$ doble amplitud que semieje menor, ω_0 en $\hat{z}$.

a) Vector campo eléctrico en f y t.

La expresión general para el campo es: $\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{u}\cdot\bar{r})}$

En el dominio del tiempo tendríamos $\bar{E}(\bar{r},t) = Re\{\bar{E}(\bar{r})\cdot e^{j\omega_0 t}\}$.

Calculamos primero $\bar{E}(\bar{r})$:

- Constante de propagación: $\boxed{\gamma = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon}} = j2\pi\cdot 3\cdot 10^9\sqrt{\mu\varepsilon} = j6\pi\cdot 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}$
- Dirección del campo: $\hat{u} = \hat{z}$
- Amplitud: $\boxed{\bar{E}_0 = \bar{E}_{0_r} + j\bar{E}_{0_i}}$

Tenemos polarización elíptica a derechas, por tanto: $\hat{z}(\bar{E}_{0_r}\times\bar{E}_{0_i}) < 0$

Además $\dfrac{E_{semieje\ mayor}}{E_{semieje\ menor}} = \dfrac{1}{1/2} = 2 = RA$.

Podemos tomar por ejemplo una $\bar{E}_0 = E_0\left(1\cdot j\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$, que cumple lo que hemos dicho antes.

Por tanto, el vector campo eléctrico en el tiempo queda:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r},t)} = Re\left\{E_0\left(j\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{j6\pi\cdot 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}(\hat{z}(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}))}\cdot e^{j\omega_0 t}\right\} =$$

$$= Re\left\{\sqrt{\frac{8}{5}\eta\omega_0}\cdot\left(j\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{j(\omega_0 t - 6\pi\cdot 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot z)}\right\} =$$

$$W_t = W_0 = \frac{\bar{E}_0\bar{E}_0^*}{2\eta} = \frac{E_0^2}{2\eta}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{8}{5}\eta\cdot\omega_0}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{8}{5}\eta\omega_0}\,\hat{y}\,\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t - 6\pi 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot z) - \sqrt{\frac{8}{5}\eta\cdot\omega_0}\,\hat{x}\cdot 1\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - 6\pi 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}\,z)}\ (V/m)$$

En la frecuencia:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = \sqrt{\frac{8}{5}\eta\omega_0}\left(j\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}\right)e^{-j6\pi 10^9\sqrt{\mu\varepsilon}\,z}}\ (V/m)$$

b) Máximo y mínimo de campo en cualquier t.

El semieje mayor está en la dirección x, por tanto el máximo del campo será cuando su seno valga 1, es decir:

$\boxed{\bar{E}(\bar{r},t)_{máx} = \sqrt{\frac{8}{5}\eta\omega_0}}$ (V/m). El mínimo, será la unidad: $\boxed{\bar{E}(\bar{r},t)_{min} = \sqrt{\frac{10}{5}}\cdot\sqrt{\eta\omega_0}}$ (V/m)

EP5.b) ε_r (F/m), μ_0 (H/m), $\sigma = 2{,}5 \cdot 10^4$ (S/m)

a) Representación de la relación entre corrientes de conducción y desp. en f ($0 < f < 1$ THz). Gráfica.

Corrientes de conducción: $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$

E depende del tiempo por la exponencial $e^{j\omega t}$

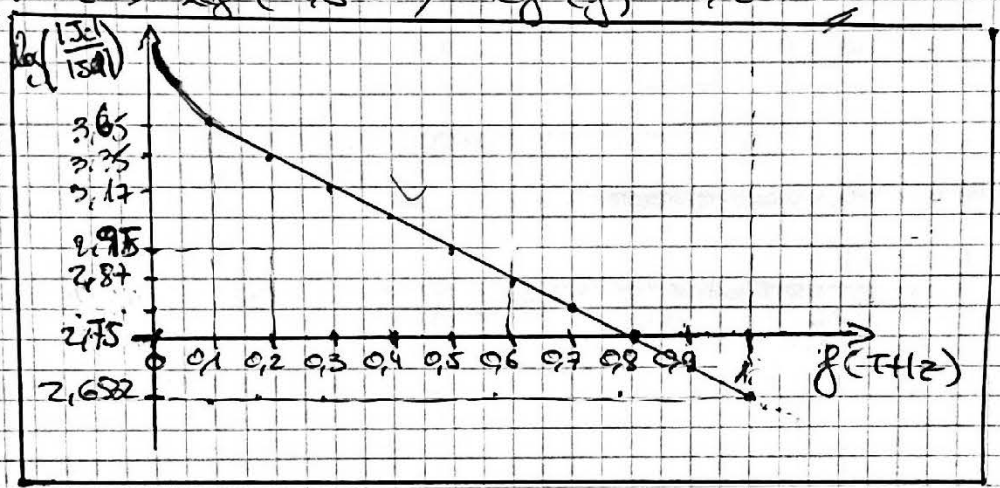
Corrientes de desplazamiento: $\bar{J}_D = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \varepsilon \cdot j\omega \cdot \bar{E}$ $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}(e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t} \right.$

$$\boxed{\frac{|\bar{J}_c|}{|\bar{J}_d|} = \frac{\sigma \cdot |\bar{E}|}{\varepsilon \cdot \omega |\bar{E}|} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi f} = \frac{2{,}5 \cdot 10^4}{2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot f} = 4{,}5 \cdot 10^{14} \cdot \frac{1}{f}}$$

Voy a representar la relación mediante escala logarítmica.

$f_{min} = 0 \Rightarrow \log(4{,}5 \cdot 10^{14}) - \log(f) \to \infty$

$f_{max} = 1$ THz $\Rightarrow \log(4{,}5 \cdot 10^{14}) - \log(f) = 2{,}6532$



b) Constante de propagación.

$\boxed{\gamma_0 = \alpha + j\beta}$ Uso la profundidad de penetración: $\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}}$

$$\boxed{\gamma_0} = (1+j) \cdot \frac{1}{\delta} = (1+j) \cdot \sqrt{\pi \sigma f \mu_0} =$$

$$= (1+j)\sqrt{\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot f} = \boxed{\frac{1}{10}\pi\sqrt{f}\,(1+j)} \quad \left(\frac{1}{m}\right)$$

c) Velocidad de fase:

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi f}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 10^4}} = \boxed{20 \cdot \sqrt{f}} \ (m/s)$$

d) Velocidad de grupo de una OPH

$$\boxed{v_g} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \omega}{\partial\left(\frac{\pi}{10}\sqrt{f}\right)} = \left[\frac{\partial\left(\frac{\pi}{10}\sqrt{f}\right)}{\partial(2\pi f)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial\left(\frac{\pi}{10}\sqrt{f}\right)}{\partial(f)}\right]^{-1} = 2\pi\left(\frac{\pi}{10} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2\sqrt{f}}\right)^{-1} =$$

$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{10}\pi\sqrt{f} + j\frac{1}{10}\pi\sqrt{f} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{10}\sqrt{f}$

$$= \cancel{2\pi} \cdot \frac{10 \cdot 2\sqrt{f}}{\cancel{\pi}} = \boxed{40\sqrt{f}} \ (m/s)$$

e) v_g y v_f a 10 GHz ¿Medio dispersivo?

$$\boxed{v_f = 20\,\delta f = 20\,\sqrt{10 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^6\ m/s}$$

$$\boxed{v_g = 4 \cdot 10^6\ m/s}$$

Como v_f y v_g son dependientes de la frecuencia se trata de un medio dispersivo.

f) $f = 100$ MHz ¿$\Delta\tau$?

$$\boxed{\Delta\tau = \lambda \cdot \alpha} = \lambda \cdot \frac{\pi}{10}\,\delta f = \frac{2\pi}{\beta}\,\frac{\pi}{10}\,\delta f = \frac{2\pi^2\,\cancel{\delta f}}{\cancel{10}\,\frac{\pi}{\cancel{10}}\,\cancel{\delta f}} = \boxed{2\pi}\ (Np)$$

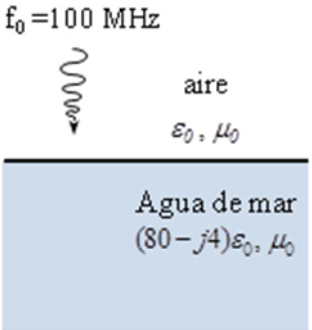
$\alpha = \frac{\pi}{10}\,\delta f$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

E. V.

Ejercicio Propuesto 6

EP6.a) Considere el mar como un dieléctrico con permitividad relativa $\varepsilon_r = 80 - j4$ y profundidad infinita.



Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 100\ MHz$ incide desde el aire en dirección perpendicular a su superficie.

¿Cuánto vale el coeficiente de reflexión? ¿Qué tanto por ciento de la potencia incidente se disipa en el mar?

Calcule la relación entre las potencias transmitidas a 1, 10 y 100 m de la superficie y la potencia incidente.

EP6.b) Una onda plana homogénea de frecuencia 3 GHz y amplitud compleja $E_1\hat{y}$ incide normalmente desde un medio de constante dieléctrica relativa 9 sobre el vacío. Determinar:

a) Las posiciones de los máximos y mínimos de campo eléctrico.

b) El coeficiente de onda estacionaria.

c) Las potencias transmitidas asociadas a las ondas incidente, reflejada y transmitida al vacío.

d) Dibuje cualitativamente el $|\vec{E}|$ y el $|\vec{H}|$.

EJERCICIO PROPUESTO 6.

EP6.a) $\varepsilon_r = 80 - j4$, $f_0 = 100\,MHz$

Coeficiente de reflexión

$$\boxed{\rho_1(0) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

La onda incide desde el aire $\Rightarrow \eta_1 = \eta_0$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \eta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{80 - j4}} \simeq 42{,}148$$

0 (bajas pérdidas)

$$\boxed{\rho_1(0) \simeq \frac{42{,}148 - 120\pi}{42{,}148 + 120\pi} \simeq -0{,}7989}$$

Tanto por ciento de la potencia disipada en el mar.

$$\boxed{W_T = W_{inc}\left(1 - |\rho_1(0)|^2\right)} = W_{inc}\left(1 - 0{,}789^2\right) = W_{inc}(1 - 0{,}638);$$

$$\boxed{\frac{W_T}{W_{inc}} = 0{,}3618 = 36{,}18\%}$$ de potencia se disipa en el mar.

Relación entre W_T a 1, 10, 100 m y W_{inc}.

$$\boxed{W_T(x) = W_{inc}\left(1 - |\rho_1(0)|^2\right) e^{-2\alpha \cdot x}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \tan\delta = \frac{1}{2} 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} \sqrt{80} =$$

$$\varepsilon = 80 - j4 \Rightarrow \tan\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{4}{80}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi \cdot f_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Expresiones usadas para medio dieléctrico con bajas pérdidas.

$$\boxed{\alpha = 0{,}4683} \quad (Np/m)$$

$$W_T(x = 1m) = W_{inc}\left(1 - |\rho_1(0)|^2\right) e^{-2 \cdot 0{,}4683 \cdot 1}$$

$$= W_{inc} \cdot 0{,}3618 \cdot e^{-2 \cdot 0{,}4683} \Rightarrow \boxed{\frac{W_T(x = 1m)}{W_{inc}} = 0{,}1418}$$

$$\boxed{\frac{W_T(x = 10m)}{W_{inc}} = 0{,}3618 \cdot e^{-0{,}9366 \cdot 10} = 3{,}096 \cdot 10^{-5}}$$

$$\boxed{\frac{W_T(x = 100m)}{W_{inc}} = 0{,}3618 \cdot e^{-0{,}9366 \cdot 100} = 7{,}63 \cdot 10^{-42}}$$

EP6 b) $f_0 = 3\,GHz$, $E_1 \hat{y}$, $\varepsilon_{r1} = 9$, $\mu_2 = \mu_0$, $\eta_2 = \eta_0$

a) Posiciones de máximos y mínimos de campo.

Calculo primero el coeficiente de reflexión:

$$\boxed{\rho_1(0) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} = \frac{\eta_0 - \eta_0/3}{\eta_0 + \eta_0/3} = \frac{1}{2}$$ $\Rightarrow$ Es un valor real, por lo tanto su fase es 0. $\Rightarrow$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}}} = \frac{\eta_0}{3}$$

⇒ Máximos del campo en:

$$2\beta_1 z + \varphi_1(0) = 2\pi n \Rightarrow z_{máximos} = \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{n}{\beta_1} = \frac{\pi}{2}\cdot n\cdot\frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{n\cdot\lambda_1}{2} = \frac{1}{6}\cdot 0{,}1\cdot n$$

$$\lambda_1 = \frac{v_f}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^9\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-1}$$

$$\boxed{z_{máximos} = \frac{1}{60}\cdot n}\ (m),\quad n\in[0,1,2,3,\ldots]$$

mínimos separados de los máximos $\frac{\lambda_1}{4}$

⇒ Mínimos del campo en:

$$2\cdot 2\beta_1 z + \varphi_1(0) = \pi(2n+1) \Rightarrow \boxed{z_{mínimos} = \frac{\pi(2n+1)}{2\beta_1} = \frac{2n+1}{4}\cdot\frac{1}{30} = \frac{2n+1}{120}}\ (m)$$

$n\in[0,1,2,\ldots]$

b) Coeficiente de onda estacionaria

$$\boxed{OEE = \frac{|E_{1\,máx}|}{|E_{1\,mín}|} = \frac{1+|\rho_1(0)|}{1-|\rho_1(0)|} = \frac{1+0{,}5}{1-0{,}5} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3}$$

c) Potencias transmitidas asociadas a las ondas incidente, reflejada y transmitida al vacío:

$$\boxed{W_{inc} = \frac{\bar{E}_{0inc}\cdot\bar{E}_{0inc}^*}{2\eta_1} = \frac{E_{0inc}^2}{2\cdot\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}} = \frac{E_1^2}{80\pi}}\ (W)$$

$$\boxed{W_{REF} = W_{inc}\cdot(|\rho_1(0)|^2) = \frac{E_1^2}{80\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9{,}947\cdot 10^{-4}\cdot E_1^2}\ (W)$$

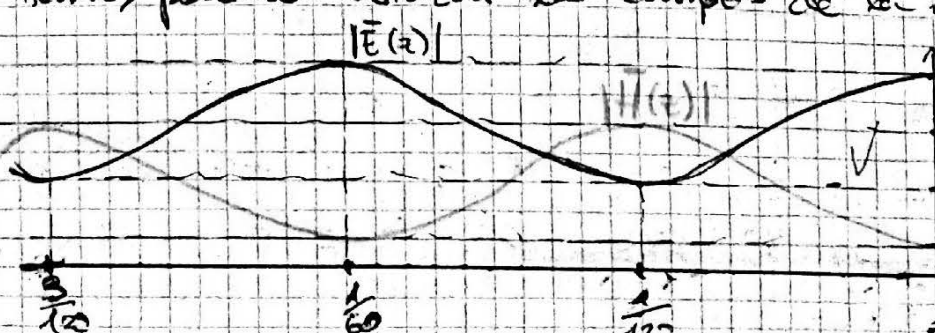
$$\boxed{W_{trans} = W_{inc} - W_{REF} = (3{,}97887\cdot 10^{-3} - 9{,}947\cdot 10^{-4})E_1^2 = 2{,}98\cdot 10^{-3}\cdot E_1^2}\ (W)$$

d) Dibujo cualitativo de $|\bar{E}|$ y $|\bar{H}|$

Tenemos unas posiciones de máximos y mínimos de $\bar{E}$ tales que: $z_{máximos} = \frac{1}{60}\cdot n$ ⇒ en $z=0$ estará el primer máximo por la derecha.

$$z_{mínimos} = \frac{2n+1}{120}$$

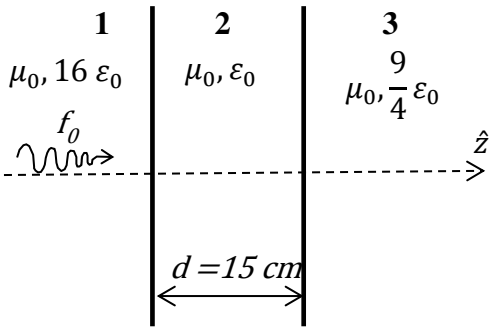
Los mínimos de $|\bar{E}(z)|$ deben coincidir con los máximos de $|\bar{H}(z)|$ en posición y los máximos de $|\bar{E}(z)|$ con los mínimos de $|\bar{H}(z)|$. La separación entre máximos y mínimos de un campo será de $\frac{\lambda_1}{4}$, por tanto, podemos esbozar los campos de la siguiente manera:



Ejercicio Propuesto 7

EP.7) Una onda plana homogénea de frecuencia 1 GHz y elípticamente polarizada se propaga en el medio (1) e incide normalmente sobre la superficie de separación con el medio (2) de la estructura sin pérdidas representada en la figura. La relación axial de esta onda incidente es $\sqrt{3}$ mientras que el valor de su campo eléctrico en la dirección del semieje menor de la elipse de polarización es $110/\sqrt{2}\ (\frac{V}{m})$.

a) Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda incidente.
b) Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda estacionaria en el medio (1). (Sitúe el origen de coordenadas en la discontinuidad 1-2).
c) Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda estacionaria en el medio (2).
d) Calcule la potencia de la onda incidente.
e) Determine la potencia transmitida al medio (3).
f) Dibuje el diagrama de onda estacionaria en los tres medios.
g) Calcule los valores máximo y mínimo del diagrama de onda estacionaria en cada uno de los tres medios.



Ejercicio propuesto 7

E.P.7) $f_0 = 1\,GHz$, $R_\Delta = \sqrt{3}$, $d = 15\,cm$

a) Expresión del campo eléctrico de la onda incidente

$$\boxed{\bar{E}_{inc} = \bar{E}_{0inc} \cdot e^{-\gamma_1 (\hat{u}\cdot\bar{r})}}$$

(medio 1: μ_0, ε_0)

Calculo los parámetros: $\gamma_1 = j\sqrt{\mu_0 \cdot 16 \cdot \varepsilon_0} = j\cdot 2\pi \cdot 1\cdot 10^9 \cdot \frac{1}{3\cdot 10^8} \cdot \sqrt{16} = \frac{80\pi}{3} j$

$\hat{u} = \hat{z}$

$\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ $\Big\}$ $\hat{u}\cdot\bar{r} = z$

El valor del campo en la dirección del semieje menor es $\frac{110}{\sqrt{2}}$ y la relación axial es $\sqrt{3}$ $\Rightarrow \bar{E}_{0inc} = \frac{110}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\, e^{j\varphi}$, $\varphi \equiv$ fase arbitraria.

Por tanto: $\bar{E}_{inc} = \frac{110}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\, e^{j\varphi} \cdot e^{-\frac{80\pi}{3} j z}$

Tomamos $\varphi = 0$ para tener una expresión más compacta: $\boxed{\bar{E}_{inc} = \frac{110}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) \cdot e^{-\frac{80\pi}{3} j z}}$ (V/m)

b) Expresión del campo de la onda estacionaria en el M1.

Al incidir el campo en la primera discontinuidad, parte se reflejará, por tanto, en el primer medio tendremos un campo de la forma:

$\bar{E}_{TOTAL_1} = \bar{E}_{inc} + \bar{E}_{reflejado}$

Debo calcular pues el campo que se refleja:

$E_{reflejado} = \rho_{12} \cdot \bar{E}_{0inc} \cdot e^{-\gamma_1(\hat{u}\cdot\bar{r})} = \rho_{12}\, \bar{E}_{0inc} \cdot e^{\gamma_1 \cdot (-\hat{z}\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}))} = \rho_{12}\, \bar{E}_{0inc}\, e^{\gamma_1 z}$

$\rho_{12} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} = \frac{\frac{2}{3}\eta_0 - \sqrt{\frac{\mu_0}{16\varepsilon_0}}}{\frac{2}{3}\eta_0 + \sqrt{\frac{\mu_0}{16\varepsilon_0}}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = 0{,}4545$

$Z_{12} = \eta_1 \cdot \frac{\eta_3 \cancel{\cos(\beta_2 d)} + j\eta_2 \cancel{\operatorname{sen}(\beta_2 d)}}{\eta_2 \cancel{\cos(\beta_2 d)} + j\eta_3 \cancel{\operatorname{sen}(\beta_2 d)}} = \eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\frac{9}{4}\varepsilon_0}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{2}{3}\eta_0$

$\beta_2 \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot d = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot d = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3\cdot 10^8} \cdot 15\cdot 10^{-2} = \pi$

Por tanto:

$\bar{E}_{reflejado} = 0{,}4545 \cdot \bar{E}_{0inc} \cdot e^{\gamma_1 z}$

$\bar{E}_{TOTAL_1} = \frac{110}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\, e^{-\frac{80\pi}{3} j z} + 0{,}4545 \cdot \frac{110}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) \cdot e^{\frac{80\pi}{3} j z} =$

$= \boxed{\frac{110}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) \left[e^{-\frac{80\pi}{3} j z} + 0{,}4545 \cdot e^{\frac{80\pi}{3} j z} \right]}$

c) Expresión de campo en M2.

De igual modo que en el caso anterior:

$\bar{E}_{TOTAL_2} = \bar{E}_{inc_2} + \bar{E}_{reflejado_2}$

Debemos analizar las condiciones de salto en el origen de coordenadas:

- $\hat{z} \times (\bar{E}_{TOT_2} - \bar{E}_{TOT_1})|_{z=0} = 0 \Rightarrow \bar{E}_{TOT_2} = \bar{E}_{TOT_1} \Rightarrow \bar{E}_{0inc_1} + \bar{E}_{0reflejado_1} = \bar{E}_{0inc_2} + \bar{E}_{0reflejado_2}$
- $\hat{z} \times (\bar{H}_{TOT_2} - \bar{H}_{TOT_1})_{z=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\eta_1}(\bar{E}_{0inc_1} - \bar{E}_{0reflejado_1}) = \frac{1}{\eta_2}(\bar{E}_{0inc_2} - \bar{E}_{0reflejado_2})$

$\eta_1 = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 4(\bar{E}_{0inc_1} - \bar{E}_{0reflejado_1}) = 1 \cdot (\bar{E}_{0inc_2} - \bar{E}_{0reflejado_2})$;

$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{110}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\left[0{,}4545 + 1\right] = \bar{E}_{0inc_2} + \bar{E}_{0reflejado_2} \\ &4(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\frac{110}{\sqrt{2}} \cdot (1 - 0{,}4545) = \bar{E}_{0inc_2} - \bar{E}_{0reflejado_2} \end{aligned}\right\}$$

$\frac{110}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) \cdot 1{,}4545 - \bar{E}_{0reflejado_2} = 4\,\frac{110}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) \cdot 0{,}5455 + \bar{E}_{0reflejado_2}$;

$\frac{-291}{100}\frac{110}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) = 2\bar{E}_{0reflejado_2}$; $\frac{-56{,}586}{2} \cdot (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) = \bar{E}_{0reflejado_2}$;

$\bar{E}_{0reflejado_2} = -28{,}29\,(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})$

$\Rightarrow \bar{E}_{0inc_2} = 1{,}4545 \cdot \frac{110}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y}) + 28{,}29 = 141{,}43\,(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})$

$\bar{E}_{TOT_2} = \bar{E}_{0inc_2}\, e^{-j\beta_2 z} + \bar{E}_{0reflejado_2}\, e^{j\beta_2 z}$

$\beta_2 = \omega_0\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = \frac{20\pi}{3}$

$\bar{E}_{TOT_2} = 141{,}43(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\, e^{-j\frac{20\pi}{3}z} + (-28{,}29)(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\, e^{j\frac{20\pi}{3}z} =$

$= \boxed{28{,}29\,(\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\left[5 \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}z} - e^{j\frac{20\pi}{3}z}\right]}$ (V/m)

d) Potencia de la onda incidente.

$\boxed{W_i = \frac{|\bar{E}_{0inc}|^2}{2 \cdot \eta_1} = \frac{\left|\frac{110}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{x} + j\sqrt{3}\hat{y})\right|^2}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \eta_0} = \frac{2 \cdot \left(\frac{110}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (1+3)}{\eta_0} = 128{,}38}$ (W)

e) Potencia transmitida al medio.

$\boxed{W_t = W_i\left(1 - |\rho(z=0^-)|^2\right) = 128{,}38\,(1 - 0{,}4545^2) = 101{,}86}$ (W)

f) Diagrama de onda estacionaria.

Medio 3: no hay onda reflejada.

Medio 2: veamos el coeficiente de reflexión:

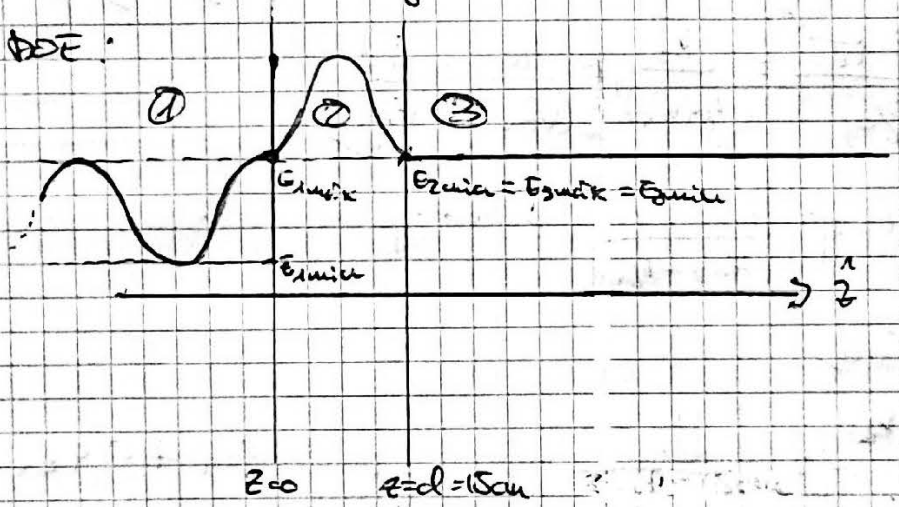
$$\rho_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} = \frac{\eta_0\sqrt{\frac{4}{9}} - \eta_0}{\eta_0\sqrt{\frac{4}{9}} + \eta_0} = -1/5 \Rightarrow$$ tiene fase π, por tanto, tengo un mínimo en la frontera 2-3.

Calculo la longitud de onda: $\lambda_2 = \frac{3\cdot 10^8}{10^9} = 0{,}3\,m = 30\,cm = 2\cdot 15 = 2\cdot d_2$

como $d_2 = \frac{\lambda_2}{2}$ tendremos una onda que va de un mínimo a otro dentro de esta región.

Medio 1: $\rho_{12} = 0{,}5455 \Rightarrow$ tiene fase 0, por tanto tengo un máximo en la frontera 1-2.

Dibujo del DOE:



g) Cálculo de máximo y mínimo en cada medio.

$$\boxed{E_{1máx}} = |E_{inc_1}|(1 + |\rho_{12}|) = \frac{110}{\sqrt{2}}\sqrt{1+3}\cdot(1+0{,}5455) = \boxed{226{,}27}\ (V/m)$$

$$\boxed{E_{1min}} = |E_{inc_1}|(1 - |\rho_{12}|) = \frac{110}{\sqrt{2}}\sqrt{1+3}\cdot(0{,}5455) = \boxed{84{,}86}\ (V/m)$$

$$\boxed{E_{2min}} = E_{1máx} = \boxed{226{,}27}\ (V/m)$$

$$\boxed{E_{2máx}} = \frac{3}{2}\cdot E_{2min} = \frac{3}{2}\cdot 226{,}27 = \boxed{339{,}405}\ (V/m)$$

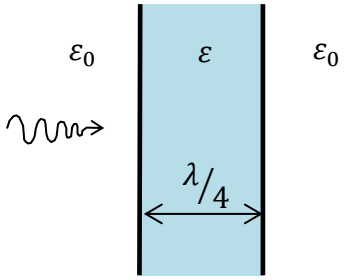
$$S_2 = \frac{1 + |\rho(z=0^-)|}{1 - |\rho(z=0^+)|} = \frac{1 + 1/5}{1 - 1/5} = 3/2$$

$$\boxed{E_{3máx}} = E_{2min} = \boxed{226{,}27 = E_{3min}}\ (V/m)$$

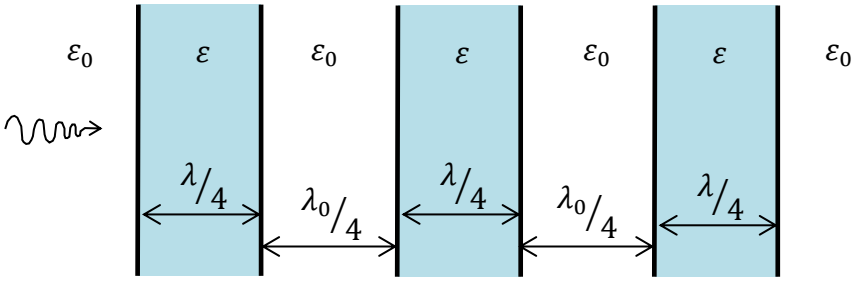
E.V.

Ejercicio Propuesto 8

Una onda plana homogénea monocromática se propaga por el vacío e incide en dirección normal a una lámina dieléctrica de permitividad ε y longitud $\lambda/4$ (con λ medida en dicho dieléctrico) detrás de la cual se encuentra de nuevo el vacío. Calcule el valor que ha de tener la permitividad para que la potencia reflejada sea el 81% de la incidente.

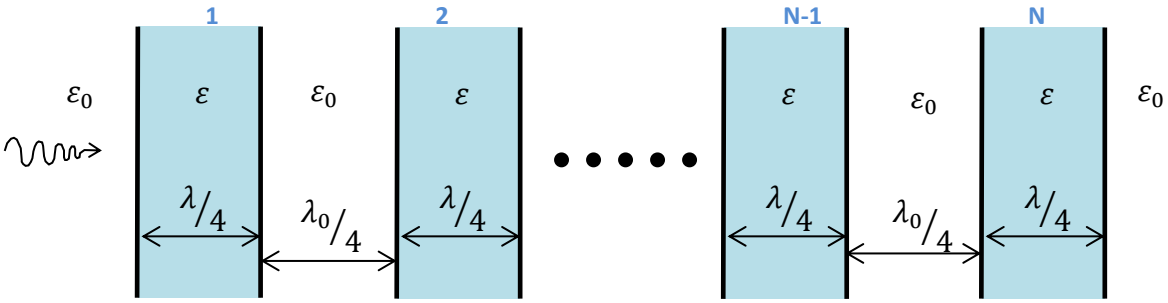


Si con dicho valor de permitividad se configura una estructura como la de la figura ¿Cuánto vale el nuevo valor de la potencia reflejada?



Calcule el valor del coeficiente de onda estacionaria en cada uno de los medios y dibuje cualitativamente el diagrama de onda estacionaria en todos los medios.

¿Cuánto valdría el porcentaje de potencia reflejada si, en lugar de tres, hubiera N láminas dieléctricas separadas por N-1 de aire?



Ejercicio propuesto 8.

Valor de la permitividad para que $W_{ref} = 81\%$ de W_{inc}.

Supongo que la lámina no tiene pérdidas:

$W_{ref} = W_{inc} \cdot |\rho_{12}|^2 \Rightarrow 0{,}81 \cdot W_{inc} = W_{inc} |\rho_{12}|^2 ; \; |\rho_{12}| = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$ //

$\{W_{ref} = 0{,}81 \cdot W_{inc}\}$

Por otro lado, analizo Z_{12}:

$$Z_{12} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 d_2) + j\eta_2 \operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}{\eta_2 \cos(\beta_2 d_2) + j\eta_3 \operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}$$

Como $d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \cos(\beta_2 d_2) = 0 \Rightarrow Z_{12} = \frac{\eta_2 \cdot j\eta_2 \cancel{\operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}}{j\eta_3 \cancel{\operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3}$

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} = \frac{(\eta_0/\sqrt{\varepsilon_r})^2}{\eta_0} = \frac{\eta_0^2}{\eta_0(\varepsilon_r)^2} = \frac{\eta_0}{(\sqrt{\varepsilon_r})^2} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} \; //$$

Ahora, como $|\rho_{12}| = \left|\frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1}\right|$, sustituyo los valores calculados y despejo la permitividad:

$$0{,}9 = \left|\frac{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r} - \eta_0}{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r} + \eta_0}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\varepsilon_r} - 1}{\frac{1}{\varepsilon_r} + 1}\right| = \left|\frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r}\right| ; \quad 0{,}9 + 0{,}9\varepsilon_r = |1 - \varepsilon_r| ;$$

$\{\varepsilon_r > 1$ al ser dieléctrico del vacío $\Rightarrow |1 - \varepsilon_r| = \varepsilon_r - 1\}$

$$0{,}9 + 0{,}9\varepsilon_r = \varepsilon_r - 1 ; \; 1{,}9 = 0{,}1\varepsilon_r ; \; \boxed{\varepsilon_r = 19}$$

Valor de la nueva potencia reflejada.

Calculo las impedancias:

$$Z_{56} = \frac{\eta_6^2}{\eta_7} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r}$$

$$Z_{45} = \frac{\eta_5^2}{Z_{56}} = \frac{\eta_0^2}{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$Z_{34} = \frac{\eta_4^2}{Z_{45}} = \frac{\eta_0^2/\varepsilon_r}{\eta_0 \varepsilon_r} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r^2}$$

$$Z_{23} = \frac{\eta_3^2}{Z_{34}} = \frac{\eta_0^2}{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r^2}} = \eta_0 \varepsilon_r^2$$

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \frac{\eta_0^2/\varepsilon_r}{\eta_0 \cdot \varepsilon_r^2} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r^3} = \frac{120\pi}{19^3} = 0{,}05496 \Rightarrow \rho_{12} = \frac{0{,}05496 - 120\pi}{0{,}05496 + 120\pi} = -0{,}9997$$

$W_{ref} = W_{inc} \cdot 0{,}999417 \Rightarrow \boxed{W_{ref} = W_{inc} \cdot 99{,}9417\%}$

Valor del coeficiente de onda estacionaria en cada medio y ROE.

Medio 7: no hay onda reflejada.

Medio 6:

$$\rho_{67} = \frac{\eta_7 - \eta_6}{\eta_7 + \eta_6} = \frac{\eta_0 - \frac{\eta_0}{\sqrt{14}}}{\eta_0 + \frac{\eta_0}{\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{14} - 1}{\sqrt{14} + 1} = 0{,}626789 \Rightarrow$$ tiene fase 0, por tanto, tengo un máximo en la frontera 6-7.

$$\boxed{S_6 = \frac{1 + 0{,}626789}{1 - 0{,}626789} = \sqrt{14}}$$

// En la frontera 5-6 tendré un mínimo, ya que $d = \lambda/4$.

Medio 5:

$$\rho_{56} = \frac{Z_{56} - \eta_5}{Z_{56} + \eta_5} = \frac{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r} - \eta_0}{\frac{\eta_0}{\varepsilon_r} + \eta_0} = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} = -0{,}9 \Rightarrow$$ fase $\pi \Rightarrow$ tengo un mínimo en la frontera 5-6.

$$\boxed{S_5 = \frac{1 + 0{,}9}{1 - 0{,}9} = 19}$$

// En la frontera 4-5 tendré un máximo por ser $\frac{\lambda}{4}$.

Medio 4:

$$\rho_{45} = \frac{Z_{45} - \eta_4}{Z_{45} + \eta_4} = \frac{\eta_0 \varepsilon_r - \eta_4}{\eta_0 \varepsilon_r + \eta_4} = 0{,}996 \Rightarrow$$ fase 0 $\Rightarrow$ máximo en 4-5.

$$\boxed{S_4 = \frac{1 + 0{,}996}{1 - 0{,}996} = 501}$$

// En 3-4, tendré un mínimo por ser $\lambda/4$.

Medio 3:

$$\rho_{34} = \frac{1 - \varepsilon_r^2}{1 + \varepsilon_r^2} = \frac{1 - 19^2}{1 + 19^2} = -0{,}9945 \Rightarrow$$ fase $\pi \Rightarrow$ mínimo en 3-4

$$\boxed{S_3 = 362{,}636}$$

// En 2-3, máximo por ser $\lambda/4$

Medio 2:

$$\rho_{23} = \frac{\eta_0 \varepsilon_r^2 - \eta_2}{\eta_0 \varepsilon_r^2 + \eta_2} = 0{,}9987298 \Rightarrow$$ fase 0 $\Rightarrow$ máximo en 2-3

$$\boxed{S_2 = 1573{,}5625}$$

// En 1-2, mínimo por $\lambda/4$

Medio 1:

$$\rho_{12} = \frac{1 - \varepsilon_r^3}{1 + \varepsilon_r^3} = -0{,}9997 \Rightarrow$$ fase $\pi \Rightarrow$ mínimo en 1-2

$$\boxed{S_1 = 6665{,}66}$$

//

*ROE, al final de esta entrega

Porcentaje de potencia reflejada con N láminas.

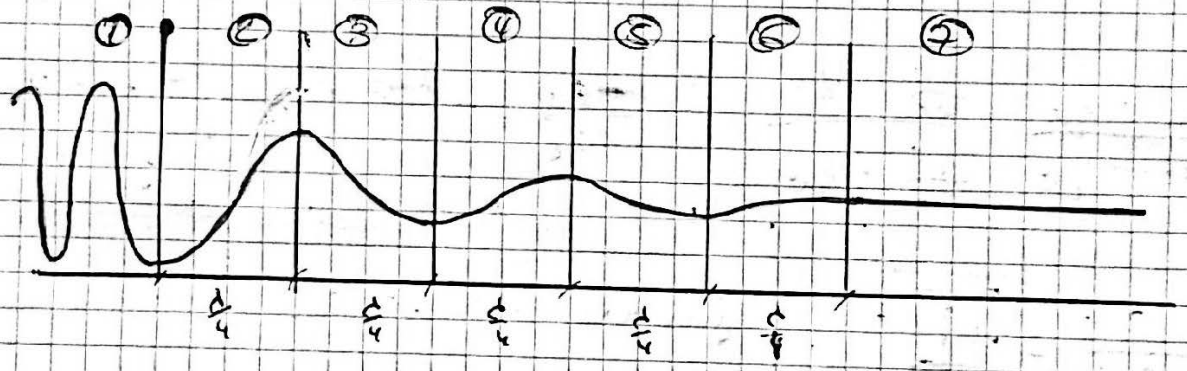
Todas las láminas que están separadas por aire, tendrán una impedancia $Z = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r^N}$; por tanto: $|\rho_{12}| = \left|\frac{1-\varepsilon_r^N}{1+\varepsilon_r^N}\right|$

$$\frac{W_{ref}}{W_{inc}} = |\rho_{12}|^2 = \left|\frac{1-\varepsilon_r^N}{1+\varepsilon_r^N}\right|^2 = \left|\frac{1-19^N}{1+19^N}\right|^2 = \left(\frac{19^N-1}{1+19^N}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{W_{ref}}{W_{inc}}(\%) = \left(\frac{19^N-1}{1+19^N}\right)^2 \cdot 100} \ (\%)$$

✓

* DOE:



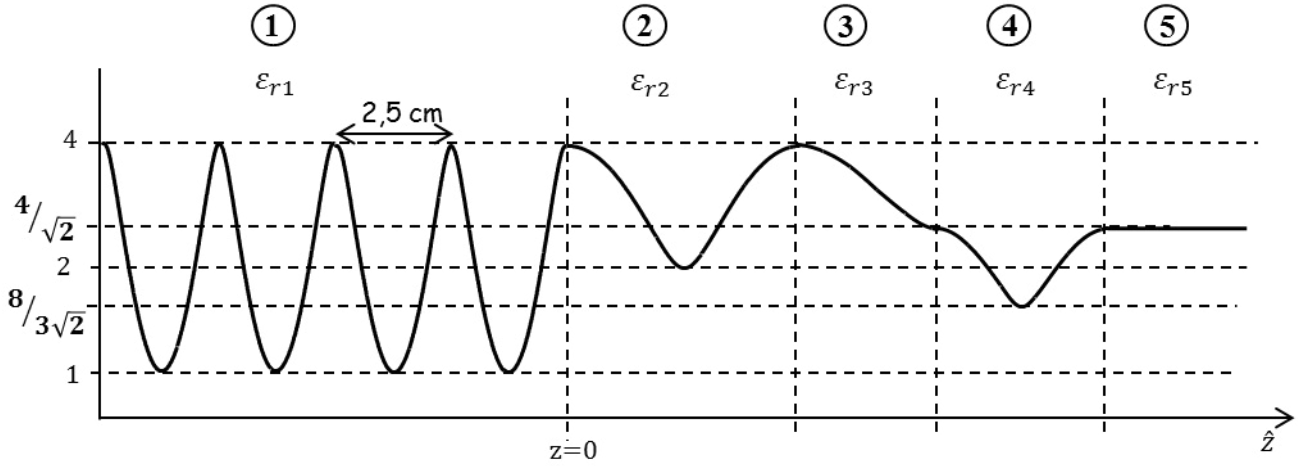
E.V.

Ejercicio Propuesto 9

Sobre una geometría de láminas dieléctricas, incide una OPHM. Se mide mediante una sonda el Diagrama de Onda Estacionaria. La figura representa los valores medidos por la sonda.

Se conoce que la OPHM incidente tiene polarización elíptica con relación axial 2, potencia $\boldsymbol{P}_0 = {}^{3}/_{16\pi}\ (W)$ y frecuencia $\boldsymbol{f}_0 = 1{,}5\ GHz$

Suponga que todos los medios tienen permeabilidad $\boldsymbol{\mu}_0$ y permitividad real.



a) Escriba la expresión del campo eléctrico y magnético de la onda incidente.

Determine:

b) el valor de la potencia reflejada en el medio 1 y transmitida al último medio.

c) la permitividad de todos los medios,

d) el espesor de cada uno de los medios,

e) Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda estacionaria del medio 1,

f) ¿Cuál es el valor máximo y la polarización del campo eléctrico en el último medio?

EJERCICIO PROPUESTO 9.

$P_0 = \frac{3}{16\pi}$, $f_0 = 1{,}5\ GHz$, $RA = 2$

a) Expresión del campo eléctrico y magnético.

$$\boxed{\bar{E}_{inc} = \bar{E}_{0inc} \cdot e^{-\gamma_1 \cdot \hat{u} \cdot \bar{r}}}$$

En el diagrama de cada estación veo que la distancia entre máximos es 2,5 cm, por tanto: $\frac{d_1}{2} = 2{,}5$

Calculo los parámetros:

$$\gamma_1 = j\omega_0\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = j\frac{2\pi \cdot f}{c_1} = j \cdot \frac{2\pi}{\lambda_1} = j\frac{2\pi}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = j\,40\pi \ (m^{-1})$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u} = \hat{z} \\ \bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \end{array}\right\} \hat{n} \cdot \bar{r} = z$$

$\bar{E}_{0inc} = E_{0inc}\left(x + j\frac{1}{2}\hat{y}\right)e^{j\varphi}$, con φ cualquiera. Supongo $\varphi = 0$.

$RA = 2$

$$P_0 = \frac{|\bar{E}_{0inc}|^2}{2\eta_1} ; \quad |\bar{E}_{0inc}|^2 = 2\eta_1 \cdot P_0 ; \quad E_{0inc} = \sqrt{\frac{2\eta_1 \cdot P_0}{1 + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{16\pi} \cdot \eta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}}{\frac{5}{4}}} =$$

$|\bar{E}_{0inc}| = E_{0inc}\sqrt{1 + \frac{1}{4}}$

$\eta_1 = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}} = \eta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$

$$= \sqrt{\frac{24 \cdot 120\pi}{16 \cdot 5 \cdot \pi\sqrt{\varepsilon_{r1}}}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 3$$

$\lambda_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot f_0}$; $\varepsilon_{r1} = \left(\frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 5 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}}\right)^2 = 4^2 = 16$

Por tanto: $\boxed{\bar{E}_{inc} = 3 \cdot e^{-j40\pi \cdot z} \cdot \left(x + j\frac{1}{2}\hat{y}\right) = 3\left(x + j\frac{1}{2}\hat{y}\right)e^{-j40\pi z}}$ (V/m)

Campo magnético:

$$\boxed{\bar{H}_{inc} = \frac{\hat{u} \times \bar{E}_{inc}}{\eta_1} = \frac{3 \cdot \hat{z} \times \left(\hat{x} + j\frac{1}{2}\hat{y}\right)e^{-j40\pi z}}{\eta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{10\pi} \cdot \left(\hat{y} - j\frac{1}{2}\hat{x}\right)e^{-j40\pi z}} \ (A/m)$$

b) Valor de la potencia reflejada en el medio 1 y transmitida al 5.

Potencia reflejada: $\boxed{P_{refl_1} = P_{inc}\,|\rho_{12}|^2} = \frac{3}{16\pi} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boxed{0{,}02149}$ (W)

$S_1 = \frac{1 + |\rho_{12}|}{1 - |\rho_{12}|}$; $|\rho_{12}| = \frac{\frac{4}{1} - 1}{\frac{4}{1} + 1} = \frac{3}{5}$ ← En el DOE veo que $S_1 = \frac{4}{1}$

Potencia transmitida $= \boxed{P_{inc_1} - P_{refl_1}} = \frac{3}{16\pi} - \frac{3}{16\pi} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boxed{0{,}0382}$ (W)

c) Permitividad en todos los medios:

Medio 1: $\boxed{\epsilon_{r1} = 16}$ ✓

Primero, voy a calcular las impedancias de todos los medios:

$Z_{4,5} = \eta_5$ //

$Z_{3,4} \Rightarrow$ Veo en el PDE que la región 4 abarca dos mínimos consecutivos de la onda, por tanto $d_4 = \frac{\lambda}{2}$ y por tanto $Z_{3,4} = \eta_5$ //

$Z_{23} = \eta_3^2 \cdot \frac{1}{Z_4} = \frac{\eta_3^2}{\eta_5}$ //

Lámina en $\lambda/4$ $\left\{ \beta_2 d_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\beta_2 d_2) = 0 \right.$

$Z_{12} = \frac{\eta_3^2}{\eta_5}$ //

Lámina en $\frac{\lambda}{2}$, por tanto $Z_{12} = Z_{23}$

$\rho_{12} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1}$; $Z_{12} = \eta_1 \frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = \eta_0 \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot \frac{1+3/5}{1-3/5} = 120\pi = \eta_0$ //

$\frac{\eta_3^2}{\eta_5} = \eta_0$; $\eta_3 = \sqrt{\eta_0 \eta_5}$; $\cancel{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r3}}} = \sqrt{\cancel{\eta_0} \cdot \cancel{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r5}}}}$; $\frac{1}{\epsilon_{r3}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r5}}}$ // (*1)

Por otro lado: $S_3 = \frac{1+|\rho_{34}|}{1-|\rho_{34}|}$; $|\rho_{34}| = \frac{S_3 - 1}{S_3 + 1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 0{,}17157$

En el PDE veo que $S_3 = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Mirando en el PDE, veo que en la frontera 3,4 hay un mínimo, por tanto, el coeficiente de reflexión será negativo: $\rho_{34} = -0{,}17157$ //

$\rho_{34} = \frac{Z_{34} - \eta_3}{Z_{34} + \eta_3}$; $-0{,}17157(\eta_5 + \eta_3) = \eta_5 - \eta_3$; $-1{,}17157\,\eta_5 = -0{,}8284\,\eta_3$;

$\eta_5 = 0{,}70711 \cdot \eta_3$; $\cancel{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r5}}} = 0{,}70711 \cdot \cancel{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r3}}}$ //

Sustituyo en la expresión obtenida anteriormente (*1)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\epsilon_{r3}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r5}}} = 0{,}70711 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r3}}} \end{array}\right\} \frac{1}{\epsilon_{r3}} = 0{,}70711 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r3}}} ; \frac{1}{\epsilon_{r3}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon_{r3}} ; \boxed{2 = \epsilon_{r3}} \Rightarrow \eta_3 = \eta_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y por tanto: $\boxed{\epsilon_{r5} = 2^2 = 4} \Rightarrow \eta_5 = \eta_0 \frac{1}{2}$

Mirando en el PDE, veo que en la frontera 4-5 hay un máximo y por tanto el coeficiente de reflexión será positivo. Calculo su módulo:

$$|\rho_{45}| = \frac{S_4 - 1}{S_4 + 1} = \frac{3/2 - 1}{3/2 + 1} = 1/5 \Rightarrow \rho_{45} = 1/5$$

En el PDE veo que $S_4 = \frac{4/\sqrt{2}}{8/2\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$

$$\rho_{45} = \frac{Z_{45} - \eta_4}{Z_{45} + \eta_4} \; ; \; 1/5\,(\eta_5 + \eta_4) = \eta_5 - \eta_4 \; ; \; \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}} \; ;$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}} \; ; \; \frac{6}{8}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}} = \frac{2}{8} \; ; \; \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \boxed{\varepsilon_{r4} = 9}$$

En la frontera 2-3, tengo un máximo, por lo que el coeficiente de reflexión será:

$$\rho_{23} = \frac{S_2 - 1}{S_2 + 1} = \frac{\frac{4}{2} - 1}{\frac{4}{2} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{Z_{23} - \eta_2}{Z_{23} + \eta_2} \; ; \; \frac{1}{3}\left(\frac{\eta_3^2}{\eta_5} + \eta_2\right) = \frac{\eta_3^2}{\eta_5} - \eta_2 \; ; \; -\frac{2}{3}\,\frac{\eta_3^2}{\eta_5} = -\frac{4}{3}\eta_2 \; ;$$

$$\frac{(1/\sqrt{2})^2}{1/2} = 2\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \; ; \; \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \; ; \; \sqrt{\varepsilon_{r2}} = 2 \; ; \; \boxed{\varepsilon_{r2} = 4}$$

$$\boxed{\varepsilon_{r1} = 16,\ \varepsilon_{r2} = 4,\ \varepsilon_{r3} = 2,\ \varepsilon_{r4} = 9,\ \varepsilon_{r5} = 4}$$

d) Espesor de cada medio.

$$\boxed{d_2} = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\frac{c}{f}}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^9}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{15 \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{20}}\ (m)$$

$$\boxed{d_3} = \frac{\lambda_3}{4} = \frac{3}{15 \cdot 4 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r3}}} = \frac{3}{15 \cdot 4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{40}}\ (m)$$

$$\boxed{d_4} = \frac{\lambda_4}{2} = \frac{3}{15 \cdot 2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r4}}} = \boxed{\frac{1}{30}}\ (m)$$

e) Expresión del campo eléctrico de la OE en medio 1.

$$\boxed{\bar{E}_1 = \bar{E}_{inc} + \bar{E}_{refl}} = 3\left(\hat{x} + j\,\frac{1}{2}\,\hat{y}\right) e^{-j40\pi z} + \frac{3}{5} \cdot 3\left(\hat{x} + j\,\frac{1}{2}\,\hat{y}\right) e^{+j40\pi z} =$$

$$= 3\left(\hat{x} + j\,\frac{1}{2}\,\hat{y}\right)\left[e^{-j40\pi z} + \frac{3}{5}\,e^{j40\pi z}\right]\ (V/m)$$

La onda reflejada va en sentido contrario a la incidente $(-\hat{z})$ y $\rho_{12} = \frac{3}{5}$

8) <u>Valor máximo y polarización de campo en medio 5</u>

En el último medio la polarización será la misma que en el medio
y podemos escribir el campo en esta región como:

$$\bar{E}_5 = E_{05}\left(\hat{x} + j\,\frac{1}{2}\hat{y}\right)e^{-j\beta_5 z}$$

Tenemos $RA = 2$ y $\hat{x} \times \frac{1}{2}\hat{y} = +\frac{1}{2}\hat{z} > 0$, por tanto <u>polarización elíptica a derechas.</u>

$$P_{trans} = \frac{|\bar{E}_5|}{2\eta_5} = \frac{E_{05}^2\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\eta_0\,\frac{1}{2}} \Rightarrow E_{05} = \sqrt{\frac{P_{trans}\cdot\eta_0}{1+\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{0{,}0382\cdot 120\pi}{5/4}} =$$

$$= 3{,}394 \ (V/m)$$

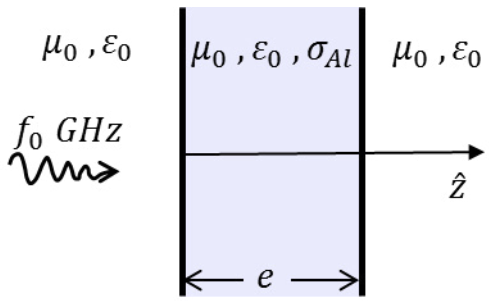
Por tanto el valor máximo de campo será $\boxed{E_{max_5} = E_{min_5} = E_{05} = 3{,}394}$ (V/m)

E. V.

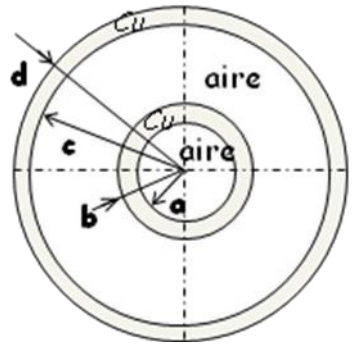
Ejercicio Propuesto 10

EP_10a) Considere la incidencia normal de una OPH de frecuencia f_0 sobre una placa de aluminio (σ_{Al} =3.5 10^7 S/m) de espesor "e" tal y como se indica en la figura. Estime el espesor mínimo que debe tener dicha placa para que pueda considerar que no existen campos en la región dieléctrica z > e, para f_0 = 100 MHz, 10 GHz y 1 THz.

En estas condiciones determine el porcentaje de la potencia incidente que se convierte en pérdidas en la placa metálica de aluminio en cada una de las frecuencias mencionadas.



EP_10b) La figura muestra un cable coaxial de dieléctrico aire, conductores metálicos de cobre (σ_{Cu} = 5.8 10^7 S/m) y radios "a", "b", "c" y "d" que se utiliza para transmitir una señal monocromática de frecuencia 100 MHz. Las expresiones aproximadas del campo electromagnético en el coaxial vienen dadas por:



$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{V_0}{r\ln(c/b)}\hat{r}\ e^{-j\beta z}\ (V/m) \\ \vec{H} &= \frac{V_0}{\eta_0 r\ln(c/b)}\hat{\varphi}\ e^{-j\beta z}\ (A/m) \end{aligned}\right\}\ en\ \begin{cases} b \le r \le c \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Siendo V_0 y β constantes reales y η_0= 120π (Ω) la impedancia intrínseca del medio.

Suponiendo que se cumplen las condiciones de Leontovich determine:

1) El campo eléctrico en los conductores, 2) La densidad de corriente en los conductores, 3) la corriente en los conductores y 4) la impedancia interna de ambos conductores por unidad de longitud (p.u.l.).

Determine las dimensiones "a", "b", "c" y "d" para que se cumplan las condiciones de Leontovich y que la resistencia del conductor exterior sea la mitad de la del conductor interior.

Considerando que la amplitud V_0 es de 10 (V) y b= 1mm, calcule las pérdidas por unidad de longitud (p.u.l.) en cada uno de los conductores.

EJERCICIO PROPUESTO 10.

EP_10 a)

Estimación de espesor mínimo para que no existan campos en $z > e$.

Se debe cumplir que $e >> \delta$ (condición de Leontovich). Al ser e mucho mayor que δ, la profundidad de penetración del conductor tiene que ser de un orden de $e \geq 10\delta$. Por tanto,

$$e = 10\delta = \frac{10}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_{Al}}}$$, Para cada frecuencia:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_{Al}}}$$

$$\begin{cases} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \\ \sigma_{Al} = 3{,}5 \cdot 10^{7} \end{cases}$$

$f_1 = 100\ MHz$: $\boxed{e_1 = \frac{10}{\sqrt{\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot 100 \cdot 10^{6} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 8{,}507 \cdot 10^{-5}}$ (m) ; $\delta_1 = 8{,}507 \cdot 10^{-6}$

$f_2 = 10\ GHz$: $\boxed{e_2 = 8{,}507 \cdot 10^{-6}}$ (m) ; $\delta_2 = 8{,}507 \cdot 10^{-7}$

$f_3 = 1\ THz = \boxed{e_3 = 8{,}507 \cdot 10^{-7}}$ (m) ; $\delta_3 = 8{,}507 \cdot 10^{-8}$

Porcentaje de la potencia incidente que se convierte en pérdidas.

$W_{T2} = W_{inc}(1 - |\rho_{12}|^2)$; $\frac{W_{T2}}{W_{inc}} = 1 - |\rho_{12}|^2$

Toda la potencia transmitida al medio 2 será disipada ya que no existen campos más allá de $z = e$.

Para cada frecuencia:

$$|\rho_{12}| = \left|\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}\right| = \left|\frac{\frac{1+j}{\sigma\delta} - \eta_0}{\frac{1+j}{\sigma\delta} + \eta_0}\right| = \left|\frac{1+j - \eta_0 \sigma_{Al}\delta}{1+j + \eta_0 \sigma_{Al}\delta}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + (1 - \eta_0 \sigma_{Al}\delta)^2}{1 + (1 + \eta_0 \sigma_{Al}\delta)}} = \sqrt{\frac{1 + (1 - 120\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot \delta)^2}{1 + (1 + 120\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot \delta)^2}}$$

- $|\rho_{12}|_1 = 0{,}9999871$ (100 MHz)
- $|\rho_{12}|_2 = 0{,}9998218$ (10 GHz)
- $|\rho_{12}|_3 = 0{,}9982198$ (1 THz)

$$\boxed{\frac{W_{disipada}}{W_{incidente}}(f = 100\ MHz) = (1 - 0{,}999982{,}1^2) \cdot 100 = 0{,}0035635\ \%}$$

$$\boxed{\frac{W_{disipada}}{W_{incidente}}(f = 10\ GHz) = (1 - 0{,}9998218^2)100 = 0{,}0356808\ \%}$$

$$\boxed{\frac{W_{disipada}}{W_{incidente}}(f = 1\ THz) = (1 - 0{,}9982198^2)100 = 0{,}3557230888\ \%}$$

✓

1) El campo eléctrico en los conductores.

El campo magnético para los conductores metálicos de cobre se expresa como:

$$\bar{H}_\tau\big|_{r=b} = \frac{V_0}{\eta_0 b \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \hat{\varphi} e^{-j\beta z} \quad ; \quad \bar{H}_\tau\big|_{r=c} = \frac{V_0}{\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \hat{\varphi} e^{-j\beta z}$$

El campo eléctrico tangencial en la superficie de conductor real es no nulo y su aproximación es:

$$\bar{E}_\tau\big|_{e_r} = \left(\frac{1+j}{\delta\sigma}\right)\left(\bar{H}_\tau\big|_{e_r} \times \hat{n}\right)$$

Si particularizo para $r=b$ y $r=c$:

$$\bar{E}_\tau\big|_{r=b} = \frac{1+j}{\delta\sigma}\left(\bar{H}_\tau\big|_{r=b} \times (-\bar{r})\right) = \frac{(1+j)\,V_0}{\sigma\cdot\delta\,\eta_0 b \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \hat{z} e^{-j\beta z}$$

$$\bar{E}_\tau\big|_{r=c} = \frac{1+j}{\delta\sigma}\left(\bar{H}_\tau\big|_{r=c} \times \bar{r}\right) = \frac{(1+j)\,V_0}{\sigma\delta\,\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} (-\hat{z}) e^{-j\beta z}$$

El campo eléctrico en un conductor tiene la forma: $\bar{E}_z(z) = E_0 \hat{z} e^{-\frac{(1+j)}{\delta} z}$

Por tanto

$$\boxed{\bar{E}_\tau\big|_{\substack{\text{interior}\\ \text{cond 1}}} = \frac{(1+j)\,V_0}{\sigma\delta\,\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z} e^{-\frac{(1+j)}{\delta}(b-r)} \hat{z}} \quad (V/m) \quad ; \quad a \le r \le b$$

$$\boxed{\bar{E}_\tau\big|_{\substack{\text{interior}\\ \text{cond 2}}} = \frac{(1+j)\,V_0}{\sigma\delta\,\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z} e^{-\frac{(1+j)}{\delta}(r-c)} (-\hat{z})} \quad (V/m) \quad ; \quad c \le r \le d$$

2) Densidad de corriente en los conductores:

Conductor 1: $\boxed{\bar{J}_{int_1} = \sigma\, \bar{E}_\tau\big|_{\substack{\text{interior}\\ \text{cond 1}}} = \frac{(1+j)\,V_0}{\delta\,\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z} e^{-\frac{(1+j)}{\delta}(r-c)} \hat{z}}$ (A/m^2)

Conductor 2: $\boxed{\bar{J}_{int_2} = \frac{(1+j)\,V_0}{\delta\,\eta_0 c \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z} e^{\frac{(1+j)}{\delta}(r-c)} (-\hat{z})}$ (A/m^2)

3) La corriente en los conductores.

$$I = \iint_S \bar{J}_{int} \cdot d\bar{S} = \iint \bar{J}_{int} \cdot \hat{z} \cdot ds = \oint_{C_r} \bar{J}_s \cdot dl$$

Como se cumplen las condiciones de Leontovich, esta corriente es la misma que la que tendría un conductor perfecto con el mismo $\bar{H}$ en su superficie

Como se trata de una línea de transmisión, es la misma corriente en ambos conductores pero en sentidos opuestos. Voy a calcular la corriente en el conductor interior, por ejemplo:

$$\boxed{I_{cond_1} = \int_{C_0} J_s \, dl = \int_0^{2\pi} \frac{V_0}{\eta_0 \, b \, \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z} \cdot b \cdot d\varphi = \frac{2\pi \cdot V_0}{\eta_0 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \cdot e^{-j\beta z}} \quad (A)$$

$$J_s(r=b) = -\hat{a}_{int} \times \bar{H}_z \Big|_{r=b} = -\hat{r} \cdot \frac{V_0}{\eta_0 \, b \cdot \ln\left(\frac{c}{b}\right)} e^{-j\beta z}$$

$$\boxed{I_{cond_2} = -I_{cond_1}}$$

4) Impedancia interna de ambos conductores

Impedancia interna del hilo conductor: $Z_{hilo} = \frac{(1+j)}{\sigma \delta} \cdot K_j$

La corriente es uniforme no depende J_s ni de r ni de φ.

$$K_{j_1} = \frac{\int_{C_0} |J_s|^2 \, dl}{\left| \int_{C_0} J_s \, dl \right|^2} = \frac{l}{\text{perímetro}} = \frac{l}{2\pi b}$$

$$K_{j_2} = \frac{l}{2\pi c}$$

$$\boxed{Z_{cond_1} = \frac{1+j}{\sigma \delta} \cdot \frac{l}{2\pi b}} \quad (\Omega/m)$$

$$\boxed{Z_{cond_2} = \frac{1+j}{\sigma \delta} \cdot \frac{l}{2\pi c}} \quad (\Omega/m)$$

Dimensiones para cumplir Leontovich y $R_{cond_2} = \frac{R_{cond_1}}{2}$

$$\boxed{c = 2 \cdot b}$$

Para cumplir las condiciones de Leontovich, necesito $\begin{cases} \text{espesor} \gg \delta \\ \text{curvatura} \gg \delta \end{cases}$

Es decir: $b \geq 10\delta = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{10}{\sqrt{\pi \cdot 18 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{7}}} = 6{,}6 \cdot 10^{-5}$ (m)

$$\boxed{b \geq 6{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ m}}$$

$b - a \geq 10\delta \Rightarrow b - 10\delta \geq a \Rightarrow \boxed{a \leq b - 6{,}6 \cdot 10^{-5}}$ (m)

$d - c \geq 10\delta \Rightarrow d \geq 10\delta + c \Rightarrow d \geq 10\delta + 2b \Rightarrow d \geq 10\delta + 2 \cdot 10\delta = 30\delta$

$$\boxed{d \geq 3 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-5} = 1{,}98 \cdot 10^{-4}} \text{ (m)}$$

Pérdidas por unidad de longitud en cada conductor.

$$\boxed{P_{Dis_{int_{cond}}} = \frac{1}{2} R_{cond} |I_z|^2 = \frac{1}{2} \frac{1+j}{\sigma \delta} |I_z|^2}$$

$$\boxed{P_{Dis\,cond_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sigma \delta 2\pi b} \cdot \left| \frac{2\pi \cdot V_0}{\eta_0 \ln(c/b)} e^{-j\beta z} \right|^2 = \frac{10^2 \pi}{10^{-3} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot \ln^2(2) \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{7}} = 12 \text{ mW/m}}$$

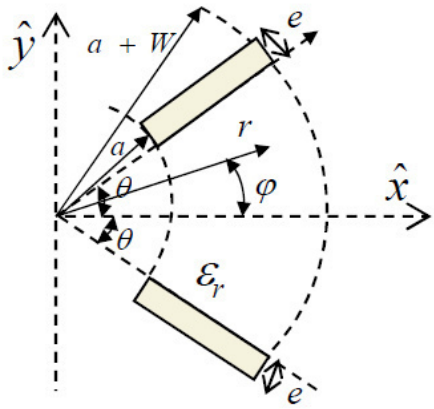
$$\boxed{P_{Dis\,cond_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma \delta 2\pi c} \left| \frac{2\pi V_0 \, e^{-j\beta z}}{\eta_0 \ln(c/b)} \right|^2 = \frac{c \pi^2 V_0^2}{4\pi \delta \sigma c \eta_0^2 \ln^2(2)} = 6 \text{ mW/m}}$$

E.V

Ejercicio Propuesto 11

La figura representa la sección recta de una línea con dos placas metálicas de aluminio ($\sigma_{Al} = 3{,}5 \cdot 10^7\ S/m$), de anchura W y espesor e, formando un ángulo 2θ entre sí. La región entre placas está rellena de un dieléctrico de permitividad relativa ε_r.

Las expresiones aproximadas del campo electromagnético monocromático de frecuencia 2 GHz en la línea vienen dadas por:



$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{A}{r}\hat{\varphi}e^{-j\beta z}\ \text{(V/m)} \\ \vec{H} &= -\frac{A}{\eta r}\hat{r}e^{-j\beta z}\ \text{(A/m)} \end{aligned}\right\} \text{ en } \left\{\begin{aligned} a \le r \le a+W \\ -\theta \le \varphi \le \theta \end{aligned}\right.$$

Y se considera nulo en el resto. A y β son constantes reales, y $\eta = 60\,\pi\ (\Omega)$ es la impedancia intrínseca del dieléctrico.
Los valores de las dimensiones (en mm) son $a = 2, W = 4\ y\ e = 0{,}1$.
Determine:
a) Si se cumplen las condiciones de Leontovich.
b) La densidad de corriente y la corriente total en cada uno de los conductores.
c) La expresión de la constante K_j y su valor para las dimensiones y conductor dados.
d) La impedancia por unidad de longitud (p.u.l.) que presentan los conductores.
e) El valor de las pérdidas p.u.l. que presentan los conductores (considere $A = 4$ voltios).

Ejercicio propuesto 11.

$\sigma_{Al} = 3{,}5 \cdot 10^7\ S/m$

Anchura ω, espesor e, $f = 2\,GHz$, $\eta = 60\pi$

$$\bar{E} = \frac{A}{r}\,\hat{\varphi}\,e^{-j\beta z}\ (V/m)$$
$$\bar{H} = -\frac{A}{\eta r}\,\hat{r}\,e^{-j\beta z}\ (A/m)$$
en $\begin{cases} a \le r \le a+\omega \\ -\theta \le \varphi \le \theta \end{cases}$

$a = 2$, $\omega = 4$, $e = 0{,}1\ (mm)$

a) Condiciones de Leontovich.

Calculo la profundidad de penetración:

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3{,}5 \cdot 10^7}} = 1{,}907 \cdot 10^{-6}$$

$e = 0{,}1\ mm = 1 \cdot 10^{-4} >> \delta \Rightarrow$ En ambos conductores se cumplen las condiciones de Leontovich.

b) Densidad de corriente y corriente total en cada conductor.

El campo magnético al cumplirse las condiciones de Leontovich del apartado anterior, va a ser el mismo que tendría si los conductores fueran perfectos. ($H_{real} = H_{ideal}$).

Conductor$_1$: $\bar{H}_1(\varphi=\theta) = \frac{-A}{\eta r}\,\hat{r}\,e^{-j\beta z}$

Conductor$_2$: $\bar{H}_2(\varphi=-\theta) = \frac{-A}{\eta r}\,\hat{r}\,e^{-j\beta z}$

Voy a calcular ahora el campo tangencial en la superficie de ambos conductores:

$$\bar{E}_T\big|_{\varphi=\theta} = \frac{1+j}{\sigma\delta}\left(\bar{H}_T\big|_{\varphi=\theta} \times \hat{n}_{int}\right) = \frac{1+j}{\sigma\delta} \cdot \frac{-A}{\eta r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot (\hat{z})$$

$$\bar{E}_T\big|_{\varphi=-\theta} = \frac{1+j}{\sigma\delta}\left(\bar{H}_T\big|_{\varphi=-\theta} \times \hat{n}_{int}\right) = \frac{1+j}{\sigma\delta} \cdot \frac{A}{\eta r} e^{-j\beta z} \cdot (\hat{z})$$

$$\bar{H}\big|_{\varphi} \times \hat{n}_{int} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ H & 0 & 0 \\ 0 & (\pm 1) & 0 \end{vmatrix} = (\pm\hat{z}) \cdot H_{\varphi}$$

Densidades de corriente:

$$\boxed{J_{int\,superior} = \sigma \cdot \bar{E}_{int\,superior} = \sigma\,\bar{E}_T\big|_{\varphi=\theta} \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}\,prof} = \frac{1+j}{\delta} \cdot \frac{-A}{\eta r}\,e^{-j\beta z} \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}(\varphi-\theta)}\,(\hat{z})\ (A/m^2)}$$

$$\bar{J}_{\substack{int\\inferior}} = \sigma \bar{E}_{\substack{int\\inferior}} = \sigma \cdot \bar{E}_\varphi\Big|_{\varphi=\theta} e^{-\frac{1+j}{\delta}\rho_{inf}} = \frac{1+j}{\delta} \cdot \frac{A}{\eta r} e^{-j\beta z} e^{-\frac{1+j}{\delta}(\varphi-\theta)} \hat{z} =$$

$$= \boxed{\frac{1+j}{\delta} \cdot \frac{A}{\eta r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{\frac{1+j}{\delta}(\varphi+\theta)} \cdot \hat{z}} \quad (A/m^2)$$

Veré ahora la corriente que circula en cada conductor.
Se trata de una línea de transmisión, en la que la corriente será la misma en ambos conductores, pero en sentido contrario.
Voy a calcularla en el conductor superior por ejemplo:

$$\boxed{I_{\substack{cond\\sup}}} = \iint_S \bar{J}_{\substack{int\\sup}} d\bar{S} = \iint \bar{J}_{\substack{int\\sup}} \hat{z} \cdot dS = \oint_{C_S} j_s \, dl = \int_{r=a}^{r=a+w} \frac{-A}{\eta r} e^{-j\beta z} dr = \boxed{\frac{-A}{\eta} e^{-j\beta z} \ln\left(\frac{a+w}{a}\right)} \quad (A)$$

la corriente superficial en un conductor eléctrico perfecto con el mismo campo magnético en la superficie vale lo mismo que en un conductor real.

$$\bar{J}_S\Big|_{\varphi=\theta} = -\hat{u}_{r_{int}} \times \bar{H}_z\Big|_{\varphi=\theta} = \frac{A}{\eta r} e^{-j\beta z} (-\hat{z})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & (-1) & 0 \\ H_z|_{\varphi=\theta} & 0 & 0 \end{vmatrix} = H_z|_{\varphi=\theta} (-\hat{z})$$

$$\boxed{I_{\substack{cond\\inf}} = -I_{\substack{cond\\sup}} = \frac{A}{\eta} e^{-j\beta z} \ln\left(\frac{a+w}{a}\right) \quad (A)}$$

c) Constante k_j, y valor

$$\boxed{k_{j_{inf}}} = \frac{\oint |J_s|^2 dl}{\left|\oint J_s \cdot dl\right|^2} = \frac{\oint_{r=a}^{r=a+w} \frac{A^2}{\eta^2} dr}{\left|I_{\substack{cond\\inf}}\right|^2} = \frac{\frac{A^2}{\eta^2}\left(\frac{-1}{a+w} + \frac{1}{a}\right)}{\frac{A^2}{\eta^2} \ln^2\left(\frac{a+w}{a}\right)} = \frac{\frac{-a+a+w}{a(a+w)}}{\ln^2\left(\frac{a+w}{a}\right)} =$$

$$= \frac{w}{a(a+w)\ln^2\left(\frac{a+w}{a}\right)} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{3} \cdot 10^{3}}{2(2+4)\ln^2\left(\frac{2+4}{2}\right)} \frac{(m)}{(m^2)} = \boxed{276{,}178 \ m^{-1}}$$

$$\boxed{k_{j_{sup}} = k_{j_{inf}} = 276{,}178 \ m^{-1}}$$

simetría

d) Impedancia (p.u.l) de los conductores.

La impedancia será la misma en ambos conductores, por simetría:

$$\boxed{Z_{kilo\,UL} = \frac{(1+j)}{\delta} \cdot k_j} \Rightarrow \boxed{Z_{kilo\,cond\,sup} = Z_{kilo\,cond\,inf}} = \frac{k_j \quad (s)^{-1}}{3{,}5 \cdot 10^7 \cdot 1{,}902 \cdot 10^{-6}} \cdot 276{,}178 \cdot \frac{1}{m} =$$

$$= (k_j)\,\frac{19727}{4255} \cdot \frac{1}{(s\,m)} = \boxed{(k_j) \cdot 4{,}15 \left(\frac{\Omega}{m}\right)}$$

e) Pérdidas p.u.l de los conductores ($A = 4\ V$).

Las pérdidas también serán las mismas para ambos:

$$\boxed{P_{DISS\,UL\,sup} = P_{DISS\,UL\,inf}} = \frac{1}{2}|I|^2 R = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot Re\{Z_{kilo}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\eta}\ln\left(\frac{w+a}{a}\right)\right)^2 \cdot 4{,}15 =$$

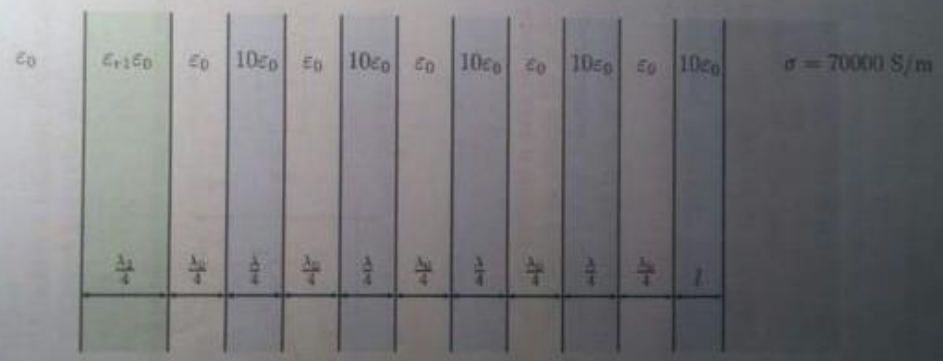
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{60\pi} \cdot \ln\left(\frac{214}{2}\right)\right)^2 \cdot 4{,}15 = 1{,}127 \cdot 10^{-3} \left(\frac{W}{m}\right) = \boxed{1{,}127 \left(\frac{mW}{m}\right)}$$

Ejercicio Presencial 2.

Adaptar un conductor.

Se desea adaptar una superficie conductora (de grafito, con $\sigma = 70000$ S/m) a la incidencia normal, desde el aire, de una onda plana homogénea de frecuencia 1 GHz.

Para ello se cuenta con materiales de permitividad relativa $\varepsilon_r \leq 10$, y se considera una estructura como la de la figura.



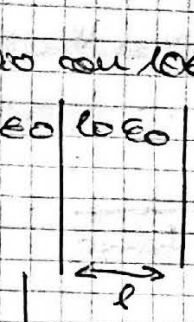
Determine:

- El espesor l.
- El número de láminas de permitividad relativa 10.
- Los espesores, en milímetros, de las láminas y de los espaciadores de aire.
- La permitividad relativa ε_{r1} y el espesor de la primera lámina.

$\sigma = 70000$ S/m, $f = 1$ GHz, $\varepsilon_r \leq 10$

El espesor l

Desde la frontera del medio con ε_0, con el medio con $10\varepsilon_0$ a la derecha, debemos ver una impedancia real:



Voy a calcularme el coeficiente de reflexión y forzar para que sea real:

$$\rho = \rho_{conductor} \cdot e^{-j2\beta l} = \frac{\eta_{\substack{\text{sólido}\\ \text{conductor}}} - \eta_0/\sqrt{10}}{\eta_{\substack{\text{sólido}\\ \text{medio}}} + \eta_0/\sqrt{10}} e^{-j2\beta l} =$$

$$= \frac{\frac{1+j}{\sigma\delta} - \eta_0/\sqrt{10}}{\frac{1+j}{\sigma\delta} + \eta_0/\sqrt{10}} \cdot e^{-j2\beta l} = \frac{\sqrt{10}(1+j) - \eta_0 \sigma\delta}{\sqrt{10}(1+j) + \eta_0 \sigma\delta} e^{-2\beta l} = \frac{(\sqrt{10} - 120\pi \cdot 70000 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{-5}) + \sqrt{10}j}{(\sqrt{10} + 120\pi \cdot 70000 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{-5}) + \sqrt{10}j} e^{-2\beta l} =$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 70000}} = 6{,}02 \cdot 10^{-5}$$

$$= (-0{,}996 + 3{,}965 \cdot 10^{-3} j) e^{-2\beta l} =$$

$$2\beta = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi\sqrt{10}}{\frac{c_0}{f}} = \frac{4\pi\sqrt{10}}{0{,}3}$$

$$= (-0{,}996 + 3{,}965 \cdot 10^{-3} j) \cdot e^{-j\frac{4\pi\sqrt{10}}{0{,}3} l}$$

$$= 0{,}996 \angle 3{,}1376 \cdot e^{-j\frac{4\pi\sqrt{10}}{0{,}3} l} = 0{,}996 \cdot e^{-j\frac{4\pi\sqrt{10}}{0{,}3} l - j3{,}1376} =$$

$$= 0{,}996\, e^{-j\left(\frac{4\pi\sqrt{10}}{0{,}3} l + 3{,}1376\right)} = 0{,}996\, e^{-j(132{,}46 \cdot l + 3{,}1376)}$$

Fuerzo para que sea real: realmente tenemos dos opciones $\begin{cases} \text{par de } \pi \\ \text{impar de } \pi \end{cases}$

Fase par de π: $\rho = 0{,}996\, e^{-j \cdot 2k\pi} \Rightarrow 132{,}46 \cdot l + 3{,}1376 = 2\pi$; $l_1 = 0{,}0237$ (m) $= 23{,}747$ (mm)

Fase impar de π: $\rho = 0{,}996\, e^{-j(2k+1)\pi} \Rightarrow 132{,}46 l + 3{,}1376 = \pi$; $l_2 = 0{,}0301$ (mm)

Veo ahora cómo quedarían las impedancias con cada espesor:

$$z_1 = \eta_0 \frac{1+\rho}{1-\rho} = \eta_0 \frac{1+0{,}996}{1-0{,}996} = 59880\pi$$

$$z_2 = \eta_0 \frac{1-0{,}996}{1+0{,}996} = 0{,}755$$

Efectivamente, salen impedancias reales, luego me valen ambos espesores:

$$\boxed{l_1 = 23{,}747 \text{ mm}}$$

$$\boxed{l_2 = 0{,}0301 \text{ mm}}$$

b) Número de láminas de $\varepsilon_r = 10$

Voy a ir viendo el valor de las impedancias, calculando de derecha a izquierda hasta que vea dónde se puede producir la adaptación. (Voy a considerar $l_1 = 23{,}747$ mm)

$$Z_{último\ medio} = 59880\pi$$

$$Z_1 = \frac{(\eta_0)^2}{Z_{último\ medio}} = \frac{(120\pi)^2}{59880\pi} = 0{,}755$$

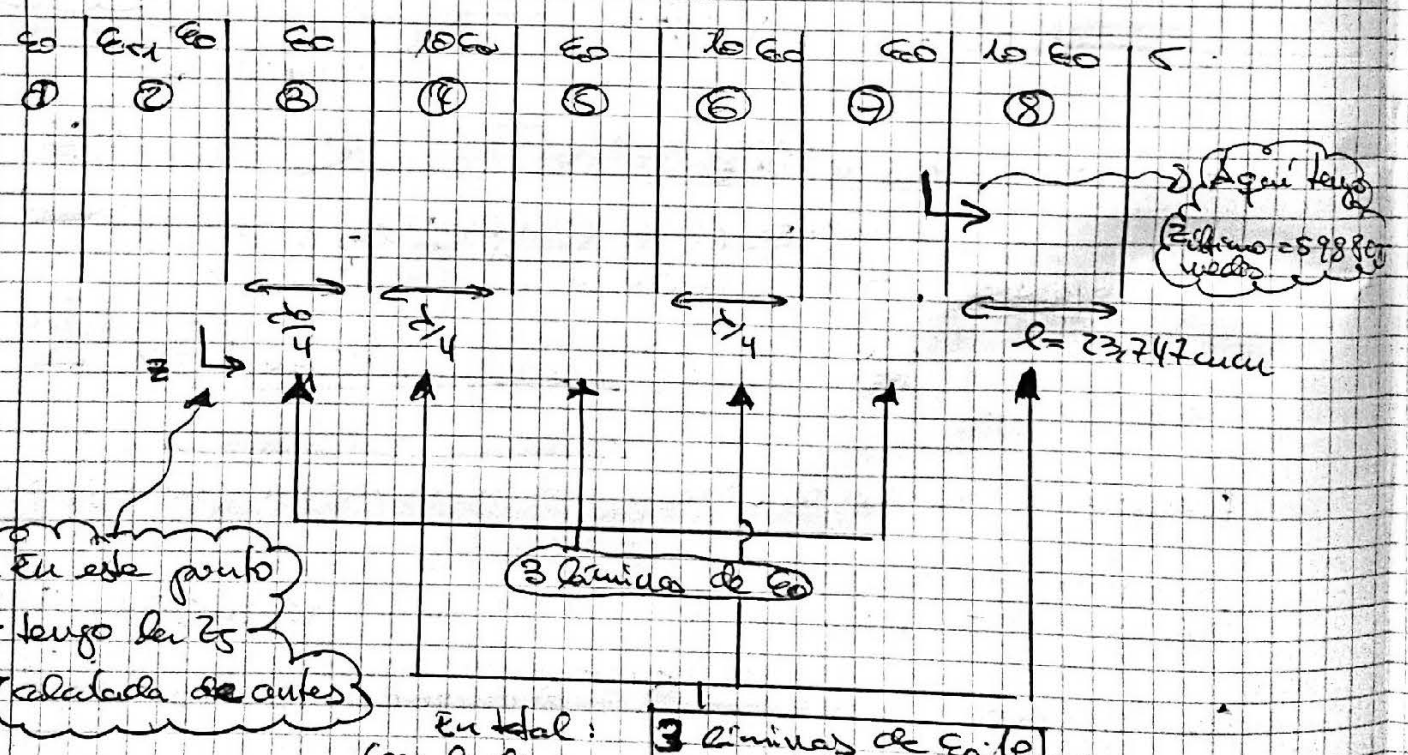
$$Z_2 = \frac{(120\pi)^2}{0{,}755} = 18824{,}146$$

$$Z_3 = \frac{\eta_0^2}{18824{,}146} = 7{,}55$$

$$Z_4 = 1882{,}41$$

$$Z_5 = \frac{(120\pi)^2}{1882{,}41} = 75{,}5$$

Podemos usar entonces 3 láminas de permitividad ε_0 y 2 de $10\varepsilon_0$ entre esa Z_5 y la $Z_{último\ medio}$. Si ordeno las láminas de manera normal, la estructura queda de la siguiente forma:



c) Espesores de espaciadores de aire y de las láminas

$$\frac{\lambda_0}{4} = \frac{c/f_0}{4} = \frac{3\cdot 10^8}{10^9\cdot 4} = 0{,}075\ m = 75\ mm \quad \text{(aire)}$$

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{10}} = 0{,}075\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}0237 = 23{,}717\ mm \quad \text{(láminas } 10\varepsilon_0\text{)}$$

d) Permitividad ε_{r1} y espesor de la primera lámina.

Necesito tener adaptación, por tanto $Z_{12} = \eta_1 = \eta_0 = 120\pi$.

Calculo la Z_{12}:

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \frac{(\eta_0)^2}{(\sqrt{\varepsilon_{r1}})^2} \cdot \frac{1}{Z_5} = \frac{\eta_0^2}{\varepsilon_{r1}} \cdot \frac{1}{Z_5} = (120\pi) \cdot \frac{120\pi}{75{,}5} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} = 120\pi \cdot \frac{4{,}99}{\varepsilon_{r1}}$$

por ser $\frac{d_1}{4}$

$Z_{23} = Z_5$

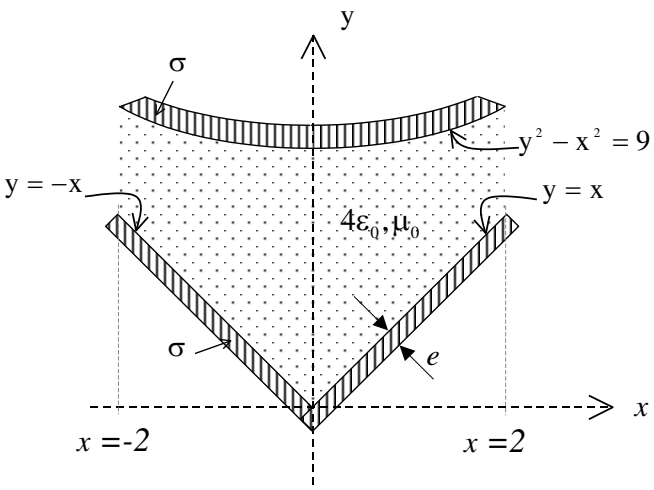
Por tanto, para que $Z_{12} = 120\pi \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r1} = 4{,}99 \simeq 5}$

Veo ahora el espesor de la lámina: $\boxed{\frac{d_1}{4}} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = 0{,}075 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} =$

$= 2{,}033 = \boxed{33{,}54 \text{ mm}}$

Ejercicio Propuesto 12

Se considera una línea de transmisión formada por dos conductores y un dieléctrico de permitividad $4\varepsilon_0$. La figura representa la sección transversal de la línea, donde se distingue un conductor en forma de hipérbola, $(y^2 - x^2) = 9$, y otro en forma de línea quebrada que forma un ángulo recto, $y = x$, $y = -x$. Se considera que, despreciando el efecto de bordes, sólo hay campo electromagnético no nulo en la región del dieléctrico, punteada en la figura. Una expresión aproximada del potencial del problema electrostático asociado es de la forma: $\phi(x, y) = A\,(y^2 - x^2)$ donde A es una constante compleja que se supone conocida.



Considerando los conductores perfectos ($\sigma \to \infty$):

- Compruebe que la función potencial cumple la ecuación y las condiciones de contorno correspondientes a los modos TEM.

- Determine la expresión de la tensión aplicada a la línea, así como las expresiones de los campos eléctrico y magnético correspondientes al modo TEM.

- Obtenga la expresión de la distribución de la densidad de corriente en el conductor que forma un ángulo recto.

- Calcule el valor de la impedancia característica de la línea y determine la expresión de la potencia transmitida por ésta.

Nota: $dl\big|_{y=x} = \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,dy = dr$

Ejercicio Propuesto 12.

Comprobación que función potencial cumple ec. y c.c a los TEM.

Se debe cumplir la ecuación de Laplace al ser conductores perfectos: $\Delta_t \phi = 0$.

$$\Delta_t \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = \frac{\partial \phi(-2x)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(2y)}{\partial y} = A(-2) + A(2) = 0$$

$\boxed{\text{Se cumple la ecuación}}$

Ahora en cuanto a las condiciones de contorno de los modos TEM, se debe cumplir que el potencial de los conductores sea constante. Lo comprobamos:

Conductor superior: $\phi_{sup}(x,y) = A(y^2 - x^2) = A \cdot 9 \equiv cte$

Conductor inferior:

$$\left.\begin{cases} \phi_{inf}(x,y)\Big|_{y=-x} = A(y^2-x^2)\Big|_{y=-x} = 0 \equiv cte \\ \phi_{inf}(x,y)\Big|_{y=x} = A(y^2-x^2) = 0 \equiv cte \end{cases}\right\} \boxed{\text{Se cumplen las condiciones de contorno.}}$$

Expresión de la tensión aplicada a la línea, $\bar{E}_t$, $\bar{H}_t$.

$$\boxed{V_t} = \phi(cond_{sup}) - \phi(cond_{inf}) = A(y^2 - x^2) - 0 = \boxed{A \cdot 9} \ (V)$$

$$\boxed{\bar{E}_t} = (-\nabla_t \phi)\, e^{-\gamma_0 z} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{y}\right) e^{-\gamma_0 z} = -\left(-2xA\hat{x} + 2yA\hat{y}\right) e^{-\gamma_0 z} = 2A(x\hat{x} - y\hat{y})\, e^{-\gamma_0 z} =$$

$$= \boxed{2A(x\hat{x} - y\hat{y})\, e^{-j\frac{2\pi f}{3\cdot 10^8}\sqrt{4}\, z}} \ (V/m)$$

$$\gamma_0 = -j\frac{2\pi f}{c}\sqrt{4}$$

$$\boxed{\bar{H}_t = \frac{\hat{z} \times \bar{E}_t}{\eta} = \frac{1}{\eta} \cdot 2A\, e^{-j\frac{2\pi f}{3\cdot 10^8}\sqrt{4}\, z} \cdot (x\hat{y} + y\hat{x})} \ (A/m)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = x\hat{y} + y\hat{x}$$

Expresión de la distribución de la densidad de corriente en cond. inf.

Tenemos dos tramos:

Tramo 1: $y = x$

$$\boxed{\bar{J}_{s_1}} = \hat{u} \times \bar{H}\Big|_{y=x} = \frac{-\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}} \times \frac{2A}{\eta} e^{-j\frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}\, z}{3\cdot 10^8}} (x\hat{y} - y\hat{x}) =$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{\frac{2\cdot A\cdot x}{3\pi\sqrt{2}} e^{-j\frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}\, z}{3\cdot 10^8}} (-\hat{z})} \; (A/m) \; ; \; -2 \le x \le 0.$$

Tramo 2: $y = -x$

$$\boxed{\bar{J}_{s_2} = \frac{2Ax}{3\pi\sqrt{2}} e^{-j\frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}\, z}{3\cdot 10^8}} (\hat{z})} \; (A/m) \; ; \; 0 \le x \le 2.$$

Valor de la impedancia característica y potencia transmitida

Voy a calcular primero la corriente en la línea:

$$I_0 = \frac{1}{\eta}\oint_c (-\nabla_t \phi)\,\hat{u}\, dl = \oint_c \bar{J}_{s_1}(-\hat{z})\, dl + \int_c \bar{J}_{s_2}\,\hat{z}\, dl = 2\int_0^2 \frac{2Ax}{3\pi\sqrt{2}} dx =$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = \frac{4\cdot A\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{2}}\cdot 2 = 0{,}085\,A \; (A)$$

Ahora la impedancia característica queda: $\boxed{Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{A\cdot 9}{0{,}085\cdot A} = 105{,}88} \; (\Omega)$

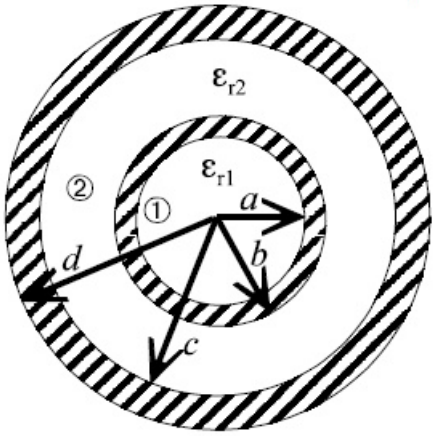
Potencia transmitida: $\boxed{W_t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V\cdot I^*\} = \frac{1}{2}V_0\cdot I_0 = \frac{1}{2}A\cdot 9\cdot 0{,}085A = 0{,}382\,A^2}$

(W)

Como $A \in \mathbb{R}$, sería más correcto: $W_t = 0{,}382\,|A|^2$

Ejercicio Propuesto 13

La figura representa la sección recta de una línea de transmisión (medio 1 con $\varepsilon_{r1} = 4 - j0{,}01$, medio 2 con $\varepsilon_{r2} = 9$ y los conductores perfectos).



a) ¿Puede existir un modo TEM en la región 1 ? ¿Por qué?

b) Deduzca la expresión de la impedancia característica.

c) Determine la relación entre las dimensiones del cable para que presente una impedancia característica de 50 (Ω).

d) Determine la potencia transmitida por el modo TEM, considerando una amplitud de la onda de tensión de 10 V.

e) Si la frecuencia de trabajo es $f_0 = 1$ GHz,
e.1) ¿Cuál sería la longitud máxima para poder representar la línea de transmisión mediante su circuito equivalente (considere válida la primera aproximación de las funciones hiperbólicas para un argumento $|x| \leq 0{,}1$)?
e.2) Dibuje dicho circuito equivalente en este caso particular.

f) Suponiendo que el metal del conductor exterior ($c \leq r \leq d$) tiene una conductividad finita, de valor σ, y considerando que el espesor d−c es mucho mayor que la profundidad de penetración δ, calcule:
f.1) La resistencia del coaxial por unidad de longitud.
f.2) La constante de atenuación.
f.3) ¿Cómo se modifica el circuito equivalente del apartado anterior?

Considerando ahora que los conductores son de cobre ($\sigma_{Cu} = 5.8\ 10^7$ S/m), b=1 mm y que se cumplen las condiciones de Leontovich (frecuencia de trabajo $f_0 = 1$ GHz),

g1) Obtenga la relación entre la potencia perdida en los conductores en 10 cm de cable y la potencia transmitida.
g2) Realice una representación de dicha relación en función de la frecuencia (entre 100 MHz y 100 GHz).

Nota: ver transparencia nº 19 de Tema 5_Parte 2:

EJERCICIO PROPUESTO 13

a) Observamos que el medio ① es un recinto SIMPLEMENTE CONEXO y por tanto este medio NO puede soportar un modo TEM ya que al resolver en este medio el problema electrostático equivalente que es el siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_t \phi &= 0 \\ \phi\big|_c &= V \end{aligned}}$$

se llega a un potencial $\phi = V$ en toda la región V.

Así el campo eléctrico en esta región es nulo ya que

$$\vec{E} = (-\nabla_t \phi)\, e^{-\gamma_0 z} = \vec{0} \Rightarrow \text{NO HAY MODO TEM EN ESTA REGIÓN.}$$

b) Sabemos que $Z_0 = \dfrac{V_0}{I_0}$.

Para obtener V_0 e I_0 debemos resolver el problema electrostático equivalente como indica en la "transparencia 19 del tema 5 - 2ª parte".

$\Delta_t \phi(r,\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ El potencial en la región 2 sólo depende de la coordenada r y por tanto:

$\phi\big|_{\substack{r=b \\ \forall\varphi}} = V_0$

$\phi\big|_{\substack{r=c \\ \forall\varphi}} = 0$

$$\Delta_t \phi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi = A \ln r + B}$$

Como $\phi\big|_{\substack{r=b \\ \forall\varphi}} = V_0 = A\ln b + B$ y $\phi\big|_{\substack{r=c \\ \forall\varphi}} = 0 = A\ln c + B$ operando podemos obtener A y B y por tanto el potencial en esta región:

$$\phi = V_0 \cdot \frac{\ln(c/r)}{\ln(c/b)}$$

A partir de este potencial podemos determinar I_0:

$$I_0 = \frac{1}{\eta}\oint_{C_2} (-\nabla_t \phi)\cdot \hat{n}\, dl = \frac{1}{\eta}\oint_{C_2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r}\right)\cdot \hat{n}\, dl = \frac{1}{\eta}\oint_{\varphi=0}^{2\pi} V_0 \frac{1}{\ln(c/b)\, b}\, \hat{r}\cdot\hat{r}\, b\, d\varphi =$$

$$= \frac{V_0 \cdot 2\pi}{\eta \ln(c/b)}$$

Finalmente $\boxed{Z_0 = \dfrac{V_0}{I_0} = \eta \dfrac{\ln(c/b)}{2\pi} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \dfrac{\ln(c/b)}{2\pi} = 20 \ln(c/b)}$ (Ω)

c) Si $Z_0 = 50\Omega \Rightarrow \ln(c/b) = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{(c/b) = e^{5/2}}$

d) Considerando una onda de tensión con amplitud de 10V tenemos que:

$$\boxed{V(z)} = V_0 e^{-\gamma z} = \boxed{10 \cdot e^{-\gamma z}} = \left\{\begin{array}{l}\text{Como el dieléctrico es} \\ \text{sin pérdidas y los conductores} \\ \text{perfectos:}\end{array}\right\} = 10 \cdot e^{-j\beta z} \ (V)$$

La onda de corriente es:

$$\boxed{I(z)} = I_0 e^{-\gamma z} = \frac{V_0 \cdot 2\pi}{\eta \ln(c/b)} e^{-\gamma z} = \frac{10 \cdot 2\pi}{\frac{\eta_0}{\sqrt{9}} \cdot \ln(c/b)} e^{-j\beta z} = \frac{10 \cdot e^{-j\beta z}}{20 \ln(c/b)} =$$

$\ln(c/b) = \frac{5}{2}$ para que $Z_0 = 50\Omega$

$$= \boxed{\frac{10}{20 \cdot 5/2} \cdot e^{-j\beta z}} = \boxed{\frac{1}{5} e^{-j\beta z}}$$

Así: $\boxed{W_T(z)} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(V(z) I^*(z)\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(10 e^{-j\beta z} \cdot \frac{1}{5} e^{+j\beta z}\right) = \boxed{1W}$

e) $f_0 = 1GHz$

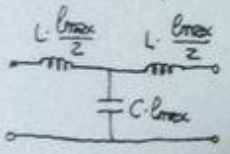
e1) Para que una longitud ℓ pueda ser representada mediante su circuito equivalente debe cumplirse que: $|\gamma_0 \cdot \ell| \ll 1$.

Considerando válida la primera aproximación debe ser: $|\gamma_0 \cdot \ell| \leq 0'1$, por tanto la longitud máxima será:

$$\boxed{\ell_{max}} = \frac{0'1}{|\gamma_0|} = \frac{0'1}{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot f_0} = 1'59 \cdot 10^{-3} m = \boxed{1'59 \ mm}$$

$$\boxed{\gamma_0} = j\omega_0\sqrt{\mu_0 9\varepsilon_0} = j 2\pi f_0 \cdot \sqrt{\mu_0 9 \cdot \varepsilon_0} = j\frac{2\pi 10^9 \sqrt{9}}{3 \cdot 10^8} = \boxed{j 20\pi} \ (m^{-1})$$

e2) Teniendo en cuenta que los conductores son perfectos y que el dieléctrico no tiene pérdidas ($\varepsilon_{r_z} = 9 \Rightarrow \varepsilon_{r_z}'' = 0$), el circuito equivalente es:



$$\boxed{L \cdot \frac{\ell_{max}}{2}} = \mu_0 \cdot K_g \frac{\ell_{max}}{2} = \mu_0 \frac{Z_0}{\eta} \cdot \frac{\ell_{max}}{2} = \mu_0 \cdot \frac{\ln(c/b)}{2\pi} \cdot \frac{\ell_{max}}{2} =$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\ln(c/b)}{2\pi} \cdot \frac{\ell_{max}}{2} = \boxed{1'59 \cdot 10^{-10} \cdot \ln(c/b)} \ (H) = \ldots\ldots\ldots \ (H)$$

$\ln(c/b) = \frac{5}{2}$

$$C \cdot \ell_{max} = \frac{9\varepsilon_0}{K_g} \cdot \ell_{max} = \frac{9 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}}{\frac{\ln(c/b)}{2\pi}} \cdot \ell_{max} = \frac{10^{-9}}{2 \cdot \ln(c/b)} \ell_{max} =$$

$$= \boxed{0'785 \cdot \frac{10^{-12}}{\ln(c/b)}} \ (F) = \ldots\ldots\ldots\ldots \ (F)$$

$\ln(c/b) = \frac{5}{2}$

f) Como el espesor $d-c \gg \delta$ se cumple la cond. de Leontovich

f1) $R = \frac{1}{\sigma\delta} \cdot k_j$

$$k_j = \frac{\oint_{C_0} |j_s|^2 \, dl}{\left| \oint_{C_0} j_s \cdot dl \right|^2}$$

Para obtener $\vec{j_s}$ calculamos primero $\vec{E}$ y $\vec{H}$:

$$\vec{E} = (-\nabla \phi) \cdot e^{-\gamma z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} \, e^{-\gamma z} = \frac{V_0}{\ln(c/b) \cdot r} \hat{r} \, e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}}{\eta} = \frac{V_0}{\eta \ln(c/b) \cdot r} \cdot \hat{\varphi} \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\vec{j_s}(r=c) = (-\hat{r}) \times \vec{H}(r=c) = (-\hat{z}) \cdot \frac{V_0}{\eta \ln(c/b) \, c} e^{-\gamma z} \quad (A/m)$$

Como $\vec{j_s}(r=c)$ no depende mas que de la coordenada z:

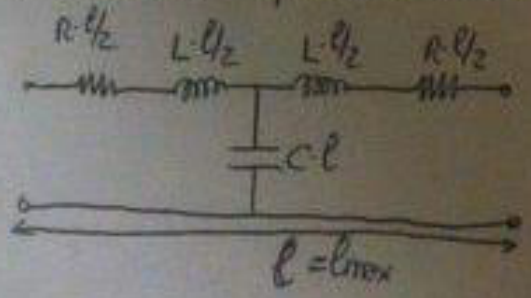
$$k_j = \frac{1}{\oint_{C_0} dl} = \frac{1}{\text{Perímetro}} = \frac{1}{2\pi c} \quad (m^{-1})$$

$\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m
$f = 10^9$ Hz

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma\delta} \cdot \frac{1}{2\pi c} \quad (\Omega/m)}$$ siendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ (m) $\Rightarrow$ $\boxed{R = \frac{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}{\sigma \, 2\pi c} = \frac{10}{\sqrt{\sigma} \cdot c}}$ (Ω/m)

f2) $\boxed{\alpha_c = \frac{R}{2 \, \mathrm{Re}(Z_0)}} = \left\{ \mathrm{Re}(Z_0) = 50\,\Omega \right\} = \frac{R}{100} = \boxed{\frac{1}{200\pi c \cdot \sigma\delta}}$ (Np/m) $= \boxed{\frac{1}{10\sqrt{\sigma} \cdot c}}$

f3) El nuevo cto. equivalente es el siguiente, ya que ahora hay pérdidas en los conductores.

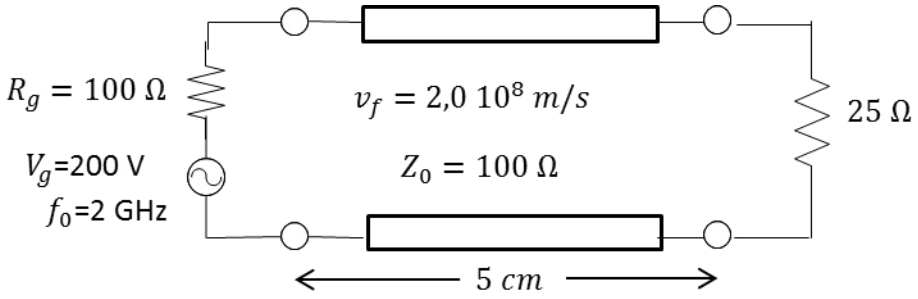


$$L = L_{ext} + L_{int} = \mu \cdot k_g + \frac{1}{\omega\sigma\delta} k_j \quad (H/m)$$

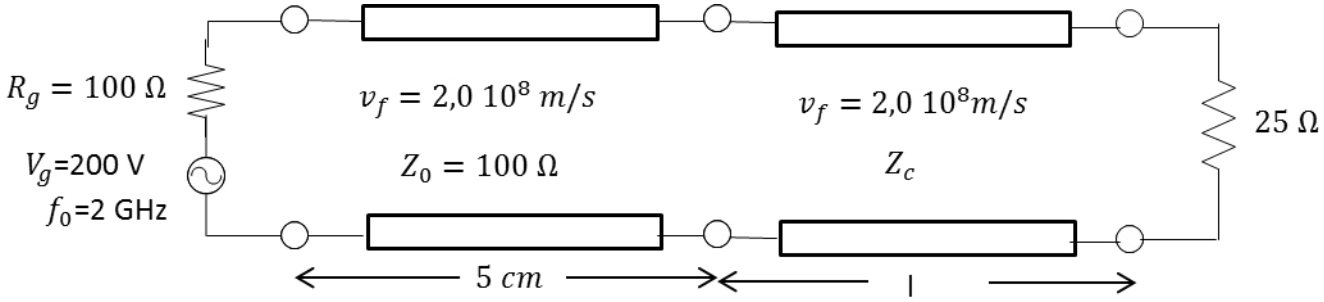
Ejercicio Propuesto 14

Un generador de tensión sinusoidal, frecuencia 2 GHz, amplitud máxima V_g= 200 V, y resistencia interna R_g = 100 Ω se conecta a una línea de transmisión sin pérdidas de longitud 5 cm, impedancia característica Z_0 = 100 Ω y velocidad de fase constante $v_f = 2 \cdot 10^8$ m/s, acabada en una resistencia de 25 Ω.

a) Determine la potencia disponible del generador y
b) la potencia entregada a la carga.



c) Determine la impedancia característica Z_C y la longitud mínima l de una línea de transmisión, también de velocidad de fase constante $v_f = 2 \cdot 10^8$ m/s, que debería introducirse entre la línea y la carga para eliminar la reflexión en la primera línea (línea de Z_0 = 100 Ω).

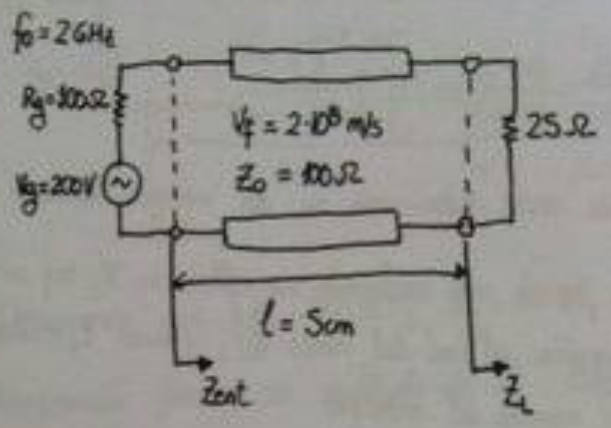


d) Calcule el coeficiente de onda estacionaria en cada una de las líneas y represente el diagrama de onda estacionaria en las mismas. Calcule el valor máximo de la tensión que puede alcanzarse en cada una de las dos líneas.

e) Si la frecuencia del generador fuese 4 GHz: ¿Cuánto valdrían los valores máximos de tensión en la primera línea y en la resistencia de terminación?

EJERCICIO PROPUESTO 14

(A)



COMENTARIO IMPORTANTE:

EN EL ENUNCIADO VIENE QUE LA VELOCIDAD DE FASE ES $V_f = 2\cdot10^8 m/s$ MIENTRAS QUE EN EL DIBUJO DE LA LÍNEA DE TRX. VIENE $V_f = 2'8\cdot10^8 cm/s$.

HEMOS REALIZADO EL EJERCICIO CON $V_f = 2\cdot10^8 m/s$.

a) La potencia disponible del generador es: $\boxed{P_{dg} = \frac{V_g^2}{8R_g} = \frac{(200)^2}{8\cdot100} = 50\ W}$

b) La potencia entregada a la carga, teniendo en cuenta que la línea de transmisión es sin pérdidas, viene dada por:

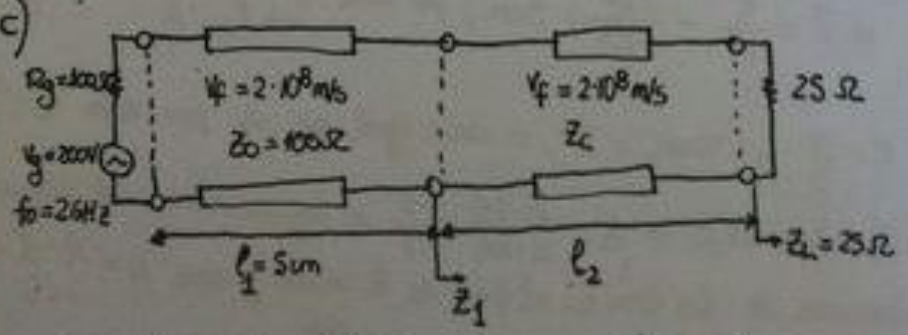
$$P_L = P_{dg}\left(1 - |\rho_{ent}|^2\right) \quad \text{siendo:} \quad \rho_{ent} = \frac{Z_{ent} - R_g}{Z_{ent} + R_g}$$

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L \cdot \cos(\beta\ell) + j Z_0 \cdot \operatorname{sen}(\beta\cdot\ell)}{Z_0 \cos(\beta\ell) + j Z_L \cdot \operatorname{sen}(\beta\ell)}$$

Como $V_f = 2\cdot10^8 m/s = \lambda\cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{2\cdot10^8}{2\cdot10^9} = 0'1\ m = 10cm \Rightarrow \ell = 5cm = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{Z_{ent} = Z_L}$

$$\rho_{ent} = \frac{Z_{ent} - R_g}{Z_{ent} + R_g} = \frac{25-100}{25+100} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \boxed{P_L = 50\left(1 - \frac{9}{25}\right) = 32\ W}$$

c)



Si hiciéramos $\operatorname{sen}(\beta\ell_2) = 0$ llegaríamos a $Z_1 = Z_L = 25 \neq 100$ NO VÁLIDO

Para eliminar la reflexión en la primera línea debe ser $Z_1 = 100(\Omega)$

Como $Z_1 = Z_c \cdot \frac{Z_L \cos(\beta\ell_2) + j Z_c \cdot \operatorname{sen}(\beta\ell_2)}{Z_c \cos(\beta\ell_2) + j Z_L \cdot \operatorname{sen}(\beta\ell_2)} = 100(\Omega) \Rightarrow$ Debe ser $\cos(\beta\cdot\ell_2) = 0$.

Si $\cos(\beta\ell_2) = 0$

$\rightarrow Z_1 = \frac{Z_c^2}{Z_L} \Rightarrow \boxed{Z_c = \sqrt{Z_L \cdot Z_1} = 50\ \Omega}$

$\rightarrow \beta\ell_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \ell_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \boxed{\ell_{min_2} = \frac{\lambda}{4} = \frac{V_f}{4\cdot f} = 2'5cm}$

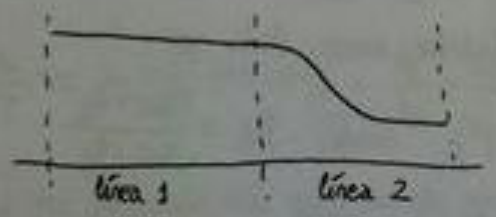
d) $\boxed{VSWR_2} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} = \left\{ \rho_L = \frac{25-50}{25+50} = \frac{-1}{3} \right\} = \frac{1+(1/3)}{1-(1/3)} = \boxed{2}$

$\boxed{VSWR_1} = \frac{1+|\rho_1|}{1-|\rho_1|} = \left\{ \rho_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{100-100}{100+100} = 0 \right\} = \boxed{1}$

Para representar el diagrama de onda estacionaria en los mismos sabemos que:

LÍNEA ②: $\rho_L = \frac{-1}{3}$ ⇒ Como la fase de este coeficiente de reflexión es π, hay un mínimo del diagrama al final del medio ②, y como $l_2 = l_{max_2} = \frac{\lambda}{4}$, habrá un máximo al principio.

LÍNEA ①: Como $\rho_1 = 0$ no hay onda estacionaria en la línea ① y por tanto el diagrama en ambas líneas es el indicado a continuación.



Como la impedancia característica de la línea 1 es $Z_0 = R_g = 100\ (\Omega)$, la tensión de la onda incidente en esta línea es: $V^+ = \frac{V_g}{2} = 100\ V$

Por tanto: $V_{MAX_1} = 100\ V$

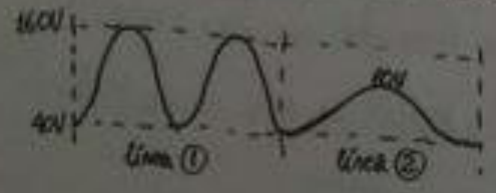
$V_{MAX_2} = 100\ V$

e) Si $f' = 4\,GHz$ ⇒ $\lambda' = \frac{v_f}{f'} = \frac{2 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^9} = 5\,cm$, por tanto: $l_2 = \frac{\lambda'}{2}$, $l_1 = \lambda'$

En este caso:

LÍNEA ②: $\rho_L' = \frac{-1}{3}$ y $VSWR_2' = 2$, es decir igual que antes pero ahora $l_2 = \frac{\lambda'}{2}$.

LÍNEA ①: $Z_1' = Z_L = 25\,\Omega$ ⇒ $\rho_1' = \frac{25-100}{25+100} = \frac{-3}{5}$ ⇒ Hay un mínimo del diagrama de onda estacionaria de la línea ① al final de la misma y como $l_1 = \lambda'$ el diagrama es:



$VSWR_1 = \frac{1+(3/5)}{1-(3/5)} = 4$

Como sigue siendo $V^+ = \frac{V_g}{2} = 100\ V$:

$\boxed{V_{M_1} = V^+(1+|\rho_1'|) = 100\left(1+\frac{3}{5}\right) = 160\ V}$

El mínimo del diagrama en la línea ① es: $V_{m_1} = \frac{V_{M_1}}{VSWR_1} = 40\,V$ y como $VSWR_2 = 2$, el máximo del diagrama de la línea ② es: $\boxed{V_{M_2} = 40 \cdot VSWR_2 = 80\,V}$ ∞ ooo, este valor no lo piden, solo piden V_{M_1} y V_R

Finalmente la tensión en la carga es $\boxed{V_R = 40\,V}$