simplyjarod.com

COTE

Apuntes de Crisser

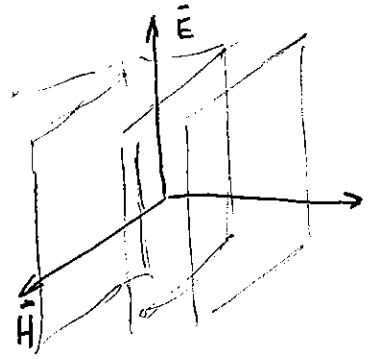
Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

TEMA 0: ONDAS PLANAS HOMOGENEAS MONOCROMATICAS

0. INTRODUCCIÓN



$\hat{n}$ = Dirección de propagación { de la onda / de la energía / del campo }

Una O.P. u onda TEM es aquella que no tiene componente de $\vec{E}$ ni de $\vec{H}$ en la dirección de propagación.

Mas adelante:
O.P.H.
O.P.H.M.

1. CARACTERIZACION DE LOS MEDIOS

los medios por los que se propagan las O.P.H.M se caracterizan por 3 parametros:

- σ = Conductividad del medio (S/m) ó $(\mho/m)$ ó (mho/m) ó $((\Omega \cdot m)^{-1})$
- μ = Permeabilidad o cte magnetica del medio (H/m)
- ε = Permitividad o cte dielectrica del medio (F/m)

1.1. MEDIOS SIN PERDIDAS

- $\sigma = 0$ (Medio dielectrico ó aislante)
- $\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \in \mathbb{R}$ < $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m); $\mu_r = 1$ (adimensional) (Si el medio es no magnético)
- $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ < $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m); $\varepsilon_r \geq 1$ (Siempre adimensional)

1.2. MEDIOS CON PERDIDAS

3 formas:

- $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq \infty$ Perdidas por efecto Joule o conductividad
- $\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = (\mu_r' - j\mu_r'')\mu_0 = \mu' - j\mu''$ (H/m) ≡ Perdidas magnéticas (No suelen caer)
- $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')\varepsilon_0 = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon'\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) = \left\{ \text{Si } \sigma = 0,\ tg\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right\} = \varepsilon'(1 - j\,tg\delta)$ (F/m)

$\varepsilon_r' \geq 1$ Siempre

Perdidas eléctricas.

2 PERMITIVIDAD ELECTRICA EQUIVALENTE (ε_{eq}) y TANGENTE DE PERDIDAS ($tg\,\delta$)

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right) \ (F/m) \quad \text{o} \quad (\text{No es la permitividad del medio:} \ \varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \ (F/m))$$

$$tg\,\delta = \frac{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon'} \ (\text{ADIMENSIONAL}) \quad \text{o}$$

Si el medio es dieléctrico ($\sigma = 0$)

$$tg\,\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

COMENTARIOS FINALES A LOS PUNTOS 1 y 2

- Si tenemos un medio sin perdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \left[\begin{array}{l} \text{Si } \mu_r = 1 \\ \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \ (\Omega) \end{array}\right] = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ (\Omega)$$

Impedancia intrínseca o característica del medio

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0} = \left\{\begin{array}{l} \text{Si } \mu_r = 1 \\ c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \ (m/s) \end{array}\right\} = j\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c_0} =$$

$$\gamma = \left[v = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right] = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi f}{v} = j\frac{2\pi}{\lambda} = jk = j\beta \ (m^{-1}) \equiv \text{CTE DE PROPAGACIÓN}$$

$\beta = k \ (rad/m)$ ó (m^{-1})

↳ CTE DE FASE.

- Si tenemos un medio dieléctrico ($\sigma = 0$) pero con bajas perdidas eléctricas ($tg\,\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1$)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' - j\varepsilon''}} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \ (\Omega)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} \approx \left\{\begin{array}{l} \beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \ (rad/m) \\ \alpha \simeq \frac{1}{2}\tan\delta \cdot \beta = \frac{1}{2} tg\,\delta\, \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \ (Np/m) \end{array}\right.$$

CTE DE ATENUACIÓN $1Np = 8'7\,dB$

- Si el medio es conductor o buen conductor ($\sigma \gg 1$) ($tg\,\delta = \frac{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \gg 1$)

$$\eta = \frac{1+j}{\sigma\delta} \ (\Omega) \equiv \text{Imp. característica de un conductor}$$

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta} \ (m^{-1}) = \text{CTE de propagación de un conductor} \quad \begin{array}{l} \nearrow \alpha = 1/\delta \ (Np/m) \\ \searrow \beta = 1/\delta \ (rad/m) \end{array}$$

OJO siendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ (metros) ≡ PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN

3. CARACT. DE LAS ONDAS

3.1 VALOR FASORIAL / FASOR / EXPRESIÓN COMPLEJA / EXPRESIÓN EN EL DOM. DE LA FRECUENCIA

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_c(\bar{r},\omega) = \bar{E}_c(\bar{r},f) = \bar{E}(\bar{r},\omega) = \dots$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \dots$$

Vamos a tener campos con variación armónica $e^{j\omega t}$

$$\boxed{\vec{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} \quad (V/m)}$$

siendo:

- $\bar{E}_0 = \bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i}$ (V/m) ≡ VECTOR COMPLEJO (Ejemplo: $\bar{E}_0 = 5\hat{x} + j3\hat{y}$)

  $|E_0|^2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \Rightarrow |\bar{E}_0| = \sqrt{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}$
- El signo "−" (menos)
- $\gamma = \alpha + j\beta$ (m^{-1}) ≡ CTE. DE PROPAGACIÓN
  - $\alpha \geq 0$ (CTE DE ATENUACIÓN) (Np/m)
  - $\beta > 0$ (CTE DE FASE) (rad/m)
- $\hat{n}$ ≡ Vector unitario en la dirección de propagación
- $\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ó $\vec{r}$ es el que quita los gorritos a $\hat{n}$

Ejemplo: ¿$\bar{E}(\bar{r})$?

$$\left.\begin{array}{l} \bar{E}_0 = 5\hat{x} - j3\hat{y} + 2\hat{z} \\ \gamma = 3 + j7 \\ \vec{n} = \dfrac{2\hat{x} - 5\hat{z}}{\sqrt{29}} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} = (5\hat{x} - j3\hat{y} + 2\hat{z}) \cdot e^{-(3+j7)\left(\frac{2x-5z}{\sqrt{29}}\right)} \quad (V/m)$$

3.2 VALOR INSTANTANEO $(\vec{E}(\bar{r},t)$ y $\bar{H}(\bar{r},t))$ ó (Suponemos variación armónica)

$$\vec{E}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\bar{r}) \cdot e^{j\omega t}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(\vec{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i}) \cdot e^{-\alpha\hat{n}\bar{r}} \cdot e^{j(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[(\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i})\, e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot \left[\cos(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) + j\,\mathrm{sen}(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right]\right] =$$

$$= \left[\vec{E}_{0r} \cdot \cos(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) - \bar{E}_{0i}\,\mathrm{sen}(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right] \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \quad (V/m).$$

COMENTARIO

- El valor instantáneo es real.

4. Relación entre $\bar{E}$ y $\bar{H}$.

- Si es una OPM o una OPHM

$$\bar{E}(\bar{r}) = \eta\,(\bar{H}(\bar{r}) \times \hat{n})$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{\hat{n} \times \bar{E}(\bar{r})}{\eta}$$

- Si no es OPH ó no lo sabemos debemos utilizar las ecs de Maxwell en el dominio de la frecuencia:

$$\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) = -j\omega\mu \cdot \bar{H}(\bar{r})$$

$$\Rightarrow \bar{H}(\bar{r}) = \frac{\nabla \times \bar{E}(\bar{r})}{-j\omega\mu}$$

$$\nabla \times \bar{H}(\bar{r}) = j\omega\,\varepsilon_{eq}\,\bar{E}(\bar{r}) \Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = \frac{\nabla \times \bar{H}(\bar{r})}{j\omega\varepsilon_{eq}}$$

Comprobación de OP (onda TEM) / OPM / OPHM:

- Es OP u onda TEM

$$\bar{E}\cdot\hat{n} = 0 \quad y \quad \bar{H}\cdot\hat{n} = 0 \quad o \quad \left(\bar{E}_0\cdot\hat{n} = 0,\ H_0\cdot\hat{n} = 0\right)$$

- Es homogenea si $\bar{E}_0$ y $\bar{H}_0$ no dependen de las coordenadas de cada pto pero pueden depender de f
- Además es monocromática si $\bar{E}_0$ y $\bar{H}_0$ no dependen de f o (OPHM ($\bar{E}_0$ y $\bar{H}_0$) n^{o} $\hat{r}, j, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)

Ejercicio ¿Cual de los siguientes expresiones es una OP, OPH y/o, OPHM?

$$\vec{E}_1 = E_0\,(x\hat{x} + j\hat{y}f)\,e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}_2 = E_0\,(\hat{x} + j\hat{y}\sqrt{f})\,e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}_3 = E_0\,(\hat{x} + j\hat{y})\cdot e^{-j\beta z}$$

Solución: Observamos que $\hat{n} = \hat{z}$ en los tres campos

Además $\bar{E}\cdot\hat{n}$ en los tres. Los 3 pueden ser OP u onda TEM

Observamos que $\bar{E}_1$ no es homogenea porque $\bar{E}_{0_1}$ depende de x.

Finalmente $\bar{E}_2$ no es monocromatico ya que $\bar{E}_{0_2}$ depende de f.

$\bar{E}_1 \rightarrow$ OP

$\bar{E}_2 \rightarrow$ OP / OPH

$\bar{E}_3 \rightarrow$ OP / OPH / OPHM

5. VECTOR DE POYNTING Y DENSIDAD DE POTENCIA TRX:

Hay 3 vectores de Poynting

- $\bar{S}(\bar{r},t) = \bar{E}(\bar{r},t) \times \bar{H}(\bar{r},t)$ (W/m^2) = Vector de Poynting instantaneo que marca la densidad de potencia instantánea transmitida por la onda.

Importante

- $\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle$ = [Suponiendo campos armónicos] $= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\bar{E}_c(\bar{r}) \times \bar{H}_c^*(\bar{r})\right]$ (W/m^2) ≡ Valor medio del vector de Poynting que marca la densidad de potencia media transmitida por la onda.
  - ↳ Siempre tiene la dirección de $\hat{n}$
  - $\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle = W_t \cdot \hat{n}$ (W/m^2)

- $\bar{S}(\bar{r}) = \bar{E}_c(\bar{r}) \times \bar{H}_c^*(\bar{r})$ ≡ Vector de Poynting complejo

COMENTARIOS DEL $\langle \vec{S}(\bar{r},t) \rangle$:

- Expresiones más desarrolladas de $\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle$:

$$\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\bar{E}_c(\bar{r}) \times \bar{H}_c^*(\bar{r})\right] = \frac{1}{2} \bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^* \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\eta^*}\right) e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot \hat{n} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \bar{H}_0 \cdot \bar{H}_0^* \cdot \mathrm{Re}(\eta)\, e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot \hat{n} = \left[\begin{array}{c}\text{Si el medio no tiene perdidas} \\ \alpha = 0 \\ \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}\end{array}\right] = \frac{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}{2\eta} \hat{n} =$$

$$= \frac{1}{2} \eta\, \bar{H}_0 \cdot \bar{H}_0^* \cdot \hat{n} = \frac{|\bar{E}_0|^2}{2\eta} \hat{n} = \frac{1}{2} \eta\, |\bar{H}_0|^2 \hat{n}$$

- Para obtener la potencia media atraviesa una sup. S:

$$\langle P \rangle = \iint_S \langle \bar{S} \rangle \, d\vec{S}$$

Ejercicio Dado $\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle = \frac{-S}{\eta_0} (\hat{x} - \hat{y})$ (W/m^2) obtener $\hat{n}$ y W_t

$$W_t = \left| \langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle \right| = \frac{S}{\eta_0} \cdot \sqrt{2}$$

$$\hat{n} = \frac{\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle}{|\langle \bar{S}(\bar{r},t) \rangle|} = \frac{-\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

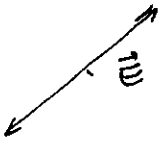
6. Polarización de la onda

$$\vec{E}_c(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{\gamma \hat{n}\cdot\bar{r}} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i}) = e^{-\gamma \hat{n}\cdot\bar{r}}$$

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \left[\bar{E}_{0r}\cdot\cos(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) - \bar{E}_{0i}\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right]\cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

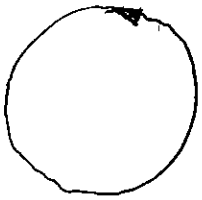
Tres tipos de polarización:

- Lineal: la onda conserva la misma orientación a medida que se propaga



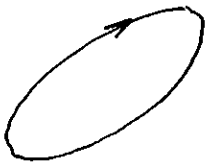
Matemáticamente $\begin{cases} |\bar{E}_{0r}| = 0 \\ \text{ó} \\ |\bar{E}_{0i}| = 0 \\ \text{ó} \\ \bar{E}_{0r} \parallel \bar{E}_{0i} \end{cases}$ o $\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r} = \bar{0}$

- Circular: la onda gira a medida que se propaga describiendo una circunferencia



Matemáticamente $\begin{cases} |\bar{E}_{0r}| = |\bar{E}_{0i}| \\ \text{y} \\ \bar{E}_{0r} \perp \bar{E}_{0i} \end{cases}$ o $\bar{E}_{0r}\cdot\bar{E}_{0i} = \bar{0}$

- Elíptica: Como la circular pero describiendo una elipse.



Matemáticamente {el resto de casos}

Comentarios

- Para circular y elíptica hay que dar el sentido de giro

$$(\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r})\cdot\hat{n} = \begin{cases} >0 & \text{positiva o a derechas, dextrógira} \\ <0 & \text{negativa o a izquierdas, levógira} \end{cases}$$

- Además se define la relación axial como

$$RA = AR = r = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{H_{max}}{H_{min}} \rightarrow \begin{cases} \text{LINEAL} & RA = \infty \\ \text{CIRCULAR} & RA = \dfrac{E_{max}}{E_{min}} \simeq 1 \text{ ya que } E_{max} = E_{min} \end{cases}$$

- Elíptica $\begin{cases} \text{si } \bar{E}_{0r} \perp \bar{E}_{0i} \Rightarrow RA = \dfrac{\max(|\bar{E}_{0i}|,|\bar{E}_{0r}|)}{\min(|\bar{E}_{0i}|,|\bar{E}_{0r}|)} \in (1,\infty) \\ \text{si } \bar{E}_{0r} \text{ no} \perp \bar{E}_{0i} \Rightarrow tg(2\psi) = \dfrac{2\cdot\bar{E}_{0i}\cdot\bar{E}_{0r}}{\bar{E}_{0r}\cdot\bar{E}_{0r} - \bar{E}_{0i}\cdot\bar{E}_{0i}} \Rightarrow \vec{b} = E_0\cdot e^{j\psi} = b_1 + jb_2 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow RA = \dfrac{|b_1|}{|b_2|} \end{cases}$

7. ORTOGONALIDAD:

$\bar{E}$ y $\bar{H}$ si cumplen el principio de superposición:

$$\vec{E}_{TOT} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$$
$$\bar{H}_{TOT} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2$$

Pero la potencia o densidad de potencia cumple:

$$\vec{W}_{t_{TOT}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}_{TOT} \times H_{TOT}^{*}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[(\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \times (\bar{H}_1 + \bar{H}_2)^{*}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\bar{E}_1 \times \bar{H}_1^{*}\right] + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}_2 \times \bar{H}_2^{*}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^{*}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}_2 \times \bar{H}_1^{*}\right) =$$
$$= \vec{W}_{t_1} + \vec{W}_{t_2} + \vec{W}_{CRUCES}$$

Se dice que dos ondas son ortogonales si $\vec{W}_{CRUCES} = 0$

Además sabemos que:

* Si ambas tienen polarización lineal y son perpendiculares $\longrightarrow$ Son ORTOGONALES
* Si ambas tienen polarización circular, una a derechas y otra a izquierdas.

El resto de casos $\longrightarrow$??

8. V_f y V_g en las O.P.H.M

$$V_f = \frac{\omega}{\beta}\ (m/s) \equiv \text{Veloc. de fase}$$ (No tiene sentido físico)

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}_{(m/s)} = \text{Veloc. de grupo ó de PROPAGACIÓN DE LA ONDA.}$$

Para medios dieléctricos ($\sigma = 0$) o buenos dieléctricos:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad \beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

$$V_f \approx V_g \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r'\varepsilon_0}} = \frac{3\cdot10^8}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r'}} = \frac{3\cdot10^8}{n}\ (m/s) \longrightarrow n = \text{Índice de refracción del medio}$$

PROBLEMAS TEMA 0

1) Caracterizar la onda cuyo fasor de campo eléctrico vale: $\vec{E} = [\ \hat{x}-\hat{y}+(1-2j)\hat{z}\ ]e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$

---

2) Caracterizar la onda cuyo fasor de campo eléctrico vale: $\vec{E} = [\ (2-j)\hat{x}-(2-j)\hat{y}\ ]e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$

---

3) Dado el fasor campo eléctrico:

$$\vec{E} = [\ (-\sqrt{3}-\frac{j}{2})\hat{x}+(1-j\frac{\sqrt{3}}{2})\hat{y}+j\sqrt{3}\hat{z}\ ]e^{-j0.02\pi(\sqrt{3}x+3y+2z)}$$

con x, y y z en metros, calcular, suponiendo que el medio es el vacío:

a) dirección y sentido de propagación,
b) longitud de onda y frecuencia,
c) polarización del campo,
d) el fasor del campo magnético.

---

4) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 1$ GHz que se propaga por un medio de permeabilidad $\mu = \mu_0$, viene dada por la expresión:

$$\vec{E} = \left[\ -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x}-4(1+2j)\hat{y}+(\sqrt{3}+j\sqrt{12})\hat{z}\ \right]e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}$$

a) Determine cuál es la dirección de propagación.
b) Determine la permitividad del medio.
c) Justifique que es una onda plana.
d) Determine el tipo de polarización.

---

5) Escriba la amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana que se propaga en el vacío según la dirección $\hat{z}$, tiene una amplitud máxima E_1, una relación axial R_1 y polarización positiva, tomando el semieje mayor de la elipse de polarización como eje y. Calcule la potencia transmitida por esta onda.

Repita los cálculos para otra onda con la misma dirección de propagación, amplitud máxima E_2, relación axial R_2 y polarización negativa tomando el semieje mayor de la elipse de polarización como eje x.

Calcule la potencia de la onda superposición de estas dos y compruebe bajo que condiciones esta potencia es la suma de las potencias de cada una de ellas.

Compruebe lo que sucede con la potencia si la polarización de la segunda onda se hace positiva.

6) Escribir la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea con polarización elíptica negativa sabiendo que:

a) viaja en el vacío según una dirección que tomamos como eje z,
b) la relación entre el valor máximo y mínimo del campo es N,
c) la dirección según la cual se mide el máximo valor del campo se toma como eje y,
d) el valor medio de la densidad de potencia que lleva la onda es P_0 (W).

---

7) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en un medio sin pérdidas, de permitividad y permeabilidad relativas $\varepsilon_r = 2$ y $\mu_r = 1$, está dada por

$$\vec{E} = (1+j)\ (\hat{y}+\hat{z})\ e^{j20\pi(y-z)}$$

se pide:
a) La dirección de propagación
b) La frecuencia.
c) Comprobar que dicho campo representa una onda plana.
d) El tipo de polarización.
e) La potencia transmitida.

---

8) Considerénse dos ondas planas homogéneas monocromáticas de frecuencia 3 GHz, que se propagan en un medio de permeabilidad μ_0. La expresión de los campos eléctricos de dichas ondas en el dominio del tiempo es:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_0\ \cos(\omega_0 t - 40\pi x)\ e^{-0.1x}\ \hat{y} \quad (V/m)$$

$$\vec{E}_2(x,t) = 2E_0 \cos(\omega_0 t - 40\pi x - \frac{\pi}{2})\ e^{-0.1x}\ \hat{z} \quad (V/m)$$

se pide:
a) la constante dieléctrica del medio. ¿Cómo puede calificarse dicho medio?,
b) la amplitud compleja del campo eléctrico superposición de ambas ondas,
c) polarización de la onda superposición, y relación axial,
d) amplitud compleja del campo magnético para la superposición de las dos ondas,
e) valor medio de la densidad de potencia transmitida por la onda superposición en $x = 1$ m, suponiendo que $E_0 = 1$ V/m.

---

9) Una onda plana homogénea monocromática polarizada a izquierdas (polarización negativa) tiene un campo eléctrico dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\hat{x}+2\hat{y})\ \cos(2000\pi t - 20\pi z) - A\hat{x}sen(2000\pi t - 20\pi z) \quad (V/m)$$

(con t en μs). Sabiendo que se propaga en un medio de permeabilidad μ_0 y que la potencia transmitida vale $W_t = 27/(240\ \pi)$ W, determinar:
a) La frecuencia.
b) La permitividad del medio.
c) El valor de la constante A.

6) Escribir la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea con polarización elíptica negativa sabiendo que:

a) viaja en el vacío según una dirección que tomamos como eje z,
b) la relación entre el valor máximo y mínimo del campo es N,
c) la dirección según la cual se mide el máximo valor del campo se toma como eje y,
d) el valor medio de la densidad de potencia que lleva la onda es P_0 (W).

---

7) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en un medio sin pérdidas, de permitividad y permeabilidad relativas $\varepsilon_r = 2$ y $\mu_r = 1$, está dada por

$$\vec{E} = (1+j)\ (\hat{y}+\hat{z})\ e^{j20\pi(y-z)}$$

se pide:
a) La dirección de propagación
b) La frecuencia.
c) Comprobar que dicho campo representa una onda plana.
d) El tipo de polarización.
e) La potencia transmitida.

---

8) Considerénse dos ondas planas homogéneas monocromáticas de frecuencia 3 GHz, que se propagan en un medio de permeabilidad μ_0. La expresión de los campos eléctricos de dichas ondas en el dominio del tiempo es:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_0\ \cos(\omega_0 t - 40\pi x)\ e^{-0.1x}\ \hat{y} \quad (V/m)$$

$$\vec{E}_2(x,t) = 2E_0 \cos(\omega_0 t - 40\pi x - \frac{\pi}{2})\ e^{-0.1x}\ \hat{z} \quad (V/m)$$

se pide:
a) la constante dieléctrica del medio. ¿Cómo puede calificarse dicho medio?,
b) la amplitud compleja del campo eléctrico superposición de ambas ondas,
c) polarización de la onda superposición, y relación axial,
d) amplitud compleja del campo magnético para la superposición de las dos ondas,
e) valor medio de la densidad de potencia transmitida por la onda superposición en $x = 1$ m, suponiendo que $E_0 = 1$ V/m.

---

9) Una onda plana homogénea monocromática polarizada a izquierdas (polarización negativa) tiene un campo eléctrico dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\hat{x}+2\hat{y})\ \cos(2000\pi t - 20\pi z) - A\hat{x}sen(2000\pi t - 20\pi z) \quad (V/m)$$

(con t en μs). Sabiendo que se propaga en un medio de permeabilidad μ_0 y que la potencia transmitida vale $W_t = 27/(240\ \pi)$ W, determinar:
a) La frecuencia.
b) La permitividad del medio.
c) El valor de la constante A.

10) Una onda plana homogénea de frecuencia $3/\sqrt{2}$ GHz y linealmente polarizada en dirección x tiene un campo eléctrico de amplitud E_0 y se propaga en el espacio libre en dirección z. Escriba la expresión de su campo eléctrico en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo.

Descomponga la onda en la superposición de dos circularmente polarizadas en sentidos contrarios. Escriba la expresión del campo eléctrico de cada una de las componentes, indicando cuál es el signo de su polarización.

---

11) El vector de amplitud compleja de campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en el vacío viene dado por $\vec{E} = [\hat{x} + jA\hat{y} - 2\hat{z}]e^{-j20\pi(2x+z)}$, donde A es real. Se pide: a) La frecuencia y la dirección de propagación de dicha onda plana.
b) Valor de A para que la onda esté polarizada circularmente a derechas (positiva).

---

12) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en un medio de permitividad $3\varepsilon_0$, con polarización elíptica, relación axial 2, campo magnético máximo en dirección $\hat{x}$, y que transmite una potencia de $\sqrt{3}/(48\pi)$ W, está dada por:

$$\vec{E} = (a\hat{z} + b\hat{y} + jc\hat{x})e^{-j0.4\pi(3y-\sqrt{3}z)} \ (V/m)$$

donde z e y están en metros, y las constantes a, b y c son reales y positivas. Se pide determinar:

a) La dirección de propagación.
b) La frecuencia de trabajo.
c) Los valores de las constantes a, b y c, así como el sentido de giro.

---

13) Sabiendo que el campo máximo de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en dirección z es de valor E_0 (V/m), escriba la expresión del fasor del campo eléctrico, en los siguientes casos:

a) Polarización lineal en la dirección del eje x.

b) Polarización circular a derechas.

¿Cuál de las dos ondas transmite mayor densidad de potencia?

---

14) Escriba la expresión del fasor campo eléctrico de una onda plana homogénea que se propaga en dirección z, y transmite una potencia de P_0 (W), para los dos casos siguientes:

a) Polarización lineal en la dirección del eje y.
b) Polarización circular a izquierdas.

¿Cuánto vale el valor máximo del campo eléctrico para cada una de las dos polarizaciones?

15) Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 3 GHz, elípticamente polarizada a derechas, con semieje mayor de la elipse en dirección x, y de doble amplitud que el semieje menor, transmite una potencia de W_o (W) en dirección $\hat{z}$.

a) Escriba el vector campo eléctrico de dicha onda en el dominio de la frecuencia y del tiempo.
b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que puede tener el campo eléctrico en cualquier instante de tiempo?

---

16) Escriba la amplitud compleja del campo magnético de una onda plana homogénea monocromática, de frecuencia f_0, que se propaga en dirección $\hat{z}$ por un medio de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 3$, cuyo campo magnético tiene polarización lineal en dirección $\hat{x}$, y que transmite W_0 (W).

A esta onda se le superpone otra, con su misma dirección de propagación y también con polarización lineal, pero con el campo eléctrico en dirección $\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}$, y con una amplitud $\frac{1+j}{\sqrt{2}}$ veces la de la onda anterior. ¿Cuál es la polarización de la onda superposición? ¿Cuál es su relación axial? ¿Qué potencia transmitirá la onda superposición (exprese el valor en función de W_0)?

---

17) Escriba el campo eléctrico de una onda plana homogénea de frecuencia 3 GHz con polarización elíptica positiva, relación axial 2, amplitud máxima 1 V/m y que se propaga en dirección $\hat{z}$ en el vacío. Determine el valor de la potencia transmitida por dicha onda. Escriba ahora el campo eléctrico de otra onda plana homogénea de la misma frecuencia que la anterior, con polarización circular positiva, y amplitud máxima 1 V/m que se propaga en dirección $-\hat{z}$ en el vacío. ¿Qué potencia transmite esta onda?

¿Podría asegurar que las ondas anteriores son ortogonales? ¿Qué pasos daría para justificar la respuesta anterior? Descríbalos, pero no los realice.

---

18) Una onda plana homogénea monocromática está generada por un emisor cuya frecuencia f_0 puede variarse. El campo eléctrico está dado, en el dominio de la frecuencia, por

$$\left[2\hat{x} + 2jf_0\hat{y} - (1 - jf_0)\hat{z}\right]e^{-jf_0\frac{\pi}{150}\sqrt{3-j0.1}(x-y+2z)}$$

donde f_0 está en MHz. Se pide:

a) Calcular su dirección de propagación.
b) Demostrar que se trata de una onda plana.
c) Calcular la permitividad del medio por el que se propaga.
d) Determinar el tipo de polarización y, en su caso, el signo, según sea el valor de f_0.
e) Calcular la potencia transmitida.

15) Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 3 GHz, elípticamente polarizada a derechas, con semieje mayor de la elipse en dirección x, y de doble amplitud que el semieje menor, transmite una potencia de W_o (W) en dirección $\hat{z}$.

a) Escriba el vector campo eléctrico de dicha onda en el dominio de la frecuencia y del tiempo.
b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que puede tener el campo eléctrico en cualquier instante de tiempo?

---

16) Escriba la amplitud compleja del campo magnético de una onda plana homogénea monocromática, de frecuencia f_0, que se propaga en dirección $\hat{z}$ por un medio de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 3$, cuyo campo magnético tiene polarización lineal en dirección $\hat{x}$, y que transmite W_0 (W).

A esta onda se le superpone otra, con su misma dirección de propagación y también con polarización lineal, pero con el campo eléctrico en dirección $\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}$, y con una amplitud $\frac{1+j}{\sqrt{2}}$ veces la de la onda anterior. ¿Cuál es la polarización de la onda superposición? ¿Cuál es su relación axial? ¿Qué potencia transmitirá la onda superposición (exprese el valor en función de W_0)?

---

17) Escriba el campo eléctrico de una onda plana homogénea de frecuencia 3 GHz con polarización elíptica positiva, relación axial 2, amplitud máxima 1 V/m y que se propaga en dirección $\hat{z}$ en el vacío. Determine el valor de la potencia transmitida por dicha onda. Escriba ahora el campo eléctrico de otra onda plana homogénea de la misma frecuencia que la anterior, con polarización circular positiva, y amplitud máxima 1 V/m que se propaga en dirección $-\hat{z}$ en el vacío. ¿Qué potencia transmite esta onda?

¿Podría asegurar que las ondas anteriores son ortogonales? ¿Qué pasos daría para justificar la respuesta anterior? Descríbalos, pero no los realice.

---

18) Una onda plana homogénea monocromática está generada por un emisor cuya frecuencia f_0 puede variarse. El campo eléctrico está dado, en el dominio de la frecuencia, por

$$\left[2\hat{x} + 2jf_0\hat{y} - (1 - jf_0)\hat{z}\right]e^{-jf_0\frac{\pi}{150}\sqrt{3-j0.1}(x-y+2z)}$$

donde f_0 está en MHz. Se pide:

a) Calcular su dirección de propagación.
b) Demostrar que se trata de una onda plana.
c) Calcular la permitividad del medio por el que se propaga.
d) Determinar el tipo de polarización y, en su caso, el signo, según sea el valor de f_0.
e) Calcular la potencia transmitida.

19) Escriba la amplitud compleja de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$, que tiene polarización elíptica positiva con relación axial r y que transmite una potencia de $1/(120\pi)$ W, sabiendo que la dirección del semieje mayor de la elipse de polarización forma un ángulo α con el eje x. Escriba la expresión del campo magnético de la onda. Calcule los valores máximo y mínimo del campo eléctrico.

Determine, a partir del resultado obtenido en el apartado anterior, qué valor de relación axial r minimiza el campo eléctrico máximo. ¿A qué tipo de polarización corresponde dicha relación axial?

---

20) Una onda plana homogénea monocromática se propaga en el vacío en la dirección $\hat{z}$ y está linealmente polarizada, con el campo eléctrico formando un ángulo φ_0 con el eje x. Escriba la expresión de dicho campo en el dominio de la frecuencia y en el del tiempo.

Suponga que no se conoce el valor de φ_0 ni tampoco el campo eléctrico máximo. Para determinar tales características de la onda de dispone de una antena capaz de detectar únicamente la componente $\hat{y}$ del campo eléctrico y que suministra a su salida una tensión proporcional a la amplitud de dicha componente con una constante de proporcionalidad K, que supondremos conocida. Demuestre que, en esas condiciones, no es posible determinar ni el campo máximo de la onda incidente ni la dirección de su polarización.

Demuestre que la determinación de tales parámetros es posible si se utiliza además otra antena idéntica a la anterior, pero girada 90° respecto a ella. Indique en tales condiciones qué medidas es necesario efectuar y qué cálculos han de realizarse con ellas.

¿A la vista de los resultados anteriores se le ocurre algún método de modulación que permitiese transmitir información sin modificar ni la amplitud ni la frecuencia del generador que produce la onda?

---

21) Dada la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E} = (E_1\hat{x} + E_2\hat{y} + jE_3\hat{z})e^{-j\frac{20\pi}{3}(2x+y+2z)}$$

siendo E_1, E_2 y E_3 constantes reales, determine sus valores para que la expresión pueda representar el campo de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 3 GHz, que se propaga en el vacío y que transmite una potencia de $5/(240\ \pi)$ W.

¿Cuál es su polarización? ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo del campo magnético de dicha onda?

PROBLEMAS TEMA 0:

Bloque 1: identificar

③ $$E = \left[\left(-\sqrt{3} - j/2\right)\hat{x} + \left(1 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{y} + j\sqrt{3}\,\hat{z}\right] \cdot e^{-j\cdot 0'02\pi\left(\sqrt{3}x + 3y + 2z\right)}$$

- Se identifica el signo
- Poner gomitas a las coordenadas
- Hacer unitario

a) ¿$\hat{n}$?

En general el fasor de $\bar{E}$ es:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma\,\hat{n}\cdot\bar{r}} = \left(\vec{E}_{0r} + j\,\vec{E}_{0i}\right) \cdot e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

$$e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} = e^{-j\,0'02\pi\left(\sqrt{3}x + 3y + 2z\right)} \Longrightarrow \hat{n} = \frac{\sqrt{3}\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}}{4}$$

b) ¿λ y f_0?

Identificado: $\boxed{\alpha = 0}$ (Np/m).

$$\beta = 0'02\cdot\pi\cdot 4\ (\text{rad/m}) = \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f_0}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

Vacío $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 25\ \text{cm} \\ \hline f_0 = 12\ \text{MHz} \end{array}}$$

c) $\bar{E}_{0r} = -\sqrt{3}\,\hat{x} + \hat{y} \longrightarrow |\vec{E}_{0r}| = 2\ (\text{V/m})$

$\bar{E}_{0i} = -\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \sqrt{3}\,\hat{z} \Longrightarrow |\bar{E}_{0i}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 3} = 2\ (\text{V/m})$

$$\bar{E}_{0r}\cdot\bar{E}_{0i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 0$$

Como $\bar{E}_{0r} \perp \bar{E}_{0i}$ y $|\bar{E}_{0r}| = |\bar{E}_{0i}| \Longrightarrow$ Polarización circular

COMENTARIO: Sentido de giro

$$\left(\bar{E}_{0i} \times \bar{E}_{0r}\right)\cdot\hat{n} = \left(-\frac{1}{2}\hat{z} - \frac{3}{2}\hat{z} - 3\hat{y} - \sqrt{3}\,\hat{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\,\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}}{4}\right)$$

$$= \frac{-4-9-3}{4} < 0 \Longrightarrow \text{Negativa o a izquierdas.}$$

d) Observamos que $\bar{E}\cdot\hat{n} = \bar{E}_0\cdot\hat{n} = \dots = 0$

Como además E_0 es constante o $\mathcal{C}$ n^o $j, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

la onda es O.P.H.M.

$$\bar{H} = \frac{\hat{n}\times\bar{E}}{\eta} = \dots = \dots \qquad \eta = \eta_0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{4\eta_0}\cdot\left[\left(-2 + j4\sqrt{3}\right)\hat{x} + \left(-2\sqrt{3} - j4\right)\hat{y} + 4\sqrt{3}\,\hat{z}\right]\cdot e^{-j\,0'02\pi\left(\sqrt{3}x + 3y + 2z\right)}\ (\text{A/m})$$

(4) $\bar{E} = \left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+j\right)\hat{x} - 4\,(1+2j)\,\hat{y} + \left(\sqrt{3}+j\sqrt{12}\right)\hat{z}\right]\cdot e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}$

OPH.H

$f_0 = 16\,Hz$

$\mu = \mu_0$

$(\sigma = 0)$

a) ¿$\hat{n}$?

En general: $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} = (\bar{E}_{0r} + j\,\bar{E}_{0i})\, e^{-(\alpha+j\beta)(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

Identificando: $e^{-(\alpha+j\beta)(\hat{n}\cdot\bar{r})} = e^{-(2x-\sqrt{3}y-3z)(1+j40)}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{2\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y} - 3\hat{z}}{4}}$$

b) ¿$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$?

Dos de tres: f_0, $\gamma = \alpha + j\beta$, MEDIO $\left\langle \begin{matrix} \mu_0 \\ \varepsilon_0 \\ \sigma \end{matrix}\right.$

Identificando: $\gamma = \alpha + j\beta = (1+j40)\cdot 4 = 4 + j160 = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} =$

$= j\,\frac{2\pi f_0}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r} = j\,20\pi\sqrt{\varepsilon_r}$

$\underline{\varepsilon_r = 56'5 - j\,2'91}$ (adim) $\Rightarrow$ $\underline{\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = 5\cdot 10^{-10} - j\,2'54\cdot 10^{-11}}$ (F/m)

$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$

Se trata de un medio de bajas perdidas eléctricas $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$

c) Debe ser $\bar{E}\cdot\hat{n} = 0$ y $\bar{H}\cdot\hat{n} = 0$

$\bar{E}_0\cdot\hat{n} = \dots = \frac{0+j0}{4} = 0$ $\qquad \bar{H} = \frac{\hat{n}\times\bar{E}}{\eta} = \dots =$

Finalmente:

$\bar{H}_0\cdot\hat{n} = \dots = 0 + j0 = 0$

d) $\bar{E}_{0r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - 4\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}$

$\bar{E}_{0i} = -\sqrt{3}\hat{x} - 8\hat{y} + \sqrt{12}\hat{z}$

Como $\bar{E}_{0i} = 2\bar{E}_{0r}$ son paralelos y por tanto la polarización es LINEAL

⑦ $\bar{E} = (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\cdot e^{j20\pi(y-z)}$

$\hat{n} = \dfrac{-\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$

OPHM

Medio sin perdidas

$\varepsilon_r = 2$

$\mu_r = 1$

a) ¿$\hat{n}$? En general: $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma\cdot\hat{n}\cdot\bar{r}} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i})\cdot e^{-j\beta\hat{n}\bar{r}} \cdot e^{-\alpha\hat{n}\cdot\bar{r}}$

Identificando: $\alpha = 0 \Rightarrow e^{j20\pi(y-z)} = e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \hat{n} = \frac{\hat{z}-\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

b) Identificando $\alpha = 0$ $\quad \beta = 20\pi\cdot\sqrt{2} = \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega_0\sqrt{\mu_0 2\varepsilon_0} =$

$= \dfrac{2\pi f_0}{c_0} \Rightarrow f_0 = 3\cdot 10^9\ Hz$

c) Debe ser $\bar{E}\cdot\hat{n} = 0$ y $\bar{H}\cdot\hat{n} = 0$

$$E_0\cdot\hat{n} = (1+j)(\hat{y}+\hat{z})\cdot\left(\frac{\hat{z}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}(-1+1) = 0$$

$$\bar{H} = \frac{\hat{n}\times E}{\eta} = \frac{\left(\frac{\hat{z}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)\times(1+j)(\hat{y}+\hat{z})\,e^{j20\pi(y-z)}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{2\varepsilon_0}}} = \frac{\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\right)}\cdot(-\hat{x}-\hat{x})\cdot e^{j20\pi(y-z)}$$

$$= \frac{1+j}{60\pi}\cdot(-\hat{x})\cdot e^{j20\pi(y-z)} \quad (A/m)$$

Finalmente $\bar{H}_0\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow$ Es O.P.

d) $\vec{E_{0r}} = \hat{y}+\hat{z} = \bar{E}_{0i} \Rightarrow$ Como son // la polarización es lineal.

e) $$W_t = \left|\langle\bar{S}(\bar{r},t)\rangle\right| = \frac{|\bar{E}|^2}{2\eta} = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2\cdot\sqrt{\frac{\mu_0}{2\varepsilon_0}}} = \frac{(1+j)(\hat{y}+\hat{z})(1-j)(\hat{y}+\hat{z})}{2\,\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}} =$$

Medio sin perdidas

$$= \frac{2\cdot 2}{2\cdot\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{60\pi}\ (W)$$

En realidad son W/m^2

(12)

OPHM $3\varepsilon_0$ μ_0 $\sigma=0$

Polarización elíptica $RA=2$ $H_{máx}$ en $\hat{x}$

$$W_t = \frac{\sqrt{3}}{48\pi}\,(W) \qquad \bar{E} = (a\hat{z} + b\hat{y} + jc\hat{x})\cdot e^{-j0'4\pi(3y-\sqrt{3}z)} \quad (V/m)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$

a) ¿$\hat{n}$?

En general: $\vec{E} = \vec{E_0}\cdot e^{-\gamma\hat{n}\cdot\vec{r}} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i})\cdot e^{-j\beta\hat{n}\cdot\bar{r}}\cdot e^{-\alpha\hat{n}\cdot\bar{r}}$

Identificando: $\alpha = 0$ $\quad e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} = e^{-j0'4\pi(3y-\sqrt{3}z)}$

$$\hat{n} = \frac{3\hat{y}-\sqrt{3}\hat{z}}{\sqrt{12}} = \frac{3\hat{y}-\sqrt{3}\hat{z}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\hat{y}-\hat{z}}{2}$$

b) $\beta = 0'4\pi\cdot\sqrt{12} = 0'8\pi\sqrt{3} = \omega_0\sqrt{\mu_0 3\varepsilon_0} = \frac{2\pi f_0}{c}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{f_0 = 120\ MHz}}$

c) <u>SENTIDO DE GIRO</u>

$\vec{E_{0r}} = a\hat{z} + b\hat{y}$

$\vec{E_{0i}} = c\hat{x}$

$$(\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r})\cdot\hat{n} = (-a\cdot c\,\hat{y} + c\cdot b\,\hat{z})\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\hat{y}-\hat{z}}{2}\right) =$$

$$= \frac{-ac\sqrt{3}-cb}{2} < 0 \Rightarrow \text{Negativa o a izquierdas.}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$

<u>CALCULO DE a, b, c</u>

- Como es O.P: $\bar{E}_0\cdot\hat{n} = 0 = \frac{b\sqrt{3}-a}{2} = 0 \Rightarrow \underline{a = b\sqrt{3}}\ \text{Ec. 1}$
- $W_t = \frac{\sqrt{3}}{48\pi} = \frac{|\bar{E}_0|^2}{2\eta} = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2\cdot\sqrt{\frac{\mu_0}{3\varepsilon_0}}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\,\frac{\eta_0}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{48\pi} \Rightarrow \underline{a^2+b^2+c^2 = 5}\ \text{Ec. 2}$

  Medio sin perdidas

- $\bar{E}_{0r} = a\hat{z} + b\hat{y} \Rightarrow |\bar{E}_{0r}| = \sqrt{a^2+b^2}$

  $\bar{E}_{0i} = c\cdot\hat{x} \Rightarrow |\bar{E}_{0i}| = c$

  $\bar{E}_{0r} \perp \bar{E}_{0i} \Rightarrow RA = \frac{E_{max}}{E_{min}}$

Calculamos el $\bar{H}$ asociado:

$$\bar{H} = \frac{\hat{n}\times\bar{E}}{\eta} = \dots = \frac{(a\sqrt{3}+b)\hat{x} - jc(\sqrt{3}\hat{z}+\hat{y})}{2\eta}\,e^{-j0'4\pi(3y-\sqrt{3}z)}$$

$$\bar{H}_{0r} = \frac{a\sqrt{3}+b}{2\eta}\,\hat{x} \Rightarrow |\bar{H}_{0r}| = \frac{a\sqrt{3}+b}{2\eta}$$

$$|\bar{H}_{0i}| = \frac{-c(\sqrt{3}\hat{z}+\hat{y})}{2\eta} \Rightarrow |\bar{H}_{0i}| = \frac{c\cdot 2}{2\eta}$$

Como $\bar{H}_{0r} \perp \bar{H}_{0i}$

$\Rightarrow RA = 2 = \frac{H_{max}}{H_{min}}$

Como $H_{máx}$ está en $\hat{x}$

$\rightarrow RA = \frac{a\sqrt{3}+b}{2c}$ Ec 3

$$\left.\begin{array}{l} ①\ a = b\sqrt{3} \\ ②\ a^2+b^2+c^2 = 5 \\ ③\ 2 = \frac{a\sqrt{3}+b}{2c} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{3}\ (V/m) \\ b = 1\ (V/m) \\ c = 1\ (V/m) \end{array}\right.$$

(11)

OPHM

Vacío $\begin{cases} \varepsilon_0 \\ \mu_0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$

$$\bar{E} = \left[\hat{x} + jA\hat{y} - 2\hat{z} \right] \cdot e^{-j20\pi(2x+z)}$$

$A \in \mathbb{R}$

a) En general. $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} = (\bar{E}_{0r} + jE_{0i}) \cdot e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

Identificando $\alpha = 0$ (Np/m) $\quad e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} = e^{-j20\pi(2x+z)}$

$$\hat{n} = \frac{2\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{5}} \qquad \beta = 20\pi\cdot\sqrt{5} = \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f_0}{c} \Rightarrow f_0 = 3\sqrt{5}\cdot 10^8 \text{ Hz}$$

$\alpha = 0$

b) ¿A?

$\bar{E}_{0r} = \hat{x} - 2\hat{z} \Rightarrow |\bar{E}_{0r}| = \sqrt{5}$

$\bar{E}_{0i} = A\hat{y} \Rightarrow |\bar{E}_{0i}| = |A|$

Como $\bar{E}_{0i} \perp \bar{E}_{0r}$ para que sea circular $|A| = \sqrt{5}$ (V/m)

Para que sea positiva o a derechas:

$$(\bar{E}_{0i} \times \bar{E}_{0r})\cdot\hat{n} = (-A\hat{z} - 2A\hat{x})\left(\frac{2\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4A - A}{\sqrt{5}} = -\frac{5A}{\sqrt{5}} > 0$$

$$A = -\sqrt{5} \text{ (V/m)}$$

(18). $\bar{E} = \left[2\hat{x} + 2j\, f_0\, \hat{y} - (1 - j f_0)\hat{z}\right] \cdot e^{-j f_0 \frac{\pi}{150}\sqrt{3 - j0'1}\cdot(x - y + 2z)}$

P-5

O.P.L.M.: f_0 $\quad$!! f_0 en MHz !!

$\hat{n} = \dfrac{\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{6}}$

a) En general: $E = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})} = \bar{E}_0 \cdot e^{-j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon}\,(\hat{n}\cdot\bar{r})} =$

$= \left[\begin{matrix}\text{como} \\ c_0 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_0}\end{matrix}\right] = \bar{E}_0\, e^{-j\frac{2\pi f_{0\,Hz}}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}\cdot(\hat{n}\cdot\bar{r})} =$

$= \bar{E}_0 \cdot e^{-j\frac{2\pi f_{0\,MHz}\cdot 10^6}{3\cdot 10^8}\sqrt{\varepsilon_r}\cdot(\hat{n}\cdot\bar{r})} = \bar{E}_0\, e^{-j\frac{\pi}{150} f_{0\,MHz}\sqrt{\varepsilon_r}\cdot(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

Identificando:

$$\boxed{\hat{n} = \frac{\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{6}}}$$

c) Identificando.

$\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{3 - j\cdot 0'1}\cdot\sqrt{6} \Rightarrow \varepsilon_r = 18 - j0'6$ (adim)

Se trata de un medio de bajas pérdidas.

$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = (18 - j0'6)\cdot\varepsilon_0 = \ldots$ (F/m)

b) Para que sea O.P debe ser $\bar{E}\cdot\hat{n} = 0 = \bar{H}\cdot\hat{n}$

$\bar{E}_0\cdot\hat{n} = \left(2\hat{x} + 2j f_0\hat{y} - (1 - j f_0)\hat{z}\right)\cdot\left(\dfrac{\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{0 + j0}{\sqrt{6}} = 0$

$\bar{H} = \dfrac{\hat{n}\times E}{\eta} = \ldots$ (A/m) ; Finalmente: $\bar{H}_0\cdot\hat{n} = \ldots = 0$ Si es onda plana

d) $\bar{E}_{0r} = 2\hat{x} - \hat{z} \Rightarrow |\bar{E}_{0r}| = \sqrt{5}$

$\bar{E}_{0i} = 2f_0\hat{y} + f_0\hat{z} \Rightarrow |E_{0i}| = f_0\sqrt{5}$

No puede ser lineal porque $f_0 > 0$ y no son paralelos los vectores $\bar{E}_{0r}$ y $\bar{E}_{0i}$

$\bar{E}_{0i}\cdot\bar{E}_{0r} = -f_0 \neq 0$ Por tanto $\bar{E}_{0r}$ no es $\perp$ a E_{0i} para ningún valor de f_0

la polarización es elíptica $\forall f_0 > 0$

SENTIDO DE GIRO:

$(\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r})\cdot\hat{n} = \ldots = \dfrac{-12 f_0}{\sqrt{6}} < 0 \quad \forall f_0 > 0$ Negativa o a izquierdas $\forall f_0 > 0$

e) $W_t = |\langle\bar{S}(\bar{r},t)\rangle| = \dfrac{E_0\cdot E_0^*}{2}\cdot \mathrm{Re}\left(1/\eta^*\right)\cdot e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} =$

$= \left[\begin{array}{l} E_0\cdot E_0^* = 4 + 4f_0^2 + 1 + f_0^2 = 5 + 5f_0^2 \\ \eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0(18 - j0'6)}} \underset{\text{bajas pérdidas}}{\approx} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon'}} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{18}} = \dfrac{40\pi}{\sqrt{2}}\ (\Omega) \\ \alpha = \mathrm{Re}(\gamma) = \ldots \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\delta\cdot\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\delta\cdot\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0'6}{18}\cdot\frac{2\pi f_0}{c_0}\cdot\sqrt{18}\ (Np/m) \end{array}\right] = \dfrac{5(1 + f_0^2)}{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{40\pi}\, e^{-2\frac{1}{2}\cdot\frac{0'6}{18}\frac{2\pi f_0}{c_0}\sqrt{18}\left(\frac{x - y + 2z}{\sqrt{6}}\right)}$ (W)

Son W/m²

① POLARIZACION CHUNGA !!!

$$\bar{E} = \left[\hat{x} - \hat{y} + (1-2j)\hat{z}\right] \cdot e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$$

Caracterizar $\Rightarrow$ $\hat{n}$, $\underbrace{\gamma = \alpha + j\beta \; ; \; \mu \; \varepsilon_0 \; ; \; f_0}_{2 \text{ de } 3}$; $\bar{H}$; $\langle \bar{S} \rangle$; Polarización

2 de 3 $\Rightarrow$ Suponemos que el medio es el vacío $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$

En general: $\bar{E} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i}) \cdot e^{-j\beta \cdot \hat{n} \cdot \bar{r}} \cdot e^{-\alpha \hat{n} \cdot \bar{r}}$

Identificando:

$\alpha = 0$ (Np/m). $\quad \hat{n} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \quad \beta = 1$ (rad/m)

$$\gamma = j \; (m^{-1})$$

$$\gamma = j = j\omega_0 \sqrt{\mu\varepsilon} = j \frac{2\pi f_0}{c_0} \Rightarrow f_0 = \frac{c_0}{2\pi} \; Hz$$

Comprobamos que $\bar{E}_0 \cdot \hat{n} = 0$; $\bar{E}_0 \cdot \hat{n} = \left(\hat{x} - \hat{y} + (1-2j)\hat{z}\right)\left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1-1+0}{\sqrt{2}} = 0$

Como además $\bar{E}_0$ es uniforme la onda es OPHM:

$$\bar{H} = \frac{\hat{n} \times \bar{E}}{\eta} = \dots = \frac{1}{120\pi\sqrt{2}} \left[-2\hat{z} + (1-2j)(\hat{x} - \hat{y})\right] \cdot e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \; (A/m)$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\bar{E} \times \bar{H}^*\right) = \frac{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}{2\eta} \cdot \hat{n} = \frac{7}{240\pi} \left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) (W/m^2)$$

Medio sin pérdidas.

POLARIZACIÓN:

$\bar{E}_{0r} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z} \Rightarrow |\bar{E}_{0r}| = \sqrt{3}$ (V/m)

$\bar{E}_{0i} = -2\hat{z} \Rightarrow |\bar{E}_{0i}| = 2$ (V/m)

Como $\bar{E}_{0r}$ no es // a $\bar{E}_{0i}$ y $|\bar{E}_{0r}| \neq |\bar{E}_{0i}|$ la polarización es elíptica

Sentido de giro:

$$(\bar{E}_{0i} \times \bar{E}_{0r}) \cdot \hat{n} = (-2\hat{y} - 2\hat{x}) \cdot \left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) < 0 \quad \text{Negativa o a izquierdas.}$$

Relación axial:

$\bar{E}_{0i} \cdot \bar{E}_{0r} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ No son perpendiculares !!!

$$tg(2\psi) = \frac{2 \cdot \bar{E}_{0r} \cdot \bar{E}_{0i}}{\bar{E}_{0r}\bar{E}_{0r} - \bar{E}_{0i}\bar{E}_{0i}} = \frac{-4}{3-4} = \frac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow 2\psi = \mathrm{arctg}(4) = \begin{cases} 75'96^\circ \in I \\ 255'96^\circ \in III \end{cases}$$

$\psi = 127'98^\circ$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-j\varphi} = \left[\hat{x} - \hat{y} + (1-2j)\hat{z}\right](\cos\varphi - j\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \dots =$$

$$= \underbrace{\left[0'61\hat{x} + 0'61\hat{y} - 2'19\hat{z}\right]}_{L_1} + j\underbrace{\left[0'71\hat{x} + 0'71\hat{y} + 0'44\hat{z}\right]}_{L_2} \quad RA = \frac{|L_1|}{|L_2|} = 1'96$$

(2) $\alpha = 0$ Np/m

$\beta = 1$ rad/m

$\hat{n} = \dfrac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$

$\bar{H} = \dfrac{\sqrt{2}}{\eta_0}(j-2)\,\hat{z}\cdot e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$ (A/m)

$\langle \bar{S} \rangle = \dfrac{5}{\eta_0}\left(\dfrac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$ (W/m²)

Polarización lineal.

(21) $\bar{E} = \left[E_1\hat{x} + E_2\hat{y} + jE_3\hat{z}\right]\cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}(2x+y+2z)}$

OPHH

$f = 3\,GHz$ $\quad E_1, E_2, E_3 \in \mathbb{R}$

vacío

$W_t = \dfrac{5}{240\pi}$ (W)

1ª Parte E_1, E_2 y E_3

$W_t = \dfrac{5}{240\pi} = \dfrac{E_0\cdot E_0^*}{2\eta} = \dfrac{E_1^2+E_2^2+E_3^2}{240\pi} \longrightarrow \underline{E_1^2+E_2^2+E_3^2 = 5}\ \Big|_{Ec(1)}$

Observamos $\alpha = 0$

La expresión general: $\bar{E} = \bar{E}_0\cdot e^{-\gamma\hat{n}\cdot\bar{r}} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i})\cdot e^{-j\beta\hat{n}\cdot\bar{r}}\cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

Identificando: $\alpha = 0$; $\hat{n} = \dfrac{2\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}}{3}$; $\beta = 20\pi$ rad/m (Sobra un dato)

Como es O.P.: $\bar{E}_0\cdot\hat{n} = 0$

$(E_1\hat{x}+E_2\hat{y}+jE_3\hat{z})\cdot\left(\dfrac{2\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}}{3}\right) = \underline{\dfrac{2E_1+E_2+j2E_3}{3} = 0}\ \Big|_{Ec(2)}$

Re (Ec. 2) $\Rightarrow$ $2E_1 + E_2 = 0$ $\quad Ec'(2)$.

Im (Ec. 2) $\Rightarrow$ $2E_3 = 0 \Rightarrow \underline{E_3 = 0}\ \Big|_{Ec''(2)}$

Operando.

Solución (1): $E_1 = 1$ V/m, $E_2 = -2$ V/m

Solución (2): $E_1 = -1$ V/m, $E_2 = 2$ V/m

2ª Parte Polarización

$\bar{E}_{0r} = E_1\hat{x} + E_2\hat{y} \neq 0$

$\bar{E}_{0i} = E_3\hat{z} = 0$

} POLARIZACIÓN LINEAL

$H_{max} = |\bar{H}_0| = \dfrac{|4\hat{x}+2\hat{y}-5\hat{z}|}{3\eta_0} = \dfrac{\sqrt{5}}{\eta_0}$ (A/m) $\quad H_{min} = 0$

3ª Parte:

$\bar{H} = \dfrac{\hat{n}\times\bar{E}}{\eta} = \left\{\begin{array}{l}\text{Tomando solución (1)}\\ E_0 = (\hat{x}-2\hat{y})\end{array}\right\} =$

$= \dfrac{4\hat{x}+2\hat{y}-5\hat{z}}{3\eta_0}\cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}(2x+y+2z)}$ (A/m)

(9) ¡¡VALOR INSTANTANEO!!

P-8.

OPHM
Pol. izquierda
μ_0
$W_t = \frac{27}{240\pi}$ (W)

$$\bar{E}(\bar{r},t) = (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot \cos(2000\pi t_{\mu s} - 20\pi z) - A\hat{x}\,\text{sen}(2000\pi t_{\mu s} - 20\pi z) \; (V/m)$$

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \left[\bar{E}_{0r} \cdot \cos(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) - \bar{E}_{0i} \cdot \text{sen}(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right] \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

a) ¿f_0?

Identificando:

$$2000\pi t_{\mu s} = \omega_0 t_s = 2\pi f_{0\,Hz} \cdot t_s \Rightarrow f_{0\,Hz} = 1000 \cdot \frac{t_{\mu s}}{t_s} = 1000 \frac{t_s}{t_s} \cdot 10^6 = 10^9\,Hz$$

$$= 1\,GHz$$

b) ¿ε?

$$-20\pi z = -\beta(\hat{n}\cdot\bar{r}) \rightarrow \hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \beta = 20\pi \underset{\alpha=0}{=} \omega_0\sqrt{\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow \varepsilon_r = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = 9\varepsilon_0 \; (F/m)$$

c) El valor fasorial del campo dado es:

$$E(\bar{r}) = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i})\, e^{-j\beta\hat{n}\cdot\bar{r}} \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} =$$

$$= \left[(\hat{x} + 2\hat{y}) + jA\hat{x}\right] \cdot e^{-j20\pi z}$$

<u>COMENTARIO:</u> (Truco para el valor fasorial)

$$\text{sen}\,\theta = \cos(\theta - \pi/2) \rightarrow \cos(\omega_0 t \pm \text{algo}) \Rightarrow e^{\pm j\,\text{algo}}$$

$$W_t = \frac{27}{240\pi} = \frac{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}{2\eta} = \frac{5 + A^2}{2\sqrt{\frac{\mu_0}{9\varepsilon_0}}} = \frac{(5 + A^2) \cdot 3}{240\pi} \Rightarrow A = \pm 2 \; (V/m)$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

La polarización debe ser negativa

$$(\bar{E}_{0i} \times \bar{E}_{0r}) \cdot \hat{n} = (2A\hat{z}) \cdot \hat{z} = 2A < 0 \Rightarrow A = -2$$

(2)

$f_0 = 3\,GHz$

$\mu = \mu_0$

$$\bar{E}_1(x,t) = E_0 \cos(\omega_0 t - 40\pi x)\cdot e^{-0'1x}\,\hat{y}\ (V/m)$$

$$\bar{E}_2(x,t) = 2E_0 \cos\left(\omega_0 t - 40\pi x - \frac{\pi}{2}\right) e^{-0'1x}\,\hat{z}\ (V/m).$$

a) ¿ε?

La expresión general de $\bar{E}(r,t)$ es:

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \left[\bar{E}_{0r}\cdot\cos(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) - \bar{E}_{0i}\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right] e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

Identificando con $\bar{E}_1(x,t)$:

$\hat{n} = \hat{x}$

$\left.\begin{array}{l}\beta = 40\pi\ rad/m \\ \alpha = 0'1\ Np/m\end{array}\right\}\ \gamma = \alpha + j\beta = 0'1 + j40\pi = j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = j\dfrac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{\varepsilon_r} = j\,20\pi\sqrt{\varepsilon_r}\ (m^{-1})$

$\varepsilon_r = 4 - j6'36\cdot 10^{-3}$ (ADIM) $\qquad \varepsilon = (4 - j6'36\cdot 10^{-3})\,\varepsilon_0\ (F/m)$ Medio de bajas pérdidas o buen dieléctrico $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$

b)

$$E_1(x) = E_0\cdot e^{-j40\pi x}\cdot e^{-0'1x}\cdot\hat{y}$$

$$E_2(x) = 2E_0\, e^{-j40\pi x}\cdot e^{-j\pi/2}\cdot e^{-0'1x}\,\hat{z}$$

$$\bar{E}_{TOT}(x) = \bar{E}_1(x) + \bar{E}_2(x) = E_0(\hat{y} - j2\hat{z})\cdot e^{-j40\pi x}\cdot e^{-0'1x}\ \Big|\ (V/m)$$

c) $\bar{E}_{0r} = E_0\hat{y}$ $\Rightarrow$ Como son perpendiculares y $|\bar{E}_{0r}| \neq |\bar{E}_{0i}|$ es elíptica

$\bar{E}_{0i} = -2E_0\hat{z}$

Como son perpendiculares $RA = \dfrac{E_{max}}{E_{min}} = 2$

Sentido de giro: $(\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r})\cdot\hat{n} = (2E_0^2\hat{x})\cdot\hat{x} > 0 \Rightarrow$ Positiva o a derechas.

d) $$H_{TOT} = \frac{\hat{n}\times E_{TOT}}{\eta} = \ldots = \frac{E_0(\hat{z} + 2j\hat{y})}{\eta}\cdot e^{-j40\pi x}\cdot e^{-0'1x}\ (A/m)$$

siendo $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{(4 - j6'36\cdot 10^{-3})\varepsilon_0}} \underset{\varepsilon''\ll\varepsilon'}{\approx} \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi\ (\Omega)$

e) $x = 1\ m \qquad E_0 = 1\ V/m$

$$W_t = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\eta^*}\right)\cdot e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \underset{\varepsilon''\ll\varepsilon'}{\approx} \frac{E_0^2\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{60\pi}\cdot e^{-2\cdot 0'1\cdot x}\ \Bigg|_{\substack{x=1\\ E_0=1\,V/m}} = 11\cdot 10^{-3}\ (W/m^2)$$

$W_t = 11\cdot 10^{-3}\ (W/m^2) = 11\ (mW/m^2)$

BLOQUE ②: ESCRIBIR

⑥ Pol. Elíptica | Emax en $\hat{y}$

⊖ | $P_0(W)$

vacío → ε_0, μ_0 | $\langle W/m^2 \rangle$

$\hat{n} = \hat{z}$

$RA = \Gamma = N$

Solución:

En general la expresión compleja del campo eléctrico para ondas armónicas monocromáticas es: $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

siendo: $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n}\cdot\bar{r} = z$

$$\gamma = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{2\pi f_0}{c_0} - j\frac{2\pi f_0}{c_0}\Big] (m^{-1})$$

Para que sea elíptica a izquierdas con relación axial N y Emax en $\hat{y}$ debe ser

$$\bar{E}_0 = \left[\begin{matrix}(\bar{E}_{0i}\times\bar{E}_{0r})\hat{n} < 0 \\ (\hat{y}\times\hat{x})\hat{z} < 0\end{matrix}\right] = E_0(\hat{x} + jN\hat{y})e^{j\varphi} \quad \forall\varphi \text{ fase arbitraria}$$

$$\bar{E} = E_0(\hat{x} + jN\hat{y})\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z} \quad (V/m) \quad \forall\varphi.$$

Cálculo de E_0 para que transmita $P_0(W)$:

$$P_0 = [\text{Sin pérdidas}] = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2\eta} = \frac{E_0^2(1+N^2)}{2\eta_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\eta_0 P_0}{1+N^2}} \ (V/m)$$

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{2\eta_0 P_0}{N^2+1}}\,(\hat{x} + jN\hat{y})\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z} \ (V/m)$$

Comentarios finales

- $\bar{E} = E_0(N\hat{x} + j\hat{y})e^{j\varphi} \Rightarrow$ No válida ya que Emax en $\hat{x}$
- $\bar{E} = E_0\left(j\hat{x} + \frac{1}{N}\hat{y}\right)e^{j\varphi} \Rightarrow$ No válida ya que Emax en $\hat{x}$ y es positiva
- $\bar{E} = E_0'\left(\frac{1}{N}\hat{x} + j\hat{y}\right)e^{j\varphi} \Rightarrow$ Valida, pero hay que recalcular E_0' para que transmita $P_0(W)$

$$P_0 = \frac{\bar{E}_0'\cdot\bar{E}_0'^*}{2\eta_0} = \frac{E_0'^2\left(\frac{1}{N^2}+1\right)}{2\eta_0} \Rightarrow E_0' = \sqrt{\frac{2\eta_0 P_0}{1+N^2}} \Rightarrow \text{Misma Expresión.}$$

(10)

OPH.M.

$f_0 = 3\sqrt{2}\ GHz$

Pol lineal en $\hat{x}$

E_0

vacío $\begin{cases} \varepsilon_0 \\ \mu_0 \end{cases}$

$\hat{n} = \hat{z}$

1ª parte ¿$\bar{E}(\bar{r})$ y $\bar{E}(\bar{r},t)$?

En general $\bar{E}$ en dominio de la frecuencia:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \hat{n} \cdot \bar{r}}$$

siendo $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n} \cdot \bar{r} = z$

$$\gamma = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{2\pi f_0}{c_0} = j\frac{2\pi\, 3\sqrt{2}\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = j\frac{20\pi}{\sqrt{2}} = j10\pi\sqrt{2}\ (m^{-1})$$

$$\bar{E}_0 = E_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{j\varphi} \quad \forall \varphi.$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = E_0\, \hat{x} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j10\pi\sqrt{2}\, z}\ (V/m) \quad \forall \varphi,$$

$$\bar{E}(\bar{r},t) = Re\left[E(\bar{r}) \cdot e^{j\omega_0 t}\right] = E_0\, \hat{x} \cdot \cos\left(\omega_0 t - 10\pi\sqrt{2}\, z + \varphi\right)\ (V/m) \quad \forall \varphi$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot 10^9$$

2ª parte:

$$E(\bar{r}) = E_0\hat{x} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z} = \bar{E}_1(\bar{r}) + \bar{E}_2(\bar{r}) = \underbrace{\frac{E_0}{2}(\hat{x} + j\hat{y})e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z}}_{\text{Circ. Izq}} + \underbrace{\frac{E_0}{2}(\hat{x} - j\hat{y})e^{j\varphi} e^{-j\beta z}}_{\text{Circ derechas.}}$$

(14)

OPH.M

$\hat{n} = \hat{z}$

$P_0 (W)$

a) Polarización lineal en $\hat{y}$

En general $\bar{E}_1(\bar{r}) = \bar{E}_{0i} \cdot e^{-\gamma(\hat{n}\cdot\bar{r})}$

siendo $\hat{n} = \hat{z} \rightarrow \hat{n}\cdot\bar{r} = z$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = j\,\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{\varepsilon_r}\ (m^{-1})$$

$$\bar{E}_{01} = E_{01}\cdot\hat{y}\cdot e^{j\varphi_1} \quad \forall\varphi_1$$

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = E_{01}\cdot\hat{y}\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\sqrt{\varepsilon_r}\,z}\ (V/m)$$

Calculamos E_{01} para que transmita $P_0 (W)$

$$P_0 = W_t = \frac{\bar{E}_{01}\cdot\bar{E}_{01}^*}{2\eta} = \frac{E_{01}^2}{2\eta} \Rightarrow E_{01} = \sqrt{2\eta P_0}\ (V/m)$$

sin pérdidas porque P_0 es cte

¿ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^+$

$E_{max} = E_{01} = \sqrt{2\eta P_0}$

$E_{min} = 0$

b) Pol. circular a izquierdas:

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \vec{E}_{02}\cdot e^{-\gamma\cdot\hat{n}\cdot\bar{r}}$$

siendo: $\bar{E}_{02} = E_{02}(\hat{x} + j\hat{y})\, e^{j\varphi_2} \quad \forall\varphi_2$

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = E_{02}(\hat{x} + j\hat{y})\, e^{j\varphi_2}\cdot e^{j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z}\ (V/m)$$

Calcular E_{02}:

$$P_0 = \frac{\bar{E}_{02}\cdot\bar{E}_{02}^*}{2\eta} = \frac{E_{02}^2\cdot 2}{2\eta} \Rightarrow E_{02} = \sqrt{\eta P_0}\ (V/m)$$

¿ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^+$

$E_{max_2} = E_{02} = \sqrt{\eta P_0}$

$E_{min_2} = E_{02} = \sqrt{\eta P_0}$

(15) OP4M
$f_0 = 3\,GHz$
Pol. elíptica
⊕
E_{max} en $\hat{x}$
$RA = r = 2$
$\omega t = \omega_0$ (ω)
$\hat{n} = \hat{z}$

a) ¿$E(\bar{r})$ y $E(\bar{r}, t)$?

En general: $\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \hat{n} \cdot \bar{r}}$

siendo $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n} \cdot \bar{r} = z$

$$\gamma = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{2\pi f_0}{3 \cdot 10^8}\sqrt{\varepsilon_r}\ (m^{-1})$$

$\varepsilon_r \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma = j\beta$ ya que el medio no tiene perdidas porque ωt es cte

$$\bar{E}_0 = E_0(j2\hat{x} + \hat{y})e^{j\varphi}\ (V/m)$$

$(\bar{E}_{0i} \times \bar{E}_{0r}) \cdot \hat{n} > 0$
$(\hat{x} \times \hat{y}) \cdot \hat{z} > 0$

<u>Calculo de E_0:</u> $W_0 = \dfrac{\bar{E}_0 \cdot E_0^*}{2\eta} = \dfrac{E_0^2(4+1)}{2\eta} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\dfrac{2\eta W_0}{5}}\ (V/m)$

$\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^+$

$\cancel{\bar{E}(\bar{r}) = E_0(j2\hat{x} + \hat{y})}$

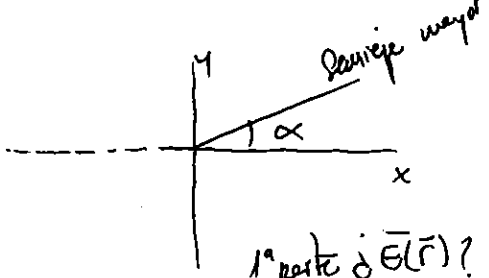
b) $E_{max} = 2E_0\ (V/m)$
$E_{min} = E_0\ (V/m)$

(19) OPHM

Vacío

$\hat{n} = \hat{z}$

$RA = r > 1$



⊕

$W_t = \frac{1}{120\pi}\ (W)$

1ª parte ¿$\bar{E}(\bar{r})$?

En general: $E(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma \hat{n}\cdot\bar{r}}$

$\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n}\cdot\bar{r} = z \qquad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\ (m^{-1})$

$$\bar{E}_0 = E_0\left[jr\,\hat{x}' + \hat{y}'\right]$$

$$\bar{E}_0 = E_0\left[jr(\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}) + (\cos\alpha\,\hat{y} - \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x})\right]\cdot e^{j\varphi} \quad \forall\varphi$$

Así pues: $E(\bar{r}) = E_0\left[jr(\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}) + (\cos\alpha\,\hat{y} - \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x})\right]\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z}\ (V/m)$

$$W_t = \frac{1}{120\pi} = \frac{\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*}{2\eta} = \frac{E_0^2(r^2+1)}{2\eta_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2}{r^2+1}}\ (V/m)$$

2ª Parte

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{\hat{n}\times\bar{E}(\bar{r})}{\eta} = \frac{\hat{z}\times\bar{E}(\bar{r})}{\eta_0} = \frac{E_0}{\eta_0}\left[jr(\cdots\cdots\right.\quad (A/m)$$

3ª Parte

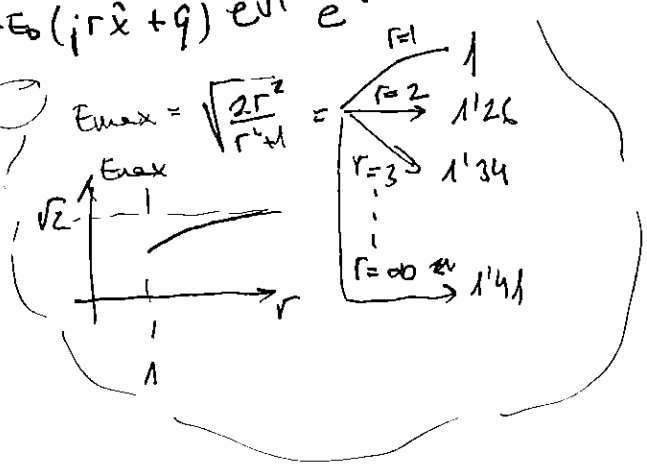
$$E_{max} = r\cdot E_0 = r\sqrt{\frac{2}{r^2+1}} = \sqrt{\frac{2r^2}{r^2+1}}\ (V/m)$$

$$E_{min} = E_0 = \sqrt{\frac{2}{r^2+1}}\ (V/m)$$

4 Parte:

$$E = E_0(jr\hat{x} + \hat{y})\,e^{j\varphi}\,e^{-j\beta z}$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2r^2}{r^2+1}} =$$



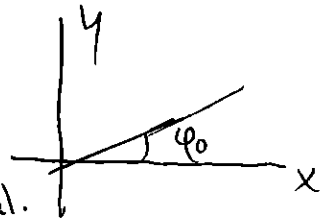
El campo máximo como mínimo tiene que ser el E_{min} por tanto $r=1$ (Pol. circular)

NOTA:

El campo mínimo como mínimo si puede ser cero, por tanto $r=\infty \Rightarrow$ (Pol lineal)

(20)

OPHM nacie $\hat{z}$ Pol lineal.



1ª Parte

En general: $\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma \hat{n}\cdot\bar{r}}$ (V/m)

siendo $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n}\cdot\bar{r} = z$

$$\gamma = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j\,\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\ m^{-1}$$

$$\bar{E}_0 = E_0\left(\cos\varphi_0\,\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi_0\,\hat{y}\right)e^{j\varphi} \quad \forall\varphi$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = E_0\left(\cos\varphi_0\,\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi_0\,\hat{y}\right)e^{j\varphi}\,e^{-j\beta z}\ (V/m).$$

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \operatorname{Re}\left[\bar{E}(\bar{r})\cdot e^{j\omega_0 t}\right] = E_0\left(\cos\varphi_0\,\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{y}\right)\cdot\cos\left(\omega_0 t - \beta z + \varphi\right)(V/m)$$

2ª Parte ¿φ_0 ni E_0?

$$V_{salida_y} = K\cdot E_0\cdot\operatorname{sen}\varphi_0\cdot\cos\left(\omega_0 t - \beta z + \varphi\right)\ (V)$$

Aunque midamos $V_{salida_{y_{max}}} = K\cdot E_0\operatorname{sen}\varphi_0$ todas las ecs que podríamos obtener dependen linealmente de esta

No podemos obtener E_0 y φ_0 porque tenemos 2 incógnitas y solo una ec.

3ª Parte

Lógicamente la 2ª antena recibe la componente x.

$$V_{salida_x} = K\cdot E_0\cos\varphi_0\cdot\cos\left(\omega_0 t - \beta z + \varphi\right)$$

Debemos medir los dos máximos de salida:

$$\left.\begin{aligned} V_{salida_{y_{máx}}} &= V_{S_{ym}} = K\cdot E_0\cdot\operatorname{sen}\varphi_0 \\ V_{salida_{x_{max}}} &= V_{S_{xm}} = K\,E_0\cos\varphi_0 \end{aligned}\right\}\ \text{Dividiendo}\ \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{V_{S_{ym}}}{V_{S_{xm}}} \Rightarrow \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{S_{ym}}}{V_{S_{xm}}}\right)$$

Elevando al cuadrado y sumado: $V_{S_{ym}}^2 + V_{S_{xm}}^2 = K^2\cdot E_0^2 \Longrightarrow E_0 = \dfrac{\sqrt{V_{S_{ym}}^2 + V_{S_{xm}}^2}}{K}$

4ª Parte

Se puede conmutar el ángulo de la polarización de la onda con el eje x entre φ_0 y $\varphi_0 + \pi/2$ obteniendo una modulación digital de polarización en cuadratura.

(5) 1ª Parte

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = E_1 \left(\hat{y} + j\frac{1}{R_1}\hat{x}\right) e^{j\varphi_1} \cdot e^{-j\beta_0 z} \quad (V/m)$$

$$W_{t_1} = \frac{E_1^2\left(1 + 1/R_1^2\right)}{2\eta_0} \quad (W)$$

2ª Parte

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = E_2 \left(\hat{x} + j\frac{1}{R_2}\hat{y}\right) e^{j\varphi_2} \cdot e^{-j\beta_0 z} \quad (V/m)$$

$$W_{t_2} = \frac{E_2^2\left(1 + \frac{1}{R_2^2}\right)}{2\eta_0} \quad (W)$$

3ª Parte

$$E_{TOT} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \underline{\bar{E}_{0TOT}} \cdot e^{-j\beta_0 z}$$

$$W_{t_{tot}} = \frac{\bar{E}_{0TOT} \cdot \bar{E}_{0TOT}^*}{2\eta_0} = \dots = W_{t_1} + W_{t_2} - \underbrace{\frac{E_1 E_2}{\eta_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

si esto es = 0 son ortogonales

$\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$

Son ortogonales si $R_1 = R_2$ } misma RA

4ª Parte

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = E_2 \left(\hat{x} - j\frac{1}{R_2}\hat{y}\right) e^{j\varphi_2} \cdot e^{-j\beta_0 z} \quad (V/m)$$

$$W_{tot}' = \dots = W_{t_1} + W_{t_2} - \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] \cdot \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Son ortogonales si $R_1 = R_2 = \infty$ (AMBAS POLARIZ LINEAL)

TEMA 1: POYNTING

(Electrodinámica, relaciones constitutivas de los medios y teorema de Poynting)

1.- Introducción:

La electrodinámica es la ciencia que estudia los fenómenos electromagnéticos; para el estudio de la electrodinámica partimos de las LEYES DEL ELECTROMAGNETISMO que son:

- Las Ecuaciones de Maxwell en puntos ordinarios y no ordinarios.
- Las relaciones constitutivas de los medios.
- La ecuación de conservación de la carga.

Los distintos campos que vamos a estudiar son:

- $\vec{E} \equiv$ *Vector de campo eléctrico* (V/m)
- $\vec{H} \equiv$ *Vector de campo magnético* (A/m)

Macroscópicos

Microsc.

- $\vec{D} \equiv$ *Vector polarización eléctrica o desplazamiento eléctrico* (C/m^2)
- $\vec{B} \equiv$ *Vector polarización magnética o inducción magnética* (Wb/m^2) o (T)
- $\vec{J}_{ind} = \vec{J}_{em} = \vec{J}_e \equiv$ *Densidad volumétrica de corriente eléctrica o conducción eléctrica* (A/m^2)

  Movimiento de partículas cargadas producidas por acción del campo electromagnético.

- $\vec{J}_{pun} = \vec{J}_{ext} \equiv$ *Densidad volumétrica de corriente provocada por fuentes externas al campo electromagnético* (A/m^2)

  Movimiento de partículas cargadas producidas por la acción de fuentes externas que no tienen relación con el campo electromagnético.

La excitación macroscópica exterior son los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$

La respuesta microscópica del medio material es $\vec{D}, \vec{B}$ y $\vec{J}_{ind}$

2.- Estudio en el dominio del tiempo:

Las ecuaciones del campo electromagnético en el dominio del tiempo son:

ECUACIONES DE MAXWELL

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}_{ext}(\vec{r},t) + \vec{J}_{ind}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Puntos ordinarios

$$\hat{n}_{12} \times \left[\vec{E}_2(\vec{r},t) - \vec{E}_1(\vec{r},t)\right]_S = \vec{0}$$

$$\hat{n}_{12} \times \left[\vec{H}_2(\vec{r},t) - \vec{H}_1(\vec{r},t)\right]_S = \vec{J}_S(\vec{r},t)$$

Puntos NO ordinarios

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{siendo:} \qquad \vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_{ext}(\vec{r},t) + \vec{J}_{ind}(\vec{r},t)$$

ECUACIONES DERIVADAS

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

Puntos ordinarios

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\vec{D}_2(\vec{r},t) - \vec{D}_1(\vec{r},t)\right]_S = \rho_S(\vec{r},t)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\vec{B}_2(\vec{r},t) - \vec{B}_1(\vec{r},t)\right]_S = 0$$

Puntos NO ordinarios

ECUACIONES PARA LAS DISCONTINUIDADES (CONDICIONES DE CONTORNO)

$$\hat{n}_{12} \times \left[\vec{E}_2(\vec{r},t) - \vec{E}_1(\vec{r},t)\right]_S = \vec{0}$$

$$\hat{n}_{12} \times \left[\vec{H}_2(\vec{r},t) - \vec{H}_1(\vec{r},t)\right]_S = \vec{J}_S(\vec{r},t)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\vec{D}_2(\vec{r},t) - \vec{D}_1(\vec{r},t)\right]_S = \rho_S(\vec{r},t)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\vec{B}_2(\vec{r},t) - \vec{B}_1(\vec{r},t)\right]_S = 0$$

2.1.- Relaciones constitutivas en el dominio del tiempo:

Son las ecuaciones que relacionan la respuesta microscópica de los medios ($\vec{D}, \vec{B}$ y $\vec{J}_{ind}$) ante una excitación macroscópica exterior ($\vec{E}$ y $\vec{H}$).

En general se cumple que:

$$\vec{D}(r,t) = \vec{D}\left[\vec{E}(r,t), \vec{H}(r,t)\right] \quad \left(C/m^2\right) = \textit{Polarización eléctrica}$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}\left[\vec{E}(r,t), \vec{H}(r,t)\right] \quad \left(Wb/m^2\right) = \textit{Polarización magnética}$$

$$\vec{J}_{ind}(r,t) = \vec{J}_{ind}\left[\vec{E}(r,t), \vec{H}(r,t)\right] \quad \left(A/m^2\right) = \textit{Conducción}$$

CARACTERÍSTICAS DE LOS MEDIOS

- MEDIO SIN INTERACCIÓN CRUZADA

$$\vec{D}(r,t) = \vec{D}\left[\vec{E}(r,t)\right]$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}\left[\vec{H}(r,t)\right]$$

$$\vec{J}_{ind}(r,t) = \vec{J}_{ind}\left[\vec{E}(r,t)\right]$$

- MEDIO LINEAL

Un medio es lineal si

la relación entre $\vec{D}(\vec{r},t)$ y $\vec{E}(\vec{r},t)$ es lineal, es decir si ε no depende de $\vec{E}(\vec{r},t)$.

la relación entre $\vec{B}(\vec{r},t)$ y $\vec{H}(\vec{r},t)$ es lineal, es decir si μ no depende de $\vec{H}(\vec{r},t)$.

la relación entre $\vec{J}_{ind}(\vec{r},t)$ y $\vec{E}(\vec{r},t)$ es lineal, es decir si σ no depende de $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Así las relaciones constitutivas para un medio SIN INTERACCIÓN CRUZADA, LINEAL, CON DISPERSIÓN ESPACIAL, NO CAUSAL, VARIANTE TEMPORAL, NO HOMOGÉNEO, ANISÓTROPO Y CON DISPERSIÓN TEMPORAL son las siguientes:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{V'} \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}(\vec{r},\vec{r}',t,t') \cdot \vec{E}(\vec{r}',t') \cdot dt' \cdot dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int_{V'} \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \bar{\mu}(\vec{r},\vec{r}',t,t') \cdot \vec{H}(\vec{r}',t') \cdot dt' \cdot dV'$$

$$\vec{J}_{ind}(\vec{r},t) = \int_{V'} \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}(\vec{r},\vec{r}',t,t') \cdot \vec{E}(\vec{r}',t') \cdot dt' \cdot dV'$$

siendo:

$\bar{\varepsilon}$ = *Tensor permittividad eléctrica.*(F/m)

$\bar{\mu}$ = *Tensor permeabilidad magnética.*(H/m)

$\bar{\sigma}$ = *Tensor conductividad.*(S/m)

Un tensor aplicado sobre un vector da otro vector en otra dirección.

Nota: Las relaciones anteriores son las más genéricas que podemos encontrar, y a partir de ahora sólo vamos a dar la del vector desplazamiento eléctrico porque el resto son similares.

- MEDIO SIN DISPERSIÓN ESPACIAL

Un medio material no tiene dispersión espacial si la respuesta en un punto sólo depende de ese punto y no del resto de puntos del medio.

En ese caso:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}(\vec{r},t,t') \cdot \vec{E}(\vec{r},t') \cdot dt'$$

- MEDIO CAUSAL

Un medio material es causal si la respuesta en un instante no depende de instantes futuros.

En ese caso:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \bar{\varepsilon}(\vec{r},t,t') \cdot \vec{E}(\vec{r},t') \cdot dt'$$

- MEDIO INVARIANTE TEMPORAL

Un medio material es invariante temporal si ε no depende de t.

En ese caso:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \bar{\varepsilon}(\bar{r},t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r},t') \cdot dt' \qquad \text{(integral de convolución)}$$

- MEDIO HOMOGÉNEO

Un medio material es homogéneo espacialmente si la respuesta no depende del punto donde se produce la excitación.

En ese caso:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \bar{\varepsilon}(t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r},t') \cdot dt'$$

Nota:

Medio homogéneo ⇔ Medio invariante espacialmente

Así para un medio sin interacción cruzada, lineal, **CON DISPERSIÓN ESPACIAL**, causal, invariante temporal, **HOMOGÉNEO**, anisótropo y con dispersión temporal la relación constitutiva para la polarización eléctrica es:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{V'} \int_{t'=-\infty}^{t} \bar{\bar{\varepsilon}}(\bar{r}-\bar{r}',t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r}',t') \cdot dt' \cdot dV'$$

- MEDIO ISÓTROPO

Un medio material es isótropo si la respuesta no depende de la dirección del campo exterior, en caso contrario se denomina anisótropo. En estos medios la respuesta y la excitación son paralelas.

En ese caso:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \varepsilon(t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r},t') \cdot dt'$$

- MEDIO SIN DISPERSIÓN TEMPORAL

Un medio material NO tiene dispersión temporal si la respuesta sólo depende de la excitación en ese instante.

Medio NO dispersivo ⇔ Medio sin memoria ⇔ Medio con respuesta instantánea ⇔ Medio sin efecto retardado ⇔ Medio sin inercia ⇔ MEDIO SIN PÉRDIDAS

En ese caso:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon \cdot \bar{E}(\bar{r},t)$$

EJERCICIO 1:

¿Cuál es la relación constitutiva $\bar{D}(r,t) = \bar{D}[\bar{E}(r,t)]$ para un medio con dispersión espacial, homogéneo, anisótropo, causal, sin dispersión temporal y variante en el tiempo?

$$\vec{D}(\bar{r},t) = \int_{V'} \int_{-\infty}^{t} \bar{\bar{\varepsilon}}(\bar{r}',\bar{E}',t,\cancel{t'}) \cdot \bar{E}(\bar{r}',\cancel{t'})\, \cancel{dt'}\, dV' \quad (C/m^2)$$

este no (sola la prima).

$$\vec{D}(\bar{r},t) = \int_{V'} \bar{\bar{\varepsilon}}(\bar{r}-\bar{r}',t) \cdot \bar{E}(\bar{r}',t)\, dV'$$

3.- Estudio en el dominio de la frecuencia:

Las ecuaciones del campo electromagnético en el dominio de la frecuencia son las transformadas de Fourier de las ecuaciones anteriores; si suponemos RPS (Régimen permanente sinusoidal, campos armónicos o campos periódicos sinusoidales) obtenemos:

ECUACIONES DE MAXWELL

$$\nabla \times \bar{E}_C(\bar{r},w) = -jw\bar{B}_C(\bar{r},w)$$

$$\nabla \times \bar{H}_C(\bar{r},w) = \bar{J}_{extC}(\bar{r},w) + \bar{J}_{indC}(\bar{r},w) + jw\bar{D}_C(\bar{r},w)$$

Puntos ordinarios

$$\hat{n}_{12} \times \left[\bar{E}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{E}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \bar{0}$$

$$\hat{n}_{12} \times \left[\bar{H}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{H}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \bar{J}_{SC}(\bar{r},w)$$

Puntos NO ordinarios

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

$$\nabla \cdot \bar{J}_C(\bar{r},w) + jw\rho_C(\bar{r},w) = 0 \qquad \text{siendo: } \bar{J}_C(\bar{r},w) = \bar{J}_{extC}(\bar{r},w) + \bar{J}_{indC}(\bar{r},w)$$

ECUACIONES DERIVADAS

$$\nabla \cdot \bar{D}_C(\bar{r},w) = \rho_C(\bar{r},w)$$

$$\nabla \cdot \bar{B}_C(\bar{r},w) = 0$$

Puntos ordinarios

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\bar{D}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{D}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \rho_{SC}(\bar{r},w)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\bar{B}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{B}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = 0$$

Puntos NO ordinarios

ECUACIONES PARA LAS DISCONTINUIDADES (CONDICIONES DE CONTORNO)

$$\hat{n}_{12} \times \left[\bar{E}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{E}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \bar{0}$$

$$\hat{n}_{12} \times \left[\bar{H}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{H}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \bar{J}_{SC}(\bar{r},w)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\bar{D}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{D}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = \rho_{SC}(\bar{r},w)$$

$$\hat{n}_{12} \cdot \left[\bar{B}_{2C}(\bar{r},w) - \bar{B}_{1C}(\bar{r},w)\right]_S = 0$$

3.1.- Relaciones constitutivas en el dominio de la frecuencia:

Ahora las relaciones tienen esta forma:

$$\bar{D}_C(r,w) = \bar{D}_C\left[\bar{E}_C(r,w), \bar{H}_C(r,w)\right] \quad \left(C/m^2\right) = \textit{Polarización eléctrica}$$

$$\bar{B}_C(r,w) = \bar{B}_C\left[\bar{E}_C(r,w), \bar{H}_C(r,w)\right] \quad \left(Wb/m^2\right) = \textit{Polarización magnética}$$

$$\bar{J}_{indC}(r,w) = \bar{J}_{indC}\left[\bar{E}_C(r,w), \bar{H}_C(r,w)\right] \quad \left(A/m^2\right) = \textit{Conducción}$$

CARACTERÍSTICAS DE LOS MEDIOS

- MEDIO SIN INTERACCIÓN CRUZADA

$$\bar{D}_C(r,w) = \bar{D}_C\left[\bar{E}_C(r,w)\right]$$

$$\bar{B}_C(r,w) = \bar{B}_C\left[\bar{H}_C(r,w)\right]$$

$$\bar{J}_{indC}(r,w) = \bar{J}_{indC}\left[\bar{E}_C(r,w)\right]$$

- MEDIO LINEAL

Las relaciones constitutivas para un medio SIN INTERACCIÓN CRUZADA, LINEAL, CON DISPERSIÓN ESPACIAL, CAUSAL, INVARIANTE TEMPORAL, NO HOMOGÉNEO, ANISÓTROPO Y CON DISPERSIÓN TEMPORAL son las siguientes:

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \int_{V'} \bar{\varepsilon}_C(\bar{r},\bar{r}',w) \cdot \bar{E}_C(\bar{r}',w) \cdot dV'$$

$$\bar{B}_C(\bar{r},w) = \int_{V'} \bar{\mu}_C(\bar{r},\bar{r}',w) \cdot \bar{H}_C(\bar{r}',w) \cdot dV'$$

$$\bar{J}_{indC}(\bar{r},w) = \int_{V'} \bar{\sigma}_C(\bar{r},\bar{r}',w) \cdot \bar{E}_C(\bar{r}',w) \cdot dV'$$

- MEDIO SIN DISPERSIÓN ESPACIAL

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \bar{\varepsilon}_C(\bar{r},w) \cdot \bar{E}_C(\bar{r},w)$$

➢ MEDIO HOMOGÉNEO

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \bar{\varepsilon}_C(w)\cdot\bar{E}_C(\bar{r},w)$$

Nota:

Medio homogéneo ⇔ Medio invariante espacialmente

Así para un medio sin interacción cruzada, lineal, **CON DISPERSIÓN ESPACIAL**, causal, invariante temporal, **HOMOGÉNEO**, anisótropo y con dispersión temporal la relación constitutiva para la polarización eléctrica es en el dominio de la frecuencia:

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \int_{V'} \bar{\varepsilon}_C(\bar{r}-\bar{r}',w)\cdot\bar{E}_C(\bar{r}',w)\cdot dV'$$

Fin nota.

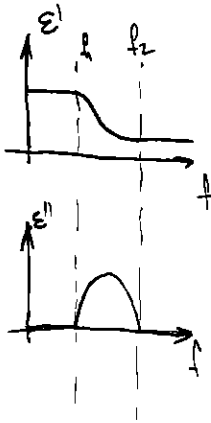
➢ MEDIO ISÓTROPO

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \varepsilon_C(w)\cdot\bar{E}_C(\bar{r},w)$$

COMENTARIO:

$\varepsilon_C(w) = \varepsilon_C(f)$ es la permitividad eléctrica compleja o constante dieléctrica compleja, que depende de la frecuencia y tiene la siguiente forma:

$$\varepsilon_C(f) = \varepsilon'(f) - j\varepsilon''(f) \qquad \text{(Medio con pérdidas)}$$



Es posible obtener la relación entre la parte real y la parte imaginaria de esta permitividad compleja, a través de las denominadas relaciones de KRAMERS-KRONING, de las que se puede deducir que si la permitividad eléctrica depende la frecuencia debe ser $\varepsilon''(f) > 0$ (Medio con pérdidas), y viceversa, si $\varepsilon''(f) = 0$ (medio sin pérdidas) para todas las frecuencias, la permitividad no dependerá de la frecuencia.

Análogamente de las otras dos relaciones constitutivas tenemos permeabilidades y conductividades complejas:

$$\mu_C(f) = \mu'(f) - j\mu''(f)$$

$$\sigma_C(f) = \sigma'(f) - j\sigma''(f)$$ (salvo que nos digan lo contrario esta conductividad es constante e independiente de la frecuencia)

Nota: permitividad eléctrica equivalente y tangente de pérdidas magnéticas.

➢ MEDIO SIN DISPERSIÓN TEMPORAL

Medio NO dispersivo ⇔ MEDIO SIN PÉRDIDAS

La permitividad del medio ya no será un complejo dependiente de la frecuencia, sino un valor constante, por tanto:

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \varepsilon\cdot\bar{E}_C(\bar{r},w)$$

EJERCICIO 2:

La relación constitutiva en el dominio de la frecuencia dada por:

$$\bar{D}_C(\bar{r},w) = \bar{\varepsilon}_C(w)\cdot\bar{E}_C(\bar{r},w)$$

¿a qué tipo de medio material corresponde en los aspectos que se indican a continuación?

- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad
- Dispersión temporal
- Dispersión espacial

→ Es lineal ya que si duplicamos la excitación se duplica la respuesta.

→ Es anisótropo. ya que $\bar{D}$ no // $\bar{E}$ ya que ε es un tensor

→ Es homogéneo ya que $\varepsilon \neq \varepsilon(\bar{r})$

→ Sí hay dispersión temporal ya que ε es un complejo dependiente de la frecuencia

→ No tiene dispersión espacial ya que la respuesta en un pto no depende del resto de ptos.

CUADRO DE RELACIONES CONSTITUTIVAS (sin interacción cruzada y lineal)

CARACT. ESPACIALES	Dominio de t	Dominio de f
• Homogeneo y sin dispersion espacial	$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon \cdot \bar{E}(\bar{r},t)$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon \cdot \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$
• Homogeneo y con dispersion espacial	$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{V'} \varepsilon(\bar{r}-\bar{r}') \cdot \bar{E}(\bar{r}',t)\, dV'$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \int_{V'} \varepsilon(\bar{r}-\bar{r}') \cdot \bar{E}(\bar{r}',\omega)\, dV'$
• No homogeneo y sin dispersión espacial	$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon(\bar{r}) \cdot \bar{E}(\bar{r},t)$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon(\bar{r}) \cdot \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$
• No homogeneo y con dispersion espacial	$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{V'} \varepsilon(\bar{r},\bar{r}') \cdot \bar{E}(\bar{r}',t)\, dV'$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \int_{V'} \varepsilon(\bar{r},\bar{r}') \cdot \bar{E}_c(\bar{r}',\omega)\, dV'$
NOTA: Si el medio es anisotropo $\varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}}$	Homogeneo $\Leftrightarrow$ INV. ESPACIAL	

CARACT TEMPORALES	Dominio de t	Dominio de f
• Invariante temp y sin dispersión t	$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon \cdot \bar{E}(\bar{r},t)$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon \cdot \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$
• Invariante temp y con dispersión t	$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{x} \varepsilon(t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r},t')\, dt'$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon_c(\omega) \cdot \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$
• Variante temp y sin dispersión t	$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon(t) \cdot \bar{E}(\bar{r},t)$	$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon * \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$
• Variante temp y con dispersión t	$\bar{D}(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{x} \varepsilon(t,t') \cdot \bar{E}(\bar{r},t')\, dt'$	$\cancel{\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon_c(\omega) * \bar{E}_c(\bar{r},\omega)}$
NOTA: $x = t$ si es causal $x = \infty$ si es no causal.	SIN DISPERSIÓN $\rightarrow$ CAUSAL	

4.- Teorema de Poynting:

Es el teorema de la conservación de la energía electromagnética. (si creamos un campo debemos aportar energía, y si el campo desaparece éste nos aporta energía, habitualmente en forma de calor).

4.1- Teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia:

El teorema de Poynting en el domino de la frecuencia también se denomina teorema de Poynting en forma compleja; se obtiene de hacer la transformada de Fourier del teorema de Poynting en el dominio del tiempo, que estudiaremos en el punto 4.2., y por tanto este teorema se puede descomponer en parte real (BALANCE DE POTENCIA ACTIVA) y parte imaginaria (BALANCE DE POTENCIA REACTIVA).

A continuación comentamos cada una de estas partes tanto en forma integral como en forma diferencial.

PARTE REAL DEL TEOREMA DE POYNTING EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA PARA CAMPOS PERIÓDICOS SINUSOIDALES MONOCROMÁTICOS (BALANCE DE POTENCIA ACTIVA)

$$\frac{1}{2}\Re e\left[\int_V -\bar{J}^*_{ext}(\bar{r})\cdot\bar{E}_C(\bar{r})\,dV\right]=\frac{1}{2}\Re e\left[\oint_S\left(\bar{E}_C(\bar{r})\times\bar{H}^*_C(\bar{r})\right)d\bar{S}\right]+\frac{1}{2}\int_V\sigma\,\bar{E}_C(\bar{r})\cdot\bar{E}^*_C(\bar{r})\,dV+$$

$$+\frac{w_o\cdot\varepsilon''(f_o)}{2}\int_V\bar{E}_C(\bar{r})\cdot\bar{E}^*_C(\bar{r})\,dV+\frac{w_o\cdot\mu''(f_o)}{2}\int_V\bar{H}_C(\bar{r})\cdot\bar{H}^*_C(\bar{r})\,dV$$

siendo:

(1) = Valor medio de la potencia entregada por las fuentes presentes en el volumen V.
(2) = Valor medio de la potencia que se escapa del volumen V por su superficie cerrada S
(3) = Valor medio de la potencia <u>disipada</u> por efecto Joule en el volumen V
(4) = Valor medio de la potencia <u>disipada</u> por pérdidas dieléctricas en el volumen V
(5) = Valor medio de la potencia <u>disipada</u> por pérdidas magnéticas en el volumen V

Todos los términos se miden en vatios (W)

NOTA:

Este mismo teorema en forma diferencial se escribe:

$$\frac{1}{2}\Re e\left(-J^*_{c\,fuen}\cdot E_c\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\Re e\left[\bar{E}_c\times\bar{H}_c^*\right]\right)+\frac{\sigma}{2}\bar{E}_c\bar{E}_c^*+\frac{w_0\varepsilon''}{2}\bar{E}_c\bar{E}_c^*+\frac{w_0\mu''}{2}\bar{H}_c\bar{H}_c^*\quad(W/m^3)$$

PARTE IMAGINARIA DEL TEOREMA DE POYNTING EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA PARA CAMPOS PERIÓDICOS SINUSOIDALES MONOCROMÁTICOS (BALANCE DE POTENCIA REACTIVA)

$$\frac{1}{2}\Im m\left[\int_V -\bar{J}^*_{ext}(\bar{r})\cdot\bar{E}_C(\bar{r})\,dV\right]=\frac{1}{2}\Im m\left[\oint_S\left(\bar{E}_C(\bar{r})\times\bar{H}^*_C(\bar{r})\right)d\bar{S}\right]+2\cdot w_o\left[\int_V\left[<W_m(\bar{r},t)>-<W_e(\bar{r},t)>\right]dV\right]$$

siendo:

(1) = Valor medio de la potencia reactiva entregada por las fuentes presentes en el volumen V.
(2) = Valor medio de la potencia reactiva que se escapa del volumen V por su superficie cerrada S
(3) = 2 w_0 veces la diferencia entre los valores medios de las energías magnética y eléctrica <u>almacenadas</u> en el volumen V, siendo a su vez:

$<W_m(\bar{r},t)>=\frac{\mu'(f_0)}{4}\bar{H}_C(\bar{r})\bar{H}^*_C(\bar{r})$ (J/m³) Densidad de energía magnética almacenada por el campo magnético.

$<W_e(\bar{r},t)>=\frac{\varepsilon'(f_0)}{4}\bar{E}_C(\bar{r})\bar{E}^*_C(\bar{r})$ (J/m³) Densidad de energía eléctrica almacenada por el campo eléctrico.

$W_m=\int_V<W_m(\bar{r},t)>dV$ (J) Energía magnética almacenada por el campo magnético

$W_e=\int_V<W_e(\bar{r},t)>dV$ (J) Energía eléctrica almacenada por el campo eléctrico

NOTA:

Este mismo teorema en forma diferencial se escribe:

$$\frac{1}{2}\Re e\left(-J^*_{c\,fuen}\cdot E_c\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\Im m\left[\bar{E}_c\times\bar{H}_c^*\right]\right)+2w_0\left[\left(\frac{\mu'}{4}\bar{H}_c\bar{H}_c^*-\frac{\varepsilon'}{4}\bar{E}_c\cdot\bar{E}_c^*\right)\right]\quad(W/m^3)$$

4.2- Teorema de Poynting en el dominio del tiempo:

$$\int_V -\vec{J}_{0ext}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\,dV = \oint_S \left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right)d\vec{S} + \int_V \sigma\cdot\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right)^2 dV$$
$$+\int_V \left[\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{d\vec{D}(\vec{r},t)}{dt} + \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{d\vec{B}(\vec{r},t)}{dt}\right]dV$$

siendo:

(1) = Potencia o energía por unidad de tiempo, generada por fuentes externas al campo electromagnético, presentes en el volumen V.
(2) = Potencia o energía por unidad de tiempo que se escapa del volumen V por su superficie cerrada S
(3) = Potencia o energía por unidad de tiempo que se disipa por efecto Joule en el volumen V
(4) = ¿ ? Depende si el medio es con dispersión o sin dispersión. (Ver problema 6)

Todos los términos se miden en vatios (W)

NOTA:

Este mismo teorema en forma diferencial se escribe:

$$-\vec{J}_{0ext}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \nabla\cdot\left(\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right)\right) + \sigma\cdot\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right)^2 + \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{d\vec{D}(\vec{r},t)}{dt} + \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{d\vec{B}(\vec{r},t)}{dt}$$

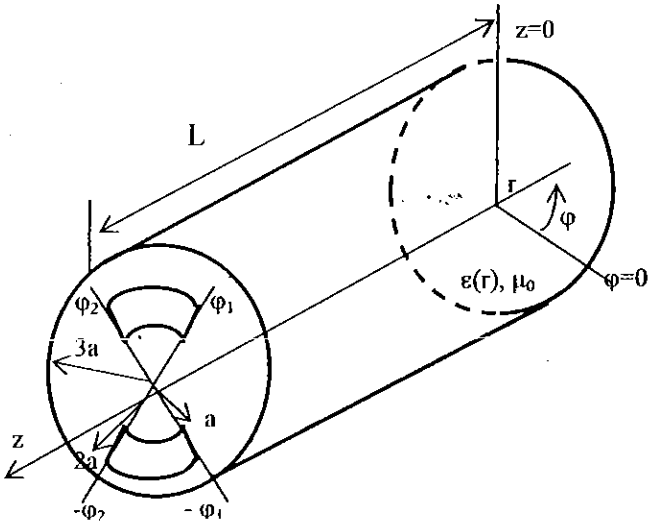
Todos los términos se miden en W/m^3, ya que representan densidad de potencia o densidad de energía por unidad de tiempo.

II-3 a) Escriba la relación constitutiva $\vec{D}(\vec{E})$ en el dominio del tiempo para un medio lineal, isótropo, no homogéneo espacialmente, sin dispersión espacial, sin variación temporal y con dispersión temporal. Escriba la misma relación constitutiva en el dominio de la frecuencia. Puede mencionar las características básicas de esta última expresión en el dominio de la frecuencia. ¿Cuál es el significado de las relaciones de Kramers-Kroning?

b) Sea una caja cilíndrica de conductor perfecto de radio 3 a y longitud L. con tapas de conductor también perfecto. En la tapa situada en el plano z = L existen dos aperturas situadas tal y como se indica en la figura, en la que se han medido los siguientes valores de un campo electromagnético monocromático de frecuencia 2,45 GHz.

$$\vec{E}_1 = \frac{E_1}{r}\hat{r}(V/m) \qquad \vec{H}_1 = \frac{H_1}{r}e^{-j\psi_1}\hat{\varphi}(A/m) \qquad \begin{cases} z = L \\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ a \le r \le 2a \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_2}{r}\hat{r}(V/m) \qquad \vec{H}_2 = \frac{H_2}{r}e^{-j\psi_2}\hat{\varphi}(A/m) \qquad \begin{cases} z = L \\ -\varphi_2 \le \varphi \le -\varphi_1 \\ a \le r \le 2a \end{cases}$$



siendo E_1, H_1, E_2 y H_2 constantes reales positivas y $0<\psi_1<\pi/2$, $0<\psi_2<\pi/2$.

Se conoce que el material que rellena la caja cilíndrica posee una permitividad eléctrica no homogénea de la forma $\varepsilon = \varepsilon_0\,(1+r/a)$ (F/m) y que su permeabilidad magnética es la del vacío μ_0 (H/m).

b1) ¿Existen fuentes de campo en el interior de la caja? En caso afirmativo, calcule el valor medio de la potencia entregada por dichas fuentes.

b2) Determine el valor de la potencia disipada en el dieléctrico.

b3) Con los datos proporcionados ¿podría determinar la relación entre la energía eléctrica y magnética almacenadas en el dieléctrico?

b4) Si las constantes $\psi_1 = \pi/2$ y $\psi_2 = \pi/2$. ¿Cómo se modificarían las respuestas a los apartados anteriores?.

Junio-98

II-6 a) Dada la relación constitutiva $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r},t)$, indique justificando las respuestas, si el medio material es isótropo, dispersivo en el tiempo, dispersivo en el espacio, homogéneo y variante en el tiempo.

b) Se considera un medio material que ocupa un volumen V, limitado por una superficie S, en el interior del cual existe un campo electromagnético con variación temporal arbitraria. Dada la ecuación de balance de energías (teorema de Poynting) en forma integral y en el dominio del tiempo:

$$\int_V -\vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)dv = \oint_S \left[\vec{E}(\vec{r},t)x\vec{H}(\vec{r},t)\right]\cdot d\vec{s} + \int_V \left[\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\right]dv$$

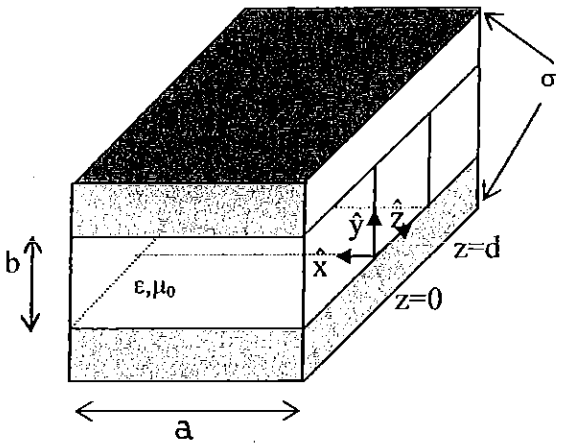
indique justificando las respuestas, cómo se particulariza esta expresión en cada uno de los siguientes casos:

- El volumen V está limitado por un conductor perfecto y en su interior no existen fuentes de campo.
- No existen corrientes debidas al fenómeno de conducción.
- El medio material posee las propiedades indicadas en el apartado a) respecto a los fenómenos de polarización eléctrica y magnética. Indique en este caso qué representa el último término de la ecuación de balance de energías.

c) Se considera un sistema de transmisión formado por dos placas paralelas indefinidas de conductor perfecto, anchura a y separadas una distancia b mediante un dieléctrico con pérdidas de permitividad desconocida $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ y permeabilidad μ_0. En su interior existe un campo electromagnético monocromático de frecuencia f_0 dado por las expresiones:

$$\vec{E} = E_0 e^{-\gamma z}\hat{y} \qquad \vec{H} = -\frac{E_0}{\eta}e^{-\gamma z}\hat{x} \qquad \text{en} \quad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ \forall z \end{cases}$$

donde $\gamma = \alpha + j\beta$, $\eta = |\eta| e^{j\phi}$ y E_0 son conocidos, y $0<\phi<\pi/2$.



c1) Compruebe que la potencia que atraviesa las paredes situadas en los planos x = 0 y x = a es nula, y calcule el valor medio de la potencia disipada en el tramo de dieléctrico situado en $0 \le z \le d$.

c2) Determine los valores de ε' y ε" en función del resto de parámetros

Septiembre-99

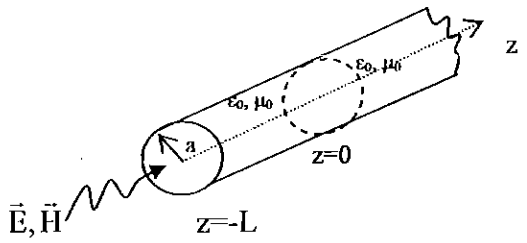
II-16 La figura representa un tubo metálico de conductor perfecto, semiinfinito, con sección transversal circular de radio a. El tubo está vacío en el tramo situado entre z = -L y z = 0; relleno con material dieléctrico lineal, homogéneo e isótopo de permitividad desconocida en el resto, $z \geq 0$; y excitado desde el exterior z<-L, por un generador monocromático de frecuencia f_0. En la región vacía se conocen las expresiones de las componentes transversales a z, y que existe componente no nula del campo magnético en dirección z:

$$\left.\begin{array}{ll} E_{\varphi 1} = jY(e^{-\alpha z} + \rho e^{+\alpha z})\, g(r); & E_{r1} = 0;\ \ E_{z1} = 0 \\ H_{r1} = (e^{-\alpha z} - \rho e^{+\alpha z})\, g(r); & H_{\varphi 1} = 0;\ \ H_{z1} \neq 0 \end{array}\right\} \quad -L \leq z \leq 0$$

donde Y y α son constantes reales, ρ es una constante compleja, todas ellas conocida, y g es una función real. Se conocen además las expresiones de las componentes transversales a z en la región ocupada por el dieléctrico:

$$\left.\begin{array}{ll} E_{\varphi 2} = Ag(r)e^{-\gamma_2 z} & E_{r2} = 0 \\ H_{r2} = Bg(r)e^{-\gamma_2 z} & H_{\varphi 2} = 0 \end{array}\right\} \quad z \geq 0$$

donde A., B y γ_2 son constantes complejas siendo γ_2 conocida y de valor $\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$, con $\alpha_2 > 0$.



a) Determine el valor medio de la potencia disipada en el dieléctrico.
b) Calcule la diferencia entre los valores medios de las energías magnética y eléctrica almacenadas en el tramo de tubo relleno de dieléctrico.
c) Obtenga las expresiones de las constantes A y B.
d) Determine la parte imaginaria de la permitividad del dieléctrico.
e) Escriba la relación constitutiva $\vec{D}(\vec{E})$ en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo correspondiente al material dieléctrico que rellena el tubo.

Nota: $\int_0^a r g^2(r)\,dr = a^2$

Septiembre-03

II-17 A) Una estación de telecomunicaciones situada en órbita terrestre (ε_0), genera un campo electromagnético monocromático (f_0 = 1 GHz) cuyas amplitudes complejas en coordenadas esféricas, se pueden aproximar, para $r \geq 10$ metros, mediante:

$\vec{E} = 600 \cos\theta \dfrac{e^{-j\beta r}}{r}\hat{\theta}$ (V/m) y $\vec{H} = 600 \cos\theta \dfrac{e^{-j\beta r}}{\eta_0 r}\hat{\varphi}$ (A/m) siendo $\beta = w\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ y η_0 la impedancias intrínseca del vacío ($\eta_0 = 120\ \pi(\Omega)$). Sabiendo que el valor de la potencia media entregada por las fuentes es de 3 kW:

A1) Calcule la potencia disipada en la estructura de la estación (toda la estación se encuentra contenida en una zona de $r \leq 5$ metros).

A2) Si una nave espacial que se acerca a la estación necesita recibir, para establecer comunicación, una densidad de potencia superior a 10^{-12} W/m^2

¿A qué distancia se podrá iniciar la comunicación si la nave está sobre la vertical de la estación (eje Z)? ¿A qué altura sobre el plano XY se podrá iniciar la comunicación si la estación ve a la nave bajo un ángulo $\theta = 60^\circ$?

(Continúa)

II-17 Continuación:

B) Una onda plana homogénea monocromática que se propaga por un medio dieléctrico de permeabilidad μ_0 a una frecuencia f_0 = 1GHz tiene un campo eléctrico y magnético de los que se conoce:

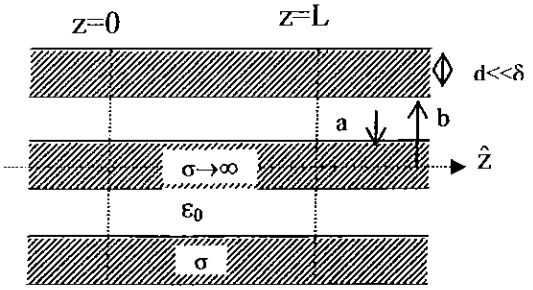
$$\vec{E}(\vec{r}=0)=\vec{E}_0=j(\hat{x}+\hat{y})\,(\text{V/m})$$

$$\vec{H}(\vec{r}=0)=\vec{H}_0=\frac{j}{40\pi}(\hat{y}-\hat{x}-2\hat{z})\,(\text{A/m})$$

B1) Calcule la dirección de propagación y el valor de la permitividad del medio.
B2) Calcule las expresiones completas de los campos eléctrico y magnético
B3)Calcule la potencia transmitida por la onda.

Marzo-04

II-18 Se quiere dar cobertura de telefonía móvil a los pasajeros del metro madrileño. Para ello se decide instalar un cable coaxial, indefinido (ver figura), del que se va a estudiar una porción de cable de longitud L, con un conductor interior que puede considerarse perfecto y un conductor exterior de conductividad σ. Por este cable se propaga un campo del que se conoce, en toda la región del dieléctrico ($a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le L$), estas componentes:



$$\vec{E}_r=\frac{A}{r}e^{-\gamma z}\hat{r} \qquad \vec{E}_\varphi=0 \qquad \vec{H}_\varphi=\frac{A}{r\eta_0}e^{-\gamma z}\hat{\varphi} \qquad \vec{H}_z=0$$

conocidos A, valor complejo, y $\gamma=\alpha+j\beta$.

También se conoce una buena aproximación para el campo eléctrico tangencial al conductor exterior en r = b: $\vec{E}_{//}(r=b)=\frac{(1+j)}{\sigma\delta}\frac{A}{b\eta_0}e^{-\gamma z}(-\hat{z})$ donde el parámetro δ es la profundidad de penetración en el conductor.

A) Calcule la potencia transmitida a través del dieléctrico en el plano z = 0.
B) Calcule la potencia transmitida a través del dieléctrico en el plano z = L.
C) Calcule la potencia que entra en el conductor exterior ($r = b$, $0 \le z \le L$) por dos métodos diferentes.
D) Apoyándose en el resultado anterior, deduzca la expresión de α en función del resto de parámetros.
E) Sabiendo que el valor de potencia que tiene que radiar la porción de cable de longitud L para establecer la comunicación con un terminal móvil es de W_0 vatios.
   E1) ¿Qué potencia se disipará en el tramo del conductor exterior en estas condiciones?
   E2) Suponiendo que la potencia en el conductor decrece como la de una onda plana homogénea, ¿qué espesor d tiene el conductor exterior?

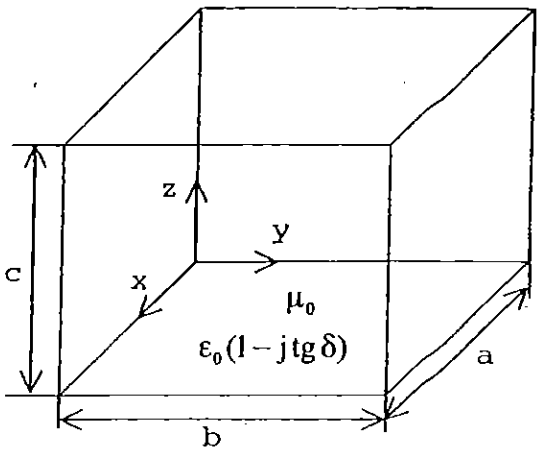
Nota: $\gamma_\sigma=\frac{1+j}{\delta}$

Junio-04

II-20

La figura representa un silo con forma de paralelepípedo para el secado de grano de dimensiones **a** x b x c (m^3). Se considera que cuando el silo está relleno de grano las características dieléctricas del mismo son: $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)$ y $\mu = \mu_0$.

Se conoce que el valor del campo eléctrico monocromático de pulsación ω_0 en el recinto, producido por unas fuentes situadas fuera del mismo, vale:



$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sh}(\gamma z)\hat{y} \quad \left(V/m\right) \quad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c \end{cases}$$

siendo E_0 una constante real y γ una constante compleja .

-¿Por cuál de las paredes del recinto penetra energía electromagnética al mismo?
- Calcule la expresión del valor medio de potencia que penetra en el recinto.
- ¿Qué ocurre con dicha expresión si la constante γ es imaginaria pura ($\gamma = j\beta$)?

Nota: $$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Un satélite situado en órbita geoestacionaria (35000 *km* de la tierra) en la posición orbital $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ respecto a un sistema de coordenadas situado en la superficie terrestre, emite una señal de 10 GHz. Medimos dicha señal en el origen de coordenadas y presenta las siguientes características: polarización elíptica positiva, relación axial 2 y campo eléctrico máximo de 1 (*mV/m*) en la dirección $\hat{x}$. Escriba la expresión compleja del campo en el origen. Calcule la densidad de potencia en dicho punto.

II-26

1) Dadas las expresiones del campo eléctrico de tres ondas que se propagan por un medio dieléctrico sin pérdidas:

$$1)\quad \vec{E} = (\hat{z} - f\,\hat{y} + j\sqrt{f}\,\hat{x})\; e^{-j\beta\,\hat{n}\cdot\vec{r}}$$
$$2)\quad \vec{E} = 30\,\pi\,(\hat{z} - \hat{y} + j\hat{x})\; e^{-j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon}\,\hat{n}\cdot\vec{r}}$$
$$3)\quad \vec{E} = \pi\,(\hat{z} - x\,\hat{y} + j\sqrt{f}\,\hat{x})\; e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\,\hat{n}\cdot\vec{r}}$$

indique, razonando las respuestas, qué expresiones pueden corresponderse con ondas TEM, cuáles con ondas planas homogéneas y cuál de ellas con una onda plana homogénea monocromática.

Si para la O.P.H.M. se conoce que la amplitud del campo magnético viene dado por la expresión:

$$\vec{H}(\vec{r}=0) = \vec{H}_0 = \hat{x} + \frac{j}{2}(\hat{y} - \hat{z}),$$

obtenga la dirección de propagación y la permitividad del dieléctrico. Considerando que los campos eléctrico y magnético están dados en V/m y A/m, respectivamente, calcule la potencia que atraviesa una superficie de 10 m^2 contenida en el plano z=0.

---

2) Considere una esfera dieléctrica de radio R, centrada en el origen de coordenadas, de permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0\,(1 - j\,tg\delta)$, permeabilidad μ_0 y conductividad nula. En su interior existe un campo electromagnético monocromático de frecuencia f_0 del que se conoce la intensidad del campo eléctrico en coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = \frac{A\,e^{-\gamma r}}{r}\,\hat{\varphi} \quad (V/m) \qquad en \quad r \le R$$

donde $\gamma = \alpha + j\beta$, y A es una constante compleja. Se sabe además que el valor medio de la densidad de potencia intercambiada en el interior de la esfera es:

$$<-\vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)> \;=\; \frac{1}{R\,r^2} \quad (W/m^3) \qquad en \quad r \le R$$

-. Compruebe que existen fuentes de campo en el interior de la esfera y obtenga la expresión de la potencia entregada por dichas fuentes.

-. Obtenga la potencia que atraviesa la superficie de la esfera dieléctrica.

II-27

Dada la ecuación de balance de energía en forma integral en el dominio transformado, donde el subíndice "c" indica que la magnitud es compleja:

$$\int_V -\vec{J}^*_{c,fuente}\cdot\vec{E}_c\,dv=\oint_S(\vec{E}_c\times\vec{H}^*_c)\cdot d\vec{S}+j\omega\int_V\left(\mu_c\vec{H}_c\cdot\vec{H}^*_c-\varepsilon^*_c\vec{E}_c\cdot\vec{E}^*_c\right)dv+\int_V\sigma\vec{E}_c\cdot\vec{E}^*_c\,dv$$

indique las condiciones que cumple el medio material en cuanto a sus relaciones constitutivas para poder escribir dicha ecuación (rodee con un círculo la respuesta correcta)

	Linealidad	isotropía	Dispersión espacial	Variación temporal	Dispersión temporal
$\vec{D}=\vec{D}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right]$	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No
$\vec{B}=\vec{B}\left[\vec{H}(\vec{r},t)\right]$	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No
$\vec{J}=\vec{J}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right]$	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No	SI - No

Particularice la ecuación anterior para la situación en la que no hay fuentes en el volumen V y la superficie S que encierra V es toda ella de conductor perfecto. Desarrolle las partes real e imaginaria de la ecuación para esta situación y determine los valores del campo electromagnético ($\vec{E}_c$, $\vec{H}_c$) en V.

Considere una fuente de campo monocromático (frecuencia 1.5 GHz) situada en el origen de un sistema de coordenadas esféricas. Las expresiones del campo electromagnético generado, para distancias mayores a 10 m, son las indicadas a la derecha. siendo A una constante compleja, β_0 real y $\eta_0=120\pi(\Omega)$.

$$E_\vartheta=A\,sen\,\varphi\,sen\,\vartheta\,\frac{e^{-j\beta_0 r}}{r}\qquad H_\varphi=A\,sen\,\varphi\,sen\,\vartheta\,\frac{e^{-j\beta_0 r}}{\eta_0 r}\qquad\begin{cases}r\geq 10\,m\\ 0\leq\vartheta\leq\pi/2\\ 0\leq\varphi\leq\pi\end{cases}$$

Determine:

- la magnitud y unidades de A, sabiendo que la potencia generada por la fuente es de 5 (W) y no hay pérdidas en el medio. ¿Qué puede decir sobre la fase de la constante compleja A?
- la dirección en la que se produce el máximo de la densidad de potencia.
- la densidad de potencia a 1 km de la antena en la dirección del máximo. ¿Cuál es el tipo de polarización de la onda en este punto?
- Sabiendo que un receptor necesita de una densidad de potencia superior a 10^{-4} (mW/m^2), determine la mayor distancia a la que funciona en la dirección del máximo.

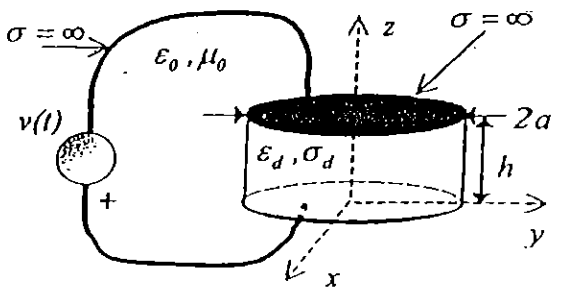
Nota : $\int sen^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sen2x$; $\int sen^3 x\,dx=-\frac{1}{3}\left(sen^2 x+2\right)cos\,x$

II-28

Se considera un condensador formado por dos placas paralelas circulares de radio a y conductor perfecto separadas por un dieléctrico homogéneo de permitividad ε_d, conductividad σ_d y permeabilidad μ_0. La única fuente de campo es un generador de tensión de valor instantáneo $v(t)$ conectado a las placas del condensador. Se obtienen los siguientes valores aproximados de campo electromagnético en el dieléctrico expresados en coordenadas cilíndricas:

$$\bar{E}(t)=\frac{v(t)}{h}\hat{z} \quad en \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le \varphi\le 2\pi \\ 0\le z\le h \end{cases}$$

$$\bar{H}(t)=\left\{\frac{a\,\sigma_d}{2\,h}v(t)+\frac{a\,\varepsilon_d}{2\,h}\frac{d[v(t)]}{dt}\right\}\hat{\varphi} \quad en \begin{cases} r=a \\ 0\le \varphi\le 2\pi \\ 0\le z\le h \end{cases}$$



- Escriba la relaciones constitutivas $\bar{D}=\bar{D}[\bar{E}]$ y $\bar{J}=\bar{J}[\bar{E}]$ para el dieléctrico en el dominio del tiempo y de la frecuencia.
- Obtenga la potencia instantánea disipada en el dieléctrico.
- Determine la expresión que proporciona la variación con el tiempo de la energía electromagnética almacenada en el dieléctrico ($\frac{\partial W_{em}}{\partial t}$) aplicando la ecuación de balance de energías en el dominio del tiempo (teorema de Poynting):

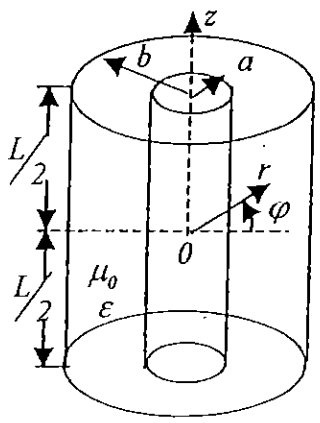
$$\int_V -\bar{J}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\,dv=\oint_S \bar{E}(\bar{r},t)\times\bar{H}(\bar{r},t)\cdot d\bar{S}+\int_V\left(\bar{E}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{D}(\bar{r},t)}{\partial t}+\bar{H}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t}\right)dv$$

- Represente sobre la estructura y de forma cualitativa las líneas de campo correspondientes al vector de Poynting.

Consideramos a continuación que la tensión aplicada al condensador es sinusoidal de valor $v(t)=V_0\cos(2\pi f_0 t)$.

- Obtenga las amplitudes complejas del campo eléctrico en el interior del dieléctrico y del campo magnético en la superficie $r=a$.
- Obtenga el valor medio de la energía eléctrica almacenada. Compruebe que el valor medio de la energía magnética almacenada que se obtiene aplicando la parte imaginaria del teorema de Poynting es nulo (este valor es debido a la aproximación utilizada en la obtención de los campos).

II-29



Considere un bote coaxial cerrado en ambos extremos, construido todo él con conductores perfectos y relleno de un dieléctrico homogéneo de permitividad ε y permeabilidad μ_0 y sin fuentes en su interior.

Dada la expresión del campo eléctrico monocromático:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r}\cos(pz)\hat{r} \quad \left(V/m\right) \quad \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -L/2 \le z \le L/2 \end{cases}$$

siendo E_0 una constante compleja y p un parámetro.

a) Compruebe que dicho campo cumple las condiciones de contorno de la geometría dada, siempre que "p" tome los valores adecuados. ¿Cuáles son éstos?

b) Determine la expresión del campo magnético correspondiente.

c) Aplicando en el volumen anteriormente definido la ecuación de Balance de Energía en forma integral en el dominio transformado:

$$\int_V -\vec{J}^*_{fuente}\cdot\vec{E}dv = \oint_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{S} + j\omega\int_V \left(\mu_0\vec{H}\cdot\vec{H}^* - \varepsilon^*\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)dv$$

Nota:
en coordenadas cilíndricas

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r}/r & \hat{\varphi} & \hat{z}/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

considere las siguientes situaciones:

c1) el dieléctrico que rellena el bote tiene una permitividad $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ y

c2) el dieléctrico que rellena el bote tiene una permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0$;

determine el valor de la amplitud E_0 en ambas situaciones.

Explique el significado de los resultados obtenidos.

II-30

Ejercicio 1 (68 %)

La figura representa la sección longitudinal de un cable coaxial de conductores perfectos y dieléctrico ε_0, cargado con una carga coaxial a partir de z=-d. Dicha carga está formada por un tramo de coaxial cortocircuitado en z=0, con los mismos radios de conductor interior y exterior (a y b respectivamente) que el coaxial al que carga y de longitud d. Se desconoce el valor de las conductividades de los conductores que forman la carga (σ_1, σ_2 y σ_3). El material dieléctrico homogéneo que rellena la carga coaxial es de permeabilidad μ_0 y permitividad ε desconocida. Se sabe que los campos están producidos por un generador externo de frecuencia f_0 al inicio de la estructura. Los valores de los campos monocromáticos en la región dieléctrica de la carga coaxial ($a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-d \le z \le 0$) son:

$$\vec{E} = -\frac{C\,z}{r}\,\hat{r} + C\ln\frac{b}{r}\,\hat{z} \qquad \vec{H} = C\,\frac{a}{R\,r}\ln\frac{b}{a}\,\hat{\varphi}$$

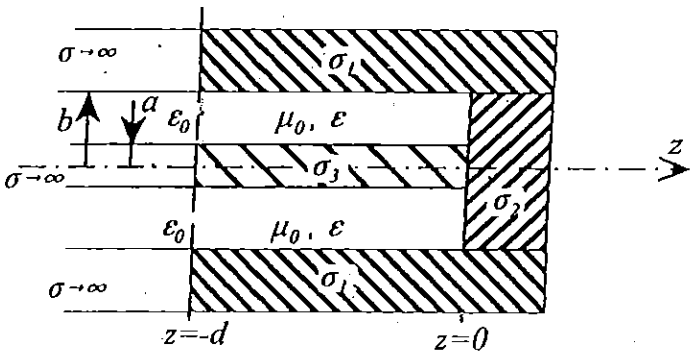
donde C es una constante compleja, R un valor real positivo y todas las magnitudes están dadas en el Sistema Internacional de unidades.

A) A la vista de los campos dados deduzca qué conductores no son perfectos.

B) Determine el valor medio de la potencia que el generador aporta a la estructura.

C) Deduzca si el dieléctrico de la carga coaxial tiene o no dispersión temporal.

D) Describa, mediante razonamientos energéticos y sin realizar las operaciones, el procedimiento que seguiría para obtener el valor de ε si es que



es posible con los datos del enunciado. Escriba una relación constitutiva $\vec{D}=\vec{D}[\vec{E}]$ válida en el dieléctrico de la carga coaxial, en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Ejercicio 2 (32 %)

Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia f=3 GHz se propaga en un medio de permeabilidad μ_0 y permitividad $\varepsilon_0(1-j\,0.01)$. Su dirección de propagación es $\hat{n}=\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$, tiene polarización elíptica a izquierdas de relación axial 2 y su campo eléctrico máximo, de valor 3 V/m, se produce en dirección $\hat{y}$.

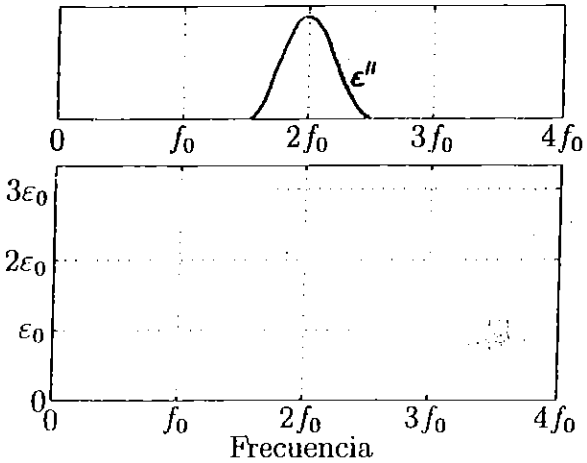
A) Escriba la expresión de su campo eléctrico en el dominio de la frecuencia.

B) Calcule el valor de la densidad de potencia transmitida en el frente de onda que contiene al origen de coordenadas.

C) ¿Qué atenuación (en dB) sufre la onda en un trayecto de 2 m partiendo del origen según la dirección de propagación?

II-31

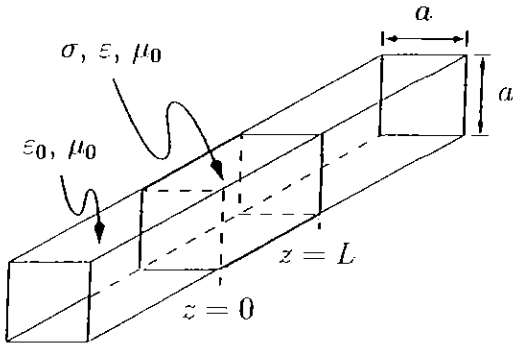
En la parte superior de la primera figura se representa la variación con la frecuencia de parte imaginaria de la permitividad de un dieléctrico. Teniendo en cuenta que, a muy baja frecuecia ($f \ll f_0$), la parte real de la permitividad, ε', toma el valor $3\varepsilon_0$, y a muy alta frecuencia ($f \gg 4f_0$) toma el valor ε_0, dibuje cualitativamente sobre los ejes de la parte inferior de esa figura la variación de ε' con la frecuencia.



En la segunda figura se muestra un tubo rectangular ($a = 20$ mm), cuyas paredes se pueden considerar de conductor perfecto, que está relleno en un tramo de longitud L del dieléctrico antes mencionado.

A la frecuencia f_0 (considere ahora $f_0 = 10$ GHz) una fuente en $z < 0$ produce un campo electromagnético en la estructura, del que se conoce:

$$\vec{E}\Big|_{z=0} = 23{,}9j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y} \quad \text{(V/m)}$$
$$\vec{H}\Big|_{z=0} = -0{,}0419j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x} + 0{,}267j \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z} \quad \text{(A/m)}$$
$$\vec{E}\Big|_{z=L} = -23{,}6j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y} \quad \text{(V/m)}$$
$$\vec{H}\Big|_{z=L} = 0{,}0414j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x} + 0{,}264j \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z} \quad \text{(A/m)}$$



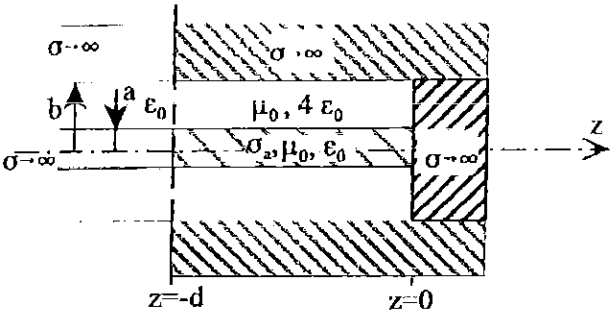
Teniendo en cuenta que el dieléctrico tiene una conductividad $\sigma = 10^{-3}$ (S/m) calcule el valor medio de la energía eléctrica almacenada en él (región $0 \leq z \leq L$).

Nota: $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m)

II-32

La figura representa la sección longitudinal de un cable coaxial de conductores perfectos y dieléctrico ε_0, cargado con una carga coaxial a partir de z=-d. Dicha carga está formada por un tramo de coaxial cortocircuitado en z=0, con los mismos radios de conductor interior y exterior (a=4 cm y b=9,2 cm respectivamente) que el coaxial al que carga. Todos los conductores exteriores de la carga coaxial pueden considerarse perfectos, mientras que el conductor interior ($r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-d \le z \le 0$) está formado por un material que tiene una conductividad finita σ_a desconocida, permeabilidad μ_0 y permitividad ε_0. El dieléctrico que rellena la carga coaxial ($a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-d \le z \le 0$) es de permeabilidad μ_0 y permitividad $\varepsilon = 4\varepsilon_0$. Se sabe que los campos están producidos por un generador externo de frecuencia f_0 conectado al inicio de la estructura ($z \ll -d$). Se conocen los valores de los campos monocromáticos en la superficie z=-d por la izquierda ($a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$):

$$\vec{E} = \frac{1}{r}\,\hat{r} + 10\,\ln\left(\frac{0{,}092}{r}\right)\hat{z} \qquad \vec{H} = \frac{20}{3\,r}\,\hat{\varphi}$$



donde todas las magnitudes están dadas en el Sistema Internacional de unidades.

A) Calcule la potencia que atraviesa el plano z=-d. Dibuje cualitativamente el valor medio del vector de Poynting en toda la estructura representada en la figura.

B) Sabiendo que el valor medio de la energía almacenada por el campo eléctrico en el conductor interior ($r<a$, $0<\varphi<2\pi$, $-d \le z \le 0$) es de $7{,}72 \cdot 10^{-14}$ Julios, deduzca el valor de la conductividad σ_a.

C) Razone si podría calcular, con los datos disponibles, el valor medio de la energía almacenada por el campo magnético en el conductor interior. Deduzca, si es posible con los datos del enunciado, cuál es la relación entre los valores medios de las energías almacenadas por el campo eléctrico y magnético en toda la carga coaxial ($r<b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-d \le z \le 0$).

D) A partir de la segunda ecuación de Maxwell:

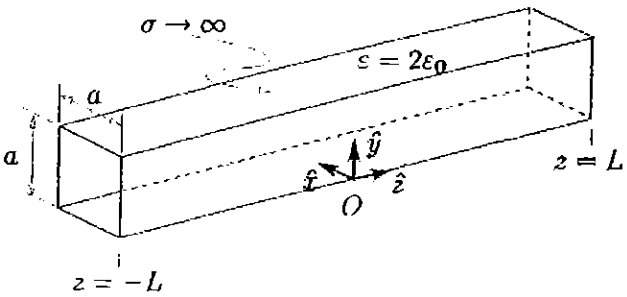
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{fuentes} + \sigma\,\vec{E} + j\,\omega\,\varepsilon\,\vec{E}$$

deduzca la expresión de la ε equivalente de un material. Considerando $\sigma_a = 10^3$(S/m), calcule el valor de la permitividad equivalente del conductor interior para f_0= 100 kHz.

E) Escriba las relaciones constitutivas $\vec{D}=\vec{D}[\vec{E}]$, $\vec{B}=\vec{B}[\vec{H}]$ y $\vec{j}=\vec{j}[\vec{E}]$ válidas en el conductor interior de la carga coaxial, en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

Nota: $\epsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ (*F/m*)

II-33



La figura muestra un tubo metálico de sección cuadrada, dimensiones $a = 10$ mm y $L = 3a$. El tubo está abierto en $z = L$ y $z = -L$, sus cuatro paredes laterales pueden considerarse de conductor perfecto, y está relleno de un dieléctrico de permitividad $2\varepsilon_0$ y permeabilidad μ_0.

El campo electromagnético en el interior del tubo está generado por una fuente monocromática localizada en $z < -L$, de frecuencia $f_0 = 15$ GHz. Ese campo puede escribirse como la superposición de dos ondas planas homogéneas, ambas con polarización lineal según $\hat{x}$ e intensidad máxima del campo eléctrico de valor $E_M = 60$ (V/m). La primera se propaga en la dirección $\frac{\hat{z}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$ y la segunda en la dirección $\frac{\hat{z}-\hat{y}}{\sqrt{2}}$. Las dos ondas están desfasadas de tal modo que, en el origen del sistema de coordenadas, cuando el campo eléctrico de una de las ondas alcanza su intensidad máxima en dirección $+\hat{x}$ la otra alcanza ese máximo en dirección $-\hat{x}$.

Escriba el campo eléctrico superposición de ambas ondas, y compruebe que cumple las condiciones de contorno del problema.

Calcule el valor medio de la potencia entregada por la fuente al tubo metálico (el valor numérico, indicando las unidades correspondientes).

Calcule la potencia que abandona el tubo por el plano $z = L$ (el valor numérico, indicando las unidades correspondientes).

Calcule el valor medio de la energía eléctrica almacenada en el interior del tubo (el valor numérico, indicando las unidades correspondientes).

Explique al menos dos procedimientos diferentes para calcular el valor medio de la energía magnética almacenada en el interior del tubo, a partir de expresiones y resultados obtenidos en cuestiones anteriores.

El Teorema de Poynting (la Ecuación de Balance de Energía) en forma diferencial y en el dominio del tiempo es

$$p_{int}(\vec{r},t) = \nabla\cdot\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right) + \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

A partir de esta expresión deduzca la relación entre la densidad de energía almacenada y la divergencia del vector de Poynting en un punto cualquiera del interior del tubo.

Nota: $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ (F/m), $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m).

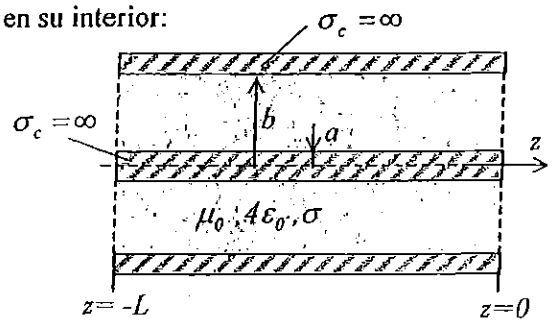
II-34

Ejercicio 1 (70%)

Considere un tramo de cable coaxial de longitud L, formado por conductores perfectos de radios a y b respectivamente, y sin fuentes en su interior. El coaxial está relleno de un material dieléctrico homogéneo con valores μ_0 , $4\varepsilon_0$ y conductividad $\sigma = 10^{-2}$ (S/m).

Se conoce el valor del campo eléctrico monocromático (f_0 = 2 GHz) en su interior:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} sh(\gamma z)\hat{r} \quad \left(V/m\right) \quad \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -L \le z \le 0 \end{cases}$$



siendo E_0 una constante real y γ una constante compleja.

1) Compruebe que dicho campo cumple las condiciones de contorno en $r = a$ y $r = b$.
2) Determine el campo magnético en el recinto.
3) Determine la densidad de corriente superficial en el conductor interior del coaxial.
4) Calcule el valor de la tangente del ángulo de pérdidas del material dieléctrico.
5) Calcule el valor medio de la potencia que entra en el recinto coaxial.
¿Qué ocurre en las superficies $z = 0$ y $z = -L$?
¿Qué diría de la situación planteada si la constante γ fuera imaginaria?
6) Teniendo en cuenta que la constante γ es compleja ($\gamma = \alpha + j\beta$), y a partir de consideraciones energéticas, escriba dos ecuaciones necesarias para determinar su valor. Nota: No las resuelva.

Nota: $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \left(F/m\right)$ $\qquad \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{r}/r & \hat{\varphi} & \hat{z}/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$

Ejercicio 2 (30%)

Escriba la amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea de frecuencia f_0 que se propaga en el vacío en dirección $(\hat{x} + \hat{y})$ con polarización lineal y campo eléctrico con valor máximo E_1 en dirección $\hat{z}$.

Escriba también, la amplitud compleja del campo eléctrico de otra onda plana homogénea de frecuencia f_0 que se propaga en el vacío en dirección $(\hat{x} - \hat{y})$ con polarización lineal y campo eléctrico con valor máximo E_2 en dirección $(\hat{x} + \hat{y})$.

Demuestre si la suma de ambas ondas es o no una onda plana homogénea.

Calcule el valor medio del vector de Poynting de la superposición de ambas ondas.

II-35

La figura representa un corte longitudinal de un tubo de conductor perfecto de sección circular y radio b, a continuación del cual se sitúa, tal como se indica en la figura, un cable coaxial también de conductores perfectos y radios a y b. La estructura está rellena con los siguientes medios materiales:

-. Región 1 ($-\infty < z < 0$) : Permitividad ε_0 y conductividad σ_1 =3 S/m.
-. Región 2 ($0 < z < d$): Características del vacío.
-. Región 3 ($d < z < \infty$): Coaxial relleno con dos dieléctricos sin pérdidas y permitividades:

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \text{ en } \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 \text{ en } \begin{cases} a \le r \le b \\ \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

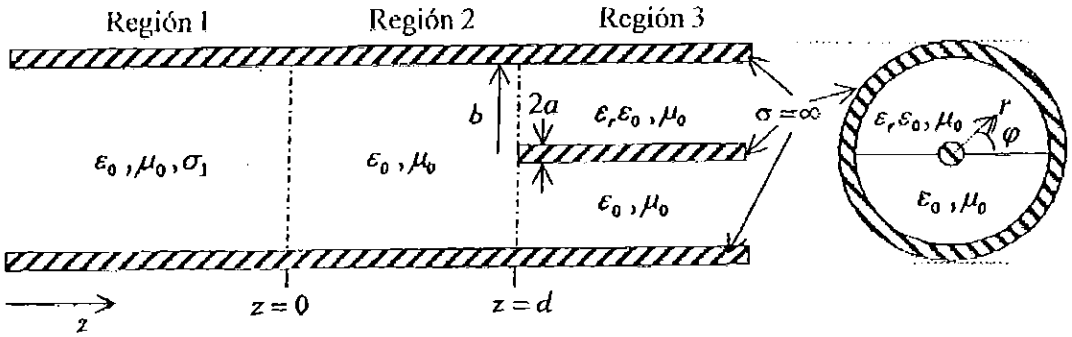
En el interior de la estructura existe un campo monocromático de frecuencia f_0 =1 GHz generado por unas fuentes situadas en la región 2, del que conocemos la amplitud compleja del campo magnético en z=0: $\vec{H}(z=0) = \hat{\varphi}\, H_0\, r \quad (A/m)$.

Se conoce además una expresión aproximada de los campos eléctrico y magnético en la región 3:

$$\vec{E}_3(z,t) = \hat{r}\, \frac{V_0}{r \ln(b/a)}\, sen(\omega_0 t - \beta z) \quad (V/m)$$

$$\vec{H}_3(z,t) = \hat{\varphi}\, \frac{2V_0}{\eta_0\, r \ln(b/a)}\, sen(\omega_0 t - \beta z) \quad (A/m) \qquad \text{en} \quad \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ d < z < \infty \end{cases}$$

-. Escriba en el dominio de la frecuencia las expresiones del desplazamiento o inducción eléctrica, $\vec{D}$ en los dieléctricos del coaxial (región 3). Compruebe que el campo eléctrico cumple las condiciones en los puntos no ordinarios del plano $z=2d$.
-. ¿Cómo clasificaría el medio material que rellena el tubo en la región 1? Obtenga una expresión aproximada del campo eléctrico en la superficie $z=0$ y en la región 1 del tubo.
-. Obtenga la expresión de la potencia suministrada por las fuentes de campo.
-. Obtenga el valor de la permitividad relativa ε_r aplicando el Teorema de Poynting en el tramo de coaxial comprendido entre $z=d$ y $z=2d$.



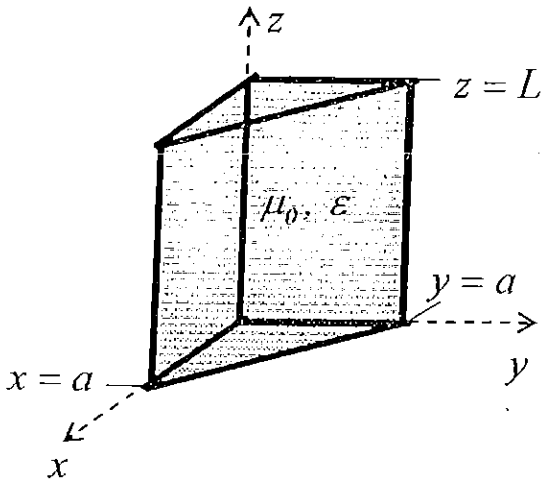
Nota: $\varepsilon_0 = (1/36\pi)\, 10^{-9} \quad (F/m)$

II-36

Desarrolle la expresión $\bar{E}(\bar{r},t)\cdot\dfrac{\partial\bar{D}(\bar{r},t)}{\partial t}$ para obtener $\dfrac{1}{2}\varepsilon(\bar{r})\dfrac{\partial\bar{E}^2(\bar{r},t)}{\partial t}$; indicando las condiciones que debe satisfacer la relación constitutiva $\bar{D}(\bar{r},t)=\bar{D}[\bar{E}(\bar{r},t)]$ en términos de linealidad, isotropía, dispersión espacial, dispersión temporal, variación temporal y homogeneidad.

Considere el recinto de la figura (cilindro recto de base triángulo rectángulo), sin fuentes y relleno con un material dieléctrico homogéneo de permitividad dieléctrica $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ y permeabilidad μ_0. En su interior existe un campo electromagnético monocromático de frecuencia f_0, que viene dado por:

$$E_x = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)sen\left(\frac{\pi y}{a}\right)sh(\gamma z) \quad (V/m)$$
$$E_y = -A\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)sh(\gamma z) \quad (V/m)$$
$$E_z = 0$$
$$H_x = B\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)ch(\gamma z) \quad (A/m)$$
$$H_y = B\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)sen\left(\frac{\pi y}{a}\right)ch(\gamma z) \quad (A/m)$$
$$H_z = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)sh(\gamma z) \quad (A/m)$$



siendo A, B y γ constantes complejas.

- Compruebe que el campo cumple la condición de conductor perfecto en la superficie del recinto definida por la dirección perpendicular: $\hat{x}+\hat{y}$.
- Determine las superficies del recinto por las que podría penetrar energía electromagnética al mismo.

- Determine si existe potencia entrante al recinto en las siguientes tres situaciones particulares:
  1) γ real, B real y A imaginaria.
  2) γ imaginaria; B imaginaria y A imaginaria.
  3) γ compleja, B compleja y A compleja.

No es necesario que resuelva las integrales.

Nota: $sh(ju)=j\,sen(u)$ $\quad ch(ju)=\cos(u)$

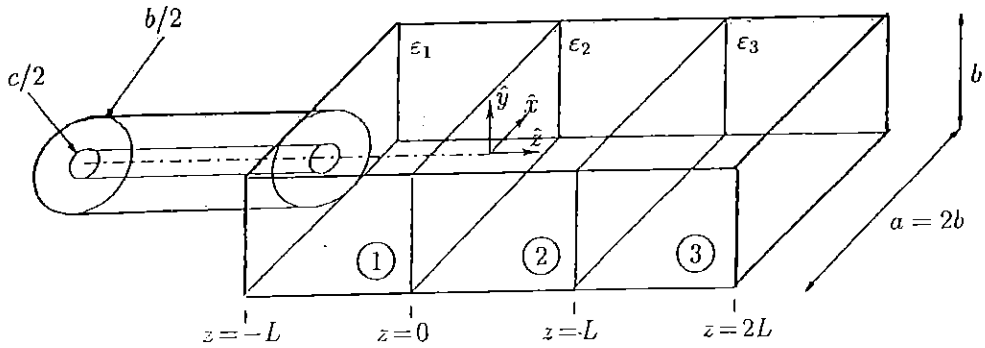
Ingenieros de Telecomunicación

CAMPOS ELECTROMAGNETICOS I

II-37

Primer ejercicio (75 %)

La figura muestra una caja de conductor perfecto y dimensiones $a \times b \times 3L$ ($a = 2b$), abierta en $z = 2L$ y conectada a un coaxial en $z = -L$. El coaxial es también de conductor perfecto, y sus conductores tienen diámetros b y c, con $b/c = e = 2{,}718\ldots$. La caja está dividida en tres regiones y rellena de tres materiales diferentes, todos ellos con permeabilidad μ_0 y permitividades ε_1, ε_2 y ε_3. Se sabe, además, que en una de las tres regiones hay fuentes que generan campos de pulsación ω_0, y que fuera de la caja y del coaxial también puede haber fuentes generando campos de la misma pulsación.



Se conoce el campo en el interior del coaxial, cuyo valor, en coordenadas cilíndricas (r, φ, z), es:

$$\vec{E} = \frac{E_0 b}{8r}\sqrt{\frac{c_0}{L\omega_0}}e^{-j\beta z}\hat{r} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{E_0 b}{8r\mu_0\sqrt{c_0 L\omega_0}}e^{-j\beta z}\hat{\varphi} \qquad \begin{cases} c/2 \le r \le b/2 \quad ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z \le -L \end{cases}$$

donde E_0 es un valor complejo, c_0 es la velocidad de la luz en el vacío y β es una constante real.

En la región (2) se conoce una buena aproximación a los valores de:

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1 - \frac{1+j}{4L}z\right]\hat{y} \quad ; \quad H_x = \frac{E_0}{4\mu_0 L\omega_0}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{z}{2L} + (j-1)\right] \qquad \begin{cases} -a/2 \le x \le a/2 \\ -b/2 \le y \le b/2 \\ 0 \le z \le L \end{cases}$$

Se conocen también los campos en el plano $z = 2L$ en coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{E} = \frac{jE_0}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{-5jE_0}{8\mu_0 L\omega_0}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x} + \frac{E_1}{8\mu_0 L\omega_0}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z} \qquad \begin{cases} -a/2 \le x \le a/2 \\ -b/2 \le y \le b/2 \\ z = 2L \end{cases}$$

donde E_1 es otro valor complejo.

Determine en cuál de las tres regiones, (1), (2) o (3), están las fuentes. Para las dos regiones en las que no hay fuentes escriba, justificándolo adecuadamente, la relación constitutiva $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, sin calcular el valor concreto de las permitividades.

Segundo ejercicio (25 %)

Escriba la expresión de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 3$ GHz que se propaga en dirección $\hat{y}$ por un medio caracterizado por $\mu = \mu_0$, $\varepsilon' = 4\varepsilon_0$ y $\varepsilon'' = \varepsilon_0/5$, que tiene polarización lineal en la dirección $\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$, y campo máximo en el origen ($\vec{r} = 0$) de valor $E_m = 10$ V/m.

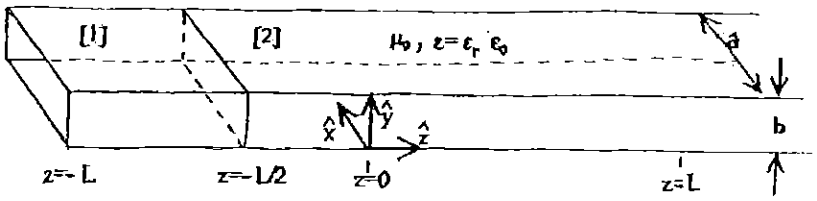
Escriba la expresión de una segunda onda plana homogénea monocromática, de la misma frecuencia, que se propaga por el mismo medio y en la misma dirección, y que tiene el mismo campo máximo en el origen, pero con polarización circular a derechas.

Calcule la intensidad en V/m del campo eléctrico de la segunda onda (sin indicar la dirección en que se produce) en el punto de coordenadas $x = 6$, $y = 1$, $z = 8$ m.

Abril - 2010

II-38

Considere un tubo metálico rectangular indefinido, de longitud infinita según $z>0$, de dimensiones a, b, relleno de un dieléctrico de permitividad eléctrica $\varepsilon = \varepsilon_r\ \varepsilon_0$ y permeabilidad magnética μ_0.



Se sabe que sólo hay fuentes en la región [1] ($-L < z < -L/2$). Estas fuentes, monocromáticas de frecuencia f_0, producen los siguientes campos en la región [2] del tubo:

$$\vec{H} = A_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{-\gamma z}\ \hat{z} - A_1\ sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{-\gamma z}\ \hat{x} \quad (A/m)$$

$$\vec{E} = A_2\ sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{-\gamma z}\ \hat{y} \quad (V/m) \qquad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ z \ge -L/2 \end{cases}$$

con A_0, A_1 y A_2 constantes complejas y $\gamma = \alpha + j\beta$ (A_0, A_1, A_2, α y β conocidas y no nulas).

A) Compruebe que los campos dados cumplen las condiciones de contorno de conductor perfecto en las paredes metálicas.

B) Calcule la expresión de la potencia que atraviesa el plano z=0. ¿Qué condición se debe cumplir para que la expresión obtenida tenga un significado físico válido?

C) Calcule la expresión de la potencia que atraviesa el plano z=L. ¿Qué condiciones deben cumplir las constantes A_1, A_2 y α para que la expresión obtenida tenga un significado físico válido?

D) Escriba la relación constitutiva $\vec{D}=\vec{D}[\vec{E}]$ para el dieléctrico que rellena el tubo, en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

E) Considere ahora un nuevo tubo de iguales dimensiones relleno con un nuevo dieléctrico de permitividad relativa ε_r real desconocida. Las mismas fuentes del apartado anterior generan los mismos campos anteriores en la región [2] y, adicionalmente, hay un campo eléctrico de valor aproximado:

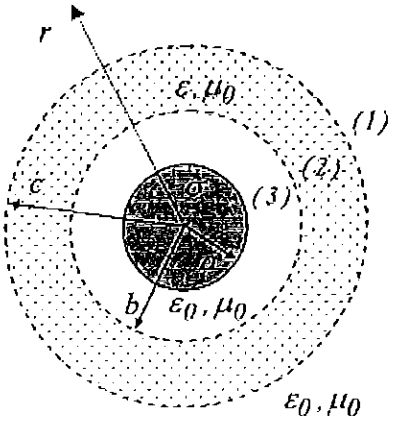
$$\vec{E}(x=0) = \vec{E}(x=a) = -A_3\ e^{-\gamma z}\ \hat{y} \quad (V/m) \qquad \begin{cases} 0 \le y \le b \\ z \ge -L/2 \end{cases}$$

siendo A_3 una constante compleja conocida no nula. Aplique en esta nueva situación el Teorema de Poynting en el tramo del tubo desde z=0 a z=L para obtener:

E1) La expresión de α en función de A_0, A_1, A_2, A_3 y a. ¿A qué fenómeno físico se debe dicho valor (qué ha cambiado respecto a la situación original)?

E2) La diferencia entre los valores medios de las energías magnética y eléctrica almacenadas. Razone si tiene datos suficientes para obtener ε_r.

II-41



La figura representa una esfera metálica de radio a y conductividad σ rodeada por un casquete esférico que se extiende desde $r=b$ a $r=c$ compuesto por un material dieléctrico homogéneo, lineal e isótropo de permitividad conocida ε. La región entre el conductor y el dieléctrico, $a \le r \le b$, y la región exterior, $r \ge c$, tienen la permitividad del vacío. Se sabe que en sólo una de las regiones existen unas fuentes monocromáticas de campo de frecuencia f_0, que suministran una potencia de 300 vatios, y que generan un campo electromagnético del que se conocen las expresiones en coordenadas esféricas, y unidades del sistema internacional, en las siguientes regiones:

• Región exterior, $r \ge c$:

$\bar{E}_1 = A\, sen\varphi \; \dfrac{e^{-j\beta_1 r}}{r}\hat{\theta}$; $\bar{H}_1 = \dfrac{A}{\eta_0} sen\varphi \; \dfrac{e^{-j\beta_1 r}}{r}\hat{\varphi}$ con $\beta_1 = \omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $\eta_0 = 120\pi$, y donde A es una constante compleja desconocida.

• Región del dieléctrico, $b \le r \le c$:

$\bar{E}_2 = 120\, sen\varphi \left(\dfrac{e^{-j\beta_2 r} + \rho\, e^{+j\beta_2 r}}{r}\right)\hat{\theta}$; $\bar{H}_2 = sen\varphi \left(\dfrac{e^{-j\beta_2 r} - \rho\, e^{+j\beta_2 r}}{r}\right)\hat{\varphi}$ donde β_2 es una constante real conocida y ρ es una constante compleja.

Se sabe además que una expresión aproximada de los campos en la superficie del conductor es de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} &= E_\theta(\theta,\varphi)\hat{\theta} \\ \bar{H} &= \frac{(j-1)\sigma\delta}{2} E_\theta(\theta,\varphi)\hat{\varphi} \end{aligned}\right\} \text{ en } r=a$$

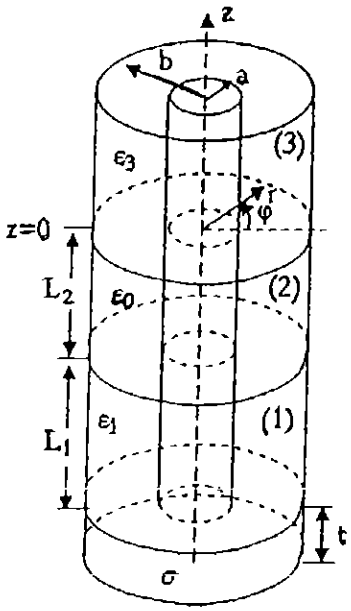
, donde δ es la profundidad de penetración del conductor, y $E_\theta(\theta,\varphi)$ es desconocido.

Obtenga la expresión de la constante A en función del resto de parámetros; calcule el valor del módulo de ρ y compruebe que es menor que la unidad.
Determine aplicando razonamientos energéticos:

-. En qué región se encuentran las fuentes de campo.
-. La relación constitutiva $\bar{D} = \bar{D}(\bar{E})$ del material dieléctrico en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, razonando la respuesta.
-. El valor de la potencia disipada en la esfera conductora.

II-42

La figura representa un cable coaxial de conductores ideales de radio interior a y exterior b respectivamente y siendo b/a=e (e = base del logaritmo neperiano). El cable está terminado en el plano $z=-(L_1+L_2)$ por un conductor de conductividad σ finita y espesor t mucho mayor que su profundidad de penetración δ.



La región (1) del coaxial, $-(L_1+L_2) \leq z \leq -L_2$, está rellena de un dieléctrico homogéneo, lineal e isótropo de permitividad conocida ε_1. La región (2) del coaxial, comprendida entre $-L_2 \leq z \leq 0$, está rellena de aire ε_0. La región (3) del coaxial, $z \geq 0$, está rellena de un dieléctrico homogéneo, lineal e isótropo de permitividad conocida ε_3. La permeabilidad magnética de todos los medios es μ_0.

Se sabe que en sólo una de las tres regiones dieléctricas existen unas fuentes monocromáticas de campo de frecuencia f_0, que suministran una potencia de 6π vatios, y que generan un campo electromagnético del que se conocen las expresiones en coordenadas cilíndricas, y unidades del sistema internacional, en las siguientes regiones:

- Región (1) de dieléctrico ε_1, $-(L_1+L_2) \leq z \leq -L_2$;

$\vec{E}_1 = \frac{A_1}{r} e^{\gamma_1(z+L_2)}\,\hat{r}$; $\vec{H}_1 = \frac{A_1}{r\sqrt{2}} e^{j\frac{3\pi}{4}} e^{\gamma_1(z+L_2)}\,\hat{\varphi}$, siendo $\gamma_1 = 4\pi^2(1+j)$ y A_1 una constante real desconocida.

- Región (3) de dieléctrico ε_3, $z \geq 0$:

$\vec{E}_3 = \frac{10}{r}\left(e^{-j\beta_3 z} + \frac{j}{\sqrt{2}} e^{+j\beta_3 z}\right)\hat{r}$; $\vec{H}_3 = \frac{1}{r}\left(e^{-j\beta_3 z} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{+j\beta_3 z}\right)\hat{\varphi}$, siendo β_3 una constante real conocida.

- En qué región se encuentran las fuentes del mencionado campo electromagnético.
- Obtenga el valor de la constante A_1.
- Razone si los medios (1) y (3) tienen pérdidas.
- La relación constitutiva $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ del material dieléctrico ε_3 en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo.
- El valor de la potencia disipada en el conductor situado en $z=-(L_1+L_2)$ (considere que $L_1=1/\pi^2$ m).

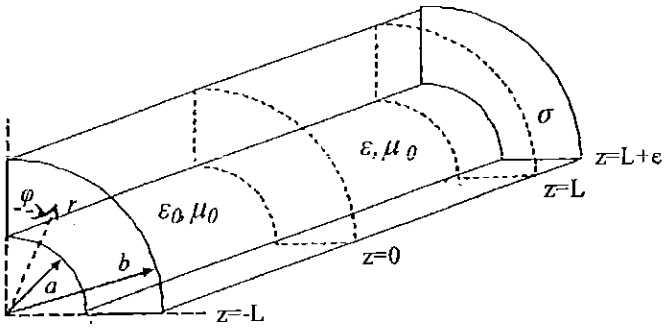
II-43

1) Dada la ecuación de balance de energías (teorema de Poynting):

$$-\vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\nabla\cdot\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right)+\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{H}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

a) Determine razonadamente la relación entre la divergencia del vector de Poynting y la densidad de energía electromagnética almacenada en un medio dieléctrico sin pérdidas de permitividad ε ,permeabilidad μ_0 y conductividad nula si se conoce que las fuentes de campo electromagnético están fuera de dicho medio.

b) Calcule para el mismo medio material del caso anterior el valor medio de la divergencia del vector de Poynting si ahora existen en el medio unas fuentes monocromáticas de frecuencia f_0 que generan en todos los puntos del medio material una densidad de potencia electromagnética de valor instantáneo $3\cos^2(\omega_0 t)$ (W/m^3) y una densidad de energía electromagnética almacenada de valor instantáneo $4\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t)$ (J/m^3).



2) La figura representa un tubo hueco cuyas paredes laterales se pueden considerar de conductor perfecto y cuya sección transversal es un trapecio circular. La estructura de longitud infinita en dirección -z está vacía en el tramo $-\infty \le z \le 0$, rellena con un dieléctrico homogéneo de permitividad desconocida ε y permeabilidad μ_0 en el tramo $0 \le z \le L$, y terminada con un buen conductor en el tramo $L \le z \le L+e$. Un generador monocromático de frecuencia 10 GHz situado en $z < -L$ produce un campo electromagnético del que se conoce de forma aproximada:

-. El campo en $-L \le z \le 0$, expresado en coordenadas cilíndricas y en el sistema internacional de unidades:

$$\vec{E}=(e^{-j\beta z}+0.2\,e^{+j\beta z})\left(\frac{\mathrm{sen}\,(4\varphi)}{r}\right)\hat{r}\quad;\quad \vec{H}=\left(e^{-j\beta z}-0.2\,e^{+j\beta z}\right)\left(\frac{0.02}{r}\,\mathrm{sen}\,(4\varphi)\,\hat{\varphi}+H_z(r,\varphi)\,\hat{z}\right)$$

donde $H_z(r,\varphi)$ es desconocido.

-. El campo magnético transversal a z en $z=L$: $\vec{H}=\dfrac{0.01}{r}\,\mathrm{sen}\,(4\varphi)\,\hat{\varphi}$

a) Compruebe que el campo eléctrico en $-L \le z \le 0$ cumple las condiciones de contorno en $r=a$, b y $\varphi=0,\pi/2$.

b) Determine el valor de la constante β.

c) Obtenga las expresiones de la potencia disipada en el dieléctrico y en el conductor suponiendo $e \gg \delta$.

d) Determine la diferencia entre el valor medio de las energías eléctrica y magnética almacenadas en el dieléctrico.

e) Determine la expresión de la tangente del ángulo de pérdidas del dieléctrico si se supone conocido el valor medio de la energía magnética almacenada en él, $\langle W_H \rangle$.

Nota: $\mu_0=4\pi 10^{-7}\left(H/m\right)$ $\quad \nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{r}/r & \hat{\varphi} & \hat{z}/r\\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ F_r & rF_\varphi & F_z\end{vmatrix}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

Dpto. de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos — Universidad Politécnica de Madrid

Campos Electromagnéticos I — Fecha: 2 de febrero de 2011

Apellidos: II.40	Nombre:

Duración: 3 horas

Ejercicio 1 (30 %)

Dos naves espaciales no tripuladas de investigación astronómica han salido de la Tierra, una con destino a Marte y la otra a Mercurio.

Sabiendo que:

Mercurio está a una distancia al Sol en un rango entre 46 y 70 millones de km dependiendo de su posición en la órbita.

Marte está a una distancia al Sol en un rango entre 206 y 249 millones de km dependiendo de su posición en la órbita.

La Tierra está a una distancia aproximada de 150 millones de km del Sol con poca variación entre el máximo y mínimo de su órbita.

La potencia total radiada por el Sol es de unos $4 \cdot 10^{26}$ W.

Estime el vector de Poynting que se recibe en la superficie terrestre directamente iluminada por el Sol, suponiendo que el Sol radia de forma uniforme.

Los paneles solares de una de las naves, orientados directamente hacia el Sol, reciben, en una hora y en cada cm^2 de los mismos, una energía de 2 kJ. Calcule la distancia actual de esta nave al Sol...¿esta nave se dirige hacia Mercurio o hacia Marte? ¿Ha podido llegar ya a su destino?

De los datos recibidos en la estación terrestre de seguimiento de esta nave, se deduce un sobrecalentamiento peligroso de los paneles solares que amenaza con dejar sin energía a la misma. Estos paneles, con una superficie total de 10 m^2, pueden soportar como máximo de forma estable una potencia media de 27,5 kW. Calcule el viraje mínimo que debiera ordenarse a la nave para proteger dichos paneles de su destrucción.

Escriba la relación constitutiva en el dominio del tiempo $\vec{D}=\vec{D}[\vec{E}]$ para un medio material lineal, isótropo, sin dispersión espacial, no homogéneo, invariante temporal, causal y con dispersión temporal.

¿Qué significado físico tiene dicha dispersión temporal?¿Qué fenómeno energético lleva asociado?

Escriba la forma de dicha relación constitutiva en el dominio de la frecuencia.

Fecha de publicación de las calificaciones provisionales: 23 de febrero

Fin de plazo de solicitud de revisión de examen: 25 de febrero

II-3

a) $\vec{D}(\vec{E})$ = Sin interacción cruzada / Lineal / Isótropo / No homogéneo espacialmente / Sin dispersión espacial / Sin variación temporal. / Con dispersión temporal.

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \iiint_V \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\vec{r},\vec{r}',t,t') \cdot \vec{E}(\vec{r},t')\, dt'\, dV' \quad (C/m^2)$$

Suponemos que es causal:

Por lo tanto

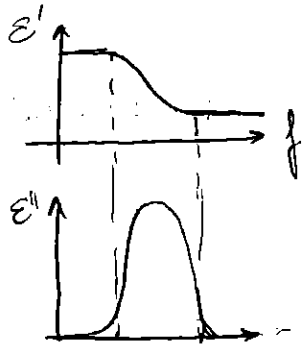
$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\vec{r},t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r},t')\, dt' \quad (C/m^2)$$

En el dominio de la frec.

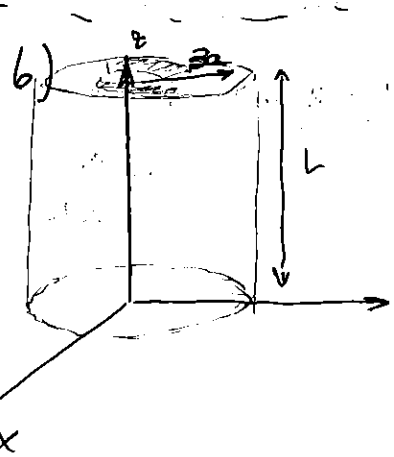
$$\vec{D}_c(\vec{r},\omega) = \varepsilon_c(\vec{r},\omega) \cdot \vec{E}_c(\vec{r},\omega) \quad (C/m^2)$$

La característica principal de esta expresión es que la permitividad es compleja dependiente de la frecuencia, ya que el medio tiene dispersión temporal o pérdidas

Por las relaciones de Kramer - Kronig (K-K) sabemos que si la permitividad depende de la frec, $\varepsilon'' > 0$ y viceversa, si $\varepsilon'' = 0$ la permitividad no depende de la



b)



$f_0 = 2'45$ GHz

$$\vec{E}_1 = \frac{E_1}{r}\hat{r} \qquad \vec{H}_1 = \frac{H_1}{r} e^{-j\varphi}\hat{\varphi} \qquad \begin{cases} z = L \\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ a \le r \le 2a \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_2}{r}\hat{r} \qquad \vec{H}_2 = \frac{H_2}{r} e^{-j\varphi_2} \cdot \hat{\varphi} \qquad \begin{cases} z = L \\ -\varphi_2 \le \varphi \le -\varphi_1 \\ a \le r \le 2a \end{cases}$$

b1) Aplicamos el Tª de Poynting en el dominio de la frec. en su Re para campos armónicos en el interior del bote.

$$\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\vec{J}_{c\,fuen}^{*} \cdot \vec{E}_c\right] dV = \oint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_c \times \vec{H}_c^{*}\right] d\vec{S} + \int_V \frac{\sigma}{2}\vec{E}_c \vec{E}_c^{*}\, dV + \int_V \frac{\omega_0 \varepsilon''}{2}\vec{E}_c \vec{E}_c^{*}\, dV + \int_V \frac{\omega_0 \mu''}{2}\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c^{*}\, dV$$

$$\langle P_{ap1} \rangle = \iint_{S_1} \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^{*}\right] \cdot \hat{z} \cdot dS_1 = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_a^{2a} \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{E_1 H_1}{r^2} e^{+j\varphi_1}\hat{z}\right] \hat{z} \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} E_1 H_1 \cos\varphi_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \ln(2) \quad (W)$$

$$\langle P_{ap2} \rangle = [\text{ANALOGAMENTE}] = \frac{1}{2} E_2 H_2 \cos\varphi_2 \, (\varphi_2 - \varphi_1) \ln(2) \quad (W)$$

Como $\left.\begin{matrix}\cos\varphi_1 > 0 \\ \cos\varphi_2 > 0\end{matrix}\right\}$ ya que $0 < \begin{matrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{matrix} < \pi/2$ hay fuentes en el interior del bote y el valor medio de su potencia entregada es: $\langle P_{FUENTES} \rangle = \int \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\vec{J}_{c\,fuen} \cdot \vec{E}_c\right] dV = \langle P_{ap1} \rangle + \langle P_{ap2} \rangle$

b2) $\langle P_{disipada} \rangle = 0$ ya que $\varepsilon'' = \mu'' = \sigma = 0$

b3) Aplicamos el teorema anterior en su parte Im:

$$\int_V \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[-\bar{J}_{c\,fuen}^{*} \cdot \bar{E}_c\right] dV = \oint_S \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[\bar{E}_c \times \bar{H}_c^{*}\right] \cdot d\bar{S} + 2\omega_0 \left[\underbrace{\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle}_{c?}\right]$$

No podemos obtener $\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle$ porque aunque podemos calcular el 2º término, y el primero $\underline{\underline{no}}$ lo podemos calcular, y como hay fuentes en el interior es distinto de cero

b4) $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

1º Como $\cos \varphi_1 = 0 = \cos \varphi_2 \Rightarrow \langle P_{ap_1} \rangle = \langle P_{ap_2} \rangle = 0$
Por tanto no hay fuentes en el interior del bote.

2º $\langle P_{disipada} \rangle = 0$

3º Ahora sí podemos dar $\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle$ ya que el primer término del teorema es cero y sabemos calcular el segundo.

$$\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle = \frac{-\frac{1}{2} E_1 H_1 \operatorname{sen} \varphi_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \ln(2) - \frac{1}{2} E_2 H_2 \operatorname{sen} \varphi_2 (\varphi_2 - \varphi_1) \ln(2)}{2 \cdot \underset{2\pi f_0}{\underset{\shortparallel}{\omega_0}}}$$

DPTO. DE ELECTROMAGNETISMO Y TEORÍA DE CIRCUITOS

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación — Universidad Politécnica de Madrid

Campos Electromagnéticos I — 7 de junio de 2006

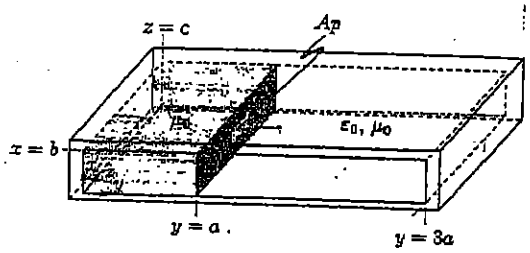
Apellidos:	Nombre:

Duración: 3 horas

Ejercicio 1 (30 %)

La figura representa un paralelepípedo, sin fuentes, cerrado en todas sus caras por paredes de conductor perfecto, excepto en $x = 0$, que se encuentra abierto.

En su interior una lámina de conductor perfecto y espesor despreciable separa la región izquierda, rellena de un dieléctrico no homogéneo, invariante y sin dispersión espacial, de la región derecha, vacía. En la lámina hay una apertura, Ap, que conecta ambas regiones.



Unas fuentes monocromáticas exteriores al paralelepípedo producen un campo electromagnético en el plano $z = 0$ de valor:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E} = PZ\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{x}\\ \vec{H} = P\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{y}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} z = 0\\ 0 \le y \le a\\ 0 \le x \le b\end{array}\right. \quad ; \quad \left.\begin{array}{l}\vec{E} = \overset{P}{Q}\overset{Z}{Z_0}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\hat{y}\\ \vec{H} = \overset{P}{Q}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\hat{x}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} z = 0\\ a \le y \le 3a\\ 0 \le x \le b\end{array}\right.$$

donde $Z, Z_0 \in \mathbb{R}^+$, y $P, Q \in \mathbb{C}$.

Obtenga la expresión del valor medio de la potencia que atraviesa la apertura Ap.

Escriba y justifique la relación constitutiva $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ para el dieléctrico que ocupa la región izquierda, en los dominios del tiempo y de la frecuencia. ¿Cómo calificaría a ese dieléctrico?

¿Podría obtener la relación entre los valores medios de las energías eléctrica y magnética almacenadas en el paralelepípedo? ¿Y en la región del dieléctrico? Cuando la respuesta sea afirmativa obtenga esa relación.

Ejercicio 2 (40 %)

A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia $f = 3$ GHz, que se propaga por el vacío según $\hat{z}$, de polarización elíptica positiva de relación axial 2 y campo máximo de 2 (V/m) en dirección $\hat{y}$. Calcule su potencia transmitida.

EJERCICIO ① JUNIO 2006

MUY PARECIDO AL DE SEPT. 2006.

a) ¿$< P_{Ap} >$?

Aplicamos el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia en su parte real, para campos periódicos sinusoidales ~~monocromáticos~~ armónicos, y lo aplicamos en la región de μ_0, ε_0, es decir, en la región vacía.

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}^*_{c\,\text{fuen}}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}_0^*(\vec{r})\right)d\vec{s} + \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\int_V|\vec{E}_0(\vec{r})|^2dV + \frac{\omega_0\mu''}{2}\int_V|\vec{H}_0(\vec{r})|^2dV + \frac{\sigma}{2}\int_V|\vec{E}_0(\vec{r})|^2dV$$

(1) (2) (3) (4) (5)

El primer término es cero porque no hay fuentes en el interior, además en esta región $\mu'' = 0 = \varepsilon'' = \sigma$ por tanto sólo tenemos el segundo término distinto de cero.

Como el resto de paredes son de conductor perfecto, la potencia que atraviese la apertura es la misma que la que atraviesa el plano $z=0$, por la región $a \le y \le 3a$. Así pues:

$$< P_{\text{ATRAVIESA } z=0 \text{ POR } a\le y\le 3a \text{ HACIA } \hat{z}} > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{y=a}^{3a}\int_{x=0}^{b}\left[Q\cdot Z_0\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\hat{x}\right]\times\left[Q^*\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\cdot\hat{y}\right]\cdot dx\,dy\,\hat{z}$$

$$= \frac{1}{2}|Q|^2\cdot Z_0\cdot a\cdot\frac{b}{2} = \boxed{\frac{|Q|^2\cdot Z_0\cdot a\cdot b}{4}}\,(W)$$

Como esta potencia ha salido positiva calculada hacia $(+\hat{z})$ podemos decir que:

$$< P_{Ap} > = \frac{|Q|^2\cdot Z_0\cdot a\cdot b}{4}\,;(W)$$ hacia $(-\hat{y})$, es decir, hacia la otra región del paralelepípedo.

b) ¿ $\bar{D}=\bar{D}(\bar{E})$?

Aplicamos el mismo teorema anterior pero en la región de dieléctrico, es decir $0\le y\le a$.

Como no hay fuente en el interior y el resto de paredes son de conductor perfecto, la potencia que entra por la apertura, la cual ya la hemos calculado, puede disiparse en el dieléctrico y salir por la región $0\le y\le a$ del plano $z=0$.

Veamos si efectivamente sale potencia por este plano ($z=0$ y $0\le y\le a$)

$$\langle P_{\text{ATRAVIESA } z=0 \text{ POR } 0\le y\le a \text{ HACIA } (-\hat{z})}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{b}\left[P\cdot Z\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cdot\hat{x}\right]\times\left[P^{*}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{y}\right]\cdot dx\,dy\,(-\hat{z}) =$$

$$=\frac{1}{2}|P|^2\cdot Z\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot(-1)\ ;\ (W)$$

Como ha salido negativa quiere decir que por este plano $z=0$, $0\le y\le a$ entra también potencia a la región de dieléctrico, así pues, a esta región de dieléctrico le entra potencia por este plano y también por la apertura, y como no hay fuentes en esta región y el resto de paredes son de conductor perfecto podemos decir que el dieléctrico debe tener pérdidas, y como $\mu=\mu_0$ y $\sigma=0$ sabemos que debe ser $\varepsilon''\neq 0 \Rightarrow$ Medio con disp. temporal.

Como en el enunciado nos dicen que es no homogéneo, invariante y sin disp. espacial, y suponiendo nosotros que es lineal, sin interacción cruzada, causal e isotropo, llegamos a:

$$\vec{D}(\vec{r},t)=\int_{t'=-\infty}^{t}\varepsilon(\vec{r},t-t')\cdot\vec{E}(\vec{r},t')\,dt'\quad ;\ (C/m^2)$$

$$\vec{D}_c(\vec{r},\omega)=\varepsilon_c(\vec{r},f)\cdot\vec{E}_c(\vec{r},\omega)\quad ;\ (C/m^2)$$

SE TRATA DE UN MEDIO DIELÉCTRICO CON PÉRDIDAS ELÉCTRICAS, ES DECIR CON DISP. TEMPORAL.

c) Aplicamos el mismo teorema anterior pero en su parte imaginaria y para todo el paralelepípedo.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_V -\vec{J}^{*}_{\text{fuen}}(\vec{r})\cdot\vec{E}_s(\vec{r})\,dV=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\oint_S\left[\vec{E}_s(\vec{r})\times\vec{H}^{*}_t(\vec{r})\right]d\vec{S}+2\omega_0\cdot\underbrace{\int_V\left(\langle W_m(\vec{r},t)\rangle-\langle W_e(\vec{r},t)\rangle\right)dV}_{\text{¿ } W_m-W_e \text{ ? Es lo que nos pide}}$$

El primer término es cero porque no hay fuente en el interior.

El segundo término también es cero porque en el paralelepípedo todas las paredes son de conductor perfecto excepto la situada en $z=0$, pero en esta pared ya hemos hecho la integral de $-\frac{1}{2}\oint_S(\bar{E}\times\bar{H}^{*})\cdot d\vec{S}$ en su parte real y ahora tenemos que hacerla en su parte imaginaria, pero si observamos las integrales de los apartados a) y b) vemos que la parte imaginaria de estas integrales es cero, por tanto, podemos decir que:

$$\boxed{W_m=W_e}\ \text{ en el paralelepípedo.}$$

d) En la región de dieléctrico no podemos dar esta relación porque no tenemos los campos en la apertura y entonces no podemos hacer la integral $\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{S_{Ap}}(\vec{E}_{Ap}\times\vec{H}^{*}_{Ap})\,d\vec{S}$ que es necesaria para dar la relación entre W_m y W_e en esta región del dieléctrico.

DPTO. DE ELECTROMAGNETISMO Y TEORÍA DE CIRCUITOS

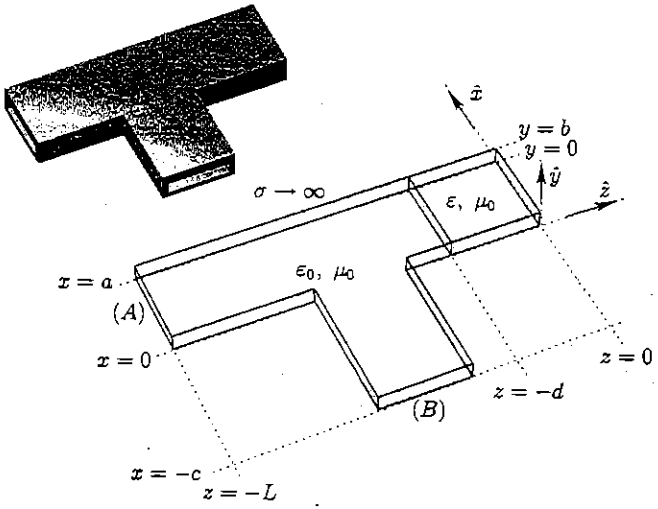
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación — Universidad Politécnica de Madrid

Campos Electromagnéticos I — 6 de abril de 2006

Apellidos:	Nombre:

Ejercicio 1

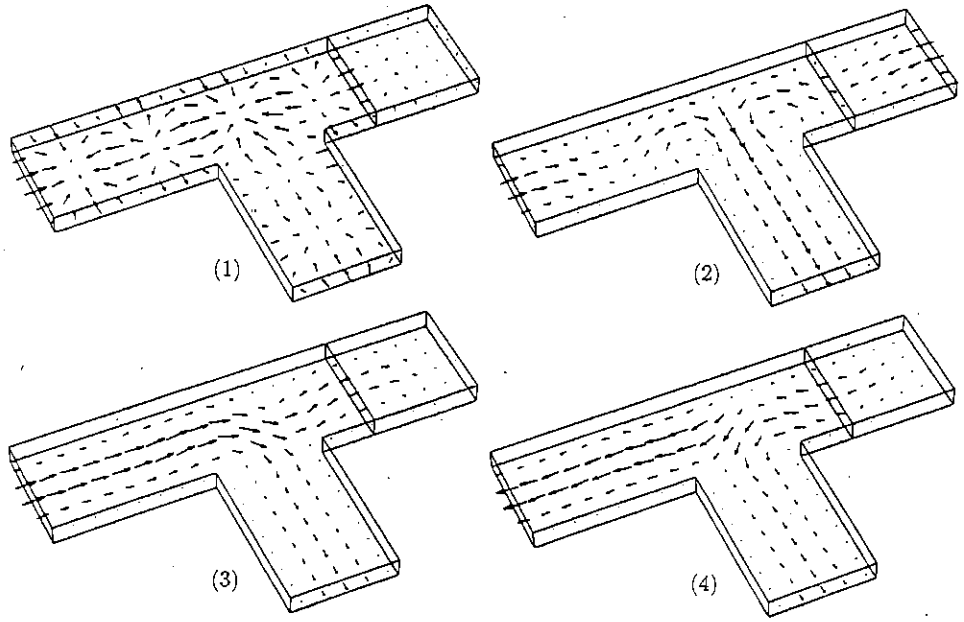
La figura representa una estructura hueca, cerrada por conductor perfecto, y con forma de 'T', así como un esquema de sus dimensiones interiores en un sistema de coordenadas cartesianas. La estructura tiene sólo dos aberturas, una en $z = -L$, la puerta (A), y la otra en $x = -c$, la puerta (B).



Su interior está vacío, salvo por un paralelepípedo de un material dieléctrico homogéneo e isótropo, que rellena el extremo cerrado de la 'T'.

En el interior no hay fuentes pero, a través de la puerta (A), un generador de frecuencia $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ produce campos en el interior de la estructura.

De las siguientes cuatro figuras, que representan el valor medio del vector de Poynting, sólo una puede ser válida. Indique cuál de ellas, y explique por qué cada una de las otras tres no puede ser una representación correcta del valor medio de $\vec{S}$. Escriba la relación constitutiva $\vec{D}(\vec{E})$, en el dominio del tiempo, para el material dieléctrico del extremo cerrado de la 'T'.



Se conocen los siguientes valores del campo electromagnético:

$$\vec{E} = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{z}{2d}\right)\hat{y} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ -d \le z \le 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} E_y &= jA\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ H_x &= -j\omega_0\varepsilon_0 dA\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ z = -L \end{cases}$$

donde A es una constante compleja.

Obtenga la expresión de la potencia que sale de la 'T' a través de la puerta (B) en función de la amplitud A, la frecuencia, las dimensiones y la permitividad de los dieléctricos.

Ejercicio 2

De las tres siguientes expresiones sólo una corresponde a una onda plana homogénea monocromática (OPHM). Indique por qué las otras dos no son expresiones correctas de OPHM.

$$\vec{E}(\vec{r}) = [3\hat{x} + 3j\hat{z}]\,e^{-\gamma(x+z)/\sqrt{2}} \tag{1}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = e^{-\alpha y}\left\{3\cos(\omega_0 t - \beta y)\hat{x} + 3\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \beta y)\hat{z}\right\} \tag{2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = 3\hat{x}e^{-\alpha(x+y)/\sqrt{2}}e^{-j\beta(x-y)/\sqrt{2}} \tag{3}$$

Para la OPHM calcule su dirección de propagación, su tipo y sentido de polarización, y la potencia que transmite si se propaga por un medio con impedancia intrínseca η.

Nota:

$$\int \mathrm{Sh}^2(ku)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{Sh}(2ku) - 2ku}{4k}$$

$$\int \mathrm{sen}^2(ku)\mathrm{d}u = \frac{2ku - \mathrm{sen}(2ku)}{4k}$$

SOLUCIÓN DEL PARCIAL DEL 6 DE ABRIL DE 2006

EJERCICIO ①

La figura que representa correctamente el $\langle \vec{S}(\vec{r},t)\rangle$ es la figura (3).

La figura (1) no es correcta porque hay líneas de $\langle \vec{S}(\vec{r},t)\rangle$ que atraviesan algunas paredes de conductor perfecto, y sabemos que a través de un conductor perfecto no puede existir flujo de potencia: $\iint_S \langle \vec{S}(\vec{r},t)\rangle \cdot d\vec{S} = 0$ si S es la superficie de un conductor perfecto.

En la figura (2) ocurre lo mismo en la pared $z=0$ que dice el enunciado que es de conductor perfecto.

La figura (4) tampoco es válida porque el vector $\langle \vec{S}(\vec{r},t)\rangle$ siempre marca la dirección de propagación de la potencia, y como nos dicen en el enunciado, el generador está situado en la abertura (A), y según la figura (4) por ora abertura, en vez de entrar potencia a la T, sale potencia de ella, y esto no es posible.

Para escribir la relación constitutiva del material dieléctrico que va desde $z=-d$ hasta $z=0$, sabemos que:

$\vec{D}(\vec{E}) \Rightarrow$ Medio sin interacción cruzada.

Del enunciado: Homogéneo e isótropo.

Además, si la figura (3) es correcta, observamos que el vector $\langle \vec{S}(\vec{r},t)\rangle$ que entra en el material dieléctrico, va perdiendo intensidad, y esto quiere decir que el material tiene disp. temporal o pérdidas.

Suponemos por otro lado que es lineal, sin disp. espacial, causal e invariante en el tiempo, por tanto:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\cdot \vec{E}(\vec{r},t')\,dt' \quad (C/m^2)$$

¿Potencia radiada por la puerta B?

Aplicamos el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia, en su parte real, (~~suponiendo~~ para) campos periódicos sinusoidales monocromáticos, en el interior de la T.

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}^*_{ext}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S \left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}^*_0(\vec{r})\right)d\vec{S} + \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\int_V |\vec{E}_0(\vec{r})|^2 dV + \frac{\omega_0\mu''}{2}\int_V |\vec{H}_0(\vec{r})|^2 dV + \frac{1}{2}\sigma\int_V |\vec{E}_0(\vec{r})|^2 dV$$

Como las fuentes están en el exterior el primer término es cero.

Como el resto de paredes son de conductor perfecto, sólo hay FLUJO DE POTENCIA a través de las aperturas A y B; y por la posición de las fuentes (sabemos que el generador está en la puerta A) podemos concluir con que la potencia que sale por la puerta B, es igual a la que entra por la puerta A menos la disipada en la T; como en el vacío no hay potencia disipada, sólo se disipa potencia en el dieléctrico con $\varepsilon \neq \varepsilon_0$.

Como en este dieléctrico $\mu''=0$ y $\sigma=0$ tenemos que:

$$\boxed{\langle P_{\text{sale de la T por la puerta B}}\rangle} = \langle P_{\text{entra en la T por la puerta A}}\rangle - \langle P_{\text{disipada } \varepsilon''}\rangle =$$

Suponemos que en $z=-L$ no hay campo E_x ni H_y

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}(z=-L)\times\vec{H}^*(z=-L)\right)dS\cdot\hat{z} - \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\iiint_V |\vec{E}(-d<z<0)|^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\hat{z}\cdot|A|^2\cdot\omega_0\varepsilon_0\, d\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\,dy\,\hat{z} - \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\int_{z=-d}^{0}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}|A|^2\cdot\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\mathrm{Sh}^2\left(\frac{z}{2d}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}|A|^2\cdot\omega_0\varepsilon_0\, d\cdot\frac{a}{2}\cdot b - \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\cdot|A|^2\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot\left(-\frac{d}{2}\left[\mathrm{Sh}(-1)+1\right]\right), (W) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}|A|^2\cdot\omega_0\cdot\frac{a}{2}\cdot b\left[\varepsilon_0\cdot d - \frac{\varepsilon''\cdot d}{2}\cdot 0'1752\right]}(W)$$

siendo: · ε'' tal que el dieléctrico ε que va desde $-d$ a 0 en $\hat{z}$ es: $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$.

· $\omega_0 = 2\pi f_0$ (1/seg)

Ejercicio 2

OPHM

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = (3\hat{x} + 3j\hat{z})\, e^{-\gamma \frac{(x+z)}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \hat{n} = \frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{E}_0 \cdot \hat{n} = \frac{3+3j}{\sqrt{2}} \neq 0$$

No es onda plana.

$$\bar{E}_3(\bar{r}) = 8\hat{x} \cdot e^{-\alpha \frac{z+y}{\sqrt{2}}} \cdot e^{-j\beta \frac{z-y}{\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

Una exponencial dice que $\hat{n} = \frac{\hat{z}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$ y la otra $\hat{n} = \frac{\hat{z}-\hat{y}}{\sqrt{2}}$ No es onda.

$$\bar{E}_2(\bar{r},t) = \left[3\hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t - \beta y) + 3\hat{z} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta y)\right] e^{-\alpha y}$$

En general el valor instantáneo es:

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \left[\bar{E}_{0r} \cos(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r})) - \bar{E}_{0i} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta(\hat{n}\cdot\bar{r}))\right] \cdot e^{-\alpha \hat{n}\cdot\bar{r}}$$

Identificando:

$\hat{n} = \hat{y}$

$\bar{E}_{0r} = 3\hat{x}$

$\bar{E}_{0i} = -3\hat{z}$

Como $|\bar{E}_{0r}| = |\bar{E}_{0i}|$ y son $\perp \Rightarrow$ Pol. Circular

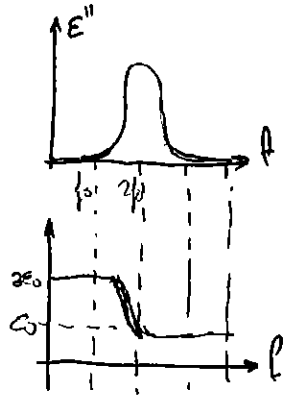
$(\bar{E}_{0r} \times \bar{E}_{0i}) \cdot \hat{n} = 9\,\hat{y}\hat{y} > 0$ Negativa o a izquierdas.

La expresión compleja es: $\bar{E}_2(\bar{r}) = 3(\hat{x} - j\hat{z}) \cdot e^{-j\beta y} \cdot e^{-\alpha y}$ (V/m)

$$W_t = \frac{\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\eta_*}\right) e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} = \frac{9 \cdot (1+1)}{2} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\eta_*}\right) e^{-2\alpha y} = 9 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\eta_*}\right) e^{-2\alpha y} \ (W)$$

y no $\bar{r}$ ya que el medio es con pérdidas. $(\alpha \neq 0)$

1ª Parte

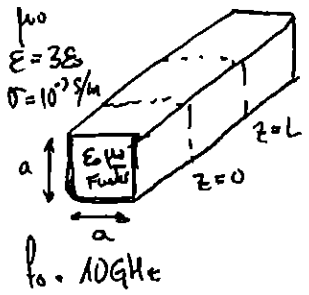


Si $\varepsilon''=0 \Rightarrow \varepsilon$ no depende de f.

Si $\varepsilon''>0 \Rightarrow \varepsilon$ depende de f

$$\varepsilon_c(f) = \varepsilon'(f) - j\,\varepsilon''(f)$$

2ª Parte



¿$\langle W_e\rangle$?

$$\langle W_e\rangle = \iiint_V \frac{\varepsilon'}{4}\,\bar{E}_c\cdot\bar{E}_c^{*}\,dV = \frac{3\varepsilon_0}{4}\iiint |\bar{E}_c|^2 dV \ (J)$$

No tenemos $\bar{E}$ entre $0\le z\le L$ y no podemos calcular esta $\iiint_V$

Aplicamos el Tª de Poynting en el dominio de la frecuencia en su Im para campos armónicos entre $0\le z\le L$:

$$\int_V \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big[\underbrace{-\bar{J}_{c\,fuen}^{*}\,\bar{E}_c}_{=0}\Big]dV = \oint_S \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^{*}\right)d\bar{S} + 2\omega_0\Big[\underbrace{\int_V \frac{\mu'}{4}|\bar{H}_c|^2 dV}_{\langle W_m\rangle} - \underbrace{\int_V \frac{\varepsilon'}{4}|\bar{E}_c|^2 dV}_{\langle W_e\rangle}\Big]$$

No podemos calcular $\langle W_m\rangle$ ya que no tenemos $\bar{H}_c$ entre $0\le z\le L$.

Aplicamos el mismo teorema anterior pero en su Re:

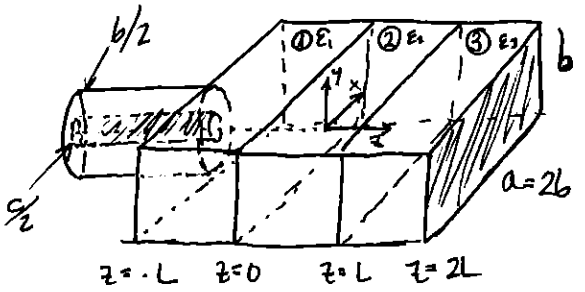
$$\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(-\bar{J}_{c\,fuen}^{*}\cdot\bar{E}_c\right)dV = \oint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^{*}\right)d\bar{S} + \int_V \frac{\sigma}{2}|\bar{E}_c|^2 dV + \int_V \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}|\bar{E}_c|\,dV + \int_V \frac{\omega_0\mu''}{2}|\bar{H}_c|^2 dV$$

Como no hay fuentes entre $0\le z\le L$ el 1er termino es cero. Como $\varepsilon''=\mu''=0$ tenemos

$$\int_V |E_c|^2 dV = -\frac{1}{\sigma}\oint_S \mathrm{Re}\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^{*}\right)d\bar{S}$$

$$\langle W_e\rangle = \left[4 \text{ paredes } \sigma=\infty\right] = -\frac{3\varepsilon_0}{4\sigma}\left[\int_0^a\int_0^a \mathrm{Re}\left(\bar{E}(z=0)\times\bar{H}^{*}(z=0)\right)(-\hat{z})\,dx\,dy + \int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a}\mathrm{Re}\left(\bar{E}(z=L)\times\bar{H}^{*}(z=L)\right)\hat{z}\,dx\,dy\right]\tau$$

$$= \dots = 3'23\cdot 10^{-14}\ (J)$$



Solución:

Calculamos la potencia media que atraviesa $z=-L$ hacia $(+\hat{z})$

$$\langle P_{\substack{\text{atraviesa}\\ z=-L\\ \text{hacia } +\hat{z}}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=c/2}^{r=b/2}\left(\bar{E}(z=-L)\times\bar{H}^*(z=L)\right)\cdot\hat{z}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=c/2}^{b/2}\frac{|E_0|^2 b^2 \sqrt{\varepsilon_0}}{64 r^2 L\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}\,\mu_0}\,\cancel{e^{-j\beta(-L)}}\,\cancel{e^{+j\beta(-L)}}\,\cancel{\hat{z}\hat{z}}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2\cdot b^2}{64\cdot L\cdot\omega_0\mu_0}\cdot \ln\left(b/c\right)\cdot 2\pi = \frac{\pi}{64}\frac{|E_0|^2 b^2}{L\mu_0\omega_0}\ (W) \qquad b/c = e$$

Como es positiva calculada hacia $+\hat{z}$ entra potencia por el coaxial.

$$\langle P_{\substack{\text{atraviesa}\\ z=0\\ \text{hacia } +\hat{z}}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{y=-b/2}^{b/2}\int_{x=-a/2}^{a/2}\left(\bar{E}(z=0)\times\bar{H}^*(z=0)\right)\cdot\hat{z}\cdot dx\,dy = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-b/2}^{b/2}\int\frac{|E_0|^2}{4\mu_0 L\omega_0}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(-j-1)(-\hat{z})\hat{z}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\frac{|E_0|^2 b^2}{L\mu_0\omega_0}\ (W)$$

$\bar{E}\times H_y\hat{y} = 0$ ya que $\bar{E} = \bar{E}_y\hat{y}$

$(\bar{E}\times H_z\hat{z})\hat{z} = 0$

Como $\frac{1}{8} > \frac{\pi}{64}$ en el medio ① hay fuentes porque sale más potencia que entra

$$\langle P_{\substack{\text{atraviesa}\\ z=L\\ \text{hacia } +\hat{z}}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{y=-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\bar{E}(z=L)\times\bar{H}^*(z=L)\right)\cdot\hat{z}\,dx\,dy = \dots = \frac{|E_0|^2 b^2}{12'8\,L\cdot\mu_0\omega_0}\ (W)$$

$\frac{1}{12'8} < \frac{1}{8} \Rightarrow$ El medio ② tiene perdidas porque sale más potencia de la que entra

$$\langle P_{\substack{\text{atraviesa}\\ z=2L\\ \text{hacia } +\hat{z}}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{y=-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\bar{E}(z=2L)\times\bar{H}^*(z=2L)\right)\cdot\hat{z}\,dx\,dy = \dots = \frac{|E_0|^2 b^2}{12'8\,L\mu_0\omega_0}\ (W)$$

Para dar la relación constitutiva de los medios ② y ③ suponemos que son lineales, homogéneos, isótropos, causales e invariantes en el tiempo.

Como ambos son sin interacción cruzada $(\bar{D}(\bar{E}))$ y el medio ② con disp temporal y el medio ③ sin disp temporal.

$$\vec{D}_2(\bar{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t}\varepsilon_2(t-t')\,\bar{E}_2(\bar{r},t')\,dt'\ (C/m^2) \qquad \bar{D}_3(\bar{r},t) = \varepsilon_3\bar{E}_3(\bar{r},t)\ (C/m^2)$$

$$\vec{D}_{2c}(\bar{r},\omega) = \varepsilon_{2c}(\omega)\cdot\bar{E}_{2c}(\bar{r},\omega)\ (C/m^2) \qquad \bar{D}_{3c}(\bar{r},\omega) = \varepsilon_3\bar{E}_{3c}(\bar{r},\omega)$$

$\boxed{\text{II.42}}$ JUNIO 2011 (POYNTING)

a) $$\boxed{\langle \vec{S}_1 \rangle\Big|_{z=-L_2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}_1(z=-L_2)\times\vec{H}_1^*(z=-L_2)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\hat{z}\cdot\frac{A_1^2}{\sqrt{2}\cdot r^2}\cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right] = \frac{A_1^2\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\hat{z}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot r^2} = \boxed{\frac{A_1^2\,(-\hat{z})}{4r^2}}\ (W/m^2)$$

Como este vector tiene dirección $(-\hat{z})$ en $z=-L_2$ las fuentes estarán en la región (2) o en la (3).

$$\boxed{\langle \vec{S}_3 \rangle\Big|_{z=0}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}_3(z=0)\times\vec{H}_3^*(z=0)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\hat{z}\cdot\frac{10}{r^2}\cdot\left(1+\frac{j}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1+\frac{j}{\sqrt{2}}\right)\right] = \boxed{\hat{z}\cdot\frac{5}{r^2}\cdot\frac{1}{2}}\ (W/m^2)$$

Como este vector tiene dirección $(+\hat{z})$ en $z=0$ LAS FUENTES ESTÁN EN LA REGIÓN (2).

b) Aplicamos el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia para campos armónicos, en su parte real, en la región (2).

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}_{fuen}^{\,*}\cdot\vec{E}_c\,dV = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_c\times\vec{H}_c^*\right)d\vec{S} + \frac{\omega\varepsilon''}{2}\int_V|\vec{E}_c|^2dV + \frac{\omega\mu''}{2}\int_V|\vec{H}_c|^2dV + \frac{\sigma}{2}\int_V|\vec{E}_c|^2dV$$

Del enunciado, y sabiendo que las fuentes están en esta región (2), el primer término vale 6π.

En esta región $\varepsilon''=\mu''=\sigma=0$.

Además como los conductores del cable coaxial son ideales, la potencia generada por las fuentes se radiará por $z=-L_2$ y por $z=0$:

$$\boxed{\langle P\rangle_{z=-L_2}} = \iint_S\langle\vec{S}_1\rangle\Big|_{z=-L_2}(-\hat{z})\cdot dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{A_1^2}{4r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \boxed{\frac{A_1^2\cdot\ln(b/a)\cdot\pi}{2}}\ (W) \overset{b/a=e}{=} \boxed{\frac{A_1^2\cdot\pi}{2}}\ (W)$$

$$\boxed{\langle P\rangle_{z=0}} = \iint_S\langle\vec{S}_3\rangle\Big|_{z=0}\hat{z}\cdot dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{5}{2r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{5}{2}\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi = \boxed{5\pi}\ (W)$$

Así pues: $$6\pi = 5\pi + \frac{A_1^2\cdot\pi}{2} \Rightarrow A_1^2 = 2 \Rightarrow \boxed{A_1 = \pm\sqrt{2}}\ (\text{VOLTIOS})$$

c) MEDIO (1): Como sabemos que en este medio NO hay fuentes, aplicando el mismo teorema anterior en esta región, calculamos la potencia que se radia de este medio por $z=-(L_1+L_2)$ y la comparamos con $P\big|_{z=-L_2}$

$$\boxed{\langle P\rangle_{z=-(L_1+L_2)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\left[\vec{E}_1(z=-L_1-L_2)\times\vec{H}_1^*(z=-L_1-L_2)\right]\cdot(-\hat{z})\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{A_1^2}{\sqrt{2}\cdot r^2}\cdot\hat{z}\,e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-\gamma_1 L_1}\left(e^{-\gamma_1 L_1}\right)^*(-\hat{z})\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{A_1^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)(-1)\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot e^{-8\pi^2 L_1} = \pi\cdot e^{-8\pi^2 L_1} = \boxed{\frac{\pi}{e^{8\pi^2 L_1}}}\ (W)$$

Observamos que esta potencia es menor que $P\big|_{z=-L_2} = \frac{A_1^2\cdot\pi}{2} = \pi\ (W)$ por tanto el medio (1) tiene pérdidas.

MEDIO (3): Análogamente a lo que hemos hecho en el medio (1) calculamos la potencia que se radia hacia $+\hat{z}$ en cualquier $z>0$ y la comparamos con $P|_{z=0} = 5\pi$.

$$\boxed{\langle P|_{z>0} \rangle} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\left(\vec{E}_3(z>0)\times\vec{H}_3^*(z>0)\right)\hat{z}\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{10}{r^2}\cdot\hat{z}\left(e^{-j\beta_3 z}+\frac{j}{\sqrt{2}}e^{+j\beta_3 z}\right)\left(e^{-j\beta_3 z}-\frac{j}{\sqrt{2}}e^{+j\beta_3 z}\right)^*\hat{z}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 5\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot\mathrm{Re}\left[\left(e^{-j\beta_3 z}+\frac{j}{\sqrt{2}}\cdot e^{+j\beta_3 z}\right)\cdot\left(e^{+j\beta_3 z}+\frac{j}{\sqrt{2}}\cdot e^{-j\beta_3 z}\right)\right] = 10\pi\cdot\mathrm{Re}\left(1+\frac{j}{\sqrt{2}}e^{-j2\beta_3 z}+\frac{j}{\sqrt{2}}e^{+j2\beta_3 z}-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 10\pi\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{\sqrt{2}}\cos(2\beta_3 z)\cdot 2\right) = \boxed{5\pi}\ (W)$$

Como esta potencia es igual a la que atraviesa el plano $z=0$ el medio (3) no tiene pérdidas.

d) $\vec{D}(\vec{E}) \Rightarrow$ sin interacción cruzada.
Del enunciado homogéneo, lineal e isótropo.
Del apartado anterior sin dispersión temporal, por tanto causal.
Suponemos que es sin dispersión espacial e invariante temporal.

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_3\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{D}_c(\vec{r},\omega) = \varepsilon_3\cdot\vec{E}_c(\vec{r},\omega)\end{cases}\ (C/m^2)$$

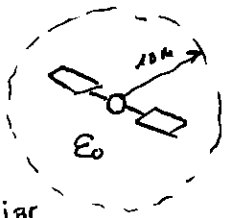
e) Como sabemos que $t \gg \delta$ en este conductor, la potencia que se disipa en él, es la que atraviesa el plano $z=-(L_1+L_2)$ hacia $(-\hat{z})$, la cual ya hemos calculado:

$$\boxed{\langle P_{\substack{\text{disipada}\\ \text{conductor}}} \rangle} = \langle P|_{z=-(L_1+L_2)} \rangle = \frac{\pi}{e^{8\pi^2 L_1}} = \left\{\text{como } L_1 = \frac{1}{\pi^2}\ m\right\} = \frac{\pi}{e^8} = \boxed{1'05\ mW}$$

II-17.

A) $f_0 = 16\,Hz$

$r \geq 10m$



$$\bar{E}(r \geq 10m) = 600 \cos\theta \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\hat{\theta} \quad (V/m)$$

$$\bar{H}(r \geq 10m) = 600 \cos\theta \, \frac{e^{-j\beta r}}{\eta_0 \cdot r}\,\hat{\varphi} \quad (A/m)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\eta_0 = 120\pi \ (\Omega)$$

A.1 ¿<Pdisipada>?

Aplicamos el BPA en $r \leq 10m$

Fuentes = 3KW

$$<P_{radiada}> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\bar{E}(r=10m) \times \bar{H}^*(r=10m)\right)\cdot\hat{r}\cdot 10^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 600^2 \cdot \cos^2\theta \, \frac{1}{\eta_0 (10)^2}\cdot\hat{r}\cdot\hat{r}\,(10)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\, 600^2 \frac{1}{\eta_0}\cdot 2\pi \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right) = 2\cdot 10^3 W = 2KW$$

$<P_{disipada}> = 2KW$

NOTA:

CARTESIANAS:

$$d\bar{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} dV = dx\,dy\,dz \\ dS_x = dy\,dz\,(\pm\hat{x}) \\ dS_y = dx\,dz\,(\pm\hat{y}) \\ dS_z = dx\,dy\,(\pm\hat{z}) \end{cases}$$

CILINDRICAS:

$$d\bar{l} = dr\cdot\hat{r} + r\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} dV = r\,dr\,d\varphi\,dz \\ d\bar{S}_r = r\,d\varphi\,dz\,(\pm\hat{r}) \\ d\bar{S}_\varphi = dr\,dz\,(\pm\hat{\varphi}) \\ d\bar{S}_z = r\,dr\,d\varphi\,(\pm\hat{z}) \end{cases}$$

ESFÉRICAS:

$$d\bar{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\operatorname{sen}\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\begin{cases} dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\ d\bar{S}_r = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\,(\pm\hat{r}) \\ d\bar{S}_\theta = r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\,(\pm\hat{\theta}) \\ d\bar{S}_\varphi = r\,dr\,d\theta\,(\pm\hat{\varphi}) \end{cases}$$

Por tanto la potencia disipada: $<P_{dis}(r \leq 10m)> = 1KW$, pero como entre $5 \leq r \leq 10m$ hay aire ($\varepsilon'' = \mu'' = \sigma = 0$) esta potencia es la disipada en $r \leq 5m$

A.2

$$|<\bar{S}>|_{min} = 10^{-12}\ (W/m^2)$$

$$<\bar{S}(r \geq 10m)> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}(r \geq 10m) \times \bar{H}^*(r \geq 10m)\right)\Big| = 600^2 \cdot \cos^2\theta \, \frac{1}{\eta_0\, r^2}\ (W/m^2) \quad \begin{cases} r \geq 10m \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$|\hat{r}| = 1$

Como la onda se acerca por la vertical debe ser:

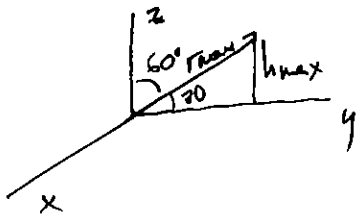
$$|<\bar{S}(r \geq 10m,\ \theta = 0)>| = \frac{600^2}{\eta_0\, r^2} \geq 10^{-12}\ (W/m^2)$$

$r \leq 21'85 \cdot 10^6\ m$

$r_{max} = 21851\ Km$

$$<\bar{S}(r \geq 10m;\ \theta = 60°)> = \frac{600^2 \cdot (\cos 60°)^2}{\eta_0 \cdot r^2} \geq 10^{-12}\ W/m^2 \Rightarrow r \leq 10925'5\ Km$$

$r_{max} = 10925'5\ Km$



$$\operatorname{sen} 30° = \frac{h_{max}}{r_{max}} \rightarrow h_{max} = 5462'75\ Km$$

B)

OPHM $\quad \bar{E}(\bar{r}=0) = \bar{E}_0 = j\,(\hat{x}+\hat{y})$ (V/m)

$\sigma = 0 \quad \bar{H}(\bar{r}=0) = \bar{H}_0 = \frac{j}{40\pi}(\hat{y}-\hat{x}-2\hat{z})$ (A/m)

$\mu = \mu_0$

$f_0 = 1\,GHz$

B1 ¿$\hat{n}$ y ε?

Como no sabemos si el medio tiene perdidas o no, las expresiones completas serán:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \quad (V/m)$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \bar{H}_0 \cdot e^{-j\beta(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \quad (A/m)$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{E}(\bar{r}) \times \bar{H}^*(\bar{r})\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(j\,(\hat{x}+\hat{y}) \times \left(\frac{-j}{40\pi}(\hat{y}-\hat{x}-2\hat{z})\right)\right) e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} =$$

$$= \frac{-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{40\pi} \cdot e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} = \frac{\sqrt{3}}{40\pi}\, e^{-2\alpha(\hat{n}\cdot\bar{r})} \cdot \left(\frac{-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}\right) \quad (W/m^2)$$

Como $e^{-x} > 0 \quad \forall x \Rightarrow \hat{n} = \dfrac{-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}$

Como es O.P.

$$\bar{E}(\bar{r}) = \eta\,(\bar{H}(\bar{r}) \times \hat{n}) = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\,(\bar{H}(\bar{r}) \times \hat{n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j\,(\hat{x}+\hat{y})\, e^{-j\beta\hat{n}\cdot r} \cdot e^{-\alpha\hat{n}\bar{r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\, 40\pi\sqrt{3}} \cdot 3\,(\hat{x}+\hat{y}) \cdot j \cdot e^{-j\beta\hat{n}\cdot\bar{r}} \Longrightarrow \varepsilon_r = 27 \text{ (ADIM)}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon = 27\varepsilon_0 \ (F/m)$$

B2 $\quad \alpha = 0$ Np/m ya que $\varepsilon'' = 0$

$\beta = \omega_0\sqrt{\mu_0 27\varepsilon_0} = 20\pi\sqrt{3}$ rad/m

Para obtener las expresiones sustituimos $\alpha, \beta, \hat{n}, \bar{E}_0$ y $\bar{H}_0$

B3

$$W_t = |\langle \bar{S} \rangle| = \left[\begin{matrix}\text{del apartado}\\ \text{B1}\end{matrix}\right] = \frac{\sqrt{3}}{40\pi} \ (W)$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

Dpto. Electromagnetismo y Teoría de Circuitos — Universidad Politécnica de Madrid

ASIGNATURA: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS-I — FECHA: 15 de septiembre de 2005

APELLIDOS: NOMBRE:

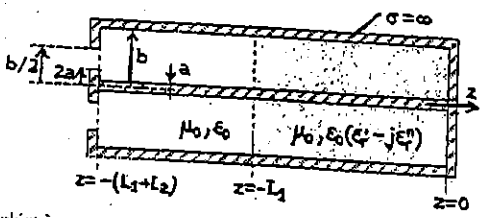
Duración: 3 horas. Los tres ejercicios tienen la misma puntuación.

Ejercicio 1

Considere el cable coaxial de la figura de radios interior **a**, exterior **b** ($b>4a$) y longitud (L_1+L_2) (m) y **sin fuentes en su interior.**

En el plano $z=-(L_1+L_2)$ existe una tapa de conductor perfecto con una **apertura** en forma de corona circular de radio interior **2a** y exterior **b/2**. El otro extremo del cable ($z=0$) está terminado en un **conductor perfecto.**

El coaxial se encuentra relleno de aire (ε_0,μ_0) para $-(L_1+L_2)<z<-L_1$ y de un dieléctrico de permitividad dieléctrica compleja $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r=\varepsilon_0(\varepsilon_r'-j\varepsilon_r'')$ (F/m) para $-L_1<z<0$.



Se conocen las expresiones aproximadas de los campos eléctrico y magnético (monocromáticos) en la apertura y en la región de dieléctrico con pérdidas:

$$\vec{E}_{ap}=\frac{E_1}{r}\hat{r}\ \ (V/m)\qquad \vec{H}_{ap}=\frac{E_1}{\eta_0 r}e^{j\psi}\hat{\varphi}\ \ (A/m)\qquad \begin{cases} z=-(L_1+L_2)\\ 2a\le r\le b/2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$\vec{E}=-E_0\frac{j\beta_0 z}{r}\hat{r}\ \ (V/m)\qquad \vec{H}=\frac{E_0}{\eta_0 r}\left[1-\frac{\varepsilon_r\beta_0^2 z^2}{2}\right]\hat{\varphi}\ \ (A/m)\qquad \begin{cases} a\le r\le b\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ -L_1<z<0\end{cases}$$

donde $\varepsilon_1, \eta_0, \beta_0$ y ψ son constantes **reales** y E_0 es una constante **compleja.**

a) Demuestre que el campo dado para la región $-L_1<z<0$ cumple las condiciones de contorno que imponen los conductores que delimitan dicha región.

b) Escriba las diferentes expresiones a partir de las cuales podría determinar la potencia disipada en el dieléctrico de la región $-L_1<z<0$. Particularice las mismas para los datos del problema (no realice las integrales).

c) ¿Qué condición cumple la constante ψ dado que las fuentes de los campos se encuentran en el exterior del cable?

d) Aplicando el teorema de Poynting en la región $-(L_1+L_2)<z<-L_1$, calcule la relación entre E_1 y $|E_0|$.

e) Determine el valor medio de la energía eléctrica almacenada en la región $-L_1<z<0$.

a) También hay que verificar: $\hat{n}_{12}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\big|_S=0$ $\quad(\vec{B}=\mu_0\vec{H})$

$$\hat{n}_{12}\cdot(\vec{B}_{12}-\vec{B}_{21})\big|_S=0$$

En $z=0$; $\hat{z}\cdot\left(\vec{B}(z=0^+)-\vec{B}(z=0^-)\right)=0$ ya que $\hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0$

En $r=a$; $\hat{r}\cdot\left(\vec{B}(r=a^+)-\vec{B}(r=a^-)\right)=0$ ya que $\hat{r}\cdot\hat{\varphi}=0$

En $r=b$; $\hat{r}\cdot\left(\vec{B}(r=b^+)-\vec{B}(r=b^{\varphi-})\right)=0$ ya que $\hat{r}\cdot\hat{\varphi}=0$

Sí cumple.

PROB 1 SEPTIEMBRE 2005

SOLUCIÓN:

a) Las condiciones de contorno para el campo $\vec{E}$ son: $\hat{n}_{12}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\big|_S=\vec{0}$.

En $z=0$; $\hat{z}\times\left(\vec{E}(z=0^+)-\vec{E}(z=0^-)\right)=\hat{z}\times\left(\underbrace{\vec{0}}_{\text{campo dentro de un } r=\infty}-\left(-E_0\cdot\frac{j\beta_0 z}{r}\cdot\hat{r}\right)\Big|_{z=0^-}\right)=\hat{z}\times(\vec{0}-\vec{0})=\boxed{\vec{0}}$ Sí cumple.

En $r=a$; $\hat{r}\times\left(\vec{E}(r=a^+)-\vec{E}(r=a^-)\right)=\hat{r}\times\left[\left(-E_0\cdot\frac{j\beta_0 z}{r}\hat{r}\right)\Big|_{r=a^+}-\vec{0}\right]=\boxed{\vec{0}}$ Sí cumple, ya que $\hat{r}\times\hat{r}=\vec{0}$

En $r=b$; Analogamente al caso anterior tenemos un campo que es cero y $\hat{r}\times\hat{r}=\vec{0}$.

El campo en la región de dieléctrico sí cumple las condiciones de contorno.

b) 1ª forma:

La potencia disipada en un volumen V viene dada por:

$$\langle P_{disipada}\rangle=\frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\int_V|\vec{E}|^2dV+\frac{\omega_0\mu''}{2}\int_V|\vec{H}|^2dV+\frac{\sigma}{2}\int_V|\vec{E}|^2dV\ ;\ (W)$$

Como en esta región $\mu''=0$ y $\sigma=0$ tenemos que:

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle=\frac{\omega_0\varepsilon_r''\varepsilon_0}{2}\cdot\int_{z=-L_1}^{0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{|E_0|^2\beta_0^2\cdot z^2}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz\ ;\ (W)$$

EXPRESIÓN (1)

2ª forma:

Sabemos por el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia, en su parte real, para campos periódicos sinusoidales monocromáticos que:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V\vec{J}_{ext}^*(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}_0^*(\vec{r})\right)d\vec{S}+\langle P_{disipada}\text{ en el volumen } V\text{ por } \varepsilon'',\mu''\text{ y }\sigma\rangle$$

Como no hay fuentes en el interior el 1er término es cero; además como todas las paredes de la región $-L_1<z<0$ son conductores perfectos, sabemos que la potencia que entre en esta región por el plano $z=-L_1$ se disipará en el dieléctrico porque los conductores son perfectos, por tanto:

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle = \underset{\substack{z=-L_1\\ \text{hacia}(+\hat{z})}}{P_{atraviesa}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}(z=-L_1)\times\vec{H}^*(z=-L_1)\right) dS\,\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\left[\left(\frac{E_0\, j\,\beta_0\cdot L_1}{r}\,\hat{r}\right)\times\left(\frac{E_0^*}{\eta_0\cdot r}\left[1-\frac{\varepsilon_r^*\cdot\beta_0^2\cdot(-L_1)^2}{2}\right]\cdot\hat{\varphi}\right)\right] r\,dr\,d\varphi\,\hat{z}\ ;(W)$$

EXPRESIÓN ②

3ª forma:

Como la región donde hay aire no se disipa potencia y tampoco hay fuentes, también sabemos que la potencia que entre a través de la apertura hacia $+\hat{z}$, se acabará disipando en la región $-L_1<z<0$, porque en la región μ_0, ε_0 no se disipa, y los conductores son perfectos.

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle = \underset{\substack{\text{apertura}\\ \text{hacia}(+\hat{z})}}{\langle P_{atraviesa}\rangle} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S_{Ap}}\left(\vec{E}_{Ap}\times\vec{H}^*_{Ap}\right) dS_{Ap}\cdot\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=2a}^{b/2}\left[\left(\frac{E_1}{r}\,\hat{r}\times\frac{E_1\cdot e^{-j\psi}}{\eta_0\cdot r}\cdot\hat{\varphi}\right)\right] r\,dr\,d\varphi\,\hat{z}\ ;(W)$$ EXPRESIÓN ③

c) La potencia disipada siempre debe ser positiva, por tanto, de la expresión ③.

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{E_1^2}{\eta_0}\cdot\cos\psi\cdot\ln\left(\frac{b}{4a}\right)\cdot 2\pi\ ;\ (W)$$

Como $b>4a$ (Ver enunciado) tenemos que $\ln\left(\frac{b}{4a}\right)>0$, y suponiendo $\eta_0\in\mathbb{R}^+$, debe ser $\cos\psi>0 \Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}}$

NOTA: Este apartado también se podría haber hecho suponiendo que si las fuentes están fuera: $\langle\vec{S}\rangle\big|_{Ap}$ debe salir en la dirección $+\hat{z}$.

d) Aplicamos el teorema de Poynting en su parte real, en el dominio de la frecuencia, para campos periódicos sinusoidales monocromáticos en la región de vacío $(-(L_1+L_2)<z<-L_1)$:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}^*_{ext}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}_0^*(\vec{r})\right)d\vec{S} + \text{Potencia disipada por } \varepsilon'', \mu'' \text{ y } \sigma \text{ en este volumen.}$$

Como no hay fuentes en esta región el 1er término es cero, y como en esta región $\varepsilon''=0=\mu''=\sigma$ tenemos que: (Por los conductores perfectos ni sale ni entra potencia)

$$0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S_{Ap}}\left(\vec{E}_{Ap}\times\vec{H}^*_{Ap}\right)\cdot dS_{Ap}\,(-\hat{z}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S\,(z=-L_1)}\left(\vec{E}(z=-L_1)\times\vec{H}^*(z=-L_1)\right)\cdot dS\cdot\hat{z} + 0$$

0JO, saliente del volumen — 0JO, saliente del volumen

$$0 = (-\text{Expresión ③}) + (\text{Expresión ②}) \Rightarrow \text{Expresión ③} = \text{Expresión ②}$$

$$\text{Expresión ③} = \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{E_1^2}{\eta_0}\cdot\cos\psi\,\ln\left(\frac{b}{4a}\right)\cdot 2\pi}\ ;\ (W)$$

$$\text{Expresión ②} = \frac{1}{2}\,\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^3\cdot L_1^3}{\eta_0}\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\,\varepsilon_r^*\right] = \begin{cases}\mathrm{Re}\left[-j\,\varepsilon_r^*\right] = \mathrm{Re}\left[-j(\varepsilon_r'+j\varepsilon_r'')\right]\\ = \varepsilon_r''\end{cases}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^3\cdot L_1^3\cdot\ln(b/a)\cdot\pi\cdot\varepsilon_r''}{\eta_0}}\ (W)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene: $\dfrac{E_1^2}{|E_0|^2} = \dfrac{\beta_0^3\cdot L_1^3\cdot\ln(b/a)\cdot\pi\,\varepsilon_r''}{2\pi\cdot\cos\psi\,\ln\left(\frac{b}{4a}\right)}$

e) Como en esta región tenemos el campo eléctrico:

$$\boxed{\langle W_e(\vec{r},t)\rangle} = \frac{\varepsilon'}{4}\int_V |E|^2\,dV = \frac{\varepsilon_r'\cdot\varepsilon_0}{4}\int_{z=-L_1}^{0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^2\cdot z^2}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \boxed{\frac{\varepsilon_r'\cdot\varepsilon_0}{4}\cdot|E_0|^2\cdot\beta_0^2\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot\frac{L_1^3}{3}}\ (\text{Julios})$$

PROB 1 JUNIO 2007 II-27

1ª parte:

Observamos que:

$\varepsilon_c = \varepsilon'(f) - j\varepsilon''(f)$ (F/m) Lineal, isótropo, sin disp. espacial, invariante temporal y con disp. temp

$\mu_c = \mu'(f) - j\mu''(f)$ (H/m) " " " " "

$\sigma = \sigma$ (S/m) " " " " y sin disp. temp

Explicación: $\vec{D}_c(\vec{r},f) = \varepsilon_c(f)\vec{E}_c(\vec{r},f)$

$\vec{B}_c(\vec{r},f) = \mu_c(f)\vec{H}_c(\vec{r},f)$

$\vec{J}(\vec{r},f) = \sigma \cdot \vec{E}_c(\vec{r},f)$

Si no hay fuentes y la superficie es de cond. perfecto:

$$0 = 0 + j\omega\int_V \left(\mu_c \vec{H}_c\cdot\vec{H}_c^* - \varepsilon_c^*\cdot\vec{E}_c\cdot\vec{E}_c^*\right)dV + \int_V \sigma\cdot\vec{E}_c\cdot\vec{E}_c^*\cdot dV$$

Sacamos la Re y la Im de esta ecuación teniendo en cuenta que:

$\vec{H}_c\cdot\vec{H}_c^* = |\vec{H}_c|^2$

$\vec{E}_c\cdot\vec{E}_c^* = |\vec{E}_c|^2$

$$0 = j\omega\int_V \left(\mu'(f) - j\mu''(f)\right)\cdot|\vec{H}_c|^2 dV - j\omega\int_V\left(\varepsilon'(f) + j\varepsilon''(f)\right)\cdot|\vec{E}_c|^2 dV + \int_V \sigma\cdot|\vec{E}_c|^2 dV$$

Parte real: $0 = \omega\mu''(f)\cdot\int_V |\vec{H}_c|^2 dV + \omega\varepsilon''(f)\cdot\int_V |\vec{E}_c|^2 dV + \sigma\cdot\int_V |\vec{E}_c|^2 dV$

Parte imaginaria: $0 = \omega\mu'(f)\cdot\int_V |\vec{H}_c|^2 dV - \omega\varepsilon'(f)\cdot\int_V |\vec{E}_c|^2 dV \Rightarrow \mu'(f)\cdot\int_V |\vec{H}_c|^2 dV = \varepsilon'(f)\int_V |\vec{E}_c|^2 dV$

Para que se puedan cumplir ambas ecuaciones a la vez, o simplemente despejando $\int_V |\vec{H}_c|^2 dV$ en la segunda para meterlo en la primera obtenemos:

$$0 = \left[\omega\frac{\mu''(f)}{\mu'(f)}\cdot\varepsilon'(f) + \omega\cdot\varepsilon''(f) + \sigma\right]\left[\int_V |\vec{E}_c|^2 dV\right] \Rightarrow \vec{E}_c = 0 \text{ en } V \text{ y por tanto } \vec{H}_c = 0 \text{ en } V.$$

2ª parte:

a) Aplicamos el BPA en $r \leq 10m$: ....

Como no hay pérdidas:

$$S(W) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)d\vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} |A|^2\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{\eta_0\cdot r^2}\cdot\hat{r}\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\,\hat{r} =$$

$$= \frac{1}{2}|A|^2\cdot\frac{1}{\eta_0}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow |A|^2 = \frac{5\cdot 6\cdot 120\pi}{\pi} = 3600 \Rightarrow |A| = 60 \text{ voltios}$$

No tenemos datos para determinar la fase de la constante A, por tanto podría ser cualquiera.

b) $$\boxed{\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right] = \frac{1}{2}|A|^2\cdot\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot\frac{1}{\eta_0\cdot r^2}\cdot\hat{r} =$$

$$= \frac{3600}{2\cdot 120\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\hat{r} = \boxed{4'77\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\cdot\hat{r}}\ (W/m^2)$$

Está en máxima en la dirección $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir en la dirección del eje y.

c) $$\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle\Big|_{\substack{r=10^3 m\\ \varphi=\pi/2=\theta}} = 4'77\cdot 10^{-6}\cdot\hat{r}\ (W/m^2)$$

En todo momento el $\vec{E}$ tiene polarización $\hat{\theta}$, que en $\theta=\pi/2=\varphi$ es $\hat{\theta}\Big|_{\theta=\pi/2=\varphi} = -\hat{z}$

d) Debe ser:

$$\frac{4'77}{(dist)^2} > 10^{-8}\cdot 10^{-3}\ (W/m^2) \Rightarrow \boxed{dist_{max} = \sqrt{4'77\cdot 10^{11}} \text{ metros}}$$

$\boxed{\text{II.40}}$ (Feb 2011)

$\boxed{\text{1ª parte:}}$ Suponiendo que el Sol es el origen de coordenadas:

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle_{TIERRA} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Superficie}}\,\hat{r} = \frac{4\cdot 10^{26}}{4\pi\cdot(150\cdot 10^{9})^2}\,\hat{r} = \frac{10^6}{\pi\cdot 225}\,\hat{r} = 1414'71\cdot\hat{r}}\ W/m^2$$

$\boxed{\text{2ª parte:}}$

La densidad de potencia que recibe el panel solar es:

$$W_{REC} = \frac{2\ kJ}{1\,hora\cdot 1\,cm^2} = \frac{2\cdot 10^3}{3600\cdot 10^{-4}} = 5555'\hat{5}\ W/m^2$$

Veamos ahora a qué distancia al Sol le corresponde esta intensidad:

$$5555'\hat{5} = \frac{4\cdot 10^{26}}{4\pi\, dist^2} \Rightarrow dist = \sqrt{\frac{10^{26}}{\pi\cdot 5555'\hat{5}}} = 7'569\cdot 10^{10}\ \text{metros} = 75'69\ 10^6\,Km$$

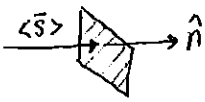
Es decir esta nave está a 75'69 millones de Km del Sol, por tanto se dirige hacia Mercurio pero todavía no ha llegado a alcanzar ningún punto de su órbita.

$\boxed{\text{3ª parte:}}$

A esta distancia la potencia recibida por los paneles solares es en media:

$$P_{REC} = \iint_S \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \{\text{Como } \langle \vec{S} \rangle \text{ es constante}\} = \langle \vec{S} \rangle \cdot Sup\cdot \hat{n} = 5555'\hat{5}\cdot 10 = 55'\hat{5}\ kW$$

Vector normal a la superficie



Para protegerlos debe ser:

$$\langle \vec{S} \rangle \cdot Sup\cdot \hat{n} = |\langle \vec{S} \rangle|\cdot 10\cdot 1\cdot \cos\theta = 27'5\ kW \Rightarrow \cos\theta = 0'495 \Rightarrow \boxed{\theta \approx 60^\circ}$$

Se deben girar 60°

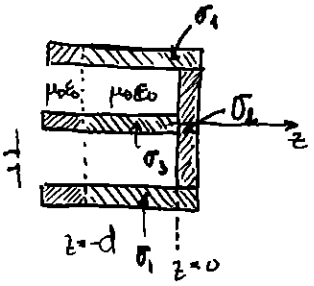
$\boxed{\text{4ª parte:}}$

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \varepsilon(\vec{r},t-t')\cdot \vec{E}(\vec{r},t')\,dt' \quad (C/m^2)$$

$$\vec{D}_c(\vec{r},\omega) = \varepsilon_c(\vec{r},\omega)\cdot \vec{E}_c(\vec{r},\omega) \quad (C/m^2)$$

Si un medio tiene disp. temporal significa que la respuesta en un instante depende del resto de instantes; además un medio con disp. temporal es un medio con pérdidas, es decir un medio que va disipando energía o potencia a medida que la onda electromagnética se transmite por él.

II-30



$$\bar{E} = -\frac{c\cdot z}{r}\cdot\hat{r} + c\cdot\ln\frac{b}{r}\,\hat{z}$$
$$\bar{H} = c\cdot\frac{a}{R\cdot r}\ln(b/a)\cdot\hat{\varphi}$$
$$\left.\begin{array}{l} a\le r\le b \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ -d\le z\le 0\end{array}\right.$$
$$c\in\mathbb{C}$$
$$R\in\mathbb{R}^+$$

a) ¿$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$?

Suponemos $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\infty$ y comprobamos si cumplen las condiciones de contorno de $\sigma=\infty$

$$\hat{n}_{12}\times(\bar{E}_2-\bar{E}_1)\big|_S = 0$$

En $z=0$; $\hat{z}\times(\bar{E}(z=0^+)-\bar{E}(z=0^-))=\bar{0}$

En $r=a$; $\hat{r}\times(\bar{E}(r=a^+)-\bar{E}(r=a^-)) = -\hat{\varphi}\cdot c\cdot\ln(b/a)\neq\bar{0}$

En $r=b$; $\hat{r}\times(\bar{E}(r=b^+)-\bar{E}(r=b^-))=\vec{0}$ $\qquad\qquad \sigma_3\neq\infty$

Comprobamos también $\bar{n}_{12}\cdot(\bar{B}_2-\bar{B}_1)\big|_S=0$

En $z=0$; $\hat{z}\cdot(\bar{B}(z=0^+)-\bar{B}(z=0^-))=0$ $\quad\hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0$

En $r=b$; $\hat{r}\cdot(\bar{B}(r=b^+)-\bar{B}(r=b^-))=0$ $\quad\hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0$

b) Como el generador está en $z<-d$ y ese coaxial tiene conductores perfectos y (μ_0,ε_0) la potencia del generador aporta a la carga en la que atraviese el plano $z=-d$ hacia $(+\hat{z})$

$$\langle P_{entra}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}(\bar{E}\times\bar{H}^*)\big|_S(+\hat{z})\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\int\frac{|c|^2(-d)\cdot a}{R\cdot r^2}\ln(b/a)(-z)(\hat{z})\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{|c|^2\cdot d\cdot a}{R}\cdot\ln^2(b/a)\cdot 2\pi\ (W)$$

c) Aplicamos el Tª de Poynting en el dominio de la frec en su Re en la región del dieléctrico:

$$\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}(-\bar{J}^*_{cfpen}\cdot\bar{E}_c)\,dV = \oint_S\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^*)\cdot d\bar{S} + \langle P_{dis\,\varepsilon''}\rangle$$ ya que $\mu''=0=\sigma$

Como en esta región NO hay ~~pérdidas~~ fuentes y $\sigma_1=\sigma_2=\infty$ calculamos la potencia que entra a σ_3

$$\langle P_{entra\ por\ r=a\ hacia\ (-\hat{r})}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{z=-d}^{0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{|c|^2 a\ln^2(b/a)}{R\cdot a}(-\hat{r})(-\hat{r})\,a\,d\varphi\,dz = \frac{|c|^2\cdot d\cdot a\ln^2(b/a)\,2\pi}{R}\ (W)$$

Como la potencia que entra por $z=-d$ es la misma que la que sale por $r=a$, $\varepsilon''=0$ el dieléctrico no tiene dispersión temporal

d) $\vec{D}(\vec{E}) \equiv$ Sin interacción cruzada.

Del enunciado $\rightarrow$ Homogeneo

Sin dispersión $t \rightarrow$ Causal

Suponemos lineal, ~~invariante~~ t e isotropo

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \quad (C/m^2)$$
$$\vec{D}_c(\vec{r},\omega) = \varepsilon \cdot \vec{E}_c(\vec{r},\omega)$$

Como $\varepsilon'' = 0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon'$ (ε' está en el BPR)

Aplicamos el teorema anterior pero en su Ttm en el dielectrico.
Como no hay fuentes se escribe:

$$0 = \frac{1}{2} \mathrm{Tm} \oint_S (\vec{E}_c \times \vec{H}_c^*) \cdot d\vec{S} + 2\omega_0 \left(\langle \omega_m \rangle - \int_V \frac{\varepsilon'}{4} |\vec{E}_c|^2 dV \right)$$

$$\varepsilon' = \frac{\mu' \int_V |H_c|^2 dV}{\int_V |E_c|^2 dV}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

Dpto. Electromagnetismo y Teoría de Circuitos — Universidad Politécnica de Madrid

ASIGNATURA: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS-I — FECHA: 15 de septiembre de 2005

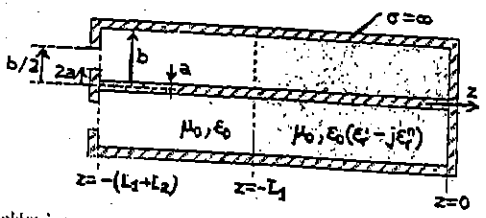
APELLIDOS: NOMBRE:

Duración: 3 horas. Los tres ejercicios tienen la misma puntuación.

Ejercicio 1

Considere el cable coaxial de la figura de radios interior **a**, exterior **b** (b>4a) y longitud (L_1+L_2) (m) y sin **fuentes en su interior.**

En el plano $z=-(L_1+L_2)$ existe una tapa de conductor perfecto con una **apertura** en forma de corona circular de radio interior **2a** y exterior **b/2**. El otro extremo del cable (z=0) está terminado en un **conductor perfecto.** El coaxial se encuentra relleno de aire (ε_0,μ_0) para $-(L_1+L_2)<z<-L_1$ y de un dieléctrico de permitividad dieléctrica compleja $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r=\varepsilon_0(\varepsilon_r'-j\varepsilon_r'')$ (F/m) para $-L_1<z<0$.



Se conocen las expresiones aproximadas de los campos eléctrico y magnético (monocromáticos) en la apertura y en la región de dieléctrico con pérdidas:

$$\vec{E}_{ap}=\frac{E_1}{r}\hat{r}\ \ (V/m)\qquad \vec{H}_{ap}=\frac{E_1}{\eta_0 r}e^{j\psi}\hat{\varphi}\ \ (A/m)\qquad \begin{cases} z=-(L_1+L_2)\\ 2a\le r\le b/2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$\vec{E}=-E_0\frac{j\beta_0 z}{r}\hat{r}\ (V/m)\qquad \vec{H}=\frac{E_0}{\eta_0 r}\left[1-\frac{\varepsilon_r\beta_0^2 z^2}{2}\right]\hat{\varphi}\ (A/m)\qquad \begin{cases} a\le r\le b\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ -L_1<z<0\end{cases}$$

donde E_1, η_0, β_0 y ψ son constantes **reales** y E_0 es una constante **compleja.**

a) Demuestre que el campo dado para la región $-L_1<z<0$ cumple las condiciones de contorno que imponen los conductores que delimitan dicha región.

b) Escriba las diferentes expresiones a partir de las cuales podría determinar la potencia disipada en el dieléctrico de la región $-L_1<z<0$. Particularice las mismas para los datos del problema (no realice las integrales).

c) ¿Qué condición cumple la constante ψ dado que las fuentes de los campos se encuentran en el exterior del cable?

d) Aplicando el teorema de Poynting en la región $-(L_1+L_2)<z<-L_1$, calcule la relación entre E_1 y $|E_0|$.

e) Determine el valor medio de la energía eléctrica almacenada en la región $-L_1<z<0$.

PROB 1 SEPTIEMBRE 2005

SOLUCIÓN:

a) Las condiciones de contorno para el campo $\vec{E}$ son: $\hat{n}_{12}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)|_S=\vec{0}$.

En $z=0$; $\hat{z}\times\left(\vec{E}(z=0^+)-\vec{E}(z=0^-)\right)=\hat{z}\times\left(\underbrace{\vec{0}}_{\text{campo dentro de un } r=\infty}-\left(-E_0\cdot\frac{j\beta_0 z}{r}\cdot\hat{r}\right)\Big|_{z=0^-}\right)=\hat{z}\times(\vec{0}-\vec{0})=\boxed{\vec{0}}$ Sí cumple.

En $r=a$; $\hat{r}\times\left(\vec{E}(r=a^+)-\vec{E}(r=a^-)\right)=\hat{r}\times\left[\left(-E_0\cdot\frac{j\beta_0 z}{r}\hat{r}\right)\Big|_{r=a^+}-\vec{0}\right]=\boxed{\vec{0}}$ Sí cumple, ya que $\hat{r}\times\hat{r}=\vec{0}$

En $r=b$; Analogamente al caso anterior tenemos un campo que es cero y $\hat{r}\times\hat{r}=\vec{0}$.

El campo en la región de dieléctrico sí cumple las condiciones de contorno.

b) 1ª forma:

La potencia disipada en un volumen V viene dada por:

$$\langle P_{disipada}\rangle=\frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\int_V|\vec{E}|^2dV+\frac{\omega_0\mu''}{2}\int_V|\vec{H}|^2dV+\frac{\sigma}{2}\int_V|\vec{E}|^2dV\ ;\ (W)$$

Como en esta región $\mu''=0$ y $\sigma=0$ tenemos que:

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle=\frac{\omega_0\varepsilon_r''\varepsilon_0}{2}\cdot\int_{z=-L_1}^{0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^2\cdot z^2}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz\ ;\ (W)$$

EXPRESIÓN (1)

2ª forma:

Sabemos por el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia, en su parte real, para campos periódicos sinusoidales monocromáticos que:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V-\vec{J}_{ext}^{*}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}_0^{*}(\vec{r})\right)d\vec{S}+\langle P_{disipada\ en\ el\ volumen\ V\ por\ \varepsilon'',\mu''\ y\ \sigma}\rangle$$

Como no hay fuentes en el interior el 1er término es cero; además como todas las paredes de la región $-L_1<z<0$ son conductores perfectos, sabemos que la potencia que entre en esta región por el plano $z=-L_1$ se disipará en el dieléctrico porque los conductores son perfectos, por tanto:

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle \underset{z=-L_1}{\overset{}{=}} \langle P_{atraviesa}\rangle_{\substack{z=-L_1\\ \text{hacia}(+\hat{z})}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S \left(\vec{E}(z=-L_1)\times\vec{H}^*(z=-L_1)\right) dS\,\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\left[\left(\frac{E_0\, j\,\beta_0\cdot L_1}{r}\,\hat{r}\right)\times\left(\frac{E_0^*}{\eta_0\cdot r}\left[1-\frac{\varepsilon_r^*\cdot\beta_0^2\cdot(-L_1)^2}{2}\right]\cdot\hat{\varphi}\right)\right] r\,dr\,d\varphi\,\hat{z}\ ;(W)$$

EXPRESIÓN ②

3ª forma:

Como la región donde hay aire no se disipa potencia y tampoco hay fuentes, también sabemos que la potencia que entra a través de la apertura hacia $+\hat{z}$, se acabará disipando en la región $-L_1<z<0$, porque en la región μ_0, ε_0 no se disipa, y los conductores son perfectos.

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle = \langle P_{atraviesa}\rangle_{\substack{\text{apertura}\\ \text{hacia}(+\hat{z})}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S_{Ap}}\left(\vec{E}_{Ap}\times\vec{H}^*_{Ap}\right) dS_{Ap}\cdot\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=2a}^{b/2}\left[\left(\frac{E_1}{r}\,\hat{r}\times\frac{E_1\cdot e^{-j\psi}}{\eta_0\cdot r}\cdot\hat{\varphi}\right)\right] r\,dr\,d\varphi\,\hat{z}\ ;(W)$$ EXPRESIÓN ③

c) La potencia disipada siempre debe ser positiva, por tanto, de la expresión ③.

$$\langle P_{disipada}(-L_1<z<0)\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{E_1^2}{\eta_0}\cdot\cos\psi\cdot\ln\left(\frac{b}{4a}\right)\cdot 2\pi\ ;\ (W)$$

Como $b>4a$ (Ver enunciado) tenemos que $\ln\left(\frac{b}{4a}\right)>0$, y suponiendo $\eta_0\in\mathbb{R}^+$, debe ser $\cos\psi>0 \Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}}$

NOTA: Este apartado también se podría haber hecho suponiendo que si las fuentes están fuera: $\langle\vec{S}\rangle\big|_{Ap}$ debe salir en la dirección $+\hat{z}$.

d) Aplicamos el teorema de Poynting en su parte real, en el dominio de la frecuencia, para campos periódicos sinusoidales monocromáticos en la región de vacío $(-(L_1+L_2)<z<-L_1)$:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}^*_{ext}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})\,dV = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_0(\vec{r})\times\vec{H}_0^*(\vec{r})\right)d\vec{S} + \text{Disipada por } \varepsilon''\mu'' \text{ y } \sigma \text{ en este volumen.}$$

Como no hay fuentes en esta región el 1er término es cero, y como en esta región $\varepsilon''=0=\mu''=\sigma$ tenemos que: (Por los conductores perfectos ni sale ni entra potencia)

$$0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S_{Ap}}\left(\vec{E}_{Ap}\times\vec{H}^*_{Ap}\right)\cdot dS_{Ap}(-\hat{z}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_{S\,(z=-L_1)}\left(\vec{E}(z=-L_1)\times\vec{H}^*(z=-L_1)\right)\cdot dS\cdot\hat{z} + 0$$

0JO, saliente del volumen — 0JO, saliente del volumen

$$0 = (-\text{Expresión ③}) + (\text{Expresión ②}) \Rightarrow \text{Expresión ③} = \text{Expresión ②}$$

$$\text{Expresión ③} = \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{E_1^2}{\eta_0}\cdot\cos\psi\,\ln\left(\frac{b}{4a}\right)\cdot 2\pi}\ ;\ (W)$$

$$\text{Expresión ②} = \frac{1}{2}\,\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^3\cdot L_1^3}{\eta_0}\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\,\varepsilon_r^*\right] = \begin{cases}\mathrm{Re}\left[-j\,\varepsilon_r^*\right] = \mathrm{Re}\left[-j(\varepsilon_r'+j\varepsilon_r'')\right]\\ = \varepsilon_r''\end{cases}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^3\cdot L_1^3\cdot\ln(b/a)\cdot\pi\cdot\varepsilon_r''}{\eta_0}}\ (W)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene: $\dfrac{E_1^2}{|E_0|^2} = \dfrac{\beta_0^3\cdot L_1^3\cdot\ln(b/a)\cdot\pi\,\varepsilon_r''}{2\pi\cdot\cos\psi\,\ln\left(\frac{b}{4a}\right)}$

e) Como en esta región tenemos el campo eléctrico:

$$\boxed{\langle W_e(\vec{r},t)\rangle} = \frac{\varepsilon'}{4}\int_V |\vec{E}|^2 dV = \frac{\varepsilon_r'\cdot\varepsilon_0}{4}\int_{z=-L_1}^{0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{|E_0|^2\cdot\beta_0^2\cdot z^2}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \boxed{\frac{\varepsilon_r'\cdot\varepsilon_0}{4}\cdot|E_0|^2\cdot\beta_0^2\cdot\ln(b/a)\cdot 2\pi\cdot\frac{L_1^3}{3}}\ (\text{Julios})$$

$\boxed{\text{II.6}}$

a) $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$

- Es isótropo ya que $\vec{D}$ es paralelo a $\vec{E}$ al no ser la permitividad un tensor.
- No tiene dispersión temporal porque la respuesta $\vec{D}$ en un instante <u>NO</u> depende del resto de instantes.
- No tiene dispersión espacial porque la respuesta $\vec{D}$ en un punto <u>NO</u> depende del resto de puntos.
- No es homogéneo ya que la respuesta $\vec{D}$ depende de cada punto. $[\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})]$
- Es invariante temporal ya que la permitividad <u>NO</u> depende del tiempo.

c) Como tenemos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ $\forall z$ podemos calcular $\langle\vec{S}\rangle$ en todo el dieléctrico:

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \left\{\begin{matrix}\text{suponemos}\\ E_0\in\mathbb{C}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\left(E_0\,e^{-(\alpha+j\beta)z}\cdot\hat{y}\right)\times\left(\frac{E_0^*}{|\eta|\,e^{-j\phi}}\,e^{-(\alpha-j\beta)z}(-\hat{x})\right)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{|E_0|^2}{2|\eta|}\cdot\cos\phi\cdot e^{-2\alpha z}\cdot\hat{z}}\ (W/m^2)$$

Como $0<\phi<\frac{\pi}{2}$ este $\langle\vec{S}\rangle$ siempre tiene sentido $\hat{z}$, por tanto las fuentes están en $z\to-\infty$.

c1) $\langle P_{\text{ATRAVIESA } x=0 \text{ HACIA } (-\hat{x})}\rangle = \iint_S \langle\vec{S}\rangle\cdot(-\hat{x})\,dS = 0$ (W) ya que $\hat{z}\cdot(-\hat{x})=0$.

$\langle P_{\text{ATRAVIESA } x=a \text{ HACIA } (+\hat{x})}\rangle = \iint_S \langle\vec{S}\rangle\cdot(\hat{x})\,dS = 0$ (W) ya que $\hat{z}\cdot\hat{x}=0$.

Aplicamos el teorema de Poynting en el dominio de la frecuencia, en su parte real para campos armónicos monocromáticos en el volumen $0\le z\le d$.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V -\vec{J}^*_{c_{fuen}}\cdot\vec{E}_c\,dV = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\oint_S\left(\vec{E}_c\times\vec{H}_c^*\right)d\vec{S} + \langle P_{\text{DISIPADA } \varepsilon'',\mu'',\sigma \text{ } 0\le z\le d}\rangle$$

Como las fuentes están en $z<0$ el primer término es nulo, y como no sale potencia por $x=0$, ni por $x=a$, ni por $y=0$ ni por $y=b$ tenemos que:

$$\boxed{\langle P_{\text{DISIPADA } \varepsilon'',\mu'',\sigma \text{ } 0\le z\le d}\rangle} = \langle P_{\text{ENTRA POR } z=0 \text{ HACIA } (+\hat{z})}\rangle - \langle P_{\text{SALE POR } z=d \text{ HACIA } (+\hat{z})}\rangle =$$

$$= \int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\langle\vec{S}\rangle\Big|_{z=0}\cdot\hat{z}\,dx\,dy - \int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\langle\vec{S}\rangle\Big|_{z=d}\cdot\hat{z}\,dx\,dy = \boxed{\frac{|E_0|^2\cdot\cos\phi\cdot a\cdot b\cdot\left(1-e^{-2\alpha d}\right)}{2|\eta|}}\ (W)$$

c2) Como entre $0\le z\le d$ $\mu''=0$ y $\sigma=0$ tenemos que: $\langle P_{\text{DISIPADA } 0\le z\le d}\rangle = \frac{\omega_0\varepsilon''}{2}\cdot\int_V |\vec{E}_c|^2\,dV$

$$\boxed{\varepsilon''} = \frac{\dfrac{|E_0|^2\cdot\cos\phi\cdot a\cdot b\cdot\left(1-e^{-2\alpha d}\right)}{2|\eta|}}{\dfrac{\omega_0}{2}\displaystyle\int_{z=0}^{d}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}|E_0|^2 e^{-2\alpha z}\,dx\,dy\,dz} = \dots = \boxed{\frac{\cos\phi\cdot\alpha}{\pi f_0\cdot|\eta|}}\ (F/m)$$

c2) Continuación: Cálculo de ε'.

Aplicamos el mismo teorema anterior pero en su $\mathbb{I}m$:

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{I}m\int_V -\vec{J}^{*}_{fuen}\cdot\vec{E}_c\,dV = \frac{1}{2}\,\mathbb{I}m\oint_S(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^{*})d\vec{S} + 2\omega_0\left[\int_V\frac{\mu'}{4}|\bar{H}_c|^2dV - \int\frac{\varepsilon'}{4}|\bar{E}_c|^2dV\right]$$

Como no hay fuentes en el interior, y por las paredes $x=0$, $x=a$, $y=0$ e $y=b$ el segundo término es nulo tenemos que:

$$0 = \frac{1}{2}\,\mathbb{I}m\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\big(\bar{E}(z=0)\times\bar{H}^{*}(z=0)\big)\cdot\overset{\searrow\searrow\searrow\ 0\,\text{ó}\,0}{(-\hat{z})}\,dx\,dy + \frac{1}{2}\,\mathbb{I}m\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\big(\bar{E}(z=d)\times\bar{H}^{*}(z=d)\big)(+\hat{z})\,dx\,dy\ +$$

$$+\,2\omega_0\int_{z=0}^{d}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\frac{\mu_0}{4}|\bar{H}_c|^2\,dx\,dy\,dz - 2\omega_0\int_{z=0}^{d}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\frac{\varepsilon'}{4}|\bar{E}_c|^2\,dx\,dy\,dz$$

En esta ecuación todo es dato menos ε': Operando: $\boxed{\varepsilon' = \frac{\mu_0}{|\eta|^2} + \frac{\alpha\cdot\operatorname{sen}\phi}{\pi f_0|\eta|}}$

b) $$\int_V -\vec{J}(\bar{r},t)\cdot\vec{E}(\bar{r},t)\,dV = \oint_S\big(\bar{E}(\bar{r},t)\times\vec{H}(\bar{r},t)\big)\cdot d\vec{S} + \int_V\left(\vec{E}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(\bar{r},t)}{\partial t} + \bar{H}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\bar{r},t)}{\partial t}\right)dV$$

$$\int_V -J_{fuen}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\,dV + \oint_S(\bar{E}(\bar{r},t)\times\bar{H}(\bar{r},t))d\bar{S} + \int\sigma E^2(\bar{r},t)\,dV + \frac{\partial W_{em}}{dt}$$

b1) $\bar{J}(\bar{r},t) = \bar{J}_{fuen}(\bar{r},t) + \bar{J}_{\sigma}(\bar{r},t) = \bar{0} + \sigma\cdot\bar{E}(\bar{r},t)$

$\bar{J}_{fuen} = \bar{0}$ ya que no hay fuentes en el interior

Como está limitado por $\sigma = \infty$

$\hookrightarrow \oint_S = 0$

Así pues:

$$0 = 0 + \int_V\left(\bar{E}(\bar{r},t)\cdot\frac{d\bar{D}(\bar{r},t)}{dt} + \bar{H}(\bar{r},t)\,\frac{d\bar{B}(\bar{r},t)}{dt}\right)dV + \int_V\sigma\cdot E^2(\bar{r},t)\,dV$$

b2) $\bar{J}(\bar{r},t) = \bar{J}_{fuen}(\bar{r},t) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\bar{J}_{\sigma}(\bar{r},t)}} = \bar{J}_{fuen}(\bar{r},t)$

Así pues: $$\int_V -J_{fuen}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\,dV = \oint_S\big(\bar{E}(\bar{r},t)\times\bar{H}(\bar{r},t)\big)\cdot d\bar{S} + \int_V\left(\bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)dV$$

b3) Si $\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon(\bar{r})\cdot\bar{E}(\bar{r},t) \Rightarrow \bar{E}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{D}(\bar{r},t)}{\partial t} = \varepsilon(\bar{r})\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{E}(\bar{r},t)}{\partial t} =$

$$= \varepsilon(\bar{r})\cdot\tfrac{1}{2}\left[\bar{E}(\bar{r},t)\frac{\partial\bar{E}(\bar{r},t)}{dt} + \frac{\partial\bar{E}(\bar{r},t)}{dt}\bar{E}(\bar{r},t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(\bar{r})\bar{E}^2(\bar{r},t)\right)$$

Si $\bar{B}(\bar{r},t) = \mu(\bar{r})\cdot\bar{H}(\bar{r},t)$ Analogamente $\rightarrow$ $\bar{H}(\bar{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{B}(\bar{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\mu(\bar{r})\bar{H}^2(\bar{r},t)\right)$

Finalmente $$\int_V\left(\bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)dV = \int_V\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon(\bar{r})\cdot\bar{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mu(\bar{r})\bar{H}^2\right)dV = \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \frac{\partial}{\partial t}W_{em}$$

Variación de la energía electromagnética almacenada en el volumen por los campos $\bar{E}$ y $\bar{H}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

Dpto. de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos — Universidad Politécnica de Madrid

ASIGNATURA: **CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS I** — FECHA: 10 de abril de 2003

APELLIDOS:	NOMBRE:

Prueba complementaria **II.14**

1) Se considera una esfera de radio R_0 compuesta por un material dieléctrico de permitividad ε y permeabilidad μ_0. En el interior de la esfera existen una fuentes monocromáticas de frecuencia f_0 que generan una densidad de potencia electromagnética cuyo valor medio viene dado en coordenadas esféricas por la expresión:

$$< -\vec{J}_{fuen.}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) > \; = \; \frac{A^2}{r} \quad (W/m^3) \qquad en \quad r \le R_0$$

Se conoce también que el campo electromagnético en la superficie de la esfera, $r=R_0$, y en el dominio de la frecuencia viene dado por:

$$\vec{E} = A \; sen\theta \; \hat{\theta} \quad (V/m) \qquad y \qquad \vec{H} = \frac{A}{10}\,(1+j)\; sen\theta \; \hat{\varphi} \quad (A/m)$$

a) Compruebe que existen pérdidas en la esfera y calcule el valor medio de éstas.

b) Obtenga la diferencia entre los valores medios de las energías magnética y eléctrica almacenadas en la esfera si se sabe además que:

$$\left.\begin{aligned} \vec{J}_{fuen.}(\vec{r},t) &= \vec{J}_0(\vec{r})\,\cos(\omega_0 t) \qquad (A/m^2) \\ \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0(\vec{r})\,\cos(\omega_0 t) \qquad (V/m) \end{aligned}\right\} \qquad en \quad r \le R_0$$

2) Escriba la expresión del campo eléctrico de dos ondas planas homogéneas monocromáticas de la misma frecuencia, que se propagan por el vacío en la misma dirección, con polarizaciones lineales en direcciones $(\hat{x}+\hat{y})$ y $\hat{x}$, siendo la potencia transmitida doble en la primera que en la segunda. ¿Qué desfasaje relativo entre ambas hace que su suma sea una OPHM con polarización lineal en dirección $\hat{y}$?

Nota: $\displaystyle\int_0^{\pi} sen^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$

SOLUCIÓN DEL PARCIAL DEL 10 DE ABRIL DE 2003

2ª parte:

La expresión general de una OPHM que se propaga en el vacío ($\alpha=0$) es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\beta_0 \hat{n}\cdot\vec{r}} \quad , (V/m)$$

Así pues las ondas [redacted] pedidas serán:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = E_1\,(\hat{x}+\hat{y})\cdot e^{-j\beta_0\hat{n}\cdot\vec{r}}\cdot e^{j\varphi_1}, (V/m)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = E_2\;\hat{x}\cdot e^{-j\beta_0\hat{n}\cdot\vec{r}}\cdot e^{j\varphi_2}, (V/m)$$

siendo: φ_1 y φ_2 fases arbitrarias.

$$\beta_0 = \omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi f_0}{c_0} = \frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}(rad/m)$$

$$\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$$

$\hat{n}$ debe ser un vector unitario que sea perpendicular a $\hat{x}$ y también perpendicular a $(\hat{y}+\hat{x})$ por tanto si $\hat{n}$ tiene la siguiente forma:

$$\hat{n} = \frac{n_x\hat{x}+n_y\hat{y}+n_z\hat{z}}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$$ llegamos a que:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{n}\cdot\hat{x} = 0 \Rightarrow n_x = 0\\ \hat{n}\cdot(\hat{x}+\hat{y}) = 0 \Rightarrow n_y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \pm\hat{z}}$$

A partir de ahora suponemos $\hat{n}=\hat{z}$

Por otro lado:

$$W_{t_1} = \frac{|\vec{E}_{0_1}|^2}{2\eta} = \frac{E_1^2}{120\pi}\,(W) \Rightarrow \boxed{E_1 = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}}\,(V/m)$$

$$W_{t_2} = \frac{W_{t_1}}{2} = \frac{|\vec{E}_{0_2}|^2}{2\eta} = \frac{E_2^2}{2\cdot 120\pi}\,(W) \Rightarrow \boxed{E_2 = E_1 = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}}\,(V/m)$$

Así pues:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\cdot(\hat{x}+\hat{y})\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z}\cdot e^{j\varphi_1}, (V/m)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\cdot\hat{x}\cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z}\cdot e^{j\varphi_2}, (V/m)$$

[redacted] Sus valores instantáneos son:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_1(\vec{r})\cdot e^{j\omega_0 t}\right] = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\cdot(\hat{x}+\hat{y})\cdot\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z + \varphi_1\right), (V/m)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_2(\vec{r})\cdot e^{j\omega_0 t}\right] = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\cdot\hat{x}\cdot\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}z + \varphi_2\right), (V/m)$$

La suma de ambas ondas es:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\left[(\hat{x}+\hat{y})\cdot e^{j\varphi_1} + \hat{x}\cdot e^{j\varphi_2}\right]\cdot e^{-j\beta_0 z} =$$

$$= \sqrt{120\pi\cdot W_{t_1}}\cdot e^{j\varphi_1}\left[\hat{y}+\hat{x}+\hat{x}\cdot e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}\right]\cdot e^{-j\beta_0 z}, (V/m)$$

Para que esta onda tenga polarización lineal en $\hat{y}$ debe ser:

$$e^{j(\varphi_2-\varphi_1)} = -1 \Rightarrow \boxed{\varphi_2-\varphi_1 = \pm\pi}$$

1ª parte:

II-14. 1ª Parte

$$\langle -J_{fuen}(\bar{r},t)\rangle = \frac{A^2}{r}\ (W/m^3) \text{ si } r \leq R_0$$

$$\bar{E}(r=R_0) = A \operatorname{sen}\theta\ \hat{\theta}\ (V/m)$$

$$\bar{H}(r=R_0) = \frac{A}{10}(1+j)\operatorname{sen}\theta\ \hat{\varphi}\ (A/m)$$

a) $\langle P_{DIS}\rangle = \frac{\omega_0 \varepsilon''}{2}\int_V |E_c|^2 dV = ??$

Aplicamos BPA en la esfera

$$\int_V \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(-\bar{J}^*_{fuen}\cdot\bar{E}_c\right)\cdot dV = \oint_S \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^*\right)d\bar{S} + \langle P_{disipada\ esfera}\rangle$$

$$\oint_V \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^*\right)d\bar{S} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\bar{E}(r=R_0)\times\bar{H}^*(r=R_0)\right)\cdot\hat{r}\cdot R_0^2\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{A^2}{10}(1-j)\operatorname{sen}^2\theta\ \hat{r}\cdot\hat{r}\cdot R_0^2\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{A^2}{10}R_0^2\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi R_0^2}{15}A^2\ (W)$$

$$\int_V \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(-\bar{J}^*_{fuen}\cdot\bar{E}_c\right)dV = \int_V \frac{A^2}{r}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}\frac{A^2}{r}\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \ldots = \overset{0}{\operatorname{Im}}\ -\frac{2\pi R_0^2 A^2}{15}$$

$$= 2\pi R_0^2 A^2\ (W)$$

$$\langle P_{dis}\rangle = \frac{14}{15}2\pi R_0^2 A^2\ (W)$$

b) Datos: $\bar{J}_{fuen}(\bar{r},t) = \bar{J}_0(\bar{r})\cos(\omega_0 t)\ (A/m^2)$

$\bar{E}(\bar{r},t) = \bar{E}_0(\bar{r})\cdot\cos(\omega_0 t)\ (V/m)$

Aplicamos el mismo Tª pero en su parte Im

$$\langle W_m\rangle - \langle W_e\rangle = \frac{\int_V \tfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left(-\bar{J}^*_{fuen}\cdot\bar{E}_c\right)dV - \oint_S \tfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left(E_c\times H_c^*\right)d\bar{S}}{2\omega_0} = \begin{cases} J_{c\,fuen} = J_0(\bar{r})\in\mathbb{R} \\ \bar{E}_c = E_0(\bar{r})\in\mathbb{R} \\ \operatorname{Im}\left(-\bar{J}_{c\,fuen}E_c\right)=0 \end{cases}$$

$$= \frac{0 - \left(\frac{-2\pi R_0^2 A^2}{15}\right)}{2\omega_0}\ (J)$$

COMENTARIOS FINALES

- Si el dato fuera : $-\bar{J}_{fuer}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{2A^2}{r}\cos^2(\omega_0 t)$ (W/m^3)

el problema es el mismo ~~pero~~ ya que $\langle\cos^2\omega_0 t\rangle = 1/2$

y por tanto : $\langle -\bar{J}_{fuer}(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\rangle = \frac{A^2}{r}$ (W/m^3)

Hacer problema 26 : $\langle -J(\bar{r},t)\cdot\bar{E}(\bar{r},t)\rangle = \langle P_{int}\rangle = \frac{1}{R^2 r}$ (W/m^3)

$$\parallel$$

$$\langle -J_{fuer}(\bar{r},t)\bar{E}(\bar{r},t)\rangle$$

$$\bar{J}(\bar{r},t) = \bar{J}_{fuer}(\bar{r},t) + \underset{\sigma}{J_{ind}}(\bar{r},t) = \bar{J}_{fuer}(\bar{r},t)$$

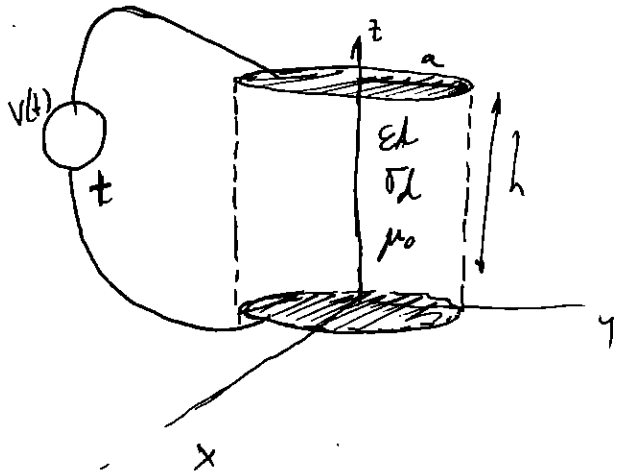
Como en la esfera $\sigma = 0$

$\bar{J}_r = \sigma\bar{E} = \bar{0}$

a) ¿$\vec{D}(\bar{E})$ y $\bar{J}_\sigma(\bar{E})$?

$\vec{D}(\bar{E})$, $\bar{J}_\sigma(\bar{E})$ → Sin interacción cruzada

Del enunciado homogéneo



De la expresión de $H(t)$ sabemos que ε_d y σ_d son reales, por tanto sin disp. temporal

⇓ Causal.

Como $\varepsilon_d \neq \varepsilon_d(t)$ y $\sigma_d \neq \sigma_d(t)$ son invariantes en el tiempo.

Como ε_d y σ_d no son tensores ⟶ Isotropos

Suponemos lineales:

$$\bar{D}(\bar{r},t) = \varepsilon_d \cdot \bar{E}(\bar{r},t) \quad (C/m^2)$$
$$\bar{D}_c(\bar{r},\omega) = \varepsilon_d \bar{E}_c(\bar{r},\omega)$$

$$J_\sigma(\bar{r},t) = \sigma_d \bar{E}(\bar{r},t)$$
$$J_{\sigma_c}(\bar{r},\omega) = \sigma_d \cdot \bar{E}(\bar{r},\omega) \quad (A/m^2)$$

b) Como $\varepsilon'' = 0 = \mu''$ la potencia disipada por efecto Joule es:

$$P_{disip}(\bar{r},t) = \int_V \sigma_d \bar{E}^2(\bar{r},t)\,dV = \sigma_d \left(\frac{V(t)}{h}\right)^2 \cdot \pi a^2 \cdot h \quad (W)$$

c) $\bar{J}(\bar{r},t) = \bar{J}_{fuen}(\bar{r},t) + \bar{J}_\sigma(\bar{r},t)$

Por tanto el T° dado:

$$\int_V -J_{fuen}(\bar{r},t)\cdot E(\bar{r},t)\,dV = \oint_S \left(\bar{E}(\bar{r},t)\times\bar{H}(\bar{r},t)\right)d\bar{S} + \int_V \sigma \cdot E^2(\bar{r},t)\,dV + \int_V \left(E\frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{H}\frac{d\bar{B}}{dt}\right)dV$$

Ver demostración del II-6 (63) $\Rightarrow \int_V \left(\bar{E}\cdot\frac{d\bar{D}}{dt} \cdots\right. = \frac{\partial W_{em}}{dt}$

El 1er es cero porque no hay fuentes dentro del condensador

El 3er termino en el apartado b)

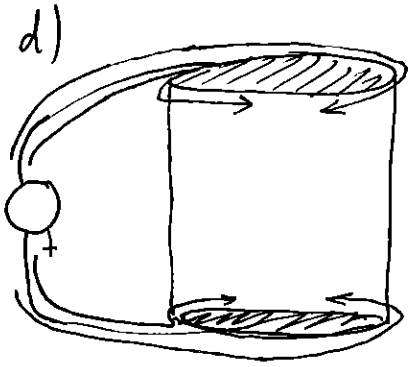
$$\oint_S \left(\bar{E}(\bar{r},t)\times\bar{H}(\bar{r},t)\right)\cdot d\bar{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tapas de } \sigma=\infty}}{=} \iint_S \frac{v(t)}{h}\left[\frac{a\sigma_d}{2h}v(t) + \frac{a\varepsilon_d}{2h}\frac{dV(t)}{dt}\right](-\hat{r})(+\hat{r})\,ds =$$

$$= -\left[\frac{a\sigma_d\,(v(t))^2}{2h^2} + \frac{a\,\varepsilon_d}{2h^2}\,v(t)\,\frac{dV(t)}{dt}\right]2\pi a h \quad (W)$$

Así pues:

$$\frac{\partial W_{em}}{dt} = \frac{a^2\,\varepsilon_d\,\pi\,v(t)\,\frac{dV(t)}{dt}}{h} \quad (W) \text{ ó } (J/seg)$$

d)



e) $v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow$ Su transformada es $V_c = V_0$

$$\frac{dV(t)}{dt} = -V_0\,\omega_0\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow \text{Su transformada es}$$
$$= -V_0\,\omega_0 \cdot e^{-j\pi/2}$$
$$= -j\,\omega_0 V_0$$

$$\bar{E}_c = \frac{V_0}{h}\,\hat{z} \quad (V/m)$$

$$\bar{H}_c\Big|_{r=a} = \left[\frac{a\,\sigma_d}{2h}V_0 + \frac{a\,\varepsilon_d}{2h}\cdot j\omega_0 V_0\right]\cdot\hat{\varphi} \quad (A/m)$$

f) $$\langle W_e\rangle = \frac{\varepsilon'}{4}\int_V |E_c|^2\,dV = \frac{\varepsilon_d}{4}\int_V \frac{V_0^2}{h^2}\,dV = \frac{\varepsilon_d V_0^2}{4h^2}\,\pi a^2 h \quad (J)$$

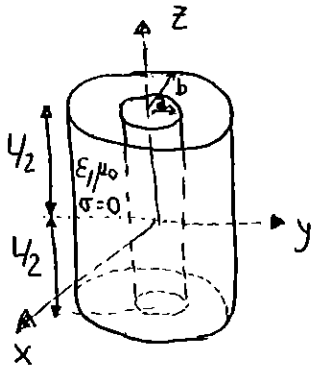
Aplicamos la parte imaginaria del T° de Poynting en la frec en el condensador

$$\langle W_{he}\rangle = \langle W_e\rangle + \frac{\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(-\bar{J}_{c\,fuc}^{*}\cdot\bar{E}_c\right)dV - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\oint_S\left(\bar{E}_c\times\bar{H}_c^{*}\right)d\bar{S}}{2\omega_0}$$

$$= \langle W_e\rangle - \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_0^h\int_0^{2\pi}\left(\bar{E}_c(r=a)\times\bar{H}_c^{*}(r=a)\right)\hat{r}\,ds}{2\omega_0} = \ldots = 0$$

2a

PRIMER EJERCICIO ENERO 2008



$$\vec{E} = \frac{E_0}{r}\cdot\cos(pz)\,\hat{r} \quad (V/m) \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{L}{2} \le z \le \frac{L}{2} \end{cases}$$

$E_0 \in \mathbb{C}$

p un parámetro.

a) $\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\big|_S = \vec{0}$

En $r=a$; $\hat{r} \times \left(\vec{E}(r=a^+) - \cancel{\vec{E}(r=a^-)}^{\,\vec{0}}\right) = \vec{0}$ ya que $\hat{r}\times\hat{r} = \vec{0}$

En $r=b$; $\hat{r} \times \left(\cancel{\vec{E}(r=b^+)}^{\,\vec{0}} - \vec{E}(r=b^-)\right) = \vec{0}$ " " "

En $z=-\frac{L}{2}$; $\hat{z} \times \left(\vec{E}(z=-L/2^+) - \cancel{\vec{E}(z=-\frac{L}{2}^-)}^{\,\vec{0}}\right) = \hat{z} \times \frac{E_0}{r}\cdot\cos\left(-\frac{p\cdot L}{2}\right)\hat{r} \overset{\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)}{=} \hat{\varphi}\cdot\frac{E_0}{r}\cos\left(\frac{pL}{2}\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{p\cdot L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{p\cdot L}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{p = (2n+1)\frac{\pi}{L}}$

En $z=\frac{L}{2}$; $\hat{z} \times \left(\cancel{\vec{E}(z=\frac{L}{2}^+)}^{\,\vec{0}} - \vec{E}(z=\frac{L}{2}^-)\right) = -\hat{\varphi}\cdot\frac{E_0}{r}\cos\left(\frac{pL}{2}\right) = \vec{0} \Rightarrow$ Idem p anterior.

b) $\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega_0\mu_0\vec{H}(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{H}(\vec{r})} = \frac{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})}{-j\omega_0\mu_0} = \frac{j}{\omega_0\mu_0}\cdot\begin{vmatrix} \hat{r}/r & \hat{\varphi} & \hat{z}/r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{E_0}{r}\cos(pz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j\hat{\varphi}}{\omega_0\mu_0}\cdot\frac{\partial\left(\frac{E_0\cos(pz)}{r}\right)}{\partial z} =$

$$= \boxed{\frac{-j\,E_0\,p}{\omega_0\mu_0\,r}\cdot\operatorname{sen}(pz)\cdot\hat{\varphi}}\ (A/m)$$

c)

c1) Como no hay fuente en el interior y está rodeado de conductor perfecto, los dos primeros términos son nulos y por tanto:

$$0 = j\omega\int_V \mu_0|\vec{H}|^2 dV - j\omega\int \varepsilon'|\vec{E}|^2 dV + \omega\int_V \varepsilon''|\vec{E}|^2 dV \xrightarrow{\mathrm{Re}} 0 = \omega\varepsilon''\int_V |\vec{E}|^2 dV \Rightarrow \boxed{E_0 = 0}$$

Se obtiene $E_0 = 0$ y por tanto $\vec{E} = \vec{0} = \vec{H}$ ya que si no hay fuente en el interior, las paredes son de conductor perfecto y el dieléctrico tiene pérdidas, al introducir un campo eléctrico en el interior del volumen, éste se acabará transformando en potencia disipada, es decir, el campo desaparecerá para transformarse en calor.

c2) Si $\varepsilon'' = 0$ la ecuación del apartado anterior se reduce a: $\mu_0\int_V |\vec{H}|^2 dV = \varepsilon_0\int_V |\vec{E}|^2 dV$

Es decir, en este caso la energía almacenada en el campo eléctrico es la misma que la almacenada en el magnético.

- $$\mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 dV = \mu_0 \int_{z=-L/2}^{L/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} \frac{|E_0|^2 \cdot p^2}{(\omega_0 \mu_0)^2 \cdot r^2} \operatorname{sen}^2(pz) \cdot r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \frac{|E_0|^2 \cdot p^2}{\omega_0^2 \cdot \mu_0} \cdot \ln\left(b/a\right) \cdot 2\pi \cdot \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{1-\cos(2pz)}{2} dz = \boxed{\frac{|E_0|^2 \cdot p^2}{\omega_0^2 \mu_0} \cdot \ln\left(b/a\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{L}{2}} \ (J)$$

- $$\varepsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dV = \varepsilon_0 \int_{z=-L/2}^{L/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} \frac{|E_0|^2}{r^2} \cos^2(pz) \cdot r\, dr\, d\varphi\, dz = \boxed{\varepsilon_0 |E_0|^2 \cdot \ln\left(b/a\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{L}{2}} \ (J)$$

Igualándolas observamos que $|\vec{E}_0|$ puede ser cualquier constante.

<u>Comentario final.</u>

Si nos dan $\vec{H}$ como obtenemos $\vec{E}$:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \vec{J}_{fuen} + \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} = \vec{J}_{fuen} + j\omega \varepsilon_{eq} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{(\nabla \times H) - \vec{J}_{fuen}}{j\omega \varepsilon_{eq}} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega \varepsilon_{eq}}$$

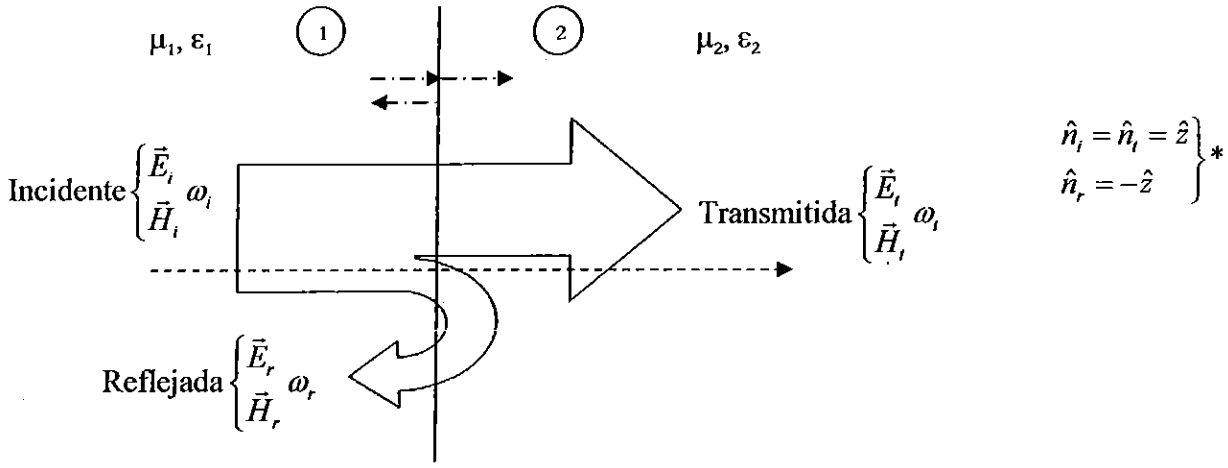
Casi siempre $J_{fuen} = 0$

TEMA 2: INCIDENCIA DE O.P. SOBRE OBSTÁCULOS

1ª PARTE: INCIDENCIA NORMAL

0. **INTRODUCCIÓN** → **Ver tema 0**

1. **PROBLEMA DE 2 MEDIOS**



Relaciones importantes

$$\omega_i = \omega_t + \omega_r$$

$$\vec{E}_i\Big|_{z=0^-} + \vec{E}_r\Big|_{z=0^-} = \vec{E}_t\Big|_{z=0^+}$$

Viene de "condiciones de contorno" y sólo es válida en incidencia normal

Definición "onda estacionaria"

Una O.E es la formada por dos ondas de la misma naturaleza y frecuencia que se propagan en la misma dirección pero en sentidos opuestos.

NOTA: En el medio ① se forma una onda estacionaria.

1.1. Coeficiente de reflexión (ρ)

Relaciona la onda incidente y la reflejada:

$$\vec{E}_{ref}(z) = \rho(z) \cdot \vec{E}_{inc}(z)$$
$$\vec{H}_{ref}(z) = -\rho(z) \cdot \vec{H}_{inc}(z)$$

Si despejáramos: $\rho(z) = \dfrac{\vec{E}_{0ref} \cdot e^{+\gamma_1 z}}{\vec{E}_{0inc} \cdot e^{-\gamma_1 z}} = \rho(z=0) \cdot e^{+2\gamma_1 z}$

$$\rho(z=0^-) = \left|\rho(z=0^-)\right| \cdot e^{j\varphi} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (*)$$

Comentarios importantes

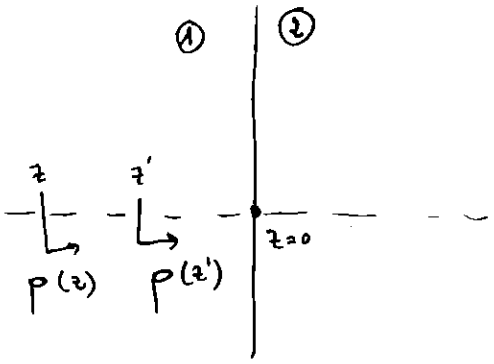
- $\rho(z) = \left|\rho(z=0^-)\right| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{+2\gamma_1 z} = \left|\rho(z=0^-)\right| \cdot e^{j(2\beta_1 z+\varphi)} \cdot e^{+2\alpha_1 z}$
  - Si el medio ① no tiene pérdidas → $\alpha_1 = 0$ y por tanto el módulo del coeficiente de reflexión es el mismo en todos los puntos del medio ①.

$$\left|\rho(z)\right| = \left|\rho(z=0^-)\right|$$

  - $\underbrace{0}_{\text{Transmisión total (No hay onda reflejada)}} \le \left|\rho\left(z=0^-\right)\right| \le \underbrace{1}_{\text{Reflexión total (No hay onda transmitida)}}$ → No puede haber más onda reflejada que la que incide

Generalización del cálculo del coeficiente de reflexión en un punto (z), dado el coeficiente de reflexión en cualquier otro punto (z'):

$$\rho(z) = \rho(z') \cdot e^{+2\gamma_1 (z-z')}$$

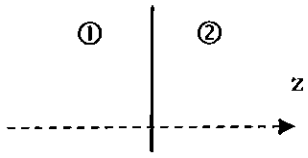


Desplazar el coeficiente de reflexión una distancia "d" hacia la izquierda desde la primera discontinuidad es:

$$\rho(d) = \rho(z=0^-) \cdot e^{-2\gamma_1 d}$$

1.2. Coeficiente de transmisión

Con el esquema:



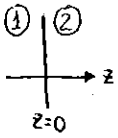
Relaciona la onda transmitida con la incidente.

$$\tau = 1 + \rho\left(z=0^-\right) = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

→ Sólo se define en z=0 ya que relaciona la onda transmitida con la incidente y sólo coinciden en z=0.

1.3. Diagrama de onda estacionaria (D.O.E) y Coeficiente de onda estacionaria (C.O.E)

El diagrama de onda estacionaria es la representación de $\left|\vec{E}_{total①}\right|$. Suponemos medios sin pérdidas, y el siguiente esquema:



Demostración:

$$\left|\vec{E}_{total①}\right| = \left|\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}\right| = \left|\vec{E}_{0inc} \cdot e^{-j\beta_1 z} + \vec{E}_{0ref} \cdot e^{+j\beta_1 z}\right| = \left|\vec{E}_{0inc} \cdot e^{-j\beta_1 z}\left(1 + \frac{\vec{E}_{0ref}}{\vec{E}_{0inc}} \cdot e^{+2j\beta_1 z}\right)\right| =$$

$$\left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \left|1 + \rho\left(z = 0^-\right) \cdot e^{+2j\beta_1 z}\right| = \left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \left|1 + \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot e^{j(2\beta_1 z + \varphi)}\right| =$$

$$\left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \left|1 + \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1 z + \varphi\right) + jsen\left(2\beta_1 z + \varphi\right)\right| =$$

$$\left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{\left(1 + \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1 z + \varphi\right)\right)^2 + \left(\left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot sen\left(2\beta_1 z + \varphi\right)\right)^2} =$$

$$\left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{1 + \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right|^2 \cdot 1 + 2 \cdot \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1 z + \varphi\right)}$$

$$\left|\vec{E}_{total①}\right| = \left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{1 + \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right|^2 \cdot 1 + 2 \cdot \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1 z + \varphi\right)} \qquad \left(\mathrm{V}/\mathrm{m}\right)$$

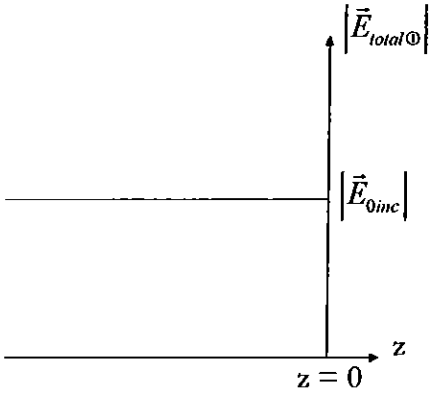
Siendo:

- $\rho\left(z = 0^-\right) = \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right| e^{j\varphi}$
- $\beta_1 = k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = \dfrac{2\pi f}{c_1} \qquad \left(\mathrm{rad}/\mathrm{m}\right)$
- $z \leq 0$

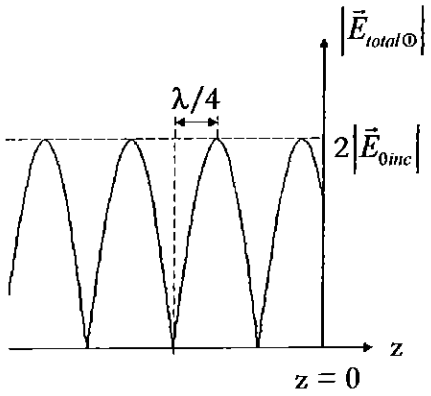
Comentarios:

Vamos a tener tres tipos de D.O.E::

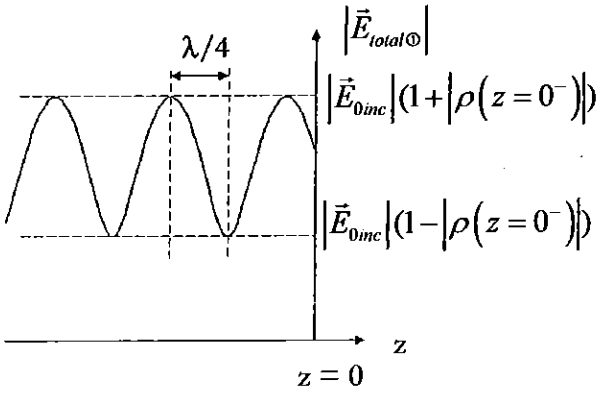
a. $\left|\rho(z = 0^-)\right| = 0$ **Transmisión total**



b. $\left|\rho(z=0^-)\right|=1$ **Reflexión total**



c. $0<\left|\rho(z=0^-)\right|<1$



Se define el **Coeficiente de Onda Estacionaria** como:

$$C.O.E = R.O.E = S.W.R = S = \frac{\left|\vec{E}_{total①}\right|_{máx}}{\left|\vec{E}_{total①}\right|_{mín}} = \frac{\left|\vec{E}_{0inc}\right|(1+\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|)}{\left|\vec{E}_{0inc}\right|(1-\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|)} = \frac{1+\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|}{1-\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|}$$

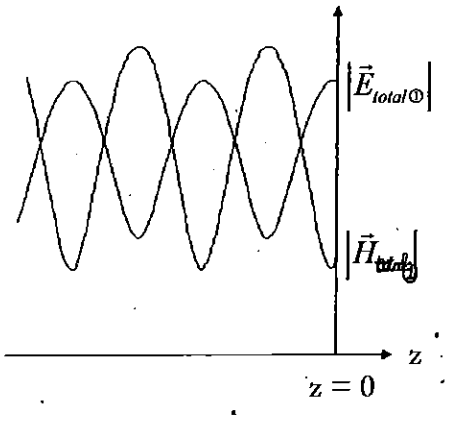
$$\underbrace{1}_{\downarrow} \le C.O.E \le \underbrace{\infty}_{\downarrow}$$

Reflexión total (no hay onda transmitida) Caso b

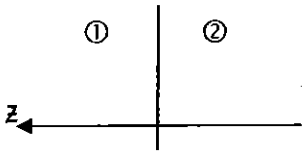
Transmisión total (no hay onda reflejada) Caso a

$$\left|\vec{H}_{total①}\right| = \left|\vec{H}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{1+\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2 \cdot 1 \underbrace{-}_{\Uparrow} \overbrace{2}^{\Downarrow} \cdot \left|\rho\left(z=0^-\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1 z+\varphi\right)} \qquad \left(\mathrm{A}/\mathrm{m}\right)$$

Los mínimos de $\left|\vec{H}_{total①}\right|$ coinciden en posición con los máximos $\left|\vec{E}_{total①}\right|$ y viceversa.



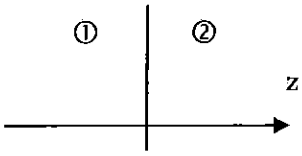
Si nos ponen este esquema:



z= 0

$$\left|\vec{E}_{total①}\right| = \left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{1+\left|\rho\left(z=0^{+}\right)\right|^{2} \cdot 1 + 2 \cdot \left|\rho\left(z=0^{+}\right)\right| \cdot \cos\left(\varphi - 2\beta_1 z\right)} \qquad (\mathrm{V/m})$$

Si nos ponen este esquema:



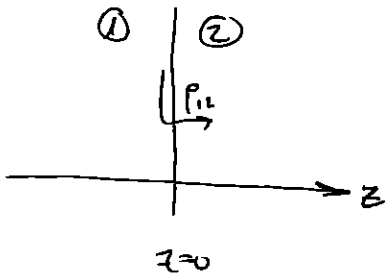
z= -3

$$\left|\vec{E}_{total①}\right| = \left|\vec{E}_{0inc}\right| \cdot \sqrt{1+\left|\rho\left(z=-3^{-}\right)\right|^{2} \cdot 1 + 2 \cdot \left|\rho\left(z=-3^{-}\right)\right| \cdot \cos\left(2\beta_1\left(z+3\right)+\varphi\right)} \qquad (\mathrm{V/m})$$

Ejercicios:

1. Determinar el coeficiente de reflexión en la separación entre dos medios sin pérdidas sabiendo que en ella hay un máximo de campo eléctrico y que s_1=2 (COE_1=2)

①



¿ρ_{12}? = ($\rho_{12} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$)

$$\rho_{12} = |\rho_{12}| e^{j\varphi_{12}}$$

Como $s_1 = 2 = \dfrac{1+|\rho_{12}|}{1-|\rho_{12}|} \Rightarrow |\rho_{12}| = \dfrac{s_1 - 1}{s_1 + 1} = 1/3$

Sabemos que: $|\overline{E_{TOT}}_{①}| = |\overline{E_{0inc}}| \cdot \sqrt{1+|\rho_{12}|^2 + 2|\rho_{12}| \cdot \cos(2\beta_1 z + \varphi_{12})}$

Como en la discont hay un maximo de $|\overline{E_{TOTAL①}}|$:

$\cos(2\beta_1 z + \varphi_{12})\Big|_{z=0} = +1 \Rightarrow \cos(\varphi_{12}) = +1 \qquad \varphi_{12} = 0$

Así pues $\rho_{12} = |\rho_{12}| e^{j\varphi_{12}} = 1/3\, e^{j0} = 1/3$

2. Idem con un mínimo de campo en la discontinuidad.

Igual que ① pero en vez de max hay min y por eso

$$\cos\left(\quad \right)\Big|_{z=0} = -1 \Rightarrow \cos\varphi_{12} = -1 \Rightarrow \varphi_{12} = \pi$$

$$\rho_{12} = -1/3$$

CONCLUSIONES

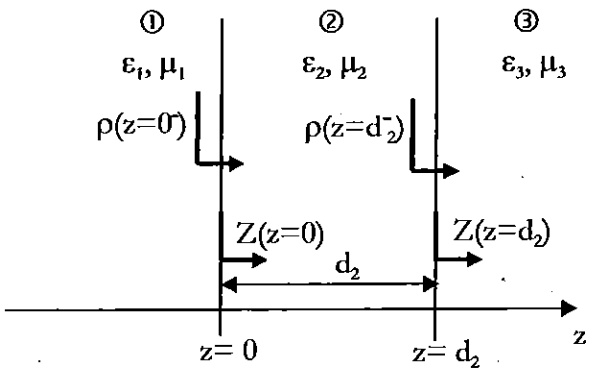
- $\varphi_{12} = 0 \Leftrightarrow$ Maximo del DOE_1 en la disc 1-2
- $\varphi_{12} = \pi \Leftrightarrow$ Minimo del DOE_1 en la disc 1-2.

¡¡OJO!!

Donde dan el dato

$$d_{\substack{M-m \\ \text{consecutivos}}} = \frac{\lambda_1}{4}$$

2. MULTIDISCONTINUIDAD (Problema de una lámina)



- Como en el medio 3 no hay onda reflejada: $s_3 = 1$ (el mínimo)
- $Z(z=d_2) = \eta_3$ (Ω): impedancia equivalente desde $z=d_2$ hacia la derecha

- $$\rho\left(z=d_2^-\right)=\frac{Z\left(z=d_2\right)-\eta_2}{Z\left(z=d_2\right)+\eta_2}=\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3+\eta_2}$$
- $$s_2=\frac{1+\left|\rho\left(z=d_2^-\right)\right|}{1-\left|\rho\left(z=d_2^+\right)\right|}$$
- $$Z(z=0)=\eta_2\frac{\eta_3\cos\left(\beta_2 d_2\right)+\overbrace{j}^{\Omega\Omega}\,\eta_2 sen\left(\beta_2 d_2\right)}{\eta_2\cos\left(\beta_2 d_2\right)+\underbrace{j}_{\Omega\Omega}\,\eta_3 sen\left(\beta_2 d_2\right)} \qquad (\Omega)$$

Impedancia equivalente desde z=0 hacia la derecha

- $$\rho\left(z=0^-\right)=\frac{Z\left(z=0\right)-\eta_1}{Z\left(z=0\right)+\eta_1}$$ Coeficiente de Reflexión que contempla todas las reflexiones.
- $$s_1=\frac{1+|\rho_{12}|}{1-|\rho_{12}|}$$

Comentarios:

- Si los medios son sin pérdidas:

$$\eta_1=\eta_0\cdot\sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}} \qquad (\Omega)$$

$$\eta_2=\eta_0\cdot\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}} \qquad (\Omega); \qquad \beta_2=k_2=\frac{2\pi f}{c_2}=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} \qquad (rad/m)$$

$$\eta_3=\eta_0\cdot\sqrt{\frac{\mu_{r3}}{\varepsilon_{r3}}} \qquad (\Omega)$$

- El D.O.E en el medio 1 sigue siendo:

$$\left|\vec{E}_{total①}\right|=\left|\vec{E}_{0inc}\right|\cdot\sqrt{1+\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2\cdot 1+2\cdot\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|\cdot\cos\left(\varphi+2\beta_1 z\right)} \qquad (V/m)$$

$\varphi = 0 \leftrightarrow$ Máximo en la discontinuidad entre ① y ②

$\varphi = \pi \leftrightarrow$ Mínimo en la discontinuidad entre ① y ②

- Si la lámina tiene pérdidas:

$$Z(z=0)=\eta_2\frac{\eta_3\,ch\left(\gamma_2 d_2\right)+\eta_2\,sh\left(\gamma_2 d_2\right)}{\eta_2\,ch\left(\gamma_2 d_2\right)+\eta_3\,sh\left(\gamma_2 d_2\right)} \qquad (\Omega)$$

Siendo
$$\gamma_2=\alpha_2+j\beta_2$$
$$\eta_2=\eta_{2r}+j\eta_{2i}$$

2.1. Láminas sin Pérdidas "Especiales" (Láminas especiales porque son las que caen en el examen)

- Si $sen(\beta_2 d_2)=0 \rightarrow \boxed{Z(z=0)=\eta_3}$ (Ω)

$$\beta_2 d_2 = n\pi$$

$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2} d_2 = n\pi \rightarrow \boxed{d_2 = n\frac{\lambda_2}{2}}$$

Lámina transparente o ventana dieléctrica en $\lambda_2/2$

Nota: Si **<u>además</u>** el medio 1 y 3 tienen igual impedancia:

$$\eta_1=\eta_3 \rightarrow \boxed{\rho(z=0)=\frac{Z(z=0)-\eta_1}{Z(z=0)+\eta_1}=\frac{\eta_3-\eta_1}{\eta_3+\eta_1}=0}$$ TRANSMISIÓN TOTAL

- Si $\cos(\beta_2 d_2)=0 \rightarrow Z(z=0)=\frac{(\eta_2)^2}{\eta_3}$ (Ω)

Lámina adaptadora o ventana dieléctrica en $\lambda_2/4$

$$\beta_2 d_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

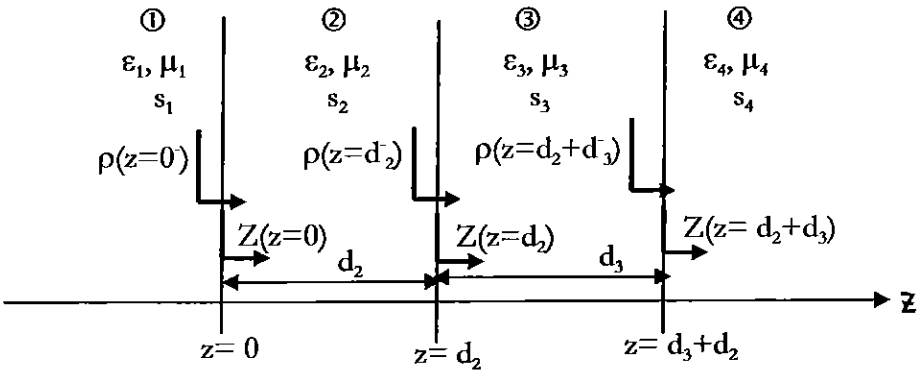
$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2} d_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{d_2 = (2n+1)\frac{\lambda_2}{4}}$$

Nota: Si **<u>además</u>**: $\eta_2=\sqrt{\eta_1\cdot\eta_3}$ tenemos que:

$$\boxed{\rho(z=0)=\frac{Z(z=0)-\eta_1}{Z(z=0)+\eta_1}=\frac{\eta_2^2/\eta_3-\eta_1}{\eta_2^2/\eta_3+\eta_1}=\frac{\eta_1-\eta_1}{\eta_1+\eta_1}=0}$$ TRANSMISIÓN TOTAL

$$\eta_2=\sqrt{\eta_1\cdot\eta_3}$$

3. <u>MULTIDISCONTINUIDAD</u> (Problema de dos láminas)



Vamos calculando de derecha a izquierda:

- $s_4 = 1$ → Porque no hay onda reflejada en el medio 4.
- $Z(z = d_2 + d_3) = \eta_4$
- $\rho(z = d_2 + d_3^-) = \dfrac{Z(z = d_2 + d_3) - \eta_3}{Z(z = d_2 + d_3) + \eta_3} = \dfrac{\eta_4 - \eta_3}{\eta_4 + \eta_3}$
- $s_3 = \dfrac{1 + |\rho(z = d_2 + d_3^-)|}{1 - |\rho(z = d_2 + d_3^-)|}$
- $Z(z = d_2) = \eta_3 \dfrac{Z(z = d_2 + d_3) \cdot \cos(\beta_3 d_3) + j \cdot \eta_3 \cdot sen(\beta_3 d_3)}{\eta_3 \cdot \cos(\beta_3 d_3) + j \cdot Z(z = d_2 + d_3) \cdot sen(\beta_3 d_3)}$ (Ω)
- $\rho(z = d_2^-) = \dfrac{Z(z = d_2) - \eta_2}{Z(z = d_2) + \eta_2}$
- $s_2 = \dfrac{1 + |\rho(z = d_2^-)|}{1 - |\rho(z = d_2^-)|}$
- $Z(z = 0) = \eta_2 \dfrac{Z(z = d_2) \cdot \cos(\beta_2 d_2) + j \cdot \eta_2 \cdot sen(\beta_2 d_2)}{\eta_2 \cdot \cos(\beta_2 d_2) + j \cdot Z(z = d_2) \cdot sen(\beta_2 d_2)}$ (Ω)
- $\rho(z = 0^-) = \dfrac{Z(z = 0^-) - \eta_1}{Z(z = 0^-) + \eta_1}$
- $s_1 = \dfrac{1 + |\rho(z = 0^-)|}{1 - |\rho(z = 0^-)|}$

Comentarios:

Las láminas suelen ser "especiales". Esto quiere decir que:

$$d_3 \longrightarrow (2n+1)\frac{\lambda_3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ó}} n\frac{\lambda_3}{2}$$

$$d_2 \longrightarrow (2n+1)\frac{\lambda_2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ó}} n\frac{\lambda_2}{2}$$

La frecuencia es la misma en todos los medios. Cambian la velocidad "c_i" y la longitud de onda "λ_i".

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \cdot \varepsilon_i}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_{ri} \cdot \varepsilon_{ri}}} = \frac{c_0}{n_i} \qquad \left(\mathrm{m}/\mathrm{sg}\right)$$

$$\lambda_i = \frac{c_i}{f} = \frac{c_0}{f \cdot n_i} \qquad (\mathrm{m})$$

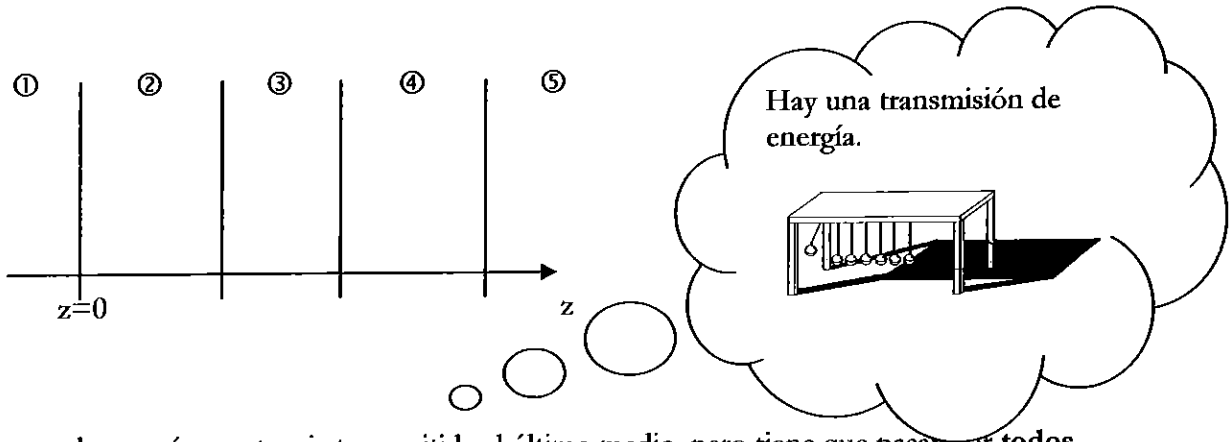
4. RELACIONES ENERGÉTICAS

- **Principio Conservación Energía:** $\boxed{w_i = w_t + w_r}$
- $$\boxed{w_i = \frac{\left|\vec{E}_{0inc}\right|^2}{2 \cdot \eta_1} \qquad \left(\mathrm{W}/\mathrm{m}^2\right)}$$
- $$w_r = w_i \left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2 \Rightarrow \boxed{\frac{w_r}{w_i} = \left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2} \equiv \text{FRACCIÓN DE ENERGÍA O POTENCIA REFLEJADA}$$

  $$\frac{w_r}{w_i}(\%) = \left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2 \cdot 100 \equiv \text{\% DE ENERGÍA O POTENCIA REFLEJADA}$$
- $$w_t = w_i\left(1-\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2\right) \Rightarrow \boxed{\frac{w_t}{w_i} = 1-\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2} \equiv \text{FRACCIÓN DE ENERGÍA O POTENCIA TRANSMITIDA}$$

  $$\frac{w_t}{w_i}(\%) = \left(1-\left|\rho\left(z=0^-\right)\right|^2\right) \cdot 100 \equiv \text{PORCENTAJE DE ENERGÍA O POTENCIA}$$

Comentarios (!):



w_t es la energía o potencia transmitida al último medio, pero tiene que pasar por **todos** los medios.

En **Incidencia normal**, aunque tengamos 16 medios, la onda transmitida al último medio conserva la polarización de la onda incidente.

Ejemplo:

$$\vec{E}_{inc} = E_{01}\left(\hat{x} - j\frac{1}{3}\hat{y}\right)\cdot e^{-j\beta_1 z}e^{j\varphi_1} \qquad \left(\text{V}/m\right)$$

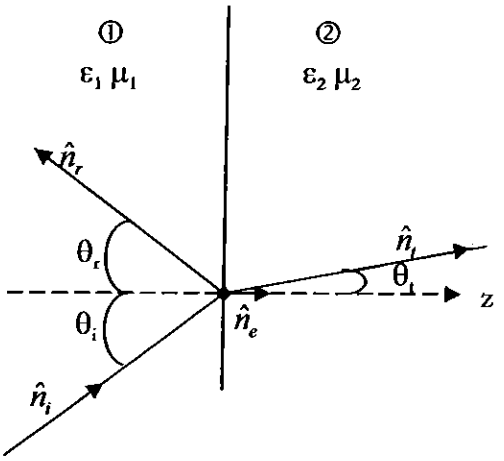
- Potencia de la onda incidente: $w_{inc} = \dfrac{\left|\vec{E}_{0inc}\right|^2}{2\cdot\eta_1} \qquad \left(\text{W}/\text{m}^2\right)$
- Y la energía transmitida al último medio:

$$\vec{E}_{tx.ulti.med.} = \vec{E}_{0.ulti.med}\left(\hat{x} - j\frac{1}{3}\hat{y}\right)\cdot e^{-j\beta ulti.med\cdot z}e^{j\varphi último} \qquad \left(\text{V}/\text{m}\right)$$

$$w_t = \frac{\left|\vec{E}_{0.ulti.med}\right|^2}{2\eta_{ulti.medio}} = \underbrace{w_{inc}\left(1 - \left|\rho\left(z = 0^-\right)\right|^2\right)}_{\text{el cálculo de este } \rho \text{ es farragoso}}$$

2ª PARTE: INCIDENCIA OBLICUA

0. INTRODUCCIÓN



El vector normal ENTRANTE del medio 1 al 2 será $\hat{z}$

$$\vec{E}_{inc} = \vec{E}_{0inc}e^{-\gamma_1\hat{n}_{inc}\vec{r}} \quad \left(\text{V}/\text{m}\right) \Rightarrow \vec{H}_{inc} = \frac{\hat{n}_{inc}\times\vec{E}_{inc}}{\eta_1} \quad \left(\text{A}/\text{m}\right)$$

$$\vec{E}_{ref} = \vec{E}_{0ref}e^{-\gamma_1\hat{n}_r\vec{r}} \quad \left(\text{V}/\text{m}\right) \Rightarrow \vec{H}_{ref} = \frac{\hat{n}_r\times\vec{E}_{ref}}{\eta_1} \quad \left(\text{A}/\text{m}\right)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t}e^{-\gamma_2\hat{n}_t\vec{r}} \quad \left(\text{V}/\text{m}\right) \Rightarrow \vec{H}_t = \frac{\hat{n}_t\times\vec{E}_t}{\eta_2} \quad \left(\text{A}/\text{m}\right)$$

1. LEYES DE SNELL

Ley de Snell de la Reflexión: $\boxed{\hat{n}_e \times \hat{n}_{inc} = \hat{n}_e \times \hat{n}_r}$

Siendo: $\hat{n}_e \equiv$ Vector normal entrante del medio ① al medio ②

En el esquema anterior $\hat{n}_e = \hat{z}$

Ley de Snell de la Transmisión (Refracción): $\boxed{\gamma_1\left(\hat{n}_e \times \hat{n}_{inc}\right) = \gamma_2\left(\hat{n}_e \times \hat{n}_t\right)}$

→ Si se trata de medios DIELÉCTRICOS (σ=0) sin pérdidas:

Ley de Snell de la Reflexión: $\boxed{\theta_i = \theta_r}$

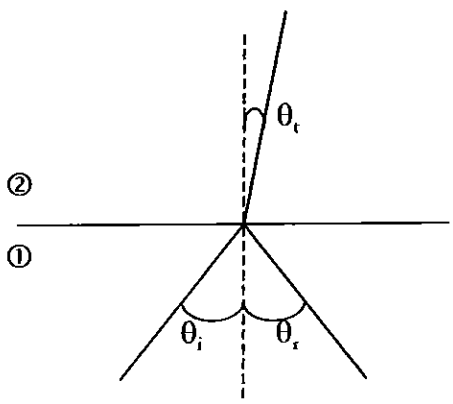
Ley de Snell de la Transmisión (Refracción): $\boxed{n_1 sen(\theta_i) = n_2 sen(\theta_t)} \begin{cases} n_1 = \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \\ n_2 = \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} \end{cases}$

Donde los n_i son los índices de refracción de los medios ① y ②

Comentario Importante:

Los vectores $\hat{n}_{inc}$, $\hat{n}_r$, $\hat{n}_t$ y $\hat{n}_e$ son VECTORES COPLANARIOS y a plano formado se le denomina plano de incidencia o de propagación.

1.1. Ángulo de Incidencia Crítico o Ángulo Límite.



Si $\theta_i \geq \theta_{ic} \Rightarrow$ NO HAY ONDA TRANSMITIDA

(Reflexión total)

$\theta_{ic} = arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ ÁNGULO CRÍTICO O ÁNGULO LÍMITE

2. COEFICIENTES DE FRESNEL

Para resolver los problemas de incidencia oblicua debemos descomponer el $\vec{E}_{inc}$ en dos componentes, una paralela (o contenida) en el plano $\left|\begin{matrix}\text{de incidencia}\\ \text{de propagación}\end{matrix}\right|$ y la otra perpendicular al mismo.

$\left(\vec{E}_{inc\parallel} \text{ y } \vec{E}_{inc\perp} \text{ repectivamente}\right)$. Al primero le afectan $\rho_{\parallel}$ y $t_{\parallel}$ y al segundo $\rho_{\perp}$ y $t_{\perp}$.

$$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}; \qquad \rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$

$$\tau_{\parallel} = t_{\parallel} = (1+\rho_{\parallel})\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}; \qquad \tau_{\perp} = t_{\perp} = (1+\rho_{\perp})$$

(No hay que saberlos)

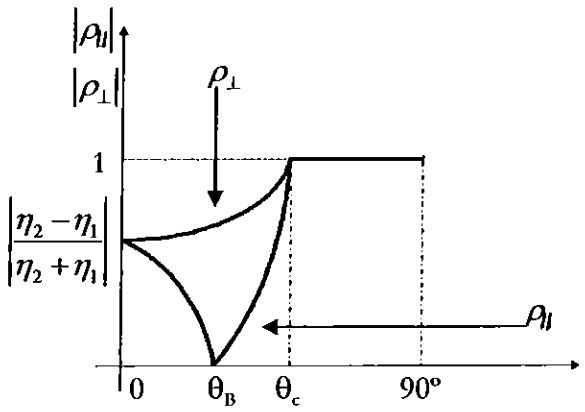
2.1. Ángulo de Brewster

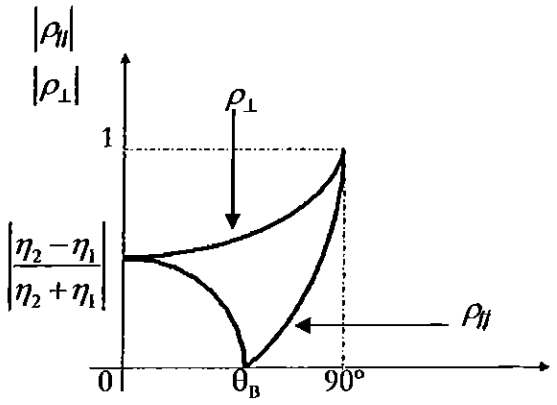
Si $\theta_i = \theta_B \Rightarrow \boxed{\rho_{\parallel} = 0}$ donde $\theta_B \equiv$ Angulo de Brewster (No hay $E_{ref\parallel}$)

$\theta_B = arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ ¡¡SIEMPRE EXISTE!!

$\underset{\theta_B}{\underset{\shortparallel}{\theta_i}} + \theta_t = 90°$ (Si incide en el de Brewster)

Comentarios Finales de Incidencia Oblicua:





Si $n_2 < n_1$ Si $n_2 > n_1 \Rightarrow \nexists\ \theta_c$

- $\rho_{\parallel} \neq \rho_{\perp}$ SIEMPRE excepto en $\theta_i = 0°$ donde $\rho_{\parallel} = \rho_{\perp} = \rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ **(Incidencia normal)**

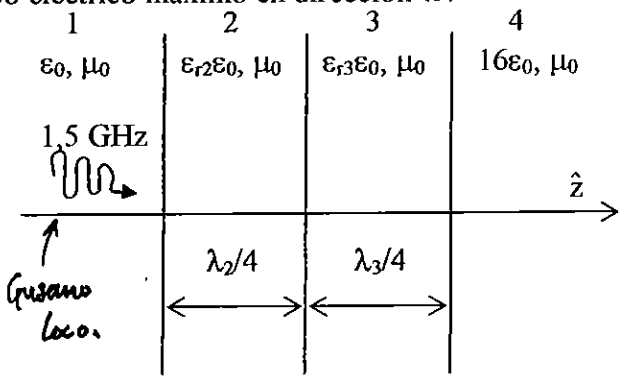
  O también cuando $\theta_i \geq \theta_c$

- $\rho_{\perp} \neq 0 \qquad \forall \theta_i$
- Si $\exists \theta_c \Rightarrow \theta_c > \theta_B$
- TRUCOS CON $\hat{n}_e$: $\hat{n}_e \cdot \hat{n}_{inc} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta_{inc}$

  $\bar{u}_{\perp} = \frac{\hat{n}_e \times \hat{n}_{inc}}{|\bar{n}_e \times \bar{n}_{inc}|}$ ≡ Dirección ⊥ al plano de incidencia para sacar $\bar{E}_{inc\perp}$

I-14 Escriba la expresión del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 1.5 GHz, que se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$, transmite una potencia de P_o (W) con polarización elíptica, relación axial r = 2 y campo eléctrico máximo en dirección $\hat{x}$.

Considere la estructura de 4 medios sin pérdidas de la figura, sobre la que incide normalmente la onda plana homogénea descrita anteriormente.
Determine la relación que debe cumplir las constantes dieléctricas de los medios 2 y 3 para que la potencia de la onda incidente sea igual a la potencia de la onda transmitida al medio 4.
En estas condiciones, calcule el valor máximo del campo eléctrico en el medio 4 y su relación con el campo máximo en el primer medio.



Si se desea que la suma de los espesores de los medios 2 y 3 no sea superior a 15 mm, determine los valores mínimos de ε_{r2} y ε_{r3}.
En esta situación calcule el coeficiente de onda estacionaria en los cuatro medios.

Septiembre-2001

I-15 Una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f =3 GHz, cuyo campo eléctrico tiene una amplitud $jE_0\hat{x}$ (E_0 real positivo), incide normalmente desde un medio dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 16$ sobre el vacío.(Figura 1)

A) Obtenga las expresiones del campo eléctrico en el dominio del tiempo de la onda reflejada y de la onda transmitida en los medios correspondientes.

B) Dibuje el diagrama de onda estacionaria en el medio dieléctrico, indicando expresamente las posiciones y los valores de los máximos y mínimos del campo eléctrico. Calcule la potencia transmitida al vacío.

C) Para conseguir máxima transmisión de potencia, se introduce una lámina dieléctrica a partir de z = 5 cm (Figura 2). Calcule el mínimo espesor de la lámina "d" y su constante dieléctrica relativa ε_{r3}

D) Dibuje el diagrama de onda estacionaria en los cuatro medios, calculando los valores de los máximos y mínimos de campo en función de E_0.

E) La onda de amplitud $jE_0\hat{x}$ incide ahora oblicuamente sobre la discontinuidad inicial con un ángulo de incidencia $\theta = 45^\circ$ (Figura 3)

E1) Sabiendo que el plano de incidencia es el YZ, escriba la expresión compleja de los campos eléctrico y magnético incidentes.

E2) ¿Cuándo vale la potencia reflejada en este caso? ¿Qué polarización tiene la onda reflejada?

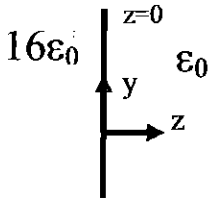


Figura 1

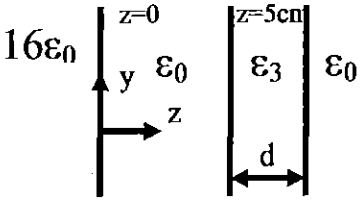


Figura 2

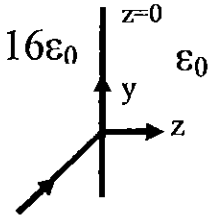


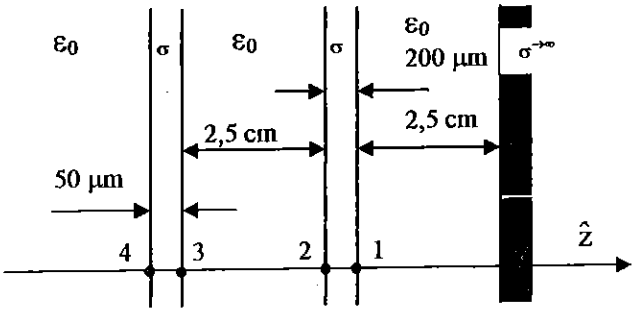
Figura 3

NOTA: $\theta_{ic} = \text{arcsen}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, $\theta_{iB} = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

Junio-2002

I-16 La figura muestra una estructura compuesta por dos finas láminas de un material conductor, de conductividad σ = 20 (S/m) y permeabilidad μ_0 entre dos láminas de un dieléctrico cuya permitividad y permeabilidad son prácticamente las del vacío, (ε_0,μ_0) El conjunto de las cuatro láminas recubren un buen conductor, al que se puede considerar como perfecto ($\sigma\to\infty$).

Una onda plana homogénea monocromática, de frecuencia 3 GHz, con una intensidad de campo eléctrico de 1 V/m y polarización circular a derechas, se propaga en dirección $\hat{z}$ e incide desde la izquierda en la estructura. Calcule la densidad de potencia de esta onda. Calcule el valor, en metros, de la profundidad de penetración en las láminas conductoras a la frecuencia de 3 GHz. Calcule, también a esa frecuencia, los valores en ohmios de las impedancias intrínsecas del material conductor y del dieléctrico, así como los valores en m^{-1} de las constantes de propagación de ondas planas en dichos medios.



Calcule el valor de la impedancia vista en el punto 1. Determine el valor de la impedancia vista en el punto 2, y compruebe que, haciendo las aproximaciones pertinentes, dicho valor es real. Determine las impedancias en los puntos 3 y 4, comprobando de nuevo que, con un grado de aproximación razonable, ambas son reales.

Calcule la densidad de potencia, en vatios por metro cuadrado, de la onda reflejada en el primer medio e indique su polarización.

Determine los valores de los coeficientes de onda estacionaria en las regiones dieléctricas y dibuje cualitativamente el diagrama de ondas estacionaria en los cinco medios

Notas: $\mu_0 = 1.26\cdot 10^{-6}$(H/m) $\quad \eta_\sigma = \dfrac{1+j}{\sigma\delta},\ \gamma_\sigma = \dfrac{1+j}{\delta}$ $\quad$ $Ch(z)|_{|z|<<1}\approx 1$, $Sh(z)|_{|z|<<1}\approx z$

Septiembre-2002

I-17 a) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática con polarización lineal que se propaga por un medio de permitividad relativa 4, y que transmite una potencia $\dfrac{3}{20\pi}$ vatios, está dada por la expresión: $\vec{E} = [A(\hat{x}-\hat{y}) + \hat{z}(1-j)\cdot]e^{-j8\pi\hat{n}\cdot\vec{r}}$ (V/m) donde A es una constante compleja y $\vec{r}$ está expresado en metros. Si se conoce que la dirección de propagación está contenida en el plano XZ, se pide determinar:

a1) La frecuencia de trabajo.

a2) El valor de la constante compleja A.

a3) La dirección de propagación (calcule sólo una de las posibles).

a4) El campo eléctrico máximo.

a5) Si la onda incide (considere $\hat{n} = (\hat{x}+2\hat{z})/\sqrt{5}$) sobre una discontinuidad entre medios situada en el plano z = 0, a continuación de la cual se encuentra el vacío, calcule el ángulo de reflexión. Compruebe que la onda reflejada también tiene polarización lineal, indicando la dirección del campo eléctrico. ¿Para qué ángulos de incidencia no se transmite potencia al vacío?

Nota: $\vartheta_{ic} = \text{arcsen}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ $\quad \vartheta_{iB} = \text{arctg}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$

(Continúa)

Ingenieros de Telecomunicación

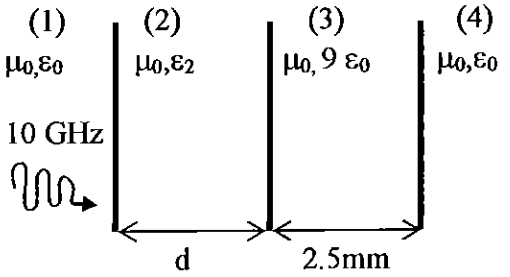
CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS I

I-17 Continuación:

b) Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 10GHz, con polarización elíptica y relación axial 2 incide en dirección perpendicular a la estructura de medios sin pérdidas representada en la figura. Si se conoce que el coeficiente de onda estacionaria en el primer medio vale 9 y que existe un mínimo de onda estacionaria en la superficie de separación de los medios 1 y 2, determine:

b1) La permitividad del segundo medio , ε_2, para que la solución sea independiente del valor del espesor d.

b2) La máxima densidad de potencia que se puede transmitir si ésta viene determinada por el campo eléctrico de ruptura del ultimo medio que vale $3\cdot 10^6$(V/m).



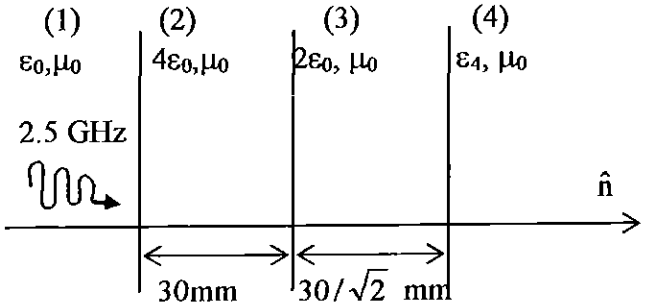
Junio-2003

I-18 A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana monocromática de:

- polarización lineal,
- frecuencia 2.5 GHz
- que se propaga en el vacío en dirección

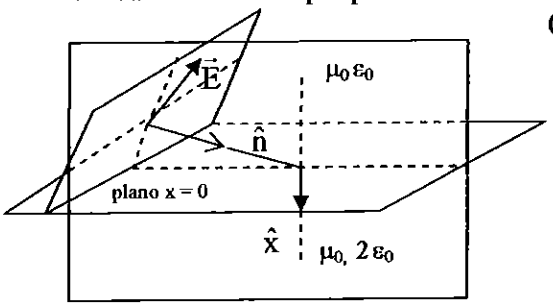
$$\hat{n} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}\hat{y}}{3} + \frac{\hat{z}}{3}$$

- no tiene componente de campo eléctrico en la dirección $\hat{y}$, y
- el valor máximo del campo eléctrico es E_0 (V/m).



B) La mencionada onda plana incide normalmente sobre la estructura de cuatro medios sin pérdidas de la figura. Determine

- El valor de la permitividad relativa del último medio (ε_{r4}) para que la potencia transmtitida al mismo sea el 75% de la incidente.
- ¿Cuál es la polarización del campo en el último medio?
- El valor máximo que puede alcanzar el campo eléctrico en el último medio.



C) La onda plana mencionada incide sobre la discontinuidad de medios situada en el plano x = 0 que se indica en la figura.

- Calcule el ángulo crítico y el ángulo de Brewster.
- Calcule la dirección perpendicular al plano de incidencia.
- ¿Es la dirección anteriormente calculada perpendicular al campo eléctrico de la onda?
- Como consecuencia del resultado anterior, razone sí el campo eléctrico posee componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia.
- ¿Cuál es la polarización de la onda reflejada?
- ¿Podría decir algo sobre el tipo de polarización de la onda transmitida?

NOTA: $\theta_{ic} = \text{sen}^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ $\quad \theta_{iB} = \text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}}$

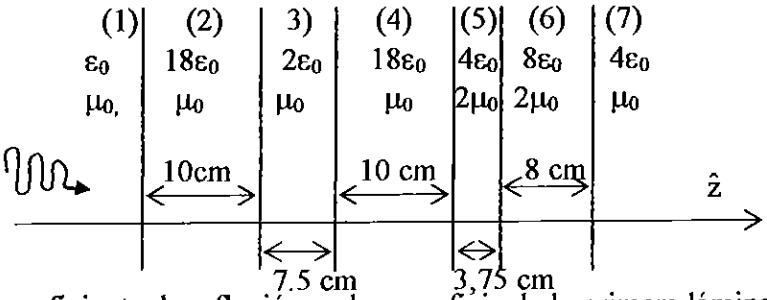
Septiembre-2003

Ingenieros de Telecomunicación

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS I

I-19 Una orden plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 250\sqrt{2}$ MHz. se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$. Sabiendo que tiene polarización elíptica de relación axial 2, y campo máximo de intensidad 10 V/m, que se alcanza en dirección $\hat{y}$, escriba la expresión completa del campo eléctrico complejo de la onda $\vec{E}(\vec{r})$.

La onda incide normalmente sobre la estructura de láminas de la figura (observe que los medios (5) y (6) tienen permeabilidad distinta de la del vacío).



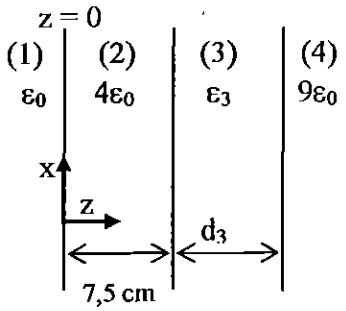
Calcule el valor del coeficiente de reflexión en la superficie de la primera lámina.

¿Cuál es la densidad de potencia (valor numérico en vatios por metro cuadrado) transmitida al medio (7)?.

Calcule los valores máximos de la intensidad del campo eléctrico que se alcanza en los medios (1), (2), (6) y (7).

Junio-2004

I-20 A) Escriba la expresión completa del campo eléctrico complejo de una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f = 1 GHz, que se propaga por el vacío según $\hat{z}$, de polarización circular a derechas y que transmite una potencia de $1/30\pi$ (W). ¿Cuál es la intensidad de su campo eléctrico máximo?. Esta onda incide normalmente sobre la estructura de medios sin pérdidas de la figura.



B) Sabiendo que en z = -15 cm existe un máximo de campo eléctrico, calcule ε_3 y el menor valor que ha de tener d_3 para que en el primer medio se refleje la cuarta parte de la potencia incidente.

C) ¿En qué punto del medio (3) se produce el máximo de campo? ¿Cuánto vale la máxima potencia que podría transmitirse si, sobre la estructura anterior incide una onda también de polarización circular, de la misma frecuencia (1 GHz), y dicha potencia viene limitada por el campo de ruptura en el medio (3), de valor $3\cdot 10^6$(V/m)?

D) De la estructura original se eliminan los medios (2) y (3), quedando una discontinuidad simple del medio (1) al medio (4). La onda del apartado A) incide sobre esta discontinuidad, que se ha girado un ángulo de 45°, siendo ahora la normal entrante a la discontinuidad desde el vacío $\hat{n}_e = \dfrac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$.

D1) ¿Cuál es el vector normal al plano de incidencia? Dibuje en esta situación las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada en el medio (1). ¿Cuánto vale el ángulo transmitido en el medio (4)?

D2) Escriba por separado las componentes paralela y perpendicular del campo magnético de la onda incidente. Supuesto conocidos los coeficientes de reflexión de Fresnel, escriba la expresión compleja completa de la componente perpendicular del campo eléctrico de la onda reflejada. ¿Qué podría decir sobre la polarización de la onda reflejada?

Nota: $\theta_{ic} = \text{arc sen}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$; $\theta_{iB} = \text{arc tg}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

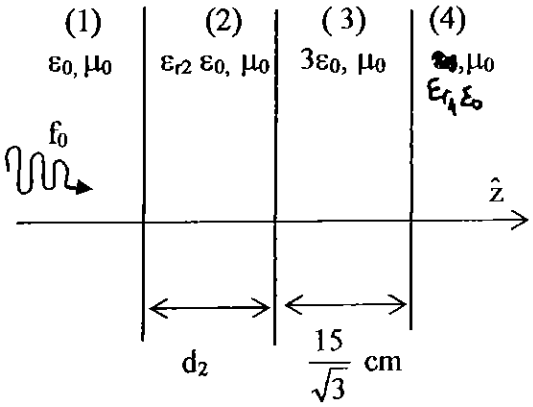
Septiembre-2004

Ingenieros de Telecomunicación

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS I

I-21 A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia f_0, polarización elíptica positiva, relación axial 3, que se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$. El valor máximo del campo es de 1 (V/m) y el semieje mayor de la elipse de polarización está en la dirección $\frac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}}$. Calcule el valor de la potencia transmitida por dicha onda.

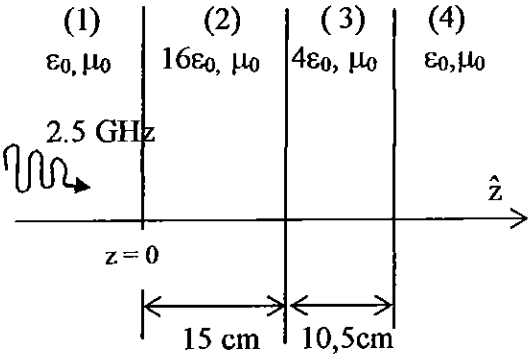
B) La mencionada onda plana incide normalmente sobre la estructura de 4 medios sin pérdidas de la figura.
De la medida del diagrama de onda estacionaria en el primer medio se obtiene que la distancia entre mínimos consecutivos es de 5 cm., que el coeficiente de onda estacionaria vale 2, y existe un mínimo de dicho diagrama en la discontinuidad 1-2.
Determine:



- Los valores de la permitividad relativa (ε_{r2}) y el espesor d_2 del segundo medio.
- Calcule el coeficiente de onda estacionaria en todos los medios.
- Dibuje cualitativamente, el diagrama de onda estacionaria en todos los medios.
- Escriba la expresión del campo eléctrico en el dominio del tiempo en el último medio, sabiendo que en t = 0 y en el plano donde comienza dicho medio el campo eléctrico tiene sólo dirección $\hat{x}$.

Junio-2005

I-22 A) Una onda plana homogénea monocromática incide en dirección perpendicular a la estructura de medios sin pérdidas representada en la figura. El coeficiente de onda estacionaria en el primer medio es igual a 4. En este mismo medio se mide un máximo absoluto de la intensidad de campo eléctrico en z = -3 cm de valor 8 V/m, y un mínimo absoluto de la intensidad de campo eléctrico en z = -4 cm de valor 1 V/m



A1) Obtenga el valor mínimo de la frecuencia que hace que se cumplan las condiciones anteriores.

A2) Determine, con la frecuencia anterior, la permitividad del último medio y la potencia transmitida en él.

B) Una onda plana homogénea monocromática cuya amplitud compleja de campo eléctrico viene dada por la expresión $\vec{E} = E_0(2j\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y} + \hat{z})e^{-j\pi(3z+\sqrt{3}y)}$, con z e y en metros, incide de forma oblicua desde un medio de permitividad relativa 3 sobre otro medio, que ocupa el semiespacio z > 0, y tiene permitividad desconocida. Se sabe que la amplitud del campo eléctrico reflejado es $\vec{E}_0 = jE_0\hat{x}$. Determine:

B1) La frecuencia de trabajo

B2) La dirección de propagación de la onda reflejada.

B3) Los valores de los coeficientes de reflexión de Fresnel.

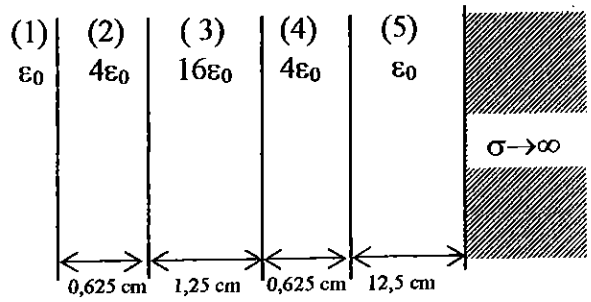
B4) La permitividad del medio sobre el que incide la onda.

Nota: $\theta_{i_B} = \text{arctg}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$

Septiembre-2005

I-23 A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f = 3 GHz, que se propaga por el vacio según $\hat{z}$, de polarización elíptica positiva de relación axial 2 y campo máximo de 2 (V/m) en dirección $\hat{y}$. Calcule su potencia transmitida.

Esta onda incide normalmente sobre la estructura de cuatro láminas de la figura, que recubren un buen conductor, al que se puede considerar como perfecto ($\sigma \to \infty$).



B) ¿Cuánto vale la impedancia en la discontinuidad entre los medios (4) y (5).

C) Calcule la impedancia a la entrada de la estructura (discontinuidad entre los medios (1) y (2)).

D) Dibuje cualitativamente el diagrama de onda estacionaria en toda la estructura.

E) ¿Qué valor de campo máximo podría medirse?

F) Razone si podría conseguir reflexión nula a la entrada de la estructura añadiendo una lámina sin pérdidas.

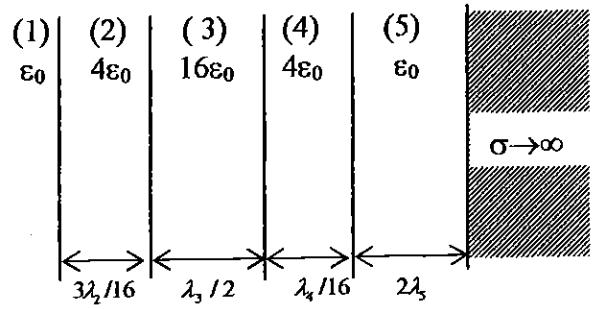
Si se elimina el conductor perfecto del final de la estructura, quedando la región (5) indefinida:

G) ¿Cuál es la impedancia a la entrada en esta nueva situación? ¿Qué porcentaje de potencia incidente se refleja en el primer medio? Añada la lámina sin pérdidas adecuada al inicio de esta nueva estructura para conseguir reflexión nula a la entrada, especificando el valor de ε y el menor valor que ha de tener su espesor.

Junio-2006

I-24 A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f = 6 GHz, que se propaga por el vacío según $\hat{z}$, de polarización elíptica negativa, de relación axial 3, potencia transmitida $\frac{2}{3\pi}(W)$ y campo mínimo en dirección $\hat{y}$. ¿Cuál es el valor de su campo mínimo?

Esta onda incide normalmente sobre la estructura de cuatro láminas de la figura, que recubren un buen conductor, al que se puede considerar como perfecto ($\sigma \to \infty$).



B) ¿Cuánto vale la impedancia en la discontinuidad entre los medios (4) y (5)?

C) Calcule la impedancia a la entrada de la estructura (discontinuidad entre los medios (1) y (2)).

D) ¿Cuánto valen los espesores de las cuatro láminas (en cm)?

E) Dibuje cualitativamente el diagrama de onda estacionaria en toda la estructura (no calcule los valores de los máximos, pero sí especifique los valores de los mínimos) razonando, física o matemáticamente, las posiciones de los máximos y mínimos.

F) ¿Cuál es el valor de la máxima potencia de la onda incidente para no superar el campo eléctrico de ruptura en el medio 1 $\left(E_{ruptura} = 3 \cdot 10^6 (V/m)\right)$? ¿Qué porcentaje de potencia incidente se refleja en el medio 1?

G) Razone físicamente si podría conseguir reflexión nula a la entrada añadiendo una lámina sin pérdidas al principio de la estructura.

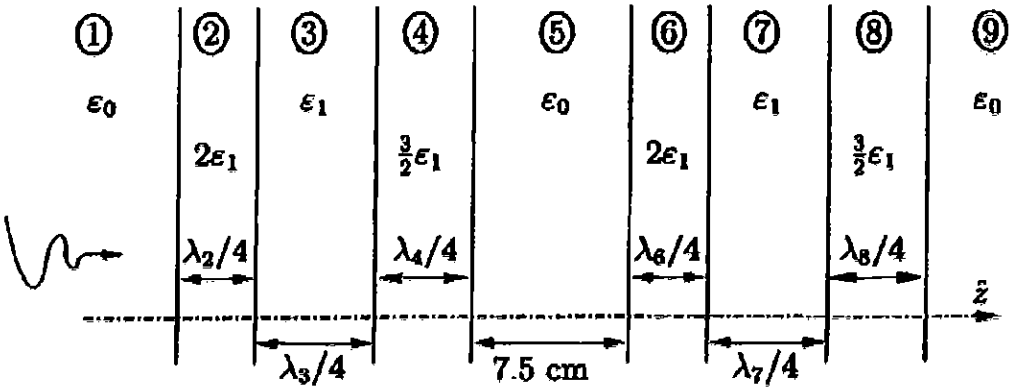
(continúa)

H) Si ahora sólo se consideran los medios (1) y (2), siendo el (2) de longitud infinita:
H1) ¿Qué porcentaje de potencia incidente se refleja en el primer medio?
H2) Si es posible, añada una lámina sin pérdidas adecuada al inicio de esta nueva estructura para conseguir una impedancia de entrada compleja de valor $Z = \eta_0 \dfrac{-\frac{1}{6} + j\frac{\sqrt{3}}{9}}{-\frac{1}{3} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$, (esta Z es del orden de 97 + j 35 ohmios), especificando el valor de su permitividad y el menor valor que puede tener su espesor.

Septiembre-2006

I-25 Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 1$ *GHz* se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$. Sabiendo que tiene polarización elíptica negativa de relación axial 4, y campo máximo de intensidad 2 *V/m*, que se alcanza en dirección $\hat{x}$, escriba la expresión completa de los campos eléctrico y magnético complejos de onda, $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{H}(\vec{r})$.

La onda incide normalmente sobre la estructura de láminas sin pérdidas, y con permeabilidad μ_0, de la figura.



¿Cuál es el valor de la permitividad ε_1 que hace que el módulo del coeficiente de reflexión en la región 5 tome el valor $|\rho_5| = \frac{5}{7}$?

Para ese valor de ε_1 calcule el coeficiente de reflexión en el primer medio a la frecuencia f_0.

Calcule también el valor numérico de la densidad de potencia transmitida al medio 9.

Calcule los coeficientes de onda estacionaria en los medios 1 y 2, así como el valor máximo de la intensidad de campo eléctrico que se alcanza en esos dos medios.

Febrero-07

I-26

A) La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 1 GHz está dada por la expresión:

$$\vec{E} = (\sqrt{3}\,\hat{z} + \hat{y} + j\,a\,\hat{x})\; e^{-j\beta(n_y y + n_z z)} \quad (V/m),$$

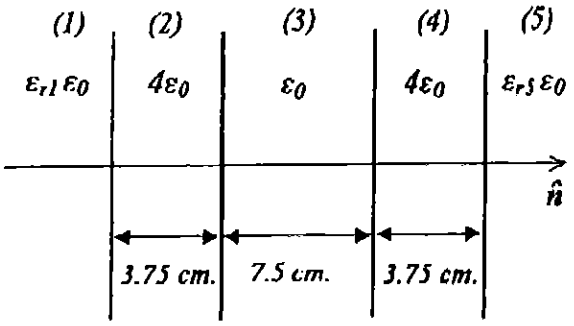
donde a es una constante real desconocida. Se pide determinar la dirección de propagación, $\hat{n}$, y el tipo de polarización (elíptica, circular o lineal) en función de la constante a. (Tome $a \geq 0$ y $n_z > 0$).

B) Obtenga para la onda anterior la expresión del vector de Poynting en el dominio del tiempo y compruebe que dicho vector apunta en todo instante en dirección $\hat{n}$. Determine el tipo de polarización que hace que el vector de Poynting en el dominio del tiempo sea constante.

C) Descomponga la onda del primer apartado en dos OPHM con polarizaciones lineales perpendiculares entre sí y demuestre que son ortogonales. (Tome el valor $a = 1$)

D) La onda considerada en el apartado A) incide en dirección perpendicular a la estructura de láminas dieléctricas sin pérdidas representada en la figura. Obtenga la expresión del coeficiente de reflexión en el primer medio en función de las permitividades relativas ε_{r1} y ε_{r5}.

El coeficiente de onda estacionaria en el primer medio vale 3. Se conoce además que en este medio la relación entre el valor máximo y mínimo de campo medidos es 6 y que el campo eléctrico máximo se produce en dirección x. Determine el valor de la constante a. Si en el último medio el valor máximo de campo eléctrico vale $2\sqrt{3}$ (V/m) calcule el valor de las permitividades relativas ε_{r1} y ε_{r5}.



Junio-2007

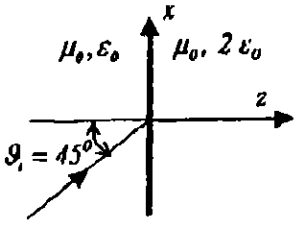
I-27

Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga según $+\hat{z}$, con polarización circular a derechas y que en el instante t= 0, su campo eléctrico en z= 0, está orientado según $+\hat{x}$.

Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática (de la misma frecuencia que la anterior) que se propaga según $+\hat{z}$, con polarización elíptica negativa, relación axial r, y semieje mayor en dirección x, sabiendo que en el instante t= 0, su campo eléctrico en z= 0, está orientado según $+\hat{x}$.

Compruebe la ortogonalidad de ambas ondas en función de la relación axial.

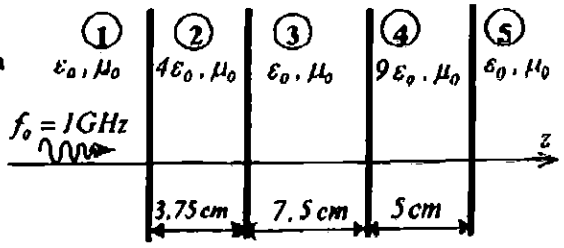
Una onda plana homogénea monocromática con polarización lineal y amplitud E_0 (V/m) que se propaga en el vacío e incide según el ángulo $\theta_i = 45°$ sobre un medio de permitividad $\varepsilon = 2\,\varepsilon_0$, tal como se indica en la figura. Sabiendo que el campo eléctrico de la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia determine, aplicando las condiciones de salto, la expresión compleja del campo eléctrico de la onda transmitida.



Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia f_0 =1 GHz, se propaga en el vacío e incide en dirección normal sobre la estructura de medios de la figura.

Determine el valor del coeficiente de onda estacionaria en cada uno de los medios. Dibuje el diagrama de onda estacionaria.

Determine la relación entre los valores máximos del campo eléctrico en el medio 1 y en el medio 5.



Septiembre-2007

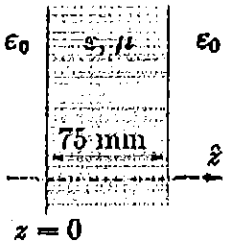
I-30

Escriba las expresiones de los campos eléctrico y magnético de una onda plana homogénea monocromática (OPHM), de frecuencia $f_0 = 250$ MHz, que se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$, sabiendo que tiene polarización lineal según $\hat{x}$ y un campo máximo de intensidad E_0 (V/m), valor que se alcanza en $z = 0$ en el instante $t = 0$. Calcule la potencia que transmite en función del valor de E_0.

Escriba esas mismas expresiones para otra OPHM, de la misma frecuencia, y que se propaga en la misma dirección, también con polarización lineal, pero formando un ángulo de 60° con el eje $\hat{x}$, sabiendo que la intensidad de campo máxima para esta segunda onda es N veces menor que para la primera, y que su valor no tiene por qué alcanzarse en $z = 0$ precisamente en $t = 0$. Calcule la potencia que transmite en función de E_0 y N.

Calcule la potencia transmitida por la onda superposición de ambas.

Explique si los campos de las dos ondas son, o no, perpendiculares entre sí. Justifique en qué condiciones, si las hay, ambas ondas son ortogonales.



La primera de las mencionadas OPHM incide normalmente sobre la lámina que se muestra en la figura, con parte real de la permitividad relativa $\varepsilon'_r = 2$ y tangente del ángulo de pérdidas eléctricas $\operatorname{tg}\delta = 0{,}04$, así como con una permeabilidad compleja de valor $\mu = 4(2 - j0{,}08)\mu_0$.

Escriba las expresiones de los campos eléctrico y magnético de la onda reflejada en la región a la izquierda de la lámina (si no pudiese resolver de forma exacta utilice las aproximaciones que considere pertinentes, justificándolas).

Calcule la potencia, W_{T1}, que transmite la onda estacionaria en la primera región (la del vacío a la izquierda de la lámina). ¿Qué tipo de onda habrá en la tercera región (la del vacío, a la derecha de la lámina)? ¿Tendrá el campo en la tercera región algún tipo de polarización (describa esa polarización, si es el caso)?

Siendo W_{T3} la potencia que se transmite en la tercera región, indique y justifique cuál de las siguientes expresiones es correcta: 1) $W_{T1} = W_{T3}$, 2) $W_{T1} > W_{T3}$, 3) $W_{T1} \geq W_{T3}$, 4) $W_{T1} \ll W_{T3}$.

Notas: $\operatorname{Sh}(A + jB) = \operatorname{Sh}(A)\cos(B) + j\operatorname{Ch}(A)\operatorname{sen}(B)$ $\quad \operatorname{Sh}(x)|_{|x|\ll 1} \approx x$

$\operatorname{Ch}(A + jB) = \operatorname{Ch}(A)\cos(B) + j\operatorname{Sh}(A)\operatorname{sen}(B)$ $\quad \operatorname{Ch}(x)|_{|x|\ll 1} \approx 1$

Septiembre-2008

I-32

Una onda plana homogénea monocromática se propaga por un medio con la permeabilidad del vacío y con una permitividad de valor $4\varepsilon_0$. La expresión de la onda en un sistema de coordenadas cartesianas es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[4\hat{y} + 2\left(1 + j\sqrt{3}\right)\hat{x}\right] e^{-j125\pi z/6} \quad (\text{V/m})$$

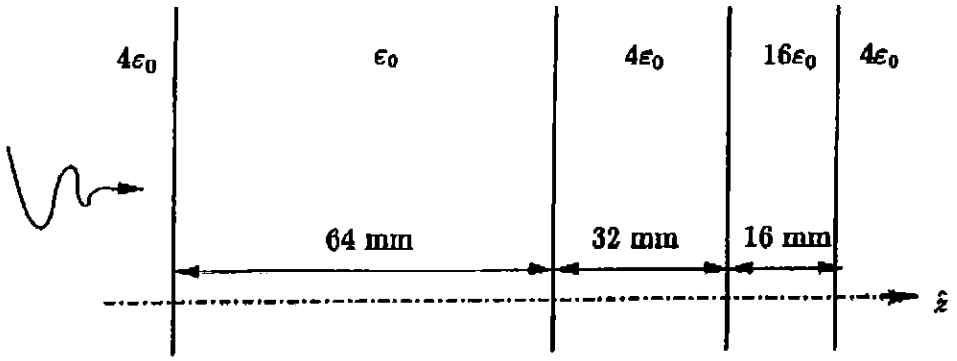
donde z está en metros.

Dibuje, en el plano adecuado e indicando los ejes correspondientes, los ejes menor y mayor de la elipse de polarización de dicha onda, especificando su orientación y valor en V/m. Determine el signo de la polarización.

Escriba la expresión de una onda plana homogénea monocromática, de amplitud arbitraria, que se propaga en la misma dirección y con polarización circular a derechas. Escriba la expresión de una nueva onda, con otra amplitud arbitraria, en el caso de tener polarización circular a izquierdas. Descomponga la onda inicial como suma de las dos ondas de polarización circular anteriores, obteniendo las correspondientes amplitudes.

Dibuje, en el plano adecuado e indicando los ejes correspondientes, el campo eléctrico de la onda inicial en $\vec{r} = 0$ y $t = 0$. Dibuje también el campo eléctrico de las dos ondas circulares en las que se descompone, en esos mismos lugar e instante ($\vec{r} = 0$, $t = 0$).

La onda incide sobre la estructura estratificada representada en la figura, donde todos los medios tienen la permeabilidad del vacío. Determine dónde se producen los campos eléctrico máximo y mínimo absolutos, y sus intensidades.

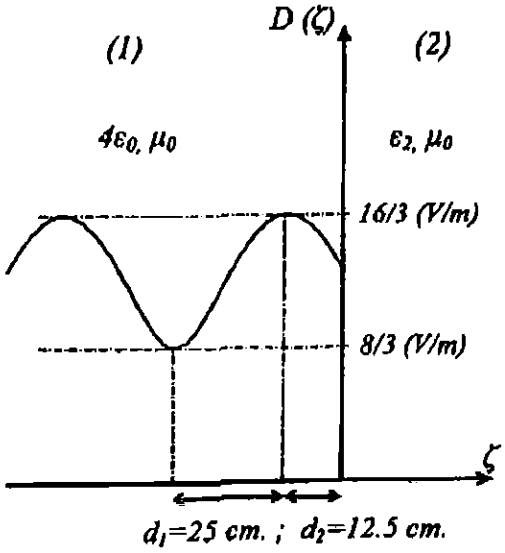


Si la frecuencia de la onda pasa a ser $f = 75/32$ GHz determine los nuevos puntos en los que se producen los campos máximo y mínimo absolutos, y sus nuevas intensidades.

Junio-2009

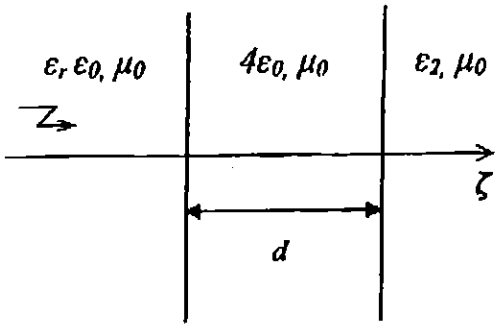
I-33

A) Una onda plana homogénea monocromática (OPHM) que se propaga en dirección $\hat{\zeta}=(\hat{z}-\sqrt{3}\,\hat{y})/2$ por un medio de permitividad relativa 4 (medio 1) con polarización elíptica negativa, relación axial $\sqrt{3}$ y campo eléctrico mínimo en dirección $\hat{x}$, incide perpendicularmente sobre la superficie plana de separación con otro medio con pérdidas de permitividad desconocida ε_2 (medio 2). La siguiente figura representa el diagrama de onda estacionara en el primer medio, $D(\zeta)=\sqrt{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1^*}$.



Obtenga los valores de la frecuencia de trabajo, el coeficiente de onda estacionaria en el medio 1 y determine la amplitud compleja de la onda incidente. Calcule también los valores del coeficiente de reflexión en la superficie de separación de los medios ($\zeta=0$) y la impedancia intrínseca del medio 2.

B) Consideramos ahora que una OPHM de la misma frecuencia que la anterior incide desde un medio de permitividad desconocida $\varepsilon_r\varepsilon_0$ sobre una lámina de espesor d, con la misma permitividad que el medio 1 del apartado anterior, a continuación de la cual se encuentra de nuevo el medio de permitividad ε_2, tal como se indica en la figura:



Calcule para un espesor de la lámina $d=d_1+d_2=37.5$ *cm.* la impedancia de onda en la superficie de separación de los dos primeros medios de la nueva estructura, y el valor de la permitividad relativa ε_r que hace que se transmita toda la potencia de la onda incidente.

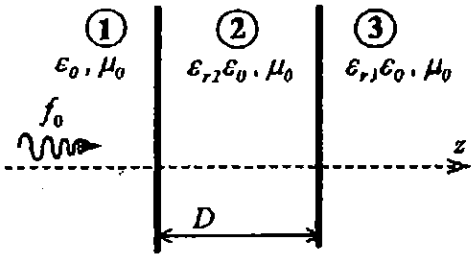
Si el espesor de la lámina es ahora $d=50$ *cm.* calcule el nuevo valor de la impedancia en la superficie de separación de los dos primeros medios, y el valor de la impedancia intrínseca del primer medio que hace que no exista en él onda reflejada. Dibuje en este caso y de forma cualitativa el diagrama de onda estacionaria en los tres medios.

C) Si la OPHM del apartado A) incide de forma oblicua desde el medio de permitividad relativa 4 sobre una discontinuidad situada en el plano z=0, a continuación de la cual se encuentra el vacío, calcule la dirección de propagación de la onda reflejada y la potencia de la onda transmitida.

I-34

Dada la expresión del campo magnético $\vec{H} = (a\hat{x} + jb\hat{y} - jc\hat{z})e^{-j\frac{200\pi}{9}(2x+2y-z)}$ (A/m) siendo a, b y c constantes reales, y donde x, y, z están en metros:
Determine su frecuencia f_0 y los valores de a, b y c, para que dicha expresión pueda representar el campo de una onda plana homogénea monocromática que se propaga por el vacío y transmite una potencia de 300 π (W).
¿Cuál es la polarización de la onda?

Una onda plana homogénea monocromática con polarización lineal de frecuencia f_0 se propaga por el vacío e incide en dirección normal a una lámina dieléctrica de permitividad relativa real ε_{r2} y espesor D, tras la que se encuentra un medio indefinido de permitividad relativa real $\varepsilon_{r3} = 4$, tal y como se indica en la figura.



Determine el valor de ε_{r2} y el espesor mínimo D, de dicha lámina, para que la potencia transmitida al tercer medio sea máxima a la frecuencia f_0 = 10 (GHz). En estas condiciones dibuje el diagrama de onda estacionaria en los tres medios y determine la relación entre el valor máximo del campo y el campo incidente.
Dibuje el diagrama de onda estacionaria en los tres medios a la frecuencia $2f_0$

Obtenga la expresión del coeficiente de reflexión al final del medio 1, en función de la tangente de la longitud eléctrica de la lámina. Determine la/s frecuencia/s en la/s que se produce la menor potencia transmitida al medio 3.

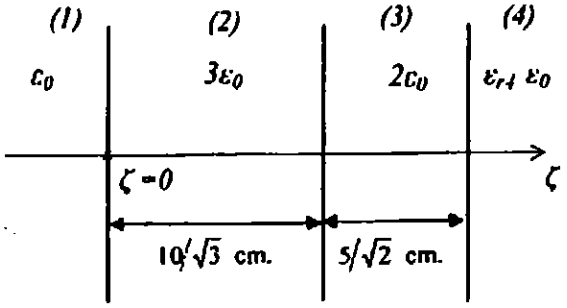
Febrero-2010

I-35

Una onda plana homogénea monocromática incide desde el medio 1 en dirección perpendicular a la estructura de láminas dieléctricas representada en la figura. La amplitud compleja de la onda estacionaria en el medio 1 viene dada por la expresión:

$$\vec{E}_1 = 3(\hat{y} + \sqrt{3}\,\hat{z} + j\hat{x})\, e^{-j5\pi(z-\sqrt{3}y)} + (\hat{x} - j\hat{y} - j\sqrt{3}\,\hat{z})\, e^{j5\pi(z-\sqrt{3}y)} \quad (\mathrm{V/m})$$

A) Determine la dirección de propagación de la onda incidente, la frecuencia, el tipo de polarización, y el coeficiente de reflexión e impedancia al final del medio 1 (plano $\zeta = z - \sqrt{3}y = 0$).
B) Calcule los valores máximo y mínimo de campo eléctrico en el medio 1 y la posición en el eje ζ donde éstos se producen.
C) Obtenga el valor de la permitividad relativa del medio 4, ε_{r_4}.



D) Calcule la potencia transmitida en $\zeta = 10$ cm.

Si la misma onda plana homogénea monocromática incide desde el medio 1 sobre una discontinuidad situada en el plano $z=0$, a continuación de la cual se encuentra un medio de permitividad $3\varepsilon_0$, determine la expresión de la onda reflejada supuestos conocidos los coeficientes de reflexión de Fresnel.

Junio-2010

I-36

Considere una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f_0=3 GHz, propagándose en el vacío con una potencia transmitida $W_T = W_0$ vatios.

A) Calcule el espesor, e_1, y la constante dieléctrica relativa, ε_{r1}, de la lámina sin pérdidas que hay que introducir en el vacío para que la potencia transmitida (en incidencia normal) se reduzca a un valor $W_T=\frac{8}{9}W_0$ y que haya un mínimo de campo eléctrico en el primer medio (vacío) al inicio de la lámina.

Dibuje el diagrama de onda estacionaria en toda la estructura calculando los valores y posiciones de los máximos y los mínimos.

B) Calcule el espesor, e_2, y la constante dieléctrica relativa, ε_{r2}, de la lámina sin pérdidas que hay que colocar inmediatamente a la izquierda de la lámina anterior para obtener máxima transmisión de potencia al último medio.

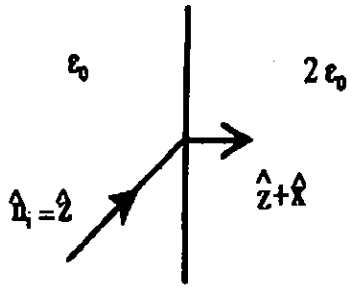
Dibuje el diagrama de onda estacionaria en toda la nueva estructura calculando los valores y posiciones de los máximos y los mínimos.

C) Calcule los campos eléctricos máximo y mínimo que se podrían medir en la estructura del apartado A) si la onda incidente en el primer medio fuera cada uno de los tres casos siguientes:

$$\vec{E}_{i1} = 3\, j\, \hat{y}\, e^{-j\beta z} \quad (V/m)$$
$$\vec{E}_{i2} = 3\, (\hat{x} + j\, \hat{y})\, e^{-j\beta z} \quad (V/m)$$
$$\vec{E}_{i3} = 3\, (\hat{x} + j\, \frac{\hat{y}}{2})\, e^{-j\beta z} \quad (V/m)$$

D) La primera onda del apartado C) incide con un ángulo de 45° sobre la discontinuidad de la figura, situada en el plano x + z = 0.

D1) Calcule los ángulos de reflexión y transmisión y las direcciones de propagación de las ondas reflejada y transmitida.

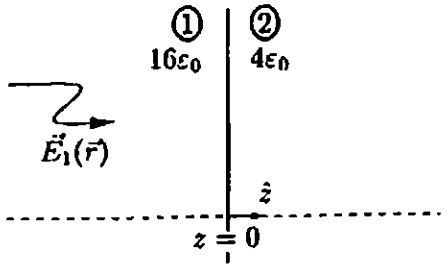


D2) Supuestos conocidos los coeficientes de reflexión de Fresnel, calcule la expresión completa del campo eléctrico reflejado. Obtenga la expresión completa del campo eléctrico transmitido imponiendo las condiciones de contorno.

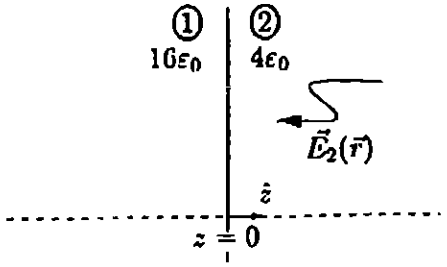
Septiembre-2010

I-37

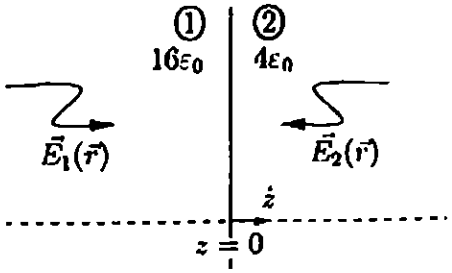
Una onda plana homogénea de frecuencia $f_0 = 1{,}5$ GHz se propaga por un medio con permeabilidad la del vacío y permitividad $16\varepsilon_0$. La onda tiene un campo eléctrico que se puede escribir como $\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\beta z}$, tiene polarización elíptica positiva, un campo máximo de intensidad $\sqrt{45\pi}$ (V/m) que se produce en dirección $\hat{x}$, y transmite una densidad de potencia de 1 (W/m^2). Determine los valores de β y $\vec{E}_0$, así como la relación axial de la onda.



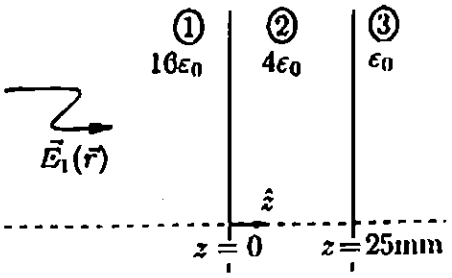
La onda incide normalmente sobre un medio con permeabilidad la del vacío y permitividad $4\varepsilon_0$, tal y como se muestra en la primera figura. Obtenga la expresión del campo reflejado en el medio ①, así como el valor de la densidad de potencia transmitida al medio ②.



Considere ahora que desde el medio ② incide una onda plana homogénea monocromática de la misma frecuencia f_0 y con un campo eléctrico $\vec{E}_2(\vec{r}) = (-\vec{E}_0/2)e^{j\beta_2 z}$, tal y como se muestra en la segunda figura. Calcule la densidad de potencia transmitida por esta segunda onda. ¿Cuál es el tipo de polarización, relación axial y sentido de polarización de esta nueva onda?



Considere ahora la situación de la tercera figura, en la que las dos ondas $\vec{E}_1(\vec{r})$ y $\vec{E}_2(\vec{r})$ inciden, simultáneamente, en la discontinuidad.
Calcule el campo en el medio ①, así como la densidad de potencia transmitida en los medios ① y ②, indicando la dirección en que se transmite esa potencia. ¿Se puede considerar que el campo es una onda estacionaria en los medios ① y ②? En caso afirmativo calcule el coeficiente o coeficientes de onda estacionaria.



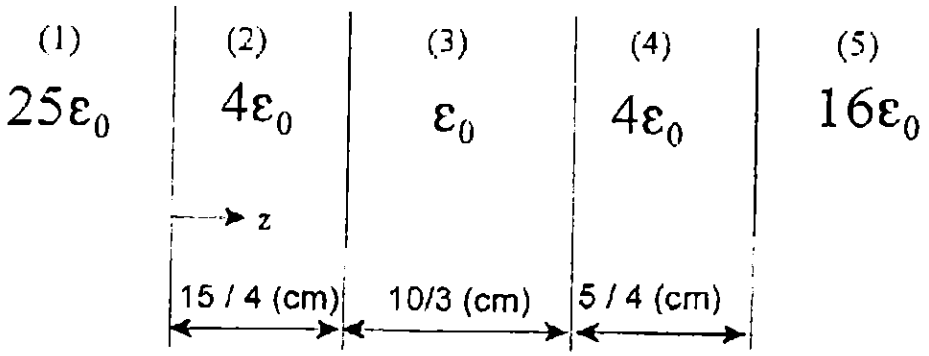
Considero, por último, la situación representada en la cuarta figura, en la que la primera onda, de campo eléctrico $\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\beta z}$, incide en una lámina del material del medio ② y espesor 25 mm, detrás de la cual está el vacío. Determine en este caso el campo en el medio ①, así como la densidad de potencia transmitida al vacío (medio ③). ¿Se puede considerar que el campo es una onda estacionaria en los medios ① y ②? En caso afirmativo calcule el coeficiente o coeficientes de onda estacionaria.

I-38

Considere la siguiente onda plana homogénea monocromática, de frecuencia f_o=3GHz, que se propaga en un medio de permitividad relativa $\varepsilon_{r1} = 25$:

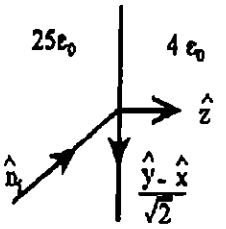
$$\bar{E}_{i1} = (\hat{x}+\hat{y})\ (1+j)\ e^{-j\beta_1 z} \quad (V/m)$$

A) Deduzca el tipo de polarización de la onda y el valor de su campo máximo y mínimo.
Esta onda incide normalmente sobre la estructura de la figura:
B) Calcule las longitudes eléctricas de las tres láminas (medios 2, 3 y 4).
C) Calcule la impedancia en la discontinuidad entre los medios (1) y (2). Calcule la potencia transmitida al medio 5.
D) Dibuje el diagrama de onda estacionaria en toda la estructura, especificando en la figura los valores y posiciones de los máximos y mínimos.
E) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de campo eléctrico que se podrían medir en toda la estructura?
F) Razone cómo afectaría a la impedancia de entrada que el espesor del medio (3) fuera el doble.
G) Calcule el espesor, e, y la constante dieléctrica relativa, ε_r, de la lámina sin pérdidas que hay que colocar inmediatamente a la izquierda de la primera discontinuidad para obtener máxima transmisión de potencia.



Se consideran ahora la estructura de dos medios de la figura. Si incide ahora de forma oblicua una onda

$$\bar{E}_{i1} = (\hat{x}+\hat{y})\ (1+j)\ e^{-j\beta_1 \hat{k}_i \cdot \bar{r}} \quad (V/m)$$



y sabiendo que los tres vectores de la figura están en el mismo plano, razone si es posible conseguir, en estas condiciones:
a) reflexión total, b) transmisión total.
En el caso de que sea posible, encuentre los valores de los ángulos de incidencia que lo conseguirían.

Junio-2011

I-39

Dada la expresión:

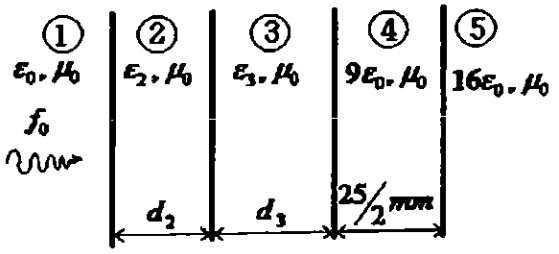
$$\vec{H} = [(a_1\,\hat{x} + b_1\,\hat{y} + c_1\,\hat{z}) + j(a_2\,\hat{x} + b_2\,\hat{y} + c_2\,\hat{z})]\; e^{-j\pi y} \quad (A/m)$$

donde y está en metros: determine las constantes reales a_i, b_i y c_i (i=1,2) para que pueda representar el campo magnético de una OPHM que se propaga en el vacio transmitiendo W_0 (vatios) con polarización elíptica positiva, relación axial 3 y que en el instante y posición t=0, y=0 dicho campo sea mínimo y se encuentre en la dirección $(\hat{x} - \hat{z})$.

Determine su frecuencia y dirección de propagación.

Una onda plana homogénea monocromática con polarización lineal de frecuencia 2 GHz incide en dirección perpendicular a la estructura de medios sin pérdidas representada en la figura.

Determine los valores d_2, ε_2 y ε_3 para que se transmita toda la potencia incidente, para cualquier valor del espesor de la lámina 3, d_3.



En la situación resuelta, calcule el coeficiente de onda estacionaria en todos los medios y dibuje el diagrama de onda estacionaria.

Sabiendo que la máxima potencia que se puede transmitir viene limitada por no superar el campo eléctrico de ruptura en ninguno de los dieléctricos y que los respectivos valores de los campos de ruptura para cada uno de los dieléctricos son: $E_{rup\text{-}1} = 3\cdot10^6$ (V/m), $E_{rup\,2} = 7\cdot10^6$ (V/m), $E_{rup\,3} = 8\cdot10^6$ (V/m), $E_{rup\text{-}4} = 5\cdot10^6$ (V/m) y $E_{rup\text{-}5} = 1\cdot10^6$ (V/m); determine la máxima potencia que puede transmitirse.

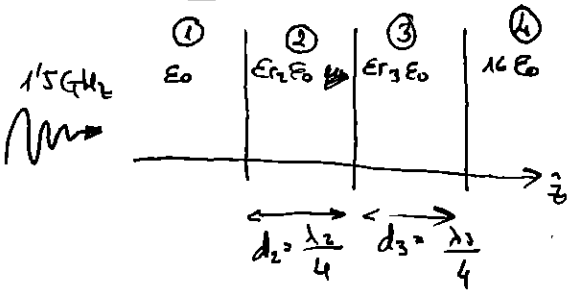
Si la OPHM de campo $\vec{E} = [(1+j)\,\hat{x}]\; e^{-j\pi y}\; (V/m)$ que se propaga en un medio de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$, incide sobre una discontinuidad entre medios cuya dirección perpendicular viene dada por $(\sqrt{3}\,\hat{y} - \hat{z})$, y a continuación de la cual se encuentra el aire, determine: a) la dirección de propagación de la onda reflejada, b) las expresiones del campo eléctrico de las ondas reflejada y transmitida en función de los coeficientes de reflexión y transmisión de Fresnel (no es necesario que los calcule) y considere conocidos $\hat{n}_r$ y $\hat{n}_t$.

Septiembre-2011

(14)

$\boxed{1^a \text{ Parte}}$ $\bar{E}(\bar{r}) = \sqrt{192\pi \cdot p_0}\,(\hat{x} + j\tfrac{1}{2}\hat{y})\, e^{j\varphi} \cdot e^{-j10\pi z}$ (V/m) $\forall \varphi$.

$\boxed{2^a \text{ Parte}}$



Sabemos que:

$W_{t4} = W_{inc}\left(1 - |\rho_{12}|^2\right)$

Para que $W_{t4} = W_{inc}$ debe ser $\rho_{12} = 0$ (Transmisión Total)

Como $\rho_{12} = \dfrac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} = 0 \Longrightarrow Z_{12} = \eta_1 = \eta_0$ (Ω)

(Ahora de derecha a izquierda)

$$Z_{34} = \eta_4 = \frac{\eta_0}{16} = \frac{\eta_0}{4}\ (\Omega)$$

$$Z_{23} = \frac{\eta_4 \cos(\beta_3 d_3) + j\eta_3 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3 \cos(\beta_3 d_3) + j\eta_4 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}\eta_3 = \left[\text{Como } d_3 = \frac{\lambda_3}{4}\right] = \frac{\eta_3^2}{\eta_4} = \frac{\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r3}}}\right)^2}{\eta_0/4} = \frac{4\eta_0}{\varepsilon_{r3}}$$

$$Z_{12} = \eta_2 \frac{Z_{23}\cos(\beta_2 d_2) + j\eta_2 \operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}{\eta_2 \cos(\beta_2 d_2) + jZ_{23}\operatorname{sen}(\beta_2 d_2)} = \left[\begin{array}{l}\text{Como } d_2 = \frac{\lambda_2}{4} \\ \beta_2 d_2 = \pi/2\end{array}\right] = \frac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \frac{\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\right)^2}{\frac{4\eta_0}{\varepsilon_{r3}}} = \eta_0 \frac{\varepsilon_{r3}}{4\varepsilon_{r2}}\ (\Omega)$$

Como $Z_{12} = \eta_0 \Longrightarrow \varepsilon_{r3} = 4\varepsilon_{r2}$ (Ec 1)

$\boxed{3^a \text{ Parte}}$

$$E_{max1} = E_{0\,inc_{MAX}}\left(1 + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{|\rho_{12}|}\right) = \sqrt{192\pi p_0}\ (V/m)$$

MEDIO (4)

Como inc. NORMAL se conserva la polarización

$$\bar{E}_{t4} = E_{04}(\hat{x} + j\tfrac{1}{2}\hat{y})\, e^{j\varphi_4} \cdot e^{-j\beta_4 z}\ (V/m)$$

Como $W_{t4} = W_{inc}(1 - |\rho_{12}|) \Longrightarrow \dfrac{E_{04}^2(1 + 1/4)}{2\eta_4} = \dfrac{\left(\sqrt{192\pi p_0}\right)^2(1 + 1/4)}{2\eta_1}(1 - 0^2)$

$$E_{04} = \frac{\sqrt{192\pi p_0}}{2}\ (V/m)$$

Como en el medio (4) no hay onda reflejada : $E_{max4} = E_{04} = \dfrac{E_{max1}}{2}$

4ª Parte

Sabemos que $\varepsilon_{r_3} = 4\varepsilon_{r_2}$ (Ec 4)

$d_2 + d_3 \leq 15\,mm \qquad \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} \leq 15\,mm \qquad \lambda_2 + \lambda_3 \leq 60\,mm$

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r_2}\varepsilon_{r_2}}} + \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r_3}\varepsilon_{r_3}}} \leq 60\,mm \qquad \lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{3\cdot 10^{11}}{1'5\cdot 10^{9}} = 200\,mm$$

$$200\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r_3}}}\right) \leq 60\,mm \qquad \text{Como } \varepsilon_{r_3} = 4\varepsilon_{r_2} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon_{r_2 min} = 25 \\ \varepsilon_{r_3 min} = 100 \end{array}$$

5ª Parte

$S_4 = 1$ (En el medio ④ no hay onda estacionaria)

$$S_3 = \frac{1+|\rho_{34}|}{1-|\rho_{34}|} = \left\{ \rho_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\eta_4 + \eta_3} = \frac{\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{10}}{\frac{\eta_0}{4} + \frac{\eta_0}{10}} = \frac{10-4}{10+4} = \frac{3}{7} \right\} = \frac{5}{2}$$

$$S_2 = \frac{1+|\rho_{23}|}{1+|\rho_{23}|} = \left\{ \rho_{23} = \frac{Z_{23} - \eta_2}{Z_{23} + \eta_2} = \frac{\frac{4\eta_0}{100} - \frac{\eta_0}{5}}{\frac{4\eta_0}{100} + \frac{\eta_0}{5}} = \frac{-2}{3} \right\} = 5$$

$$S_1 = \frac{1+|\rho_{12}|}{1+|\rho_{12}|} = 1.$$

(21) (A)

$$\bar{E}(\bar{r}) = 1\left[\left(\frac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}}\right) + j\,1/3\left(\frac{2\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{5}}\right)\right] e^{j\varphi}\, e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\cdot z} \ (V/m) \quad \forall \varphi$$

$$\hookrightarrow \frac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}} \times \hat{z} = \frac{2\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{5}}$$

OPHM

f_0

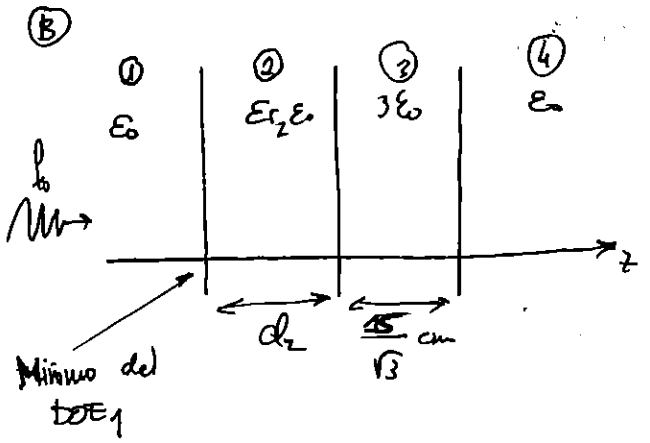
$r=3$

(+)

$E_{max} = 1\,V/m = \dfrac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow W_{inc} = \frac{1^2\,(1+1/9)}{2\eta_0} = 1'47\cdot 10^{-3}\ (W)$$

(B)



$\dfrac{\lambda_1}{2} = 5\,cm \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 = 10\,cm$

$f_0 = \dfrac{V}{\lambda} = \dfrac{c_0}{\lambda} = 3\,GHz \qquad S_1 = 2$

b1) ¿ División de la lámina ② ? $\begin{cases} \varepsilon_{r_2} \\ d_2 \end{cases}$

Como $S_1 = 2 = \dfrac{1+|\rho_{12}|}{1-|\rho_{12}|} \rightarrow |\rho_{12}| = \dfrac{S_1-1}{S_1+1} = 1/3$

Como hay un mínimo del DOE1 en la discontinuidad 1-2, la fase $\varphi_{12}=\pi$

$$\rho_{12} = -1/3 = \frac{Z_{12}-\eta_1}{Z_{12}+\eta_1} \Rightarrow Z_{12} = \eta_1\frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = \eta_0\frac{1-1/3}{1+1/3} = \frac{\eta_0}{2}\ (\Omega)$$

$Z_{34} = \eta_4 = \eta_0\ (\Omega)$

$$Z_{23} = \eta_3\frac{\eta_4\cos(\beta_3 d_3)+j\eta_3\,\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3\cos(\beta_3 d_3)+j\eta_3\,\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_3 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_3}\mu_{r_3}}} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\,(cm) \\ d_3 = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 3\dfrac{\lambda_3}{2} \end{array}\right.$$

Ahora de derecha a izquierda

lámina $\lambda/2$ ó trasparente

$= \eta_4 = \eta_1\ (\Omega)$

Ya hemos visto que $Z_{12} = \dfrac{\eta_0}{2}$

$$Z_{12} = \eta_2\frac{Z_{23}\cos(\beta_2 d_2)+j\eta_2\,\mathrm{sen}(\beta_2 d_2)}{\eta_2\cos(\beta_2 d_2)+j Z_{23}\,\mathrm{sen}(\beta_2 d_2)} = \frac{\eta_0}{2}$$

Si $\mathrm{sen}(\beta_2 d_2)=0 \Rightarrow Z_{12} = Z_{23} = \eta_0 \neq \eta_0/2$ NO VALE

Debe ser: $\cos(\beta_2 d_2)=0 \rightarrow Z_{12} = \dfrac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} \Rightarrow \varepsilon_{r_2} = 2$

$\rightarrow d_2 = (2n+1)\lambda_2/4 \Longrightarrow d_{2min} = \dfrac{\lambda_2}{4} = \dfrac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} = \dfrac{1'5}{\sqrt{2}}\ (cm)$

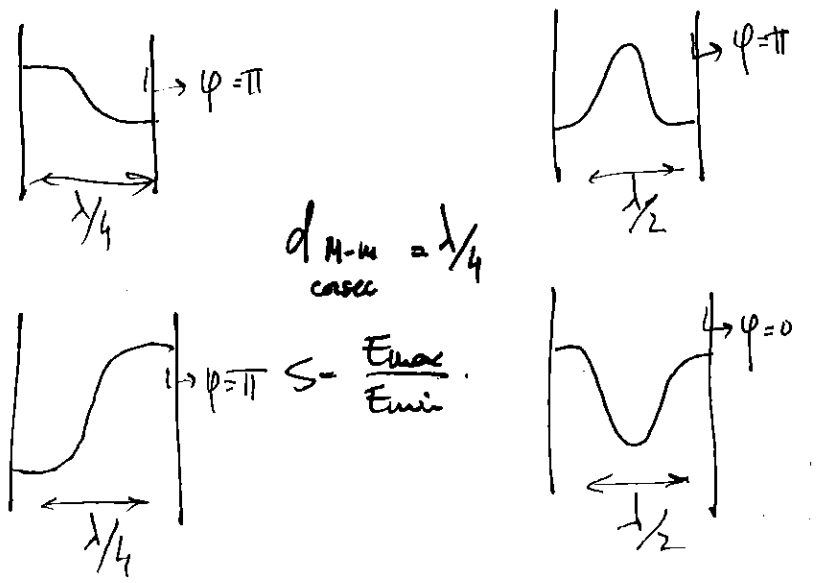
b2) $S_4 = 1$ (ya que en el medio ④ no hay onda estacionaria)

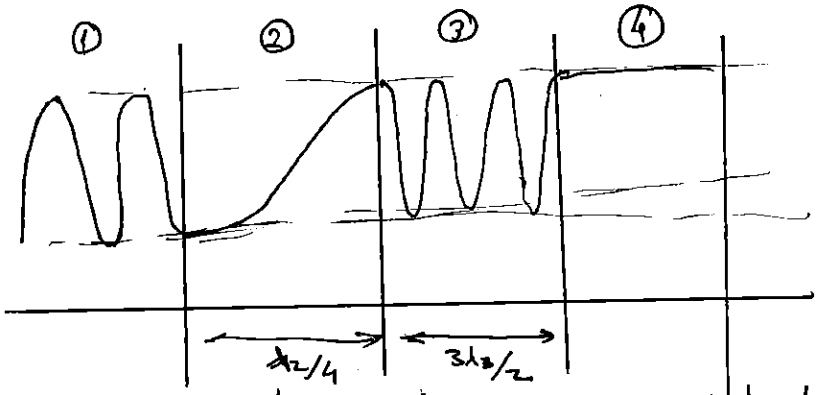
$$S_3 = \frac{1+|\rho_{34}|}{1-|\rho_{34}|} = \left\{ \rho_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\eta_4 + \eta_3} = \frac{\eta_0 - \frac{\eta_0}{\sqrt{3}}}{\eta_0 + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}}} = 0'268 \right\} = 1'732$$

$$S_2 = \frac{1+|\rho_{23}|}{1-|\rho_{23}|} = \left\{ \Gamma_{23} = \frac{Z_{23} - \eta_2}{Z_{23} + \eta_2} = \frac{\eta_0 - \eta_0/\sqrt{2}}{\eta_0 + \eta_0/\sqrt{2}} = 0'171 \right\} = 1'41$$

$S_1 = 2$ (DATO)

b3) <u>NOTA TEORICA</u> ¿Como se pinta un DOE?





<u>Medio ①:</u>
Como $\rho_{12} = -\frac{1}{3}$ su fase es es $\varphi_{12} = \pi$; hay un mínimo del DOE_1 en la discont. 1-2

Medio ②: Como $\rho_{23} = +0'171$ su fase es cero, por tanto hay un máximo del DOE_2 en la discontinuidad 2-3 y como $d_2 = \frac{\lambda_2}{4}$ el DOE_2 es el indicado.

Medio ③: Como $\rho_{34} = 0'268$, su fase es cero, por tanto hay un máx del DOE_3 en 3-4. Como $d_3 = \frac{3\lambda_2}{2}$ el DOE_3 es el indicado.

Medio ④: Como en este medio <u>NO</u> hay onda estacionaria, el DOE sería línea horizo

b4) Como incidencia normal se conserva la polarización:

$$\bar{E}_{t4}(\bar{r}) = E_{04}\left[\left(\frac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}}\right) + j\frac{1}{3}\left(\frac{2\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{5}}\right)\right]\cdot e^{j\varphi_4}\cdot e^{-j\beta_4 z}$$

Siendo:

$$\beta_4 = \omega_0\sqrt{\mu_4\,\epsilon_4} = \frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8} = 20\pi \quad (\text{rad/m})$$

$$W_{t4} = W_{inc}\left(1-|\rho_{12}|^2\right) \Longrightarrow \frac{E_{04}^2\,(1+1/9)}{2\eta_4} = \frac{1^2\,(1+1/9)}{2\eta_1}\left(1-|1/3|^2\right) \Rightarrow E_{04} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,(\text{V/m})$$

Así pues

$$\bar{E}_{t4}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left(E_{t4}(\bar{r})\,e^{j\omega_0 t}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(\frac{\hat{x}+2\hat{y}}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos\left(6\pi\cdot 10^8 t - 20\pi z + \varphi_4\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\left(\frac{2\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}\left(6\pi\cdot 10^8 t - 20\pi z + \varphi_4\right)\right]$$

Calculo φ_4

Suponemos que el medio 4 empieza en $z=0$. Para que $t=0$ y $z=0$ solo tenga componente en $\hat{x}$ la E_4 debe ser cero

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(\varphi_4) + \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{sen}\varphi_4\right] = 0 \Rightarrow \varphi_4 = -1'4 \text{ rad}$$

(19) $\boxed{1^a \text{ Parte}}$ $\bar{E}(\bar{r}) = 10\left(\hat{y} + j\tfrac{1}{2}\hat{x}\right)\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\frac{5\pi\sqrt{2}}{3}z}$ (V/m) $\forall\varphi$

$\boxed{2^a \text{ Parte}}$

$$Z_{67} = \eta_7 = \frac{\eta_0}{2}\ (\Omega)$$

$$Z_{56} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_6 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r6}\varepsilon_{r6}}} = \dfrac{(c/f)}{\sqrt{2\cdot 8}} = 21'21\text{ cm} \\ d_6 = 8\text{cm} \end{array}\right\} = \eta_6\,\frac{\eta_7\cos(\beta_6 d_6) + j\,\eta_6\,\mathrm{sen}(\beta_6 d_6)}{\eta_6\cos(\beta_6 d_6) + j\,\eta_7\,\mathrm{sen}(\beta_6 d_6)} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \eta_7 = \dfrac{\eta_0}{2} \\ \eta_6 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0}{8\varepsilon_0}} = \dfrac{\eta_0}{2} \end{array}\right\} = \eta_6 = \frac{\eta_0}{2}\ (\Omega).$$

$$Z_{45} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_5 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r5}\varepsilon_{r5}}} = 30\text{ cm} \\ d_5 = 3'75\text{ cm} = \dfrac{\lambda_5}{8} \end{array}\right\} = \eta_5\,\frac{Z_{56}\cos(\beta_5 d_5) + j\,\eta_5\,\mathrm{sen}(\beta_5 d_5)}{\eta_5\cos(\beta_5 d_5) + j\,Z_{56}\,\mathrm{sen}(\beta_5 d_5)} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \eta_5 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \dfrac{\eta_0}{2} \\ \beta_5 d_5 = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{\eta_0}{2} + j\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}}{\frac{\eta_0}{\sqrt{2}} + j\frac{\eta_0}{2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2} + j\,2}{2 + j\sqrt{2}}\ (\Omega).$$

$$Z_{34} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_4 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r4}}} = 20\text{ cm} \\ d_4 = 10\text{ cm} = \dfrac{\lambda_4}{2} \end{array}\right\} = Z_{45}$$

$$Z_{23} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_3 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r3}}} = 60\text{ cm} \\ d_3 = 7'5\text{ cm} = \dfrac{\lambda_3}{8} \end{array}\right\} = \eta_3\,\frac{Z_{34}\cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_3\,\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3\cos(\beta_3 d_3) + j\,Z_{34}\,\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)} =$$

$$= \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\,\frac{Z_{34} + j\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}}{\frac{\eta_0}{\sqrt{2}} + j\,Z_{34}} = \dots = \eta_0\ (\Omega)$$

$$Z_{12} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_4 = 20\text{ cm} \\ d_2 = 10\text{ cm} = \dfrac{\lambda_2}{2} \end{array}\right\} = Z_{23} = \eta_0\ (\Omega)$$

Así pues:

$$\rho_{12} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} = \frac{\eta_0 - \eta_0}{\eta_0 + \eta_0} = 0$$

3ª Parte

$$W_{t7} = W_{inc}\left(1-|\rho_{12}|^2\right) = \frac{10^2\left(1+1/1\right)}{2\,\eta_1}\left(1-0^2\right) = 0'1658\ (W/m^2)$$

4ª Parte ¿DOE?

MEDIO ① $E_{max\,1} = E_{0inc_{max}}\left(1+|\rho_{12}|\right) = 10\ V/m$

Como en el medio ① no hay onda estacionaria el DOE es el indicado

MEDIO ② $\rho_{23} = \dfrac{Z_{23}-\eta_2}{Z_{23}+\eta_2} = \dfrac{\eta_0 - \frac{\eta_0}{\sqrt{18}}}{\eta_0 + \frac{\eta_0}{\sqrt{18}}} = \dfrac{\sqrt{18}-1}{\sqrt{18}+1} \in \mathbb{R}^+$

Como $\eta_{23} = 0$ hay un maximo del DOE_2 en 2-3 y como

$d_2 = \frac{\lambda_2}{2}$ el DOE_2 es el indicado

$E_{max\,2} = 10\,(V/m)$

MEDIO ⑦: Como es inc normal se conserva polarización

$$\vec{E}_{t7} = E_{07}\left(\hat{y} + j\,\tfrac{1}{2}\hat{x}\right)e^{j\varphi_7}\cdot e^{-j\beta_7 z}$$

Como $W_{t7} = 0'1658\ (W/m^2) = \dfrac{E_{07}^2\left(1+1/4\right)}{2\,\eta_7} \Rightarrow E_{07} = 7'07\ (V/m)$

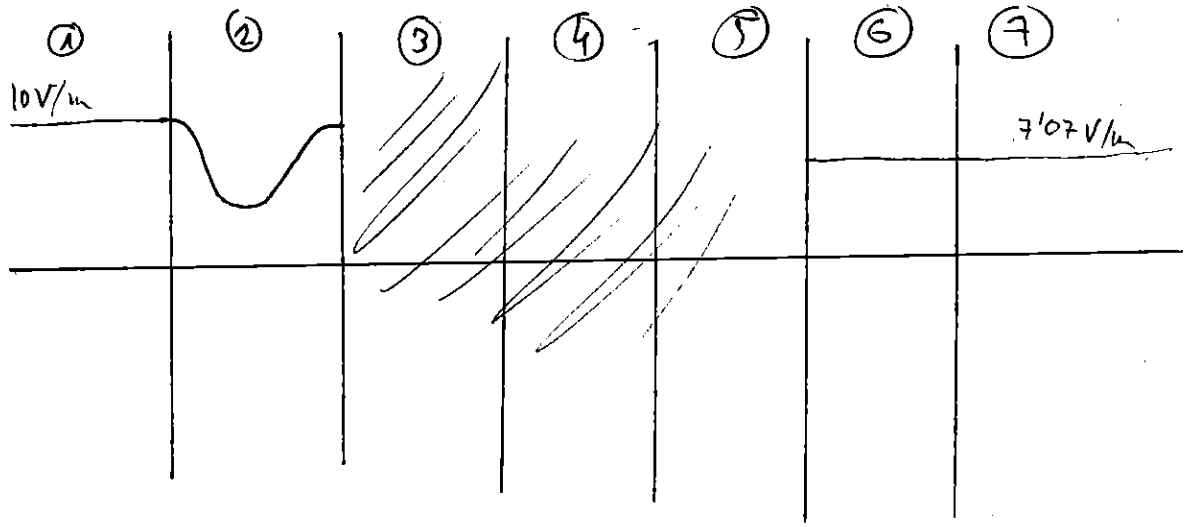
Como el medio ⑦ es indefinido NO hay onda reflejada y:

$E_{max\,7} = E_{07} = 7'07\ V/m$ y el DOE$_7$ es el indicado

MEDIO ⑥

$\rho_{67} = \dfrac{\eta_7-\eta_6}{\eta_7+\eta_6} = [\eta_7 = \eta_6] = 0 \Rightarrow$ No hay onda estacionaria en el medio ⑥ por lo que el DOE_6 es el indicado

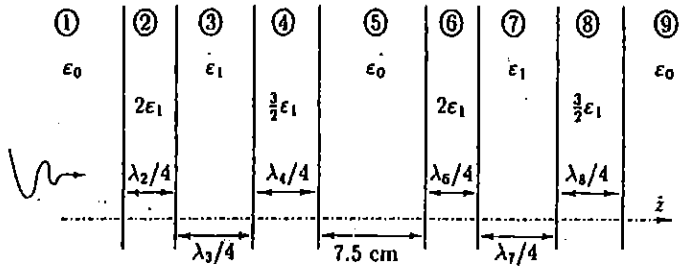
$E_{max\,6} = 7'07\ (V/m)$



Ejercicio 2 (34 %) **FEB 07** $\boxed{\text{I.25}}$

Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia $f_0 = 1\ GHz$ se propaga en el vacío en dirección $\hat{z}$. Sabiendo que tiene polarización elíptica negativa de relación axial 4, y campo máximo de intensidad $2\ V/m$, que se alcanza en dirección $\hat{x}$, escriba la expresión completa de los campos eléctrico y magnético complejos de la onda, $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{H}(\vec{r})$.

La onda incide normalmente sobre la estructura de láminas sin pérdidas, y con permeabilidad μ_0, de la figura.



¿Cuál es el valor de la permitividad ε_1 que hace que el módulo del coeficiente de reflexión en la región ⑤ tome el valor $|\rho_5| = \frac{5}{7}$?

Para ese valor de ε_1 calcule el coeficiente de reflexión en el primer medio a la frecuencia f_0. Calcule también el valor numérico de la densidad de potencia transmitida al medio ⑨.

Calcule los coeficientes de onda estacionaria en los medios ① y ②, así como el valor máximo de la intensidad del campo eléctrico que se alcanza en esos dos medios.

Solución:

$\boxed{1^a \text{ parte:}}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\gamma \hat{n}\cdot\vec{r}} = 2\left[\hat{x} + j\frac{1}{4}\hat{y}\right]\cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}z}\cdot e^{j\varphi} \quad (V/m) \quad \forall\varphi \text{ fase arbitraria.}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{z}\times\vec{E}(\vec{r})}{\eta_0} = \frac{2}{120\pi}\left[\hat{y} - j\frac{1}{4}\hat{x}\right]\cdot e^{-j\frac{20\pi}{3}z}\cdot e^{j\varphi} \quad (A/m)$$

$\boxed{2^a \text{ parte:}}$

$$Z_{78} = \left\{d_8 = \frac{\lambda_8}{4}\right\} = \frac{\eta_8^2}{\eta_9} = \frac{\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon_{r_1}}}\right)^2}{\eta_0} = \frac{\eta_0\cdot 2}{3\varepsilon_{r_1}}$$

$$Z_{67} = \left\{d_7 = \frac{\lambda_7}{4}\right\} = \frac{\eta_7^2}{Z_{78}} = \frac{\eta_0^2/\varepsilon_{r_1}}{2\eta_0/3\varepsilon_{r_1}} = \frac{3\eta_0}{2}$$

$$Z_{56} = \left\{d_6 = \frac{\lambda_6}{4}\right\} = \frac{\eta_6^2}{Z_{67}} = \frac{\eta_0^2/2\varepsilon_{r_1}}{3\eta_0/2} = \frac{\eta_0}{3\varepsilon_{r_1}}$$

$$\rho_5 = \frac{Z_{56} - \eta_5}{Z_{56} + \eta_5} = \frac{1-3\varepsilon_{r_1}}{1+3\varepsilon_{r_1}}$$

Hay dos posibilidades para que $|\rho_5| = \frac{5}{7}$:

- $1-3\varepsilon_{r_1} > 0 \Rightarrow \varepsilon_{r_1} = \frac{2}{36} < 1$ NO VÁLIDO
- $1-3\varepsilon_{r_1} < 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_1} = 2}$

$\boxed{3^a \text{ parte:}}$

$$Z_{45} = \left\{\begin{array}{l}\lambda_5 = \lambda_0 = \frac{c_0}{f_0} = 30cm \\ d_5 = \frac{\lambda_5}{4}\end{array}\right\} = \frac{\eta_5^2}{Z_{56}} = 6\eta_0$$

$$Z_{34} = \frac{\eta_4^2}{Z_{45}} = \frac{\eta_0^2/3}{6\eta_0} = \frac{\eta_0}{18}$$

$$Z_{23} = \frac{\eta_3^2}{Z_{34}} = 9\eta_0$$

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \frac{\eta_0^2/4}{9\eta_0} = \frac{\eta_0}{36}$$

$$\boxed{\rho_{12} = \frac{Z_{12}-\eta_1}{Z_{12}+\eta_1} = \frac{1-36}{1+36} = \frac{-35}{37}}$$

$$\boxed{W_{tg} = W_{inc}\left(1-|\rho_{12}|^2\right) = \frac{2^2\left(1+1/16\right)}{2\cdot\eta_0}\cdot\left(1-\left(\frac{35}{37}\right)^2\right) = \frac{34}{16\cdot 120\pi}\cdot\left(1-\frac{35^2}{37^2}\right) = 5'93\cdot 10^{-4}\ W/m^2}$$

4ª parte:

$$\boxed{S_1 = \frac{1+|\rho_{12}|}{1-|\rho_{12}|} = \frac{37+35}{37-35} = 36}$$

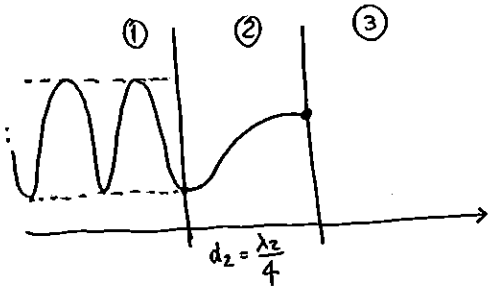
$$\boxed{E_{max_1} = |\overline{E_{0inc}}|_{max}\left(1+|\rho_{12}|\right) = 2\left(1+\frac{35}{37}\right) = \frac{144}{37} = 3'89\ V/m}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{1+|\rho_{23}|}{1-|\rho_{23}|} = \left\{\rho_{23} = \frac{Z_{23}-\eta_2}{Z_{23}+\eta_2} = \frac{9\eta_0-\eta_0/2}{9\eta_0+\eta_0/2} = \frac{18-1}{18+1} = \frac{17}{19}\right\} = \frac{19+17}{19-17} = 18}$$

Como $\rho_{12} = \frac{-35}{37} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \varphi_{12} = \pi \Leftrightarrow$ mínimo del diagrama de onda estacionaria del medio ① en la discontinuidad 1-2

Como $\rho_{23} = \frac{17}{19} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi_{23} = 0 \Leftrightarrow$ máximo del diagrama de onda estacionaria del medio ② en la discontinuidad 2-3.

Como $d_2 = \frac{\lambda_2}{4}$ el DOE de los dos medios es:



Como $E_{min_1} = \frac{E_{max_1}}{S_1} = \frac{\frac{144}{37}}{36} = \frac{4}{37} \Rightarrow \boxed{E_{max_2} = S_2\cdot E_{min_2} = 18\cdot\frac{4}{37} = \frac{72}{37} = 1'946\ V/m}$

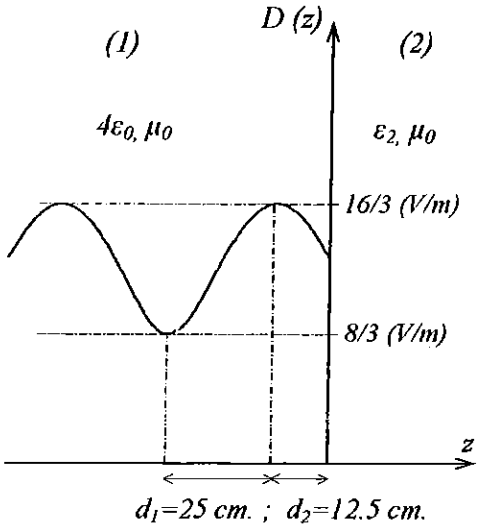
Asignatura: Campos y Ondas en Telecomunicación **Grupo: 22.2 . Curso: 2011/12**

QUINTA ENTREGA PERIÓDICA. PRIMERA PROPUESTA DE EJERCICIOS

Ejercicio

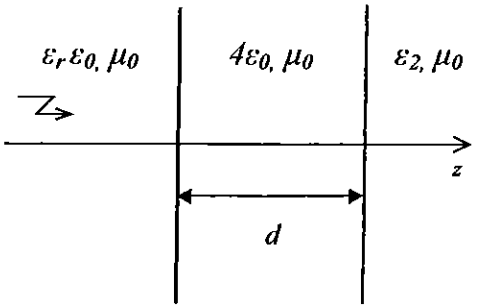
A) Una onda plana homogénea monocromática se propaga en dirección z por un medio de permitividad relativa 4 (medio 1) e incide perpendicularmente sobre la superficie plana de separación con otro medio con pérdidas de permitividad desconocida ε_2 (medio 2). La siguiente figura representa el diagrama de onda estacionara en el primer medio, $D(z)=\sqrt{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1^*}$.

Obtenga los valores de la frecuencia de trabajo y el coeficiente de onda estacionaria en el medio 1. Calcule también los valores del coeficiente de reflexión al final del medio 1 ($z=0^-$) y la impedancia intrínseca del medio 2.



B) Se considera ahora que la misma OPHM incide desde un medio de permitividad desconocida $\varepsilon_r\varepsilon_0$ sobre una lámina de espesor d, con la misma permitividad que el medio 1 del apartado anterior, a continuación de la cual se encuentra de nuevo el medio de permitividad ε_2, tal como se indica en la figura:

Calcule para un espesor de la lámina $d=d_1+d_2=37.5$ *cm.* la impedancia de onda en la superficie de separación de los dos primeros medios de la nueva estructura, y el valor de la permitividad relativa ε_r que hace que se transmita toda la potencia de la onda incidente.



Si el espesor de la lámina es ahora $d=50$ *cm.* calcule el nuevo valor de la impedancia en la superficie de separación de los dos primeros medios, y el valor de la impedancia intrínseca del primer medio que hace que no exista en él onda reflejada. Dibuje en este caso y de forma cualitativa el diagrama de onda estacionaria en los tres medios.

QUINTA ENTREGA PERIÓDICA. PRIMERA PROPUESTA DE EJERCICIOS.

A) Observando el diagrama de onda estacionaria en el medio ① vemos que:

$$\frac{\lambda_1}{4} = 25\,cm \Rightarrow \lambda_1 = 1\,m = \frac{V_1}{f} \Rightarrow \boxed{f = \frac{V_1}{\lambda_1} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{4}} = 1'5\cdot 10^8\ Hz}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{E_{max_1}}{E_{min_1}} = \frac{16/3}{8/3} = 2}$$

Sabemos que: $\rho(z=0^-) = \rho_{12} = |\rho_{12}|\cdot e^{j\varphi_{12}}$

$$\boxed{|\rho_{12}| = \frac{S_1-1}{S_1+1} = \frac{1}{3}}$$

Como hay un máximo del diagrama de onda estacionaria a 12'5cm de $z=0$ sabemos que:

$$\cos(2\beta_1 z + \varphi_{12})\Big|_{z=-12'5cm} = +1 \Rightarrow 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda_1}(-12'5cm) + \varphi_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{12} = \frac{(50cm)\pi}{(100cm)} = \frac{\pi}{2}}$$

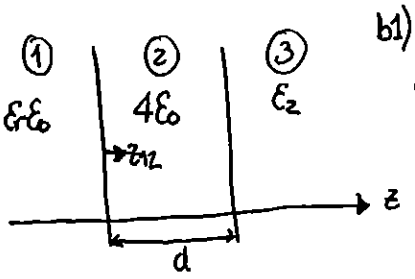
Así pues: $\boxed{\rho_{12} = |\rho_{12}|\cdot e^{j\pi/2} = j\frac{1}{3}}$

Como $\rho_{12} = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \Rightarrow \boxed{\eta_2} = \eta_1\frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = \frac{\eta_0}{2}\cdot\frac{1+j\,1/3}{1-j\,1/3} = \frac{\eta_0}{2}\left(\frac{3+j}{3-j}\right) = \frac{\eta_0}{2}\cdot\frac{(3+j)^2}{10} =$

$$= 6\pi(3+j)^2 = \boxed{48\pi + j36\pi}\ (\Omega)$$

¿ε_{r_2}? $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} \Rightarrow \Rightarrow \varepsilon_{r_2} = \left(\frac{\eta_0}{\eta_2}\right)^2 = \varepsilon_{r_2}' - j\varepsilon_{r_2}''$

B)



b1) $d = 37'5cm$

$$\boxed{Z_{12}} = \eta_2\cdot\frac{\eta_3\cdot\cos(\beta_2 d_2) + j\eta_2\,sen(\beta_2 d_2)}{\eta_2\cos(\beta_2 d_2) + j\eta_3\,sen(\beta_2 d_2)} = \left\{\begin{array}{l} d = 37'5cm = \frac{3\lambda_2}{8} \\ \beta_2 d_2 = \frac{3\pi}{4}\end{array}\right\} =$$

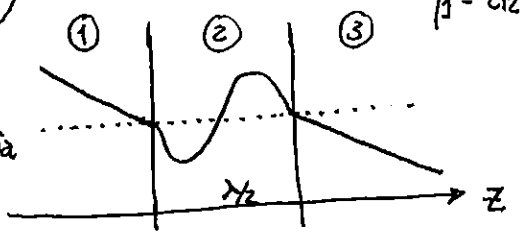
$$= \eta_2\cdot\frac{-\eta_3 + j\eta_2}{-\eta_2 + j\eta_3} = \left\{\begin{array}{l}\eta_2 = \frac{\eta_0}{2} = 60\pi\ (\Omega) \\ \eta_3 = 48\pi + j36\pi\ (\Omega)\end{array}\right\} = \dots = \boxed{\frac{\eta_0}{4}}\ (\Omega)$$

Para que se transmita toda la potencia $\rho_{12} = 0 = \frac{Z_{12}-\eta_1}{Z_{12}+\eta_1} \Rightarrow Z_{12} = \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_r = 16}$

b2) $d = 50cm = \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow \boxed{Z_{12}' = \eta_3 = 48\pi + j36\pi}\ (\Omega)$ Para que ∄ onda reflejada en el medio ① debe ser $\eta_1 = Z_{12} = 48\pi + j36\pi\ (\Omega)$

$d_2 = \frac{\lambda_2}{2}$

Sabemos que los medios ① y ③ tienen pérdidas y que $\rho_{12} = 0$; $\rho_{23} = j\frac{1}{3}$ y $d_2 = \frac{\lambda_2}{2}$ por tanto: viendo el diagrama de onda estacionaria dado en A):



(15)

OPHM / $f_0 = 3\,GHz$ / $jE_0\hat{x}$

En primer lugar $\bar{E}_{inc} = \bar{E}_{0inc} \cdot e^{-\gamma_1 (\hat{n}_i \cdot \bar{r})} = jE_0\hat{x}\, e^{-j80\pi z}$ (V/m)

¿Como se escribe una $\bar{E}_{ref}$ y $\bar{E}_t$ en INC. NORMAL?

$$\bar{E}_{ref}(\bar{r}) = \rho_{12}\, jE_0\hat{x} \cdot e^{+j80\pi z}$$

$$\bar{E}_{trans}(\bar{r}) = t_{12}\, jE_0\hat{x} \cdot e^{-j\beta_2 z} \cdot e^{-\alpha_2 z}$$

siendo:

$$\rho_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_0 - \eta_0/4}{\eta_0 + \eta_0/4} = 3/5 \longrightarrow t_{12} = 1 + \rho_{12} = \frac{8}{5}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = j2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = j20\pi \quad (m^{-1})$$

Así pues:

$$\bar{E}_{ref}(\bar{r}) = \frac{3}{5} jE_0\hat{x} \cdot e^{j80\pi z} \longrightarrow \bar{E}_{ref}(\bar{r},t) = Re\left(\bar{E}_{ref}(\bar{r}) \cdot e^{j\omega_0 t}\right) = -\frac{3}{5}E_0\hat{x}\,\text{sen}(6\pi 10^3 t + 80\pi z) \quad (V/m)$$

$$\overrightarrow{E_{trans}}(\bar{r}) = \frac{8}{5} jE_0\hat{x}\, e^{-j20\pi z} \longrightarrow \overrightarrow{E_{trans}}(\bar{r},t) = -\frac{8}{5}E_0\hat{x}\,\text{sen}(6\pi 10^3 t - 20\pi z) \quad (V/m)$$

$$W_{t_{inc}} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} = \frac{2E_0^2}{\eta_0} \qquad W_{t_{ref}} = \frac{9/25\, E_0^2}{2\eta_1} = \frac{18 \cdot E_0^2}{25\eta_0}$$

$$W_{t_{trans}} = \frac{\frac{64}{25}E_0^2}{2\eta_2} = \frac{32\, E_0^2}{25\,\eta_0}$$

$$\rho_{12} = 3/5 \qquad S_1 = \frac{1 + |\rho_{12}|}{1 - |\rho_{12}|} = 4$$

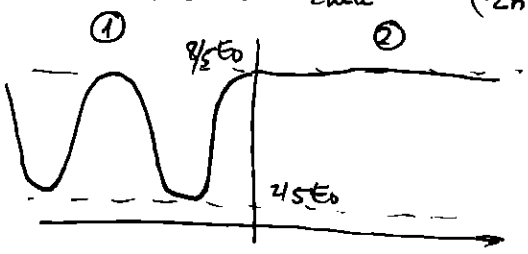
$$E_{max_1} = |\bar{E}_{0inc}| \cdot (1 + |\rho_{12}|) = E_0(1 + 3/5) = 8/5\, E_0 \quad (V/m)$$

$$E_{min_1} = \frac{E_{max_1}}{S_1} = \frac{2}{5}E_0 \quad (V/m)$$

Como la fase de ρ_{12} es $\varphi_{12} = 0$ hay un máx del DOE_1 en $z = 0^-$

Posiciones $z_{máx} = -n\frac{\lambda_1}{2} = -n \cdot 1'25$ (cms) $\quad n = 0, 1, 2 \ldots$ $\quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{16}}$

Posiciones $z_{min} = -(2n'+1)\frac{\lambda_1}{4} = -(2n+1)\frac{1'25}{2}$ $\quad n' = 0, 1, 2, \ldots$

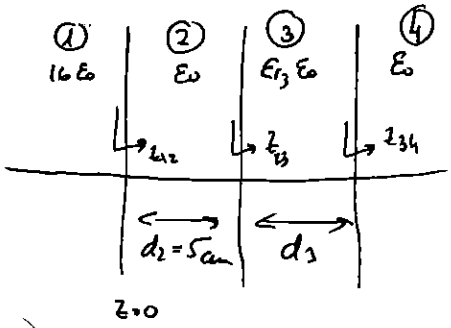


Para trans total:

$$\vec{E}_{inc} = jE_0\,\hat{x}\,e^{-j30\pi z} \quad (V/m)$$

$$\rho_{12} = 0 \Rightarrow Z_{12} = \eta_1 = \frac{\eta_0}{4}\ (\Omega)$$

$$Z_{23} = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_3 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3 \cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_4 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)} = \frac{\eta_0}{4}$$



$$Z_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_0 = \frac{c_0}{f} = 10cm \\ d_2 = 5cm = \frac{\lambda_2}{2} \end{array} \right\} = Z_{23} = \frac{\eta_0}{4}$$

Si $\operatorname{sen}(\beta_3 d_3) = 0 \Rightarrow Z_{23} = \eta_4 = \eta_0 \neq \frac{\eta_0}{4}$

Debe ser: $\cos(\beta_3 d_3) = 0$

$$Z_{23} = \frac{\eta_3^2}{\eta_4} = \frac{(\eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r3}})^2}{\eta_0} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_{r3}} = \frac{\eta_0}{4} \Rightarrow \varepsilon_{r3} = 4$$

$$\beta_3 d_3 = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow d_3 = (2n+1)\frac{\lambda_3}{4} \Rightarrow d_{3min} = \frac{\lambda_3}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r3}}} = 1'25\ cms$$

MEDIO 1 Como $\rho_{12} = 0$ No hay onda estacionaria

$$E_{max1} = E_{min1} = |\vec{E}_{inc}| = E_0\ (V/m)$$

MEDIO 2 $\rho_{23} = \frac{Z_{23} - \eta_2}{Z_{23} + \eta_2} = \frac{\eta_0/4 - \eta_0}{\eta_0/4 + \eta_0} = -3/5 \Longrightarrow \varphi_{23} = \pi \Rightarrow$ Mínimo en la disc. 2-3.

Como $d_2 = \frac{\lambda_2}{2}$ y $S_2 = \frac{1 + 3/5}{1 - 3/5} = 4.$

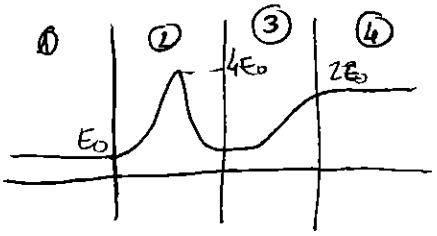
$$E_{min2} = E_0 \qquad E_{max2} = 4E_0$$

MEDIO 3 $\rho_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\eta_4 + \eta_3} = \frac{\eta_0 - \eta_0/2}{\eta_0 + \eta_0/2} = 1/3 \Rightarrow \varphi_{34} = 0 \Rightarrow$ Máx en 3-4

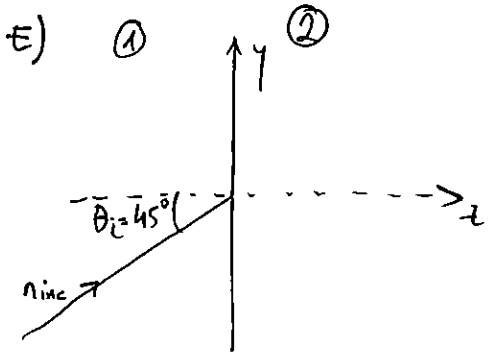
Como $d_3 = \frac{\lambda_3}{4}$ $\quad S_3 = \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2$

$$E_{min3} = E_0 \qquad E_{max3} = 2E_0$$

MEDIO 4: $E_{min4} = E_{max4} = 2E_0\ (V/m)$ ya que el medio 4 es indefinido.



E)



E1) ¿ $\overline{E_{inc}}$ y $\overline{H_{inc}}$?

Como el plano de incidencia es el yz y $\hat{n}_{inc}$ está en este plano:

$$\hat{n}_{inc} = \frac{\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$$

Así pues: $\overline{E_{inc}}(\bar{r}) = jE_0\,\hat{x}\cdot e^{-j80\pi\left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)}$ (V/m)

$$\overline{H_{inc}} = \frac{\overline{n_{inc}}\times\overline{E_{inc}}}{\eta_1} = j\frac{4E_0}{\eta_0}\left(\frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)\cdot e^{-j80\pi\left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)} \text{ (A/m)}$$

E2) Observamos que la dirección $\perp$ al plano de incidencia es $\overline{U_\perp} = \hat{x}$

$$\overline{E_{inc_\perp}} = jE_0\hat{x}\cdot e^{-j80\pi\left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\overline{E_{inc_{//}}} = \bar{0}$$

Como $\rho_\perp \neq 0$ $\forall\theta_i$ la reflejada $\Rightarrow$ es lineal $\perp$ o lineal en $\hat{x}$, ya que $E_{inc_{//}} = 0$

$$\theta_c = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 14'47°$$

Como $\theta_i = 45° > \theta_c \Rightarrow$ Ref total

$$W_{tref} = W_{inc} = \frac{2E_0^2}{\eta_0} = \frac{E_0^2}{60\pi}\ (W)$$

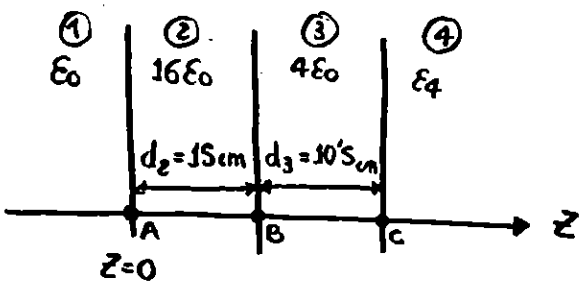
I.22 EJERCICIO 2 SEPTIEMBRE 2005

A) • OPHM

• $S_1 = 4$

• $|\vec{E}_{TOTAL}(1)|_{max} = 8$ V/m que se produce en $z = -3$cm

• $|\vec{E}_{TOTAL}(1)|_{min} = 1$ V/m que se produce en $z = -4$cm



a1) Para que en $z = -3$cm haya un máximo, y en $z = -4$cm haya un mínimo, debe ser:

$$1\text{cm} = (2n+1)\frac{\lambda_1}{4};$$

$$1\text{cm} = (2n+1)\frac{\lambda_0}{4};$$

La distancia entre máximos y mínimos consecutivos es de $\frac{\lambda_1}{4}$, pero no nos dicen que el máximo y el mínimo sean consecutivos, por eso se pone $(2n+1)\frac{\lambda_1}{4}$

$$1\text{cm} = (2n+1)\frac{c_0}{4f} \Rightarrow f = (2n+1)\frac{c_0(\text{cm/s})}{4} = (2n+1)\cdot\frac{3\cdot 10^{10}\text{ cm/s}}{4} = (2n+1)\cdot 7'5\cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f_{min} = 7'5 \text{ GHz}}$$

a2) $S_1 = 4 = \dfrac{1+|\rho_A|}{1-|\rho_A|} \Rightarrow \boxed{|\rho_A| = \dfrac{4-1}{4+1} = \dfrac{3}{5}}$

Si $f = f_{min} \Rightarrow 1\text{cm} = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\lambda_0}{4}$, por tanto $\frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda_0}{2} = 2$cm, por lo que si hay un mínimo en $z = -4$cm, habrá otro en $z = -2$cm y otro más en $z = 0^-$, así pues $\varphi_A = \pi$ y finalmente: $\rho_A = \frac{-3}{5}$

Como $\rho_A = \dfrac{Z_A - \eta_1}{Z_A + \eta_1} = \dfrac{-3}{5} \Rightarrow \boxed{Z_A = \dfrac{\eta_0}{4}}, (\Omega)$

Ahora calculamos Z_A de derecha a izquierda.

$$Z_B = \eta_3 \cdot \frac{\eta_4 \cdot \cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_3\,\text{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3 \cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_4 \cdot \text{sen}(\beta_3 d_3)} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_3}}} = \dfrac{4\text{cm}}{\sqrt{\varepsilon_{r_3}}} = 2\text{cm} \\ d_3 = 21 \cdot \dfrac{\lambda_3}{4} \end{array} \right\} = \frac{\eta_3^2}{\eta_4} = \frac{\eta_0\sqrt{\varepsilon_{r_4}}}{4}, (\Omega)$$

$$Z_A = \eta_2 \cdot \frac{Z_B \cdot \cos(\beta_2 d_2) + j\,\eta_2 \cdot \operatorname{sen}(\beta_2 d_2)}{\eta_2 \cdot \cos(\beta_2 d_2) + j\,Z_B \cdot \operatorname{sen}(\beta_2 d_2)} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} = \dfrac{4\,cm}{\sqrt{16}} = 1\,cm \\ \\ d_2 = 30 \cdot \dfrac{\lambda_2}{2} \end{array} \right\} = Z_B = \frac{\eta_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r_4}}}{4}\ ,(\Omega)$$

Como debe ser $Z_A = \dfrac{\eta_0}{4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_4} = 1} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_4 = \varepsilon_0,\ F/m}$

Por otro lado la potencia transmitida en él es: $P_{t_4} = P_{inc}\left(1 - |\rho_A|^2\right)$, así pues debemos determinar la potencia de la onda incidente.

OBSERVAMOS QUE LA ONDA INCIDENTE DEBE TENER POLARIZACIÓN ELÍPTICA, YA QUE SI FUERA LINEAL Ó CIRCULAR, Y SABIENDO QUE $S_1 = 4$ y $|\vec{E}_{TOTAL①}|_{max} = 8\ (V/m)$, el campo mínimo absoluto del medio ① sería $|\vec{E}_{TOTAL①}|_{min} = \dfrac{8}{S_1} = 2\ (V/m)$, y el enunciado nos dice que es de $1\,V/m$.

SUPONEMOS PUES QUE LA ONDA INCIDENTE TENDRÁ LA SIGUIENTE FORMA:

$\vec{E}_{inc} = \left(E_{0y}\,\hat{y} + j\,E_{0x}\cdot\hat{x}\right)\cdot e^{-j\beta_0 z}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$, Y SUPONEMOS TAMBIÉN QUE $E_{0y} > E_{0x}$:

$$|\vec{E}_{TOTAL①}|_{max} = |\vec{E}_{inc}|_{max}\cdot\left(1 + |\rho_A|\right) = |\vec{E}_{inc}|_{max}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = |\vec{E}_{inc}|_{max}\cdot\frac{8}{5} \underset{\text{Por el enunciado}}{=} 8\ V/m \Rightarrow |\vec{E}_{inc}|_{max} = E_{0y} = 5\,(V/m)$$

$$|\vec{E}_{TOTAL①}|_{min} = |\vec{E}_{inc}|_{min}\left(1 - |\rho_A|\right) = |\vec{E}_{inc}|_{min}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = |\vec{E}_{inc}|_{min}\cdot\frac{2}{5} = 1\ V/m \Rightarrow |\vec{E}_{inc}|_{min} = E_{0x} = \frac{5}{2}\,(V/m)$$

Así pues:

$$\vec{E}_{inc} = \left(5\,\hat{y} + j\,\frac{5}{2}\,\hat{x}\right)\cdot e^{-j\beta_0 z}\cdot e^{j\varphi} = 5\left(\hat{y} + j\,\frac{1}{2}\,\hat{x}\right)\cdot e^{-j\beta_0 z}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{inc} = \frac{|\vec{E}_{0inc}|^2}{2\cdot\eta_1} = \frac{5^2\left(1 + 1/4\right)}{2\cdot 120\pi} = \frac{125}{8\cdot 120\pi}\ ;(W)$$

Finalmente: $\boxed{P_{t_4} = P_{inc}\left(1 - |\rho_A|^2\right) = \dfrac{125}{8\cdot 120\pi}\left(1 - \dfrac{9}{25}\right) = \dfrac{5}{60\pi}}\ (W)$

<u>COMENTARIO FINAL:</u> Cuando la onda incidente tiene una polarización elíptica como la anterior, es decir, con un semieje en $\hat{y}$ y otro en $\hat{x}$, vamos a tener un máximo absoluto, un mínimo absoluto, un mínimo relativo y un máximo relativo.

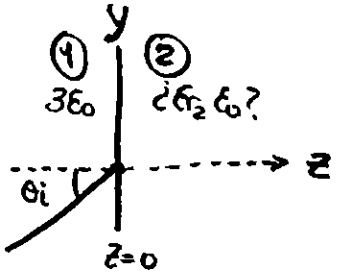
En el caso anterior: $|\vec{E}_{TOTAL①}|_{\substack{mínimo\\relativo}} = E_{0y}\left(1 - |\rho_A|\right) = 5\cdot\left(1 - \frac{3}{5}\right) = 2\,(V/m)$ que se produce en $\hat{y}$.

$|\vec{E}_{TOTAL①}|_{máximo} = E_{0x}\left(1 + |\rho_A|\right) = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = 4\,(V/m)$ que se produce en $\hat{x}$.

B) OPHM

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0\left(2j\hat{x} - \sqrt{3}\,\hat{y} + \hat{z}\right)\cdot e^{-j\pi(3z+\sqrt{3}y)}$$

INCIDENCIA OBLICUA EN $z=0$:



El vector normal entrante del medio 1 al medio 2 es $\hat{n}_e = \hat{z}$

$\vec{E}_{0r} = j E_0 \cdot \hat{x}$ = Amplitud del campo reflejado.

b1) Identificamos la expresión del campo dado con:

$$\vec{E}_{inc}(\vec{r}) = \vec{E}_{0_{inc}}\cdot e^{-\gamma \hat{n}_{inc}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{0_{inc}}\cdot e^{-(\alpha+j\beta)\cdot\hat{n}_{inc}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{0_{inc}}\cdot e^{-j\beta\hat{n}_{inc}\cdot\vec{r}}\cdot e^{-\alpha\hat{n}_{inc}\cdot\vec{r}} \quad (V/m)$$

siendo: • $\alpha = 0$ (1/m)

• como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ y $\hat{n}_{inc}$ debe ser un vector unitario, debe ser:

$$\hat{n}_{inc} = \frac{3\hat{z}+\sqrt{3}\,\hat{y}}{\sqrt{9+3}} = \frac{3\hat{z}+\sqrt{3}\,\hat{y}}{\sqrt{12}}\ ;\ \text{de tal forma que } \hat{n}_{inc}\cdot\vec{r} = \frac{3z+\sqrt{3}y}{\sqrt{12}}$$

y además: $\boxed{\beta = \pi\cdot\sqrt{12} = 2\pi\sqrt{3}}$ (rad/m)

Por tanto: $\beta \underset{\alpha=0}{=} \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega_0\sqrt{\mu_0 3\varepsilon_0} = \frac{2\pi f_0}{c_0}\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{f_0 = 3\cdot 10^8 = 300\ MHz}$

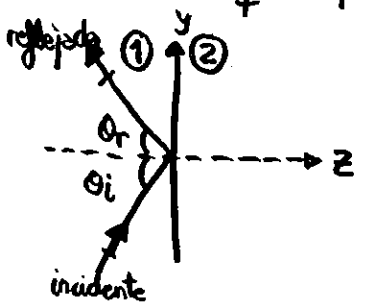
b2) Veamos cual es el plano de incidencia y el ángulo de incidencia para representar bien las ondas incidente y reflejada:

$$\hat{n}_{inc}\times\hat{n}_e = \frac{3\hat{z}+\sqrt{3}\hat{y}}{\sqrt{12}}\times\hat{z} = \frac{\sqrt{3}\,\hat{x}}{\sqrt{12}} \Rightarrow \boxed{\hat{u}_\perp = \hat{x}}$$

Si la dirección $\perp$ al plano de incidencia es $\hat{x}$, quiere decir que el plano de incidencia es el yz.

$$\hat{n}_{inc}\cdot\hat{n}_e = \cos\theta_i = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_i = 30^\circ}$$

Por tanto el esquema para las ondas incidente y reflejada es:



Por la ley de Snell de la reflexión: $\theta_i = \theta_r \Rightarrow$

$$\boxed{\hat{n}_{rf} = \operatorname{sen}30^\circ\,\hat{y} - \cos 30^\circ\,\hat{z} = \frac{\hat{y}-\hat{z}\sqrt{3}}{2}}$$

b3) Descomponemos la onda incidente en $\vec{E}_{inc_\perp}$ y $\vec{E}_{inc_{//}}$; como $\hat{u}_\perp = \hat{x}$:

$$\vec{E}_{inc_\perp} = E_0(2j\hat{x})\cdot e^{-j\pi(3z+\sqrt{3}y)} \; ; (V/m)$$

$$\vec{E}_{inc_{//}} = E_0\left(-\sqrt{3}\hat{y}+\hat{z}\right)\cdot e^{-j\pi(3z+\sqrt{3}y)} \; , (V/m)$$

Sabemos que el campo reflejado es:

$$\vec{E}_{ref} = j E_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{-j\beta_1 \hat{n}_{ref}\cdot\vec{r}} \; , (V/m).$$

Observamos pues que el campo reflejado sólo tiene componente $\perp$ y por tanto: $\boxed{\rho_{//} = 0}$ y $\boxed{\rho_\perp = \frac{1}{2}}$

$$\vec{E}_{0ref_\perp} = \rho_\perp \cdot \vec{E}_{0inc_\perp}$$

$$jE_0\hat{x} = \rho_\perp \cdot E_0(2j\hat{x})$$

b4) Como $\rho_{//} = 0 \Rightarrow \theta_i = \theta_{iB} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{\sqrt{3}} = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_{r_2}} = 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_2} = 1} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = \varepsilon_0} \; F/m$$

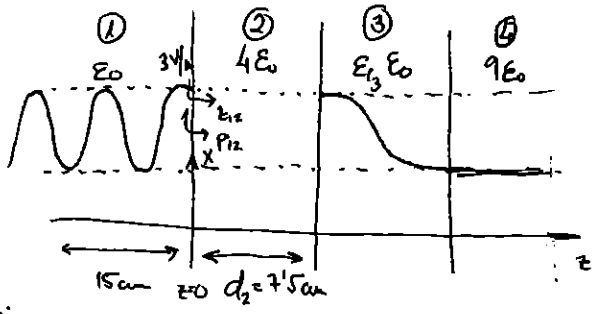
(20)

A) $\bar{E}(\bar{r}) = 2(\hat{x} - j\hat{y}) \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\frac{20\pi}{3} z}$ (V/m)

$$\beta_0 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}$$

$$E_{inc_{MAX}} = 2 (V/m)$$

B)



Maximo $|\bar{E}_1|$

$$\rho_{12} = 1/2 \Rightarrow Z_{12} = \eta_1 \frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = 3\eta_0$$

$$Z_{23} = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos(\beta_3 d_3) + j\eta_3 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3 \cos(\beta_3 d_3) + j\eta_4 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}$$

$$Z_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{4}} = 15\text{cm} \\ d_2 = \frac{\lambda_2}{2} \end{array} \right\} = Z_{23} = 3\eta_0$$

sabemos

$$\frac{W_{ref}}{W_{inc}} = |\rho_{12}|^2 = 1/4 \Rightarrow |\rho_{12}| = 1/2$$

Calculo de φ_{12}

1ª Forma: $\lambda_1 = \lambda_0 = \frac{c_0}{f_0} = 30$cm

Como z=-15cm hay un máx de $|\bar{E}_1|$, en z=0 tambien hay máx $\varphi_{12} = 0$

2ª Forma:

Como z=0 esta en la disc 1-2 y hay un máx z=-15cm:

$$\cos(2\beta_1(-15\text{cm}) + \varphi_{12}) = +1 \Rightarrow 2\beta_1(-15\text{cm}) + \varphi_1 = 0$$

$$\varphi_{12} = 2\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot 15\text{cm} = 2\pi \simeq 0$$

Si $\operatorname{sen}(\beta_3 d_3) = 0 \Rightarrow Z_{23} = \eta_4 = \frac{\eta_0}{\sqrt{9}} \neq 3\eta_0$ NO VALIDO

Debe ser: $\cos(\beta_3 d_3) = 0$ → $Z_{23} = \frac{\eta_3^2}{\eta_4} = \frac{\eta_0 \cdot 3}{\varepsilon_{r_3}} = 3\eta_0 \Rightarrow \varepsilon_{r_3} = 1 \rightarrow \varepsilon_3 = \varepsilon_0$ F/m

→ $d_3 = (2n+1)\frac{\lambda_3}{4} \Rightarrow d_{3min} = \frac{\lambda_3}{4} = \frac{\lambda_0}{4} = 7'5$cm

C) $\rho_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\eta_4 + \eta_3} = \frac{\frac{\eta_0}{3} - \eta_0}{\frac{\eta_0}{3} + \eta_0} = -1/2 \Rightarrow \varphi_{34} = \pi \Rightarrow$ Minimo del DOE$_3$ en la discont. 3-4

Como $d_3 = \frac{\lambda_3}{4}$ hay un máximo en 2-3.

¿Como se utiliza el E_{rupt} en O.P? Se calcula el DOE con la E_{inc} dada y se hace una regla de 3.

Así pues si con $E_{inc_{MAX}} = 2$V/m se alcanzan 3V/m en el medio ③ para que en el medio ③ se alcancen $3 \cdot 10^6$ V/m la onda incidente debe ser: (otra cosa)

MEDIO ①:

$$E_{max_1} = |E_{0inc}| \cdot (1 + |\rho_{12}|) = 2(1 + 1/2) = 3 V/m$$

MEDIO ③:

Como el medio ② es en $\lambda_2/2$ al principio del medio ③ tendremos 3V/m como indicamos en la figura.

Por tanto:

$$W_{t_{4_{máx}}} = W_{inc_{máx}} \left(1 - |\rho_{12}|^2\right) = \frac{(2\cdot 10^6)^2 \cdot (\sqrt{2})^2}{2\eta_L} \cdot \left(1 - (1/2)^2\right) = \frac{10^{12}}{40\pi} \ (W)$$

Ejercicio 2 (40 %) CEM - FEB09 - 2/4

A) Escriba la expresión compleja del campo eléctrico de una Onda Plana Homogénea Monocromática de frecuencia f=0.5 GHz, que se propaga por el vacío según $\hat{z}$, de polarización elíptica negativa, de relación axial 2, potencia transmitida $\frac{1}{48\pi}$ (W) y campo mínimo en dirección $\hat{y}$.

¿Cuál es el valor de su campo máximo?

Esta onda incide normalmente sobre la estructura de la figura:

B) Calcule las longitudes eléctricas de las cinco láminas.

C) Calcule la impedancia a la entrada de la estructura. ¿Qué porcentaje de potencia incidente se refleja en el medio (1)?

D) Dibuje en una sola figura el diagrama de onda estacionaria en los medios (1), (6) y (7) calculando los valores y posiciones de los máximos y mínimos.

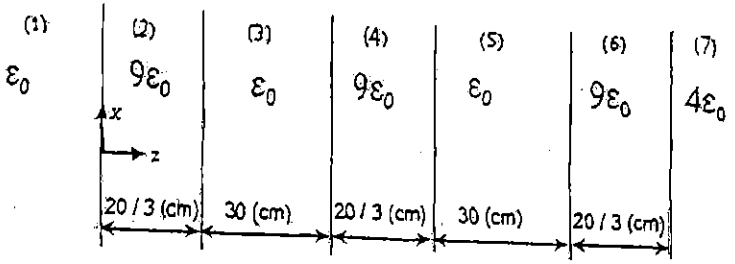
E) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de campo eléctrico que se podrían medir en el medio (6)?

F) ¿Cuál es el valor de la máxima potencia de la onda incidente para no superar el campo eléctrico de ruptura ($E_{ruptura} = 3\cdot10^6$ (V/m)) en el medio (1)?

G) Se consideran ahora sólo los medios (1) y (2), siendo el medio (2) de longitud infinita.

Si incide desde el medio (1) una onda con las mismas características de la del apartado A), pero ahora con una dirección de propagación $\hat{n} = \frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$, escriba la nueva expresión compleja del campo eléctrico incidente. Identifique en la expresión obtenida las componentes paralela y perpendicular.

Obtenga la expresión compleja del campo eléctrico de la onda reflejada supuestos conocidos los coeficientes de reflexión de Fresnel.



EJERCICIO (2) FEB 2009

A) $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\gamma \hat{n}\cdot\vec{r}}$

siendo: $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{r} = z$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0 + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{2\pi\cdot0'5\cdot10^9}{3\cdot10^8} = j\frac{10\pi}{3}\ (\text{rad/m})$$

$$\vec{E}_0 = E_0\left(\hat{x} + j\frac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{j\varphi} \quad \forall\varphi \text{ fase arbitraria.}$$

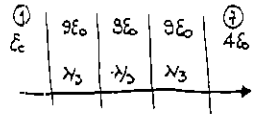
$$W_t = \frac{1}{48\pi} = \frac{E_0^2\left(1+1/4\right)}{2\cdot\eta_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\cdot\eta_0\ 4}{48\pi\ 5}} = 2\ \text{V/m}$$

$$\boxed{\vec{E}_{inc}(\vec{r}) = 2\left(\hat{x} + j\frac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}z}\ (\text{V/m})} \quad \boxed{E_{inc_{max}} = 2\ \text{V/m}}$$

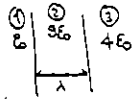
B) $$\boxed{d_{2_e} = d_{4_e} = d_{6_e}} = \beta_2\cdot d_2 = \left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{9}} = \frac{3\cdot10^{10}}{3\cdot0'5\cdot10^9} = 20\text{cm}\\ d_2 = d_4 = d_6 = \frac{\lambda_2}{3}\end{array}\right\} = \frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}\ \text{radianes eléctricos} = 120^\circ\ \text{eléctricos}}$$

$$\boxed{d_{3_e} = d_{5_e}} = \beta_3\cdot d_3 = \left\{\begin{array}{l}\lambda_3 = \lambda_0 = 60\text{cm}\\ d_3 = d_5 = \frac{\lambda_3}{2}\end{array}\right\} = \frac{2\pi}{\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_3}{2} = \boxed{\pi\ \text{radianes eléctricos} = 180^\circ\ \text{eléctricos}}$$

c) Observamos que $d_3 = d_5 = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{\lambda_5}{2}$ por tanto se trata de láminas en $\frac{\lambda}{2}$ que podemos prescindir de ellas para el cálculo de impedancias; así el esquema dado es equivalente al siguiente:



Este esquema a su vez es equivalente a:

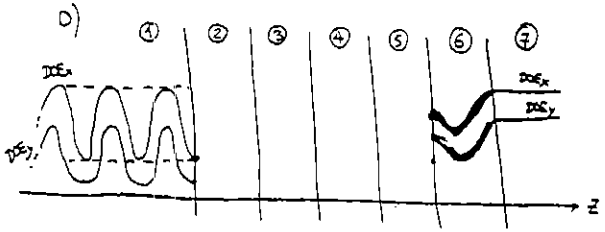


Por tanto también podemos prescindir del medio $9\varepsilon_0$ que mide $\lambda = 3\frac{\lambda}{3}$ y finalmente:

$$\boxed{Z_{12} = \eta_7 = \frac{\eta_0}{2}}\ (\Omega)$$

$$\boxed{\frac{W_{ref}}{W_{inc}}(\%) = |\rho_{12}|^2\cdot100\% = \left\{\rho_{12} = \frac{Z_{12}-\eta_1}{Z_{12}+\eta_1} = \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3}\right\} = \boxed{11'\hat{1}\ \%}}$$

D)



- $\rho_{67} = \frac{\eta_7-\eta_6}{\eta_7+\eta_6} = \frac{\frac{\eta_0}{2}-\frac{\eta_0}{3}}{\frac{\eta_0}{2}+\frac{\eta_0}{3}} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ Máximo del $\rho\varepsilon_x$ en discont 6-7.
  mínimo del $\rho\varepsilon_x$ " " 5-6.

- $\rho_{12} = \frac{-1}{3} \Rightarrow$ mínimo del $\rho\varepsilon_1$ en discont 1-2.

$Z_{min} = -n\frac{\lambda_1}{2} = -30n$ cm " $n = 0,1,2,3,\ldots$

↳ Posiciones de mínimos en medio 1.

$Z_{max} = -(2n'+1)\frac{\lambda_1}{4} = -(2n'+1)15$ cm " $n' = 0,1,2,3,\ldots$

↳ Posiciones de máximos en medio 1.

① $\boxed{E_{max_1} = 2\left(1+|\rho_{12}|\right) = \frac{8}{3}\ V/m}$ ¡¡OJO!! Este máximo se produce en $\hat{x}$.

$\boxed{E_{min_1} = 1\left(1-|\rho_{12}|\right) = \frac{2}{3}\ V/m}$ ¡¡OJO!! " mínimo " " " $\hat{y}$.

∞ $S_1 = \frac{1+|\rho_{12}|}{1-|\rho_{12}|} = 2$

⑦ Como se trata de ondas planas con incidencia normal:

$$\vec{E}_{t_7} = E_{0_7}\left(\hat{x} + j\tfrac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{-j\beta_7 z}\cdot e^{j\varphi_7}\ (V/m)$$

$$W_{t_7} = \frac{E_{0_7}^2\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot \eta_0/2} = W_{inc}\left(1-|\rho_{12}|^2\right) = \frac{4\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\eta_0}\left(1-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow \boxed{E_{0_7} = \frac{4}{3}\ (V/m)}$$

Como no hay onda reflejada en el medio ⑦: $\boxed{E_{max_7} = \frac{4}{3}\ V/m}$ $\boxed{E_{min_7} = \frac{2}{3}\ V/m}$

⑥ Observando el DOE⑥ anterior: $\boxed{E_{max_6} = \frac{4}{3}\ V/m}$

$$\boxed{E_{min_6}} = \frac{2/3}{S_6} = \frac{2/3}{\left(\frac{1+1/5}{1-1/5}\right)} = \frac{2/3}{6/4} = \boxed{\frac{4}{9}\ V/m}$$

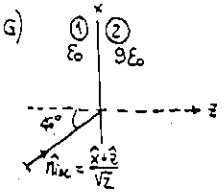
E) Ya calculado

F) Cuando el campo incidente tiene un máximo de 2V/m el máximo del medio ① es $\frac{8}{3}$ V/m, así para que el campo máximo del medio ① sea $3\cdot10^6$ V/m debe ser:

$$\begin{matrix} 2 & \longrightarrow & 8/3 \\ x & \longrightarrow & 3\cdot10^6 \end{matrix} \qquad x = \frac{6\cdot10^6}{8/3} = \frac{9}{4}\cdot10^6\ V/m \Rightarrow \vec{E}_{inc_{max}} = \frac{9}{4}10^6\left(\hat{x}+j\tfrac{1}{2}\hat{y}\right)\cdot e^{-j\beta_1 z}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

$$\boxed{W_{inc_{max}}} = \frac{\left(\frac{9}{4}\cdot10^6\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\eta_0} = \frac{81\cdot10^{12}}{32\cdot\eta_0}\left(\frac{5}{4}\right) = \boxed{8'4\cdot10^9\ W}$$

G)



$$\vec{E}_{inc}(F) = E_0\left[\left(\frac{\hat{x}-\hat{z}}{\sqrt{2}}\right) + j\tfrac{1}{2}\hat{y}\right]\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

Para que transmita $\frac{1}{48\pi}$ W) debe ser $E_0 = 2$ V/m.

Como el plano de incidencia es el xz la dirección ⊥ es $\hat{y}$ ⇒

$$\vec{E}_{inc_\perp} = j\hat{y}\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

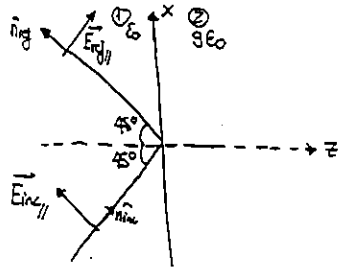
$$\vec{E}_{inc_{//}} = 2\left(\frac{\hat{x}-\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

Sabemos que: $\theta_{inc} = \theta_{ref} = 45° \Rightarrow \hat{n}_{ref} = \frac{\hat{x}-\hat{z}}{\sqrt{2}}$

$\theta_{inc_c} = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsen 3 \Rightarrow \nexists\, \theta_{ic}$

$\theta_{i_B} = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctg 3 = 71'565° \neq \theta_{inc} = 45° \Rightarrow$ No afecta $\rho_{//} \neq 0$.

Observando los campos $\vec{E}_{inc_\perp}$ y $\vec{E}_{inc_{//}}$ tenemos que:



Suponiendo conocidos $\rho_{//}$ y $\rho_\perp$:

$$\vec{E}_{ref_\perp} = \rho_\perp\cdot j\hat{y}\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

$$\vec{E}_{ref_{//}} = \rho_{//}\cdot 2\cdot\left(\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)$$

Así pues:

$$\boxed{\vec{E}_{ref}(F) = \left[\rho_{//}\cdot 2\cdot\left(\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\right) + j\,\rho_\perp\cdot\hat{y}\right]\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)}\cdot e^{j\varphi}\ (V/m)}$$

(26)

A) $f_0 = 16\ Hz$; $\bar{E} = (\sqrt{3}\hat{z} + \hat{y} + ja\hat{x}) \cdot e^{-j\beta(n_y \cdot y + n_z z)}$, $a \in \mathbb{R}^+$

$n_z > 0$

En general: $\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \hat{n} \cdot \bar{r}} = (\bar{E}_{0r} + j\bar{E}_{0i}) \cdot e^{-j\beta \hat{n} \cdot \bar{r}} \cdot e^{-\alpha \hat{n} \cdot \bar{r}}$

Identificando: $\alpha = 0\ (Np/m)$ $\beta = \beta$

$\hat{n} \cdot \bar{r} = n_y \cdot y + n_z \cdot z \Longrightarrow \hat{n} = n_y \hat{y} + n_z \hat{z}$

$\sqrt{n_y^2 + n_z^2} = 1$ Ec(1) ya que $\hat{n}$ tiene que ser unitario

Como es O.P. $\bar{E}_0 \cdot \hat{n} = 0 = n_y + \sqrt{3}\, n_z = 0$

$n_y = -\sqrt{3}\ n_z$! Ec(2)

$\hat{n} = \dfrac{-\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}}{2}$

¿Polarización?

$\bar{E}_{0r} = \sqrt{3}\ \hat{z} + \hat{y} \Longrightarrow |\bar{E}_{0r}| = 2\ (V/m)$

$\bar{E}_{0i} = a\ \hat{x} \longrightarrow |\bar{E}_{0i}| = |a| = a\ (V/m)$

$\longrightarrow$ Si $a = 0 \Longrightarrow \bar{E}_{0i} = \bar{0} \Longrightarrow$ Pol. lineal en $\dfrac{-\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}}{2}$

$\longrightarrow$ Si $a = 2$ Como $|\bar{E}_{0i}| = |\bar{E}_{0r}|$ y $\bar{E}_{0r} \perp \bar{E}_{0i}$ POL. CIRC.

$\longrightarrow$ Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$ ELÍPTICA

B) $\bar{H}(\bar{r}) = \dfrac{\hat{n} \times \bar{E}_{inc}}{\eta} = \ldots = \dfrac{-4\hat{x} + ja(\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z})}{2\eta} \cdot e^{-j\beta\left(\frac{z - \sqrt{3}y}{2}\right)}\ (A/m)$

$\bar{E}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left(E(\bar{r}) \cdot e^{j\omega_0 t}\right) = \ldots = (\sqrt{3}\hat{z} + \hat{y}) \cos\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{z - \sqrt{3}y}{2}\right)\right) - a\hat{x}\, \mathrm{sen}\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{2}\right)\right) \cdot (V/m)$

$\bar{H}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left(H(\bar{r}) \cdot e^{j\omega_0 t}\right) = \ldots = \dfrac{-2\hat{x}}{\eta} \cos\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{z - \sqrt{3}y}{2}\right)\right) - \dfrac{a}{\eta}\left(\dfrac{\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}}{2}\right) \mathrm{sen}\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{2}\right)\right)\ (V/m)$

$\vec{S}(r,t) = \bar{E}(\bar{r},t) \times \bar{H}(\bar{r},t) = \ldots = \dfrac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{\eta}\left[2 \cdot \cos^2\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{z - \sqrt{3}y}{2}\right)\right) + \dfrac{a^2}{2}\, \mathrm{sen}^2\left(\omega_0 t - \beta\left(\frac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{2}\right)\right)\right)$

observamos que $\forall t$ su dirección es: $\dfrac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{2}$

El valor que hace que $\bar{S}(\bar{r},t)$ no dependa del tiempo es $a = 2$ (CIRCULAR)

$\bar{S}(\bar{r},t)\big|_{a=2} = 2 \cdot \dfrac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}}{\eta}$

c) $a=1$

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = (\sqrt{3}\,\hat{z}+\hat{y})\, e^{-j\beta\left(\frac{z-\sqrt{3}y}{2}\right)}$$

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = j\hat{x}\cdot e^{-j\beta\left(\frac{z-\sqrt{3}y}{2}\right)}$$

Observamos que $\bar{E}_1(\bar{r}) \perp \bar{E}_2(\bar{r})$

$$W_{t_1} = \frac{\bar{E}_{01}\,\bar{E}_{01}^{*}}{2\eta_1} = \frac{2}{\eta}\ (W)$$

$$W_{t_2} = \frac{\bar{E}_{02}\cdot\bar{E}_{02}^{*}}{2\eta_2} = \frac{1}{2\eta}\ (W)$$

$$W_{TOT} = \frac{\bar{E}_{0TOT}\,\bar{E}_{0TOT}^{*}}{2\eta} = \frac{3+1+1}{2\eta} = \frac{5}{2\eta}$$

$\cancel{|\rho_{12}| = 1/2 = 1/4}$

1ª Pos $\dfrac{\varepsilon_{r_1}-16}{\varepsilon_{r_1}+16} = 1/2 \Rightarrow \varepsilon_{r_1} = 48 = \varepsilon_{r_5}$

2º Pos $\dfrac{16-\varepsilon_{r_1}}{16+\varepsilon_{r_1}} = 1/2 \Rightarrow \varepsilon_{r_1} = \dfrac{16}{3} = \varepsilon_{r_5}$

Observamos que $W_{TOT} = W_{t_1} + W_{t_2} \iff$ SON ORTOGONALES.

D) $\lambda_3 = \lambda_0 = \dfrac{c_0}{f} = 30\,cm \Rightarrow d_3 = \dfrac{\lambda_3}{4}$ (NO HA HABIDO SUERTE)

$$Z_{45} = \eta_5 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_3}}}$$

$$Z_{34} = \left\{\begin{array}{l}\lambda_4 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{4}} = 15\,cm \\ d_4 = \dfrac{\lambda_4}{4}\end{array}\right\} = \frac{\eta_4^2}{\eta_5} = \frac{\eta_0\sqrt{\varepsilon_{r_5}}}{4}$$

$$Z_{23} = \left\{d_3 = \frac{\lambda_3}{4}\right\} = \frac{\eta_3^2}{Z_{34}} = \frac{4\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_5}}}$$

$$Z_{12} = \left\{d_2 = \frac{\lambda_2}{4}\right\} = \frac{\eta_2^2}{Z_{23}} = \frac{\left(\frac{\eta_0^2}{4}\right)}{\frac{4\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_5}}}} = \frac{\eta_0\sqrt{\varepsilon_{r_5}}}{16}\ (\Omega)$$

$$\rho_{12} = \frac{Z_{12}-\eta_1}{Z_{12}+\eta_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_5}} - 16}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_5}} + 16} \qquad Ec(1)$$

$$S_1 = 3 \Rightarrow |\rho_{12}| = \frac{S_1-1}{S_1+1} = 1/2 \qquad Ec(2)$$

$$6\,(V/m) = \frac{a\cdot(1+|\rho_{12}|)}{2\,(1-|\rho_{12}|)} \Rightarrow a = 4\ V/m$$

$|\sqrt{3}\hat{z}+\hat{y}|$

¿ε_{r_1} y ε_{r_5}?

$$|\rho_{12}| = 1/2 = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_5}}-16}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_5}}+16}\right|$$

Como se trata de ondas planas e inc normal se conserva la polariz en el último medio

$$\bar{E}_{t_5} = E_{0_5}\left(\sqrt{3}\hat{z}+y+j4\hat{x}\right)e^{-j\beta_5(\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

Como este es el único campo del medio (5):

$$E_{máx_5} = 2\sqrt{3} = 4E_{0_5} \Rightarrow E_{0_5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos que

$$W_{t_5} = W_{inc}\left(1-|\rho_{12}|^2\right) \qquad \frac{E_{0_5}^2(3+1+16)}{2\eta_5} = \frac{3+1+16}{2\eta_1}\left(1-|1/2|^2\right)$$

$\Rightarrow$ Operando con $E_{0_5} = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_5}$ Ec(3)

ENERO 2008

Segundo Ejercicio (40 %)

A) Escriba la amplitud compleja del campo magnético de una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 5 GHz que se propaga en el vacío en dirección z, tiene polarización elíptica positiva con relación axial 2, transmite una potencia de $1/(3\pi)$ vatios, y cuyo campo magnético alcanza el valor máximo en dirección x.

Otra OPHM de la misma frecuencia y polarización lineal según el eje x se propaga en la misma dirección que la onda anterior y alcanza en un punto del espacio el valor máximo de campo eléctrico en el mismo instante en que el campo eléctrico de la onda anterior es mínimo. Obtenga la expresión del campo eléctrico de esta segunda onda en los siguientes casos:

- La superposición de las ondas presenta polarización lineal.
- La superposición de las mismas ondas presenta polarización circular.

B) La primera onda plana, con polarización elíptica, definida en el apartado anterior incide perpendicularmente sobre una lámina dieléctrica sin pérdidas de espesor d y permitividad relativa ε_r situada sobre un medio desconocido e indefinido en dirección z (figura 1). Sabiendo que existe un nulo de campo eléctrico en z=-2.25 cm., indique de qué medio se trata y calcule el valor de la impedancia en la superficie de la lámina ($z=0$). Obtenga la expresión de esta misma impedancia en función de la longitud eléctrica de la lámina y su permitividad.
Por otra parte se conoce que eliminando el medio 3 (figura 2) el coeficiente de reflexión en la superficie de la lámina vale: $\rho_1(z=0)=-0.4-0.2j$. Calcule la permitividad relativa ε_r y el espesor mínimo d. Obtenga para este caso el valor máximo de campo eléctrico que se alcanza en cada uno de los medios.

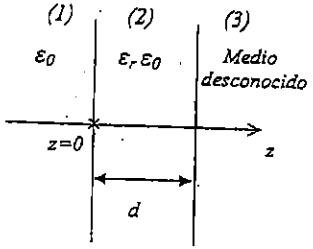


Fig. 1

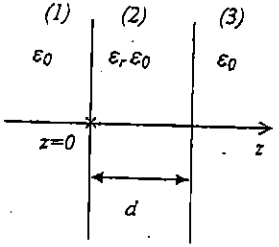


Fig. 2

EJERCICIO ② 2008

1

A)

OPHM ; $f=5\,GHz$; vacío ; $\hat{n}=\hat{z}$; $(\vec{E}_{0r}\times\vec{E}_{0i})\cdot\hat{n}<0 \Rightarrow$ Por tanto $(\hat{y}\times\hat{x})\cdot\hat{z}<0$

$r=2$; $W_t=\frac{1}{3\pi}\,(W)$; H_{max} en $\hat{x}$

$$\vec{H}_1 = H_{01}\left(\frac{1}{r}\hat{y}+j\hat{x}\right)\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\beta_0 z} = H_{01}\left(\frac{1}{2}\hat{y}+j\hat{x}\right)\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\frac{2\pi f}{c}z}$$

$$W_t=\frac{1}{3\pi}=\frac{1}{2}\eta_0\cdot|\vec{H}_0|^2=\frac{1}{2}\,120\pi\cdot H_{01}^2\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\Rightarrow H_{01}=\sqrt{\frac{8}{3\pi\cdot 120\pi\cdot 5}}=0'021\ (A/m)$$

$$\boxed{\vec{H}_1=0'021\cdot\left(\frac{1}{2}\hat{y}+j\hat{x}\right)\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\frac{100\pi}{3}z}}\ (A/m)$$

El campo eléctrico asociado al campo magnético anterior es:

$$\vec{E}_1=\eta\left(\vec{H}_1\times\hat{n}\right)=120\pi\cdot 0'021\cdot\left(\frac{1}{2}\hat{x}-j\hat{y}\right)\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\frac{100\pi}{3}z}=$$
$$=7'92\cdot\left(\frac{1}{2}\hat{x}-j\hat{y}\right)\cdot e^{j\varphi_1}\cdot e^{-j\frac{100\pi}{3}z}$$

Su valor instantáneo es:

$$\boxed{\vec{E}_1(\vec{r},t)=3'96\,\hat{x}\cdot\cos\left(\omega_0 t-\frac{100\pi}{3}z+\varphi_1\right)+7'92\cdot\hat{y}\cdot\operatorname{sen}\left(\omega_0 t-\frac{100\pi}{3}z+\varphi_1\right)}\ (V/m)$$

El campo eléctrico de la segunda onda es:

$$\vec{E}_2=E_{02}\cdot\hat{x}\cdot e^{j\varphi_2}\cdot e^{-j\beta z}$$

$$\boxed{\vec{E}_2(\vec{r},t)=E_{02}\cdot\hat{x}\cdot\cos\left(\omega_0 t-\frac{100\pi}{3}z+\varphi_2\right)}\ (V/m)$$

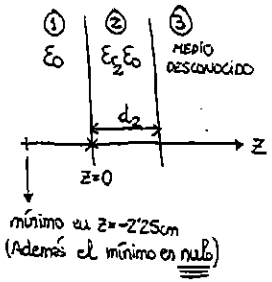
Para que alcance el máximo cuando la onda anterior alcance el mínimo debe ser $\boxed{\varphi_1=\varphi_2}$ ó $\boxed{\varphi_1=\varphi_2\pm\pi}$

1er caso: Para que su superposición sea una polarización lineal debe ser $\boxed{E_{02}=-3'96}$ y $\boxed{\varphi_1=\varphi_2}$ ó $\boxed{E_{02}=3'96}$ y $\boxed{\varphi_1=\varphi_2\pm\pi}$. La superposición saldrá lineal en $\hat{y}$.

2º caso: Para que sea circular $\boxed{E_{02}=3'96}$ y $\boxed{\varphi_1=\varphi_2}$ ó $\boxed{E_{02}=-3'96}$ y $\boxed{\varphi_1=\varphi_2\pm\pi}$

B) $\vec{E}_{inc} = 7'92\left(\frac{1}{2}\hat{x} - j\hat{y}\right)\cdot e^{-j\sqrt{3}\,z}\cdot e^{j\varphi_1}$ (V/m)

FIGURA 1:



b1) ¿Medio desconocido? ¿Valor de $Z(z=0)$?

Como la onda incidente tiene polarización elíptica y en $z=-2'25$cm se mide un nulo de campo eléctrico debe ser $|\rho_{12}|=1$, es decir se debe producir reflexión total, por tanto el medio desconocido es un conductor perfecto.

$E_{min_1} = \frac{7'92}{2}\left(1-|\rho_{12}|\right) = 0 \Leftrightarrow |\rho_{12}|=1 \Leftrightarrow$ REFLEXIÓN TOTAL $\Leftrightarrow$ CONDUCTOR PERFECTO.

Para calcular $Z(z=0) = Z_{12} = \eta_1\cdot\frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = \eta_0\,\frac{1+1\cdot e^{j\varphi_{12}}}{1-1\cdot e^{j\varphi_{12}}}$ sólo debemos obtener la fase de ρ_{12}, es decir φ_{12}.

$\lambda_1 = \lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{3\cdot 10^{10}}{5\cdot 10^9} = 6$cm

Como el mínimo está en $z=-2'25$ cm sabemos que en $z=0$ no va a existir ni un mínimo ($\varphi_{12}\neq\pi$) ni un máximo ($\varphi_{12}\neq 0$) por tanto: debe ser:

$$\cos(2\beta_1 z+\varphi_{12})\Big|_{z=-2'25cm} = -1 \Rightarrow 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot(-2'25cm)+\varphi_{12} = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \pi + \frac{4\pi}{6}\cdot 2'25 = \pi + \frac{3\pi}{2} \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{Z_{12} = \eta_0\,\frac{1+e^{j\pi/2}}{1-e^{j\pi/2}} = \eta_0\,\frac{1+j}{1-j} = j\eta_0}\ (\Omega)$$

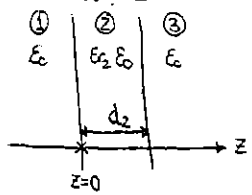
b2) ¿Expresión de Z_{12} en función de ε_r y de la longitud eléctrica de la lámina?

NOTA TEÓRICA: La longitud eléctrica es: $\ell_e = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\ell$, por tanto la longitud eléctrica de la lámina es: $\ell_{e_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot d_2$

$$\boxed{Z_{12} \underset{\eta_3=0}{=} \eta_2\cdot\frac{0+j\eta_2\cdot sen(\ell_{e_2})}{\eta_2\cdot\cos(\ell_{e_2})+j0} = j\eta_2\cdot tg(\ell_{e_2}) = j\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cdot tg(\ell_{e_2})}\ (\Omega)$$

FIGURA 2:

b3)



Ahora $\rho'_{12} = -0'4-j0'2 \Rightarrow \boxed{Z'_{12}} = \eta_0\,\frac{1+\rho'_{12}}{1-\rho'_{12}} = \eta_0\,\frac{1-0'4-j0'2}{1+0'4+j0'2} = \eta_0\,\frac{0'6-j0'2}{1'4+j0'2} =$

$$= \boxed{\eta_0\cdot\frac{3-j}{7+j}}\ (\Omega)$$

Por otro lado: $\boxed{Z'_{12}} = \eta_2\cdot\frac{\eta_0\cdot\cos(\ell_{e_2})+j\eta_2\,sen(\ell_{e_2})}{\eta_2\cdot\cos(\ell_{e_2})+j\eta_0\,sen(\ell_{e_2})} = \boxed{\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}+j\,tg(\ell_{e_2})}{1+j\sqrt{\varepsilon_{r_2}}\cdot tg(\ell_{e_2})}}\ (\Omega)$

Así pues para determinar ε_{r_2} y ℓ_{e_2} tenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$j\eta_0 = j\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\,tg(\ell_{e_2}) \Rightarrow \boxed{tg(\ell_{e_2}) = \sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\ [\text{Ec.(1)}]$$

$$\eta_0\,\frac{3-j}{7+j} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}+j\,tg(\ell_{e_2})}{1+j\sqrt{\varepsilon_{r_2}}\cdot tg(\ell_{e_2})} \Rightarrow \boxed{\frac{3-j}{7+j} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}+j\,tg(\ell_{e_2})}{1+j\sqrt{\varepsilon_{r_2}}\cdot tg(\ell_{e_2})}}\ [\text{Ec.(2)}]$$

Sustituimos la ec.1 en la ec.2 y obtenemos:

$$\frac{3-j}{7+j} = \frac{1+j}{1+j\varepsilon_{r_2}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_2} = 3} \Rightarrow tg(\ell_{e_2}) = \sqrt{3} \Rightarrow \ell_{e_2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot d_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d_2} = \frac{\lambda_2}{6} = \frac{\lambda_0}{6\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} = \frac{(c_0/f)}{6\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\,a}$$

b4) ¿E_{max} en los 3 medios de la FIGURA ②?

MEDIO ①: $\boxed{E_{max_1}} = 7'92\left(1+|\rho'_{12}|\right) = 7'92\left(1+|-0'4-j0'2|\right) = \boxed{11'462\ V/m}$

MEDIO ③: Como se trata de incidencia normal: $\vec{E}_{t_3} = E_{0_3}\left(\frac{1}{2}\hat{x}-j\hat{y}\right)\cdot e^{-j\beta_3 z}\cdot e^{j\varphi_3}$ (V/m)

$$P_{t_3} = P_{inc}\left(1-|\rho'_{12}|^2\right) \Rightarrow \frac{E_{0_3}^2\left(\frac{1}{4}+1\right)}{2\cdot\eta_0} = \frac{(7'92)^2\left(\frac{1}{4}+1\right)}{2\cdot\eta_0}\left(1-|-0'4+j0'2|^2\right) \Rightarrow E_{0_3} = 7'083\ V/m$$

Como en el medio 3 no hay onda reflejada $\Rightarrow \boxed{E_{max_3} = 7'083\ V/m}$

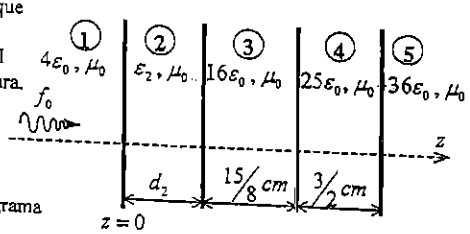
MEDIO ②: $\rho_{23} = \frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3+\eta_2} = \frac{1-1/\sqrt{3}}{1+1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow$ Como es positivo $\varphi_{12}=0 \Rightarrow$ El máximo del MOF$_2$ se alcanza en la discontinuidad 2-3 por tanto $\boxed{E_{max} = 7'083\ V/m}$

JUNIO 2008.

Ejercicio 2 (50 %)

Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia f_0 y que trasmite potencia Po (W) se propaga en el primer medio de permitividad dieléctrica relativa 4, e incide en dirección normal sobre la estructura de medios dieléctricos sin pérdidas de la figura. Se mide el diagrama de onda estacionaria en el primer medio que presenta las siguientes características:

- Valor del coeficiente de onda estacionaria 75/64.
- Un mínimo del diagrama de onda estacionaria en z= -30 cm.
- Distancia entre un mínimo y un máximo consecutivos del diagrama de onda estacionaria es de 15/4 cm.



Determine:

a) El valor de la potencia transmitida al medio 5.

b) El valor de la permitividad dieléctrica ε_2 del medio 2 y su espesor d_2 (valor mínimo).

c) Dibuje cualitativamente el diagrama de onda estacionaria en todos los medios.

d) Determine la relación entre los valores máximo y mínimo del campo en la estructura (considere que la onda incidente tiene polarización circular).

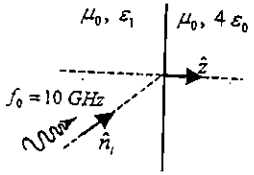
Nota: No realice operaciones con decimales. Para mayor sencillez, maneje los valores en forma de fracción.

Una onda plana homogénea monocromática de frecuencia 10 GHz y cuyo campo eléctrico viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = E_0(\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y})e^{-j\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}x - y + \sqrt{3}z)}$$

(dimensiones de x, y, z dadas en cm), se propaga en el medio 1, e incide sobre un medio de permitividad 4 ε_0 tal y como se indica en la figura. Determine:

a) la permitividad dieléctrica del medio 1,
b) Ángulos de incidencia y transmitido,
c) Polarización de la onda incidente,
d) Las amplitudes de los campos eléctricos de la onda reflejada y transmitida. (nota: considere conocidos los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión de Fresnel).



EJERCICIO 2 JUNIO 2008

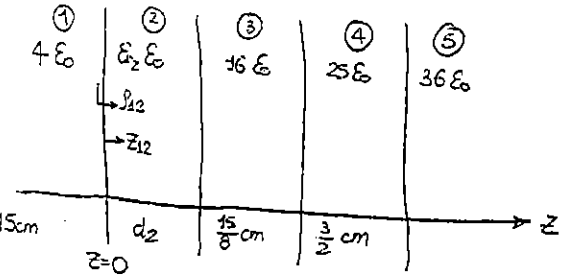
DATOS: f_0

P_0 (W)

$S_1 = \frac{75}{64}$

mínimo en z=-30cm

$\frac{\lambda_1}{4} = \frac{15}{4}$ cm $\Rightarrow \lambda_1$ 15cm



Como $\lambda_1 = 15\text{cm} = \frac{\lambda_0}{4} \Rightarrow \lambda_0 = 30\text{cm} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{c_0}{\lambda_0} = \frac{3\cdot 10^{10}}{30} = 1\text{GHz}}$

a) $\boxed{P_{t_5}} = P_{inc}(1 - |\rho_{12}|^2) = \left\{ \begin{array}{l} P_{inc} = P_0 \\ |\rho_{12}| = \frac{S_1 - 1}{S_1 + 1} = \frac{75-64}{75+64} = \frac{11}{139} \end{array} \right\} = \boxed{P_0 \cdot 0'9937}$ W

b) $|\rho_{12}| = \frac{11}{139}$

Como hay un mínimo en z=-30cm y $\frac{\lambda_1}{2} = 7'5$ cm, también hay un mínimo en $z=0^-$, por tanto:

$$\rho_{12} = \frac{-11}{139} \Rightarrow \left[Z_{12} = \eta_1 \frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1 - \frac{11}{139}}{1 + \frac{11}{139}} = \frac{\eta_0}{2} \cdot \frac{64}{75} = \boxed{\eta_0 \cdot \frac{32}{75}} (\Omega) \right.$$

Ahora de derecha a izquierda.

$$Z_{45} = \frac{\eta_0}{\sqrt{36}} = \frac{\eta_0}{6}$$

$$Z_{34} = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_4 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{25}} & 6\text{cm} \\ d_4 = \frac{3}{2}\text{cm} = \frac{\lambda_4}{4} & \end{array} \right\} = \frac{\eta_4^2}{\eta_0/6} = \eta_0 \cdot \frac{6}{25}$$

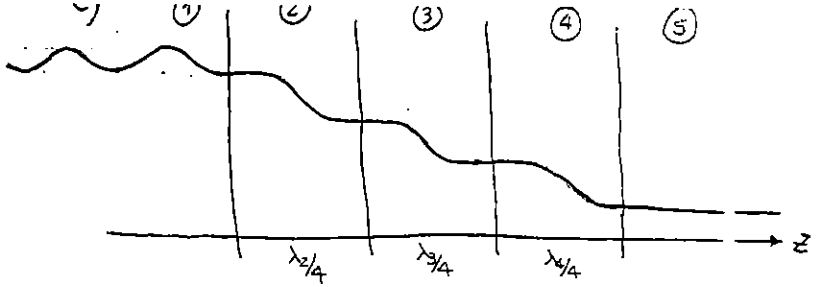
$$Z_{23} = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_3 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{16}} & 7'5\text{cm} = \frac{15}{2}\text{cm} \\ d_3 = \frac{15}{8}\text{cm} = \frac{\lambda_3}{4} & \end{array} \right\} = \frac{\eta_3^2}{\eta_0 \frac{6}{25}} = \eta_0 \cdot \frac{25}{96}$$

Como $Z_{12} = \eta_0 \cdot \frac{32}{75}$ debe ser $\cos(\beta_2 d_2) = 0$

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{\eta_0 \cdot \frac{25}{96}} = \eta_0 \frac{96}{25\varepsilon_{r_2}} = \eta_0 \cdot \frac{32}{75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_2} = 9} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 9\varepsilon_0 \text{ F/m}}$$

$$\boxed{d_2 = \frac{\lambda_2}{\ldots} = \frac{30}{\ldots} = \frac{15}{\ldots}\text{cm}}$$



MEDIO ⑤: Medio indefinido donde no hay onda reflejada. (el DOE$_5$ es una línea horizontal)

MEDIO ④: $\rho_{45} = \dfrac{Z_{45}-\eta_4}{Z_{45}+\eta_4} = \dfrac{\eta_5-\eta_4}{\eta_5+\eta_4} = \dfrac{\eta_6/5-\eta_6/5}{\eta_6/5+\eta_6/5} = \dfrac{5-6}{5+6} = -\dfrac{1}{11} \Rightarrow \varphi_{45} = \pi \Rightarrow$ mínimo en la discontinuidad 4-5.

$d_4 = \dfrac{\lambda_4}{4}$

MEDIO ③: $\rho_{34} = \dfrac{Z_{34}-\eta_3}{Z_{34}+\eta_3} = \dfrac{\frac{6}{25}-\frac{1}{4}}{\frac{6}{25}+\frac{1}{4}} = \dfrac{24-25}{24+25} = \dfrac{-1}{49} \Rightarrow \varphi_{34} = \pi \Rightarrow$ mínimo en la discontinuidad 3-4.

$d_3 = \dfrac{\lambda_3}{4}$

MEDIO ②: $\rho_{23} = \dfrac{Z_{23}-\eta_2}{Z_{23}+\eta_2} = \dfrac{\frac{25}{96}-\frac{1}{3}}{\frac{25}{96}+\frac{1}{3}} = \dfrac{25-32}{25+32} = \dfrac{-7}{57} \Rightarrow \varphi_{23} = \pi \Rightarrow$ mínimo en la discontinuidad 2-3

$d_2 = \dfrac{\lambda_2}{4}$

MEDIO ①: Ya sabemos que $\rho_{12} = \dfrac{-11}{139}$, por tanto el DOE es el indicado.

d) Observamos por el DOE anterior que el valor máximo del campo en toda la estructura se produce en el medio ①, mientras que el mínimo se produce en el medio ⑤; calculamos su relación sabiendo que la incidente es circular:

$\vec{E}_{inc} = E_0(\hat{x}+j\hat{y})\cdot e^{-j\beta_1 z}$ (V/m) [Esta podría ser una expresión del campo incidente]

$\boxed{E_{max_1} = E_0(1+|\rho_{12}|) = E_0\cdot\dfrac{150}{139}}$ (V/m)

Como la incidencia es normal el campo transmitido al medio ⑤ conserva la polarización de la incidente:

$\vec{E}_{t_5} = E_{0_5}(\hat{x}+j\hat{y})\cdot e^{-j\beta_5 z}$ (V/m)

El campo mínimo del medio ⑤ es E_{0_5} ya que en el medio ⑤ no hay onda reflejada.

La relación entre E_0 y E_{0_5} la hacemos por potencias:

$P_{t_5} = P_{inc}(1-|\rho_{12}|^2) \Rightarrow \dfrac{E_{0_5}^2\cdot(1+1)}{2\cdot\eta_5} = \dfrac{E_0^2(1+1)}{2\cdot\eta_1}(1-|\rho_{12}|^2) \Rightarrow E_5 = E_0\cdot\dfrac{80}{139} \Rightarrow$ Finalmente: $\boxed{\dfrac{E_{max_1}}{E_{min_5}} = \dfrac{15}{8}}$

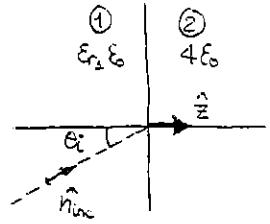
DATOS DE INCIDENCIA OBLICUA:

OPHM

$f_0 = 10$ GHz

$\vec{E} = E_0(\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y})\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}x-y+\sqrt{3}z)}$

x, y, z en cm. $\Rightarrow \beta$ en cm^{-1}



a) Identificamos la expresión dada con $\vec{E} = \vec{E_0}\cdot e^{-j\beta\hat{n}\cdot\vec{r}}\cdot e^{-\alpha\hat{n}\cdot\vec{r}}$

Observamos que: · $\alpha = 0$

· Como $\hat{n} = \dfrac{n_x\hat{x}+n_y\hat{y}+n_z\hat{z}}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$ y $\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ obtenemos: $\hat{n} = \dfrac{\sqrt{2}\hat{x}-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}}{\sqrt{6}}$

· $\beta = \dfrac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{6}$ cm^{-1} $\Rightarrow \beta = \dfrac{200\pi\cdot\sqrt{6}}{3}$ (m^{-1})

Como $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_0} = \dfrac{2\pi\cdot 10^{10}}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{\varepsilon_1} = \dfrac{200\pi}{3}\cdot\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 6}$

b) $\hat{n}_{inc}\cdot\hat{z} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta_i \Rightarrow \boxed{\theta_i = 45^\circ}$

Por la ley de Snell: $n_1\cdot\operatorname{sen}\theta_i = n_2\cdot\operatorname{sen}\theta_t \Rightarrow \boxed{\theta_t} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{n_1\operatorname{sen}\theta_i}{n_2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) =$

c) Suponiendo que E_0 es real, la onda incidente no tiene $\vec{E_{0_i}}$ por tanto la polarización es lineal en la dirección $\dfrac{\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y}}{\sqrt{3}}$

d) Veamos cuál es el plano de incidencia: $\hat{n}_e\times\hat{n}_{inc} = \hat{z}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}\hat{x}-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y}}{\sqrt{6}}$

Por tanto la dirección $\perp$ al plano de incidencia es $\hat{u}_\perp = \dfrac{\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y}}{\sqrt{3}}$, es decir, que el campo incidente no tiene componente paralela:

$\vec{E}_{inc_{/\!/}} = \vec{0}$

$\vec{E}_{inc_\perp} = E_0(\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y})\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}x-y+\sqrt{3}z)} \Rightarrow$ Su amplitud es: $\vec{E}_{0_{inc_\perp}} = E_0(\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y})$

Por tanto las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida suponiendo conocidos $\rho_\perp$ y $t_\perp$ son:

$\vec{E}_{0_{rej}} = \rho_\perp\cdot E_0\cdot(\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y}) \Rightarrow |\vec{E}_{0_{rej}}| = \rho_\perp\cdot E_0\cdot\sqrt{3}$ (V/m)

$\vec{E}_{0_{trans}} = t_\perp\cdot E_0(\hat{x}+\sqrt{2}\hat{y}) \Rightarrow |\vec{E}_{0_{trans}}| = t_\perp\cdot E_0\cdot\sqrt{3}$ (V/m)

1ª PARTE

I.39 $\vec{H} = \left[(a_1\hat{x}+b_1\hat{y}+c_1\hat{z}) + j(a_2\hat{x}+b_2\hat{y}+c_2\hat{z})\right]\cdot e^{-j\pi y}$ (A/m) (y en metros)

Como debe ser O.P.: $\vec{H_0}\cdot\hat{n}=0 \Rightarrow \vec{H_0}\cdot\hat{y}=0 \Rightarrow b_1+jb_2=0 \begin{cases} b_1=0 \\ b_2=0 \end{cases}$

$\vec{H_{0r}} = a_1\hat{x}+c_1\hat{z}$

$\vec{H_{0i}} = a_2\hat{x}+c_2\hat{z}$

$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{H}\cdot e^{j\omega t}\right) = (a_1\hat{x}+c_1\hat{z})\cdot\cos(\omega t-\pi y) - (a_2\hat{x}+c_2\hat{z})\cdot \mathrm{sen}(\omega t-\pi y)$

$\vec{H}(y=0,t=0) = a_1\hat{x}+c_1\hat{z} \Rightarrow$ Para que sea mínimo y se encuentre en $\hat{x}-\hat{z}$ debe ser:

$a_1=-c_1 \Rightarrow \boxed{\vec{H_{0r}} = a_1(\hat{x}-\hat{z})}$

Para que ese campo sea mínimo, debe ser máximo en $a_2\hat{x}+c_2\hat{z}$ y por tanto $\vec{H_{0r}} \perp \vec{H_{0i}}$:

$a_2=c_2 \Rightarrow \boxed{\vec{H_{0r}} = a_1(\hat{x}-\hat{z})}$ y $\boxed{\vec{H_{0i}} = a_2(\hat{x}+\hat{z})}$.

Como la relación axial es 3: $\dfrac{|a_2|\sqrt{2}}{|a_1|\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow \boxed{|a_2| = 3|a_1|}$ Suponemos ambos positivos y comprobamos al final el sentido de giro.

Así pues: $\vec{H} = \left[a_1(\hat{x}-\hat{z}) + j\,a_2(\hat{x}+\hat{z})\right]\cdot e^{-j\pi y} = a_1\left[(\hat{x}-\hat{z}) + j\,3(\hat{x}+\hat{z})\right]\cdot e^{-j\pi y}$

Para que transmita W_0: $W_0 = \frac{1}{2}\eta\cdot|\vec{H_0}|^2 = \frac{1}{2}\cdot\eta_0\cdot a_1^2\cdot(\sqrt{2})^2(1+9) = a_1^2\cdot 120\pi\cdot 10 = W_0$

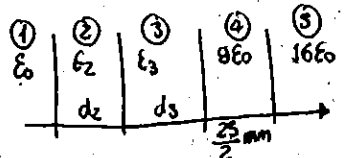
$\boxed{a_1} = \pm\sqrt{\dfrac{W_0}{1200\pi}} = \boxed{\dfrac{\pm\sqrt{W_0}}{20\sqrt{\pi 3}}}$ (A/m)

Así pues: $\boxed{\vec{H} = \dfrac{\sqrt{W_0}}{20\sqrt{\pi 3}}\left[(\hat{x}-\hat{z}) + j\,3(\hat{x}+\hat{z})\right]\cdot e^{-j\pi y}}$ (A/m)

Comprobemos el sentido de giro: $(\vec{H_{0i}}\times\vec{H_{0r}})\cdot\hat{n} = \dfrac{9W_0}{400\pi}\cdot 2\hat{y}\cdot\hat{y} > 0 \Rightarrow \oplus$ CORRECTO.

Identificando: $\boxed{\hat{n}=\hat{y}}$ y $\beta=\pi=\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{f_0 = \dfrac{\pi\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi} = 1'5\cdot 10^8 = 150\ \mathrm{MHz}}$

2ª PARTE: $f_0 = 2$ GHz



$\boxed{\lambda_0 = \dfrac{c_0}{f} = \dfrac{3\cdot 10^{11}}{2\cdot 10^9} = 150\ \mathrm{mm}}$

$\boxed{Z_{34} = \begin{cases} \lambda_4 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{9}} = 50\mathrm{mm} \\ d_4 = \dfrac{25}{2}\mathrm{mm} = \dfrac{50}{4}\mathrm{mm} = \dfrac{\lambda_4}{4} \end{cases} = \dfrac{\eta_4^2}{\eta_3} = \dfrac{4\eta_0}{9}} \Rightarrow Z_{23} = \eta_3\cdot\dfrac{Z_{34}\cdot\cos(\beta_3 d_3) + j\,\eta_3\,\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3\cos(\beta_3 d_3) + j\,Z_{34}\cdot\mathrm{sen}(\beta_3 d_3)} \Rightarrow$ PARA QUE ESTA EXPRESIÓN SEA INDEPENDIENTE DE d_3 DEBE SER $\eta_3 = Z_{23}$

$\eta_3 = \dfrac{4\eta_0}{9} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_3}} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_3} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_3 = \dfrac{81}{16}}$

$Z_{12} = \eta_2\cdot\dfrac{\eta_3\cdot\cos(\beta_2 d_2) + j\,\eta_2\,\mathrm{sen}(\beta_2 d_2)}{\eta_2\cos(\,''\,) + j\,\eta_3\,\mathrm{sen}(\beta_2 d_2)} \Rightarrow$ Para tener total debe ser $\rho_{12}=0 \Rightarrow Z_{12} = \eta_1 = \eta_0$ (Ω)

Debe ser: $\cos(\beta_2 d_2) = 0$

$\rightarrow Z_{12} = \dfrac{\eta_2^2}{\eta_3} = \dfrac{\eta_0}{\varepsilon_{r2}}\cdot\dfrac{9}{4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r2} = \dfrac{9}{4}}$

$\rightarrow \boxed{d_{2\,min} = \dfrac{\lambda_2}{4} = \dfrac{\lambda_0}{4\sqrt{\frac{9}{4}}} = \dfrac{\lambda_0}{6} = \dfrac{150}{6}\mathrm{mm} = 25\ \mathrm{mm}}$

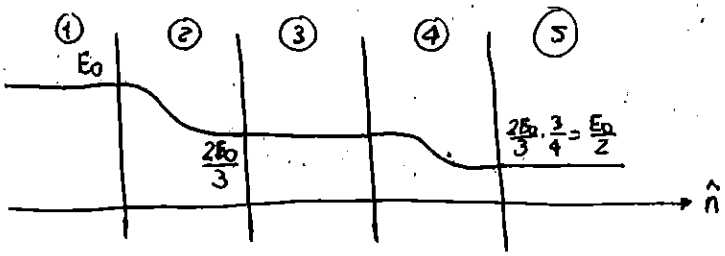
CÁLCULO DE S EN TODOS LOS MEDIOS

$$S_5 = 1;\ S_1 = 1;\ S_3 = 1;\ \boxed{S_4} = \frac{1+|\rho_{45}|}{1-|\rho_{45}|} = \left\{ \rho_{45} = \frac{\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{3}}{\frac{\eta_0}{4} + \frac{\eta_0}{3}} = \frac{3-4}{3+4} = \frac{-1}{7} \right\} = \frac{1+1/7}{1-1/7} = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{S_2} = \frac{1+|\rho_{23}|}{1-|\rho_{23}|} = \left\{ \rho_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} = \frac{4\eta_0/9 - \frac{2\eta_0}{3}}{4\eta_0/9 + \frac{2\eta_0}{3}} = \frac{4-6}{4+6} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5} \right\} = \frac{1+1/5}{1-1/5} = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$\eta_2 = \eta_3$

DIBUJO DEL COE:



Como la onda incidente tiene polarización lineal:

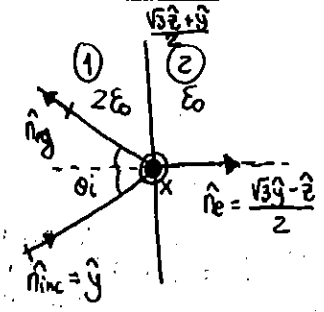
$\vec{E}_{inc} = E_0 \cdot \vec{u} \cdot e^{-j\beta_1(\hat{n}\cdot\vec{r})}$ y por tanto el COE cualitativamente será;

Además la onda trx al medio 5 tendrá: $\vec{E}_{t5} = \frac{E_0}{2} \cdot \vec{u} \cdot e^{-j\beta_5(\hat{n}\cdot\vec{r})}$

OBSERVAMOS QUE EL MEDIO QUE LIMITA POR LOS VALORES DE LOS CAMPOS DE RUPTURA ES EL MEDIO 5.

Así pues: $E_{t5_{max}} = 10^6 \cdot \vec{u} \cdot e^{-j\beta_5(\hat{n}\cdot\vec{r})} \Rightarrow \boxed{W_{t5_{max}} = \frac{10^{12}}{2\cdot\eta_5} = \frac{10^{12}}{60\pi}}$ (W)

$\boxed{3^a \text{ PARTE}}$ $\vec{E}_{inc} = (1+j)\hat{x} \cdot e^{-j\pi y}$ (V/m)



a) $\hat{n}_e \cdot \hat{n}_{inc} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta_{inc} \Rightarrow \boxed{\theta_{inc} = 30^\circ} = \theta_{rg}$

Observamos que $\boxed{\hat{u}_\perp = \frac{\hat{n}_e \times \hat{n}_{inc}}{|\hat{n}_e \times \hat{n}_{inc}|} = \hat{x}} \Rightarrow$ En el dibujo es saliente al papel.

Para ver el eje vertical: $\hat{x} \times \hat{n}_e = \frac{\sqrt{3}\hat{z}+\hat{y}}{2}$

Así pues: $\boxed{\hat{n}_{rg}} = \cos(30^\circ) \cdot \left(\frac{\hat{z}-\sqrt{3}\hat{y}}{2}\right) + \operatorname{sen}(30^\circ)\left(\frac{\sqrt{3}\hat{z}+\hat{y}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\hat{z} - 3\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z} + \hat{y}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}\hat{z}-\hat{y}}{2}}$

b) Por Snell de la refracción: $\boxed{\theta_t} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_{inc}}{n_2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 1/2}{1}\right) = \boxed{45^\circ} \Rightarrow \hat{n}_t = \ldots\ldots$

Observamos que $\vec{E}_{inc} = \vec{E}_{inc_\perp}$ ya que $\hat{u}_\perp = \hat{x} \Rightarrow$

$$\vec{E}_{rg} = \vec{E}_{rg_\perp} = \rho_\perp \cdot (1+j)\hat{x} \cdot e^{-j\pi(\hat{n}_r\cdot\vec{r})} = \rho_\perp \cdot (1+j)\hat{x} \cdot e^{-j\pi\left(\frac{\sqrt{3}z-y}{2}\right)} \text{ (V/m)}$$

$$\vec{E}_{trans} = \vec{E}_{trans_\perp} = t_\perp (1+j)\hat{x} \cdot e^{-j\beta_2(\hat{n}_t\cdot\vec{r})} = t_\perp (1+j)\hat{x} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\hat{n}_t\cdot\vec{r})} \text{ (V/m)}$$

$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \beta_1/\sqrt{2} =$

I.23

A) En general: $\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{E}_{or} + j\vec{E}_{oi}) \cdot e^{-j\beta_o \hat{n}\cdot\vec{r}} \cdot e^{-\alpha \hat{n}\cdot\vec{r}} \cdot e^{j\varphi}$; (V/m)

Siendo: φ fase arbitraria.

$\alpha = 0$ (vacío)

$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f}{c_o} = 20\pi$ (rad/m)

$\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{r} = z$

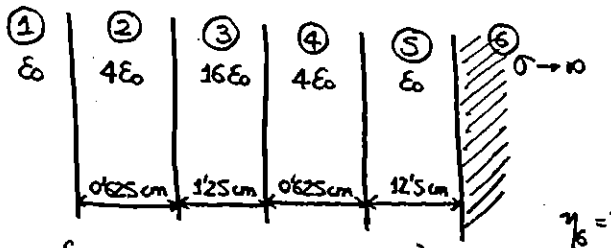
$\vec{E}_o = 2\left(\hat{y} + j\frac{1}{2}\hat{x}\right)$

$(\vec{E}_{oi} \times \vec{E}_{or})\cdot\hat{n} = (2\hat{z})\cdot\hat{z} = 2 > 0$ Positiva.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = 2\left(\hat{y} + j\frac{1}{2}\hat{x}\right)\cdot e^{-j20\pi z} \cdot e^{j\varphi} \text{ ; (V/m)}}$$

$$\boxed{W_t} \underset{\alpha=0}{=} \frac{|\vec{E}_o|^2}{2\cdot\eta} = \frac{4\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot 120\pi} = \frac{5}{240\pi} = \boxed{6'63 \text{ mW}}$$

B)



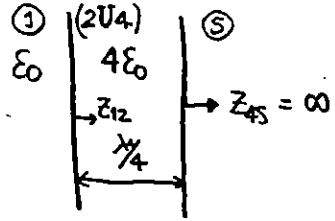
$$\boxed{Z_{45}} = \left\{\begin{array}{l} \lambda_5 = \lambda_o = \frac{c_o}{f} = \frac{3\cdot10^{10}}{3\cdot10^9} = 10\text{cm} \\ d_5 = 5\frac{\lambda_5}{4} = 12'5\text{ cm} \end{array}\right\} = \frac{\eta_5^2}{\eta_6} = \boxed{\infty}\ (\Omega)$$

$\eta_6 = \eta_{\sigma\to\infty} = 0$

C) $\lambda_4 = \frac{\lambda_o}{\sqrt{4}} = 5\text{cm} \Rightarrow \frac{\lambda_4}{8} = 0'625\text{ cm} \Rightarrow \boxed{d_2 = d_4 = \frac{\lambda_4}{8} = \frac{\lambda_2}{8}\ (\text{cm})}$

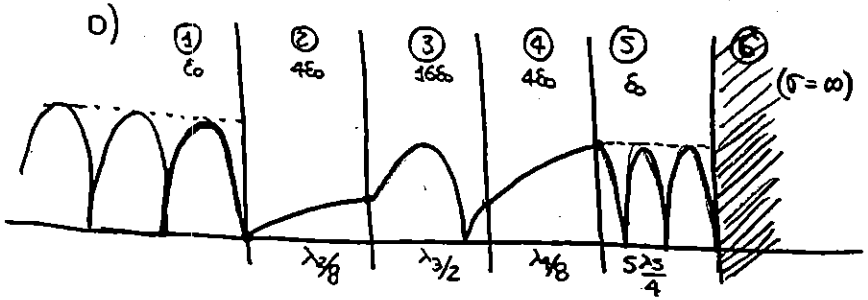
$\lambda_3 = \frac{\lambda_o}{\sqrt{16}} = \frac{\lambda_o}{4} = 2'5\text{cm} \Rightarrow \boxed{d_3 = \frac{\lambda_3}{2} = 1'25\text{cm}}$

Por tanto el medio ③ no afecta al cálculo de impedancias, y para el cálculo de Z_{12} podemos suponer que tenemos el siguiente esquema:



$$\boxed{Z_{12}} = \frac{\eta_4^2}{Z_{45}} = \boxed{0}\ (\Omega)$$

D)



$\boxed{\rho_{12}} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} = \boxed{-1} \Rightarrow \varphi_{12} = \pi \Rightarrow$ Mínimo al final del medio ① y además este mínimo es de valor 0 V/m.

$\boxed{\rho_{56}} = \frac{0 - \eta_5}{0 + \eta_5} = \boxed{-1} \Rightarrow \varphi_{56} = \pi \Rightarrow$ Mínimo al final del medio ⑤ y además de valor 0 V/m.

Como $d_5 = 5\frac{\lambda_5}{4}$ el DOE$_5$ es el indicado porque la distancia entre mínimos y máximos consecutivos es $\lambda_5/4$.

$\boxed{\rho_{45}} = \frac{Z_{45} - \eta_4}{Z_{45} + \eta_4} = \boxed{+1} \Rightarrow \varphi_{45} = 0 \Rightarrow$ Máximo al final del medio ④. Como mide $\frac{\lambda_4}{8}$ no llega al mínimo que sería cero y por tanto el DOE$_4$ cualitativamente será el indicado.

Por continuidad de DOE's y sabiendo que $d_3 = \frac{\lambda_3}{2}$ el DOE_3 empieza y acaba en el mismo punto, que no es ni máximo ni mínimo ya que:

$$\boxed{Z_{34}} = \eta_4 \frac{Z_{45}\cos(\beta_4 d_4) + j\,\eta_4 \cdot \operatorname{sen}(\beta_4 d_4)}{\eta_4 \cdot \cos(\beta_4 d_4) + j\,Z_{45} \cdot \operatorname{sen}(\beta_4 d_4)} =$$

$$= \left\{ Z_{45} = \infty \right\} = \frac{\eta_4}{j\,\operatorname{tg}(\beta_4 d_4)} = \boxed{-j\,\eta_4}\,(\Omega) = \boxed{-j\,\frac{\eta_0}{2}}\,(\Omega)$$

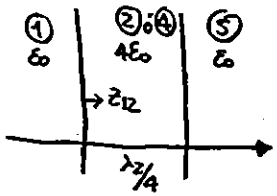
$$\rho_{34} = \frac{-j\,\eta_0/2 - \eta_3}{-j\,\eta_0/2 + \eta_3} \quad \text{(Su fase NO ES CERO ni } \pi\text{)}$$

El DOE_2 se obtiene uniendo el punto final del DOE_1 con el inicial del medio ③ sin pasar por un máximo porque $d_2 = \frac{\lambda_2}{8}$.

E) $\left|\vec{E}_{TOTAL_1}\right|_{max} = |\vec{E}_{inc}| \cdot (1 + |\rho_{12}|) = 2 \cdot (1+1) = 4$ V/m

F) Es imposible porque el último medio es un $\sigma = \infty$, y por tanto NO sólo NO se puede conseguir reflexión nula, sino que además, si todas las láminas son sin pérdidas, siempre habrá REFLEXIÓN TOTAL al existir un $\sigma = \infty$.

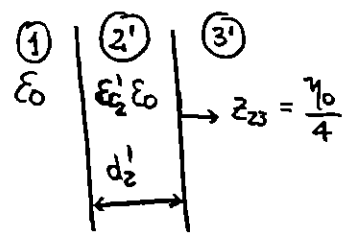
G) Como $d_3 = \frac{\lambda_3}{2}$ y $d_2 = d_4 = \frac{\lambda_2}{8} = \frac{\lambda_4}{8} \Rightarrow d_2 + d_4 = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\lambda_4}{4}$ y para calcular Z_{12} el esquema puede ser:



$$\boxed{Z_{12}} = \frac{\eta_2^2}{Z_{45}} = \frac{\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\right)^2}{\eta_0} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_{r_2}} = \boxed{\frac{\eta_0}{4}}$$

$$\boxed{\rho_{12}} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1-4}{1+4} = \boxed{\frac{-3}{5}}$$

$$\boxed{\frac{P_{rc}}{P_{inc}}(\%)} = |\rho_{12}|^2 \cdot 100 = \frac{9}{25} \cdot 100 = \boxed{36\%}$$



$$\boxed{\eta_2'} = \sqrt{\eta_1 \cdot \eta_{3'}} = \sqrt{\eta_0 \cdot \frac{\eta_0}{4}} = \boxed{\frac{\eta_0}{2}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r_2}' = 4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2' = 4\varepsilon_0}$$

$$\boxed{d_2'} = \frac{\lambda_2'}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{4}} = \boxed{1'25\text{ cm}}$$

I-38

A) $\bar{E}_i = (\hat{x}+\hat{y})(1+j)\, e^{-j\beta z}$ (V/m) $\quad \left.\begin{array}{l}\bar{E}_{or} = \hat{x}+\hat{y} \\ \bar{E}_{oi} = \hat{x}+\hat{y}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{E}_{or} \parallel \bar{E}_{oi} \Rightarrow$ Pol lineal.

$E_{inc_{min}} = 0 \qquad E_{inc_{máx}} = |\bar{E}| = |(\hat{x}+\hat{y})(1+j)| = |\hat{x}+\hat{y}|\cdot|1+j| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ (V/m)

$d_2 = \frac{3\lambda_2}{4}$

B)

①	②	③	④	⑤
ε_0	$4\varepsilon_0$	ε_0	$4\varepsilon_0$	$16\varepsilon_0$
		10/3 cm	5/4 cm	

$\beta_{e2} = \beta_2 d_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot d_2 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\lambda_0} d_2 = \frac{3\pi}{2}$ rad elec

$\beta_{e3} = \beta_3 d_3 = \dots = \frac{2\pi}{3}$ rad elec $\longrightarrow d_3 = \frac{\lambda_3}{3}$

$\beta_{e4} = \beta_4 d_4 = \dots = \frac{\pi}{2}$ rad elec $\longrightarrow d_4 = \frac{\lambda_4}{4}$

C) $z_{45} = \eta_5 = \eta_0/4$ (Ω) $\qquad z_{34} = \frac{\eta_4^2}{\eta_5} = \frac{\eta_0^2/4}{\eta_0/4} = \eta_0$ (Ω)

$\eta_3 = z_{34} = \eta_0$

$z_{23} = \eta_3 \frac{z_{34}\cos(\beta_3 d_3) + j\eta_0 \operatorname{sen}(\beta_3 d_3)}{\eta_3\cos(\beta_3 d_3) + j z_{34}\operatorname{sen}(\beta_3 d_3)} = \dots = \eta_0$ (Ω)

$z_{12} = \frac{\eta_2^2}{z_{23}} = \frac{\eta_0}{4}$ (Ω) $\Longrightarrow \rho_{12} = \frac{z_{12}-\eta_1}{z_{12}+\eta_1} = 1/9 \Rightarrow W_{tr} = W_{inc}(1-|1/9|^2) = \dots =$

$= 0'026$ (W)

D)

MEDIO ①: $\rho_{12} = 1/9$; $\varphi_{12} = 0 \qquad S_1 = \frac{1+1/9}{1-1/9} = 10/8 = 5/4$

$E_{max_1} = |\bar{E}_{inc}|(1+|\rho_{12}|) = 2(1+1/9) = 20/9$ (V/m)

$E_{min_1} = \frac{E_{max_1}}{S_1} = 16/9$ (V/m)

MEDIO ②: $\rho_{23} = 1/3$; $\varphi_{23} = 0$; $d_2 = \frac{3\lambda_2}{4}$

$E_{min_2} = 20/9 \qquad E_{max_2} = S_2 E_{min_2} = 40/9$ (V/m)

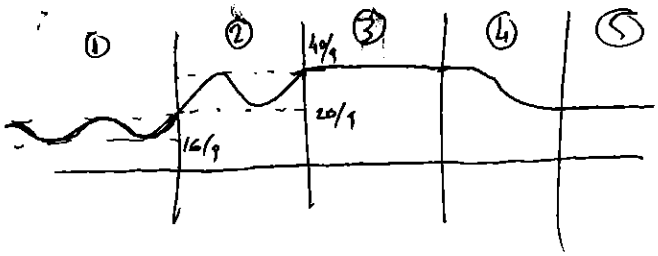
MEDIO ③ $\rho_{34} = 0$ $E_{max_3} = E_{min_3} = 40/9$ V/m

MEDIO ④ $\rho_{45} = -1/3$ $\varphi_{45} = \pi$ $d_4 = \frac{\lambda_4}{4}$ $E_{max_4} = 40/9$ (V/m)

$$E_{min_4} = \frac{E_{max_4}}{S_4} = 20/9 \text{ (V/m)}$$

MEDIO ⑤

$$E_{máx_5} = E_{min_5} = 20/9 \text{ (V/m)}$$



TEMA 3: LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.

0.- INTRODUCCIÓN:

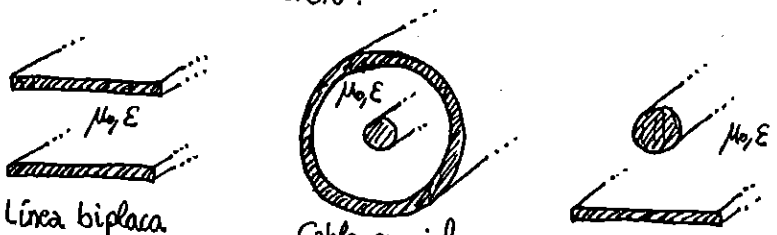
En este tema vamos a estudiar la transmisión de energía electromagnética de un punto a otro del espacio sin que exista radiación, es decir, vamos a estudiar la transmisión en guía-ondas.

Hay dos tipos de guiaondas:

a) Sistemas de transmisión cerrados por conductores:

Guía cuadrada Guía circular

b) LÍNEAS DE TRANSMISIÓN:



Línea biplaca Cable coaxial

Observamos que la diferencia entre a) y b), es que las líneas de transmisión tienen más de un conductor, y por tanto podemos establecer una diferencia de potencial entre los conductores que la forman.

1.- Modo u onda TEM:

Los campos en el interior de las guías deben cumplir las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno; al resolverlas para medios lineales, homogéneos, isótropos y sin fuentes en el interior obtenemos soluciones diversas a cada una de las cuales las llamamos MODOS.

Suponiendo $\hat{z}$ la dirección de propagación de la onda en la guía, las expresiones de los campos en el interior de la guiaondas tendrán en general la siguiente forma:

$\vec{E} = \vec{E_t} + \vec{E_z}$ $\quad$ $\vec{E_t}$ y $\vec{H_t}$ son las componentes transversales de los campos.

$\vec{H} = \vec{H_t} + \vec{H_z}$ $\quad$ $\vec{E_z}$ y $\vec{H_z}$ " " " longitudinales " " " .

Así, podemos agrupar las soluciones o modos en 4 tipos:

- Modos TE (Transversales eléctricos): $\vec{E_z} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E_t} \\ \vec{H} = \vec{H_t} + \vec{H_z} \end{cases}$
- Modos TM (Transversales magnéticos): $\vec{H_z} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E_t} + \vec{E_z} \\ \vec{H} = \vec{H_t} \end{cases}$
- MODOS TEM (Transversales electromagnéticos): $\vec{E_z} = \vec{0} = \vec{H_z} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E_t} \\ \vec{H} = \vec{H_t} \end{cases}$
- MODOS HIBRIDOS: $E_z \neq 0 \neq H_z$

  q-TEM (dentro de HIBRIDOS)

<u>COMENTARIOS</u>:

* Los MODOS TEM sólo se propagan en las LÍNEAS DE TRANSMISIÓN, ya que son necesarios al menos dos conductores para poder transmitir un modo TEM; de hecho se cumple que:

$$\text{Nº de modos TEM que soporta la ldt HOMOGENEAS} = \text{Nº de conductores de la ldt} - 1$$

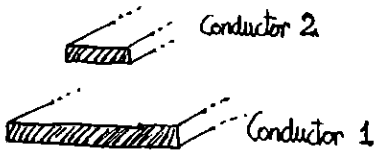
* La velocidad de propagación o de grupo de un modo TEM coincide con la velocidad de fase y su valor es:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}, \ (m/s)$$

¡¡ ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA !! $\Leftrightarrow$ MODO NO DISPERSIVO.

2.- Procedimiento a seguir para el cálculo de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ del modo TEM:

Siempre tendremos una línea de transmisión con dos conductores:



COMENTARIO: Observamos que se puede establecer una diferencia de potencial entre ellos (V_0), por tanto esta ldt soporta un modo TEM.

Dada la función potencial o potencial (ϕ) en la región entre conductores, sabemos que:

$$\boxed{\vec{E} = (-\nabla_t \phi)\cdot e^{-\gamma_0 z}} \; ; (V/m)$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\hat{z}\times\vec{E}}{Z_{TEM}} = \frac{\hat{z}\times\vec{E}}{\eta}} \; ; (A/m)$$

Lógicamente si nos dan el campo $\vec{H}$: $\vec{E} = \eta(\vec{H}\times\hat{z})$

siendo:

$\nabla_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{y}$ si ϕ en cartesianas.

$\nabla_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$ si ϕ en cilíndricas.

$\hat{z}$ ≡ dirección de propagación del modo TEM.

$Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, (Ω) ≡ IMPEDANCIA DEL MODO TEM.

¡¡OJO!! Esta impedancia NO es la de la ldt que es Z_0

$\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, (m^{-1}) ≡ CONSTANTE DE PROPAGACIÓN DEL MODO TEM.

COMENTARIOS IMPORTANTES:

- La diferencia de potencial entre los conductores, o tensión entre los conductores, se denomina V_0 y se puede calcular de las siguientes formas:

$$\boxed{V_0 = \phi(\text{Conductor } 1) - \phi(\text{Conductor } 2)} \; ; \text{Voltios}$$

ó

$$\boxed{V_0 = -\int_{\text{Cond } 2}^{\text{Cond } 1} \vec{E}\cdot d\vec{l}} \; ; \text{Voltios}$$

V_0 puede ser compleja

- En los conductores perfectos el campo $\vec{E}$ es ⊥ al mismo y el campo $\vec{H}$ es paralelo:

$\vec{E}\big|_{Cond}$ debe salir ⊥ al conductor ; $\vec{H}\big|_{Cond}$ debe salir // al conductor

3.- PARÁMETROS PRIMARIOS DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN (Z_0 y γ_0)

Se denominan onda de tensión y onda de corriente respectivamente a:

$V(z) = V_0 \cdot e^{-\gamma_0 z}$; (voltios) ≡ ONDA DE TENSIÓN.

$I(z) = I_0 \cdot e^{-\gamma_0 z}$; (amperios) ≡ ONDA DE CORRIENTE.

Ya sabemos como se puede calcular V_0 (ver comentario anterior), y para calcular I_0 es aconsejable calcular antes $\vec{J_s}$, es decir, la densidad superficial de corriente que circula por uno de los conductores:

$$\boxed{\vec{J_s}\Big|_{\substack{z=0\\ \text{Conductor}}} = \hat{n}_{\substack{\text{saliente}\\ \text{conductor}}} \times \vec{H}_{//}\Big|_{\substack{z=0\\ \text{Conductor}}}} \; ; (A/m)$$

NOTA: Esta densidad de corriente ($\vec{J_s}$) siempre tendrá el sentido ($+\hat{z}$) ó ($-\hat{z}$). Si en el conductor 1 sale en ($+\hat{z}$), en el conductor 2 saldrá en ($-\hat{z}$) y viceversa.

Ahora:

$$\boxed{I_0 = \int_{\text{Conductor}} J_s\Big|_{\substack{z=0\\ \text{Conductor}}} \cdot dl} \; ; (A)$$

I_0 puede ser compleja.

NOTA: Podemos calcular I_0 en el conductor 1 ó en el conductor 2, para lo cual calcularemos $\vec{J_s}$ en el conductor 1 ó en el conductor 2 respectivamente. La única diferencia en estos calculos es que una será positiva y la otra negativa, ya que en una ldt la corriente que va por un conductor vuelve por el otro en sentido contrario.

Finalmente ya podemos calcular los parámetros primarios de una ldt:

* $\boxed{Z_0 = \frac{V_0}{I_0}}$,(Ω) ≡ Impedancia característica de la ldt.

Incluye las perdidas en el dieléctrico pero NO en los conductores

COMENTARIO: Siempre se puede escribir Z_0 como: $\boxed{Z_0 = \eta \cdot K_g}$, siendo:

- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$,(Ω) (Puede ser compleja si hay pérdidas en el dieléctrico.)
- K_g ≡ Constante geométrica (ADIMENSIONAL)

* $\boxed{\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$,(m^{-1}) ≡ Constante de propagación del modo TEM en la ldt.

Incluye las pérdidas en el dieléctrico (α_d) pero NO en los conductores (α_c).

4.- Circuito equivalente de elementos concentrados de una línea de transmisión. (Parámetros secundarios (L, C, G y R)).

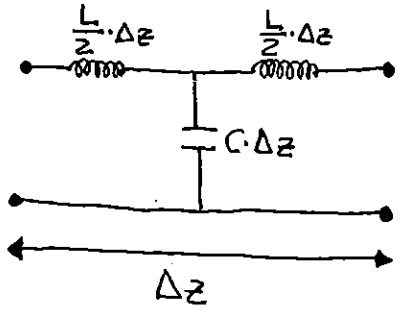
Para que un tramo corto de línea, de longitud Δz, admita circuito equivalente de elementos concentrados debe ocurrir que:

$$|\gamma_0 \cdot \Delta z| \ll 1 \quad ó \quad |\gamma_0 \cdot \Delta z| \leq 0'1$$

De esta forma se puede aplicar la teoría de circuitos sin considerar fenómenos de propagación.

NOTA: A veces a $\gamma_0 \cdot \Delta z$ se le denomina argumento de las funciones hiperbólicas.

* Circuito equivalente si no hay pérdidas en el dieléctrico (dieléctrico perfecto) y tampoco hay pérdidas en los conductores (conductores perfectos):



siendo: $\boxed{L = \mu \cdot K_g}$ ≡ Autoinducción por unidad de longitud; (H/m).

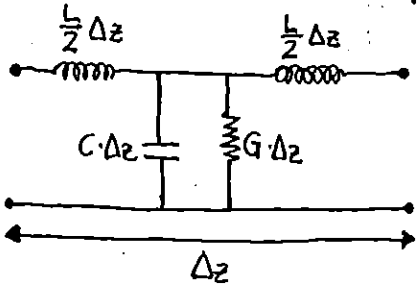
$\boxed{C = \frac{\varepsilon}{K_g} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{K_g}}$ ≡ Capacidad por unidad de longitud; (F/m)

Por tanto en este caso:

$$\boxed{Z_0 = \eta \cdot K_g = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot K_g = \sqrt{\frac{\mu \cdot K_g}{(\varepsilon / K_g)}} = \sqrt{\frac{L}{C}}} \; ; (\Omega)$$

$$\boxed{\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{LC}} \; (m^{-1})$$

* Circuito equivalente si hay pérdidas en el dieléctrico ($\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$) pero <u>NO</u> hay pérdidas en los conductores (conductores perfectos):



siendo: $\boxed{L = \mu \cdot K_g}$ (H/m)

$\boxed{C = \frac{\varepsilon'}{K_g}}$ (F/m) ¡¡OJO!! ε' <u>NO</u> ε''.

$\boxed{G = \frac{\omega_0 \varepsilon''}{K_g}}$ (S/m) ≡ Conductancia por unidad de longitud.

↳ Marca que hay pérdidas en el dieléctrico.

Por tanto en este caso:

$$\boxed{Z_0 = \eta \cdot K_g = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' - j\varepsilon''}} \cdot K_g = \sqrt{\frac{j\omega_0 L}{G + j\omega_0 C}}} \; (\Omega)$$

$$\boxed{\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \underset{\text{BAJAS PÉRDIDAS}}{\approx} \frac{1}{2} tg\delta \cdot \omega_0 \sqrt{\mu\varepsilon'} + j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'}}$$

• <u>COMENTARIO DE BAJAS PÉRDIDAS</u>: →

2 → • COMENTARIO DE BAJAS PÉRDIDAS:

Se define tangente de pérdidas eléctricas a: $tg\,\delta = \dfrac{\varepsilon'' + \frac{\sigma_D}{\omega_0}}{\varepsilon'}$.

Lógicamente si no nos dan la conductividad del dieléctrico σ_D, suponemos que $\sigma_D = 0$ y por tanto $tg\,\delta = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ (que es lo habitual.)

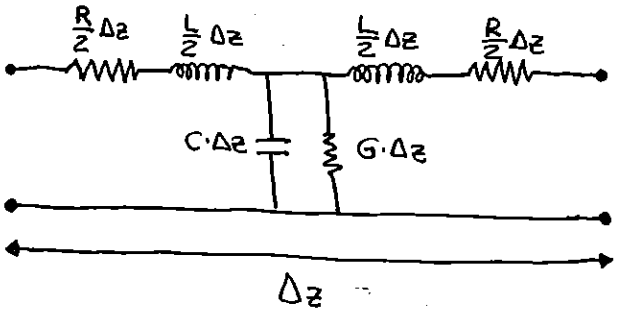
Si hay bajas pérdidas quiere decir que $tg\,\delta \ll 1$ y en ese caso:

$$\boxed{\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \approx \frac{1}{2}\,tg\,\delta\,\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'} + j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'} = \alpha_d + j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}}\ (m^{-1})$$

siendo: $\boxed{\alpha_d = \frac{1}{2}\,tg\,\delta\,\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'} = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ (Np/m) CONSTANTE DE ATENUACIÓN DEBIDA A LAS PÉRDIDAS EN EL DIELÉCTRICO.

Parte real del parámetro primario γ_0 si hay pérdidas en el dieléctrico

* Circuito equivalente si hay pérdidas en el dieléctrico ($\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$) y también hay pérdidas en los conductores:



siendo: $\boxed{L = \mu \cdot K_g}$ (H/m)

$\boxed{C = \frac{\varepsilon'}{K_g}}$ (F/m) ¡¡OJO!! ε' NO ε''.

$\boxed{G = \frac{\omega_0\varepsilon''}{K_g}}$ (S/m)

$\boxed{R}$ ≡ Resistencia por unidad de longitud (Ω/m) (Marca que hay pérdidas en los conductores.)

Para calcular el parámetro secundario R se realizarán los siguientes pasos: 2 →

z_1:

- $W_T = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\,d\vec{S} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[V(z)\cdot I^*(z)\right]$; (W) ≡ POTENCIA TRANSMITIDA SIN SUPONER PÉRDIDAS EN LOS CONDUCTORES.

- $W_{pc} = \frac{R_S}{2}\cdot\int_{\text{Conductores}} (\vec{H}_t\cdot\vec{H}_t^*)\,dl$; (W/m) ≡ POTENCIA DISIPADA EN LOS CONDUCTORES POR UNIDAD DE LONGITUD.

Si se cumple la condición de LEONTOVICH (espesor $\gg \delta$)

(radio curvatura $\gg \delta$)

siendo: $R_S = \frac{1}{\sigma\delta}$, $(\Omega) \equiv \begin{cases} \text{Resistencia superficial del conductor.} \\ \text{Resistencia de pérdidas.} \\ \text{Resistencia del conductor.} \end{cases}$

σ ≡ Conductividad del conductor; (S/m)

$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \mu \sigma}}$ ≡ Profundidad de penetración del conductor; (m)

- $\alpha_c = \frac{W_{pc}}{2\cdot W_T}$; (Np/m) ≡ CONSTANTE DE ATENUACIÓN DEBIDA A LAS PÉRDIDAS EN LOS CONDUCTORES.

- Finalmente como $\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ despejamos R:

$$\boxed{R = 2\alpha_c\sqrt{\frac{L}{C}}}\ (\Omega/m)$$

Por tanto en este caso los parámetros Z_0 y γ_0 quedan modificados de la siguiente forma:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R+j\omega_0 L}{G+j\omega_0 C}} = Z_0\left(1+\frac{\alpha_c}{\gamma_0}\right) ;(\Omega)$$

$$\gamma_c = \alpha_c + \gamma_0 \approx \alpha_c + \alpha_d + j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon'} \ ;(m^{-1}) \quad ó \quad \gamma_c = \sqrt{(R+j\omega_0 L)(G+j\omega_0 C)} \ ;(m^{-1})$$

Bajas pérdidas en el dieléctrico

COMENTARIO IMPORTANTÍSIMO:

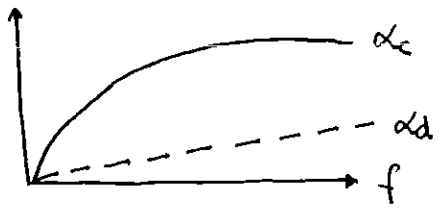
Z_c y γ_c NO son los parámetros primarios de la línea de transmisión. La impedancia característica de la línea de transmisión sigue siendo Z_0 que incluye las pérdidas en el dieléctrico, si las hay, pero NO las pérdidas en los conductores. Lo mismo ocurre con γ_0, que incluye a α_d pero NO a α_c.

5.- COMENTARIOS FINALES:

- Cuando tenemos pérdidas en los conductores y bajas pérdidas en el dieléctrico, la atenuación total de la línea de transmisión es:

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad ,(Np/m)$$

- Si no hay pérdidas en el dieléctrico ($G=0$) se puede escribir: $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$,(Ω) ; $\boxed{\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2 \cdot Z_0}}$ (Np/m)
- 1 Np = 8'7 dB
- La dependencia de α_d y α_c con la frecuencia es:



En una línea de transmisión habrá que intentar minimizar α_c.

- Cuando hay atenuación la potencia transmitida en la línea y los campos se atenúan de la siguiente forma:

$$W_T = W_T(z=0) \cdot e^{-2\alpha z} \quad ,(W) \qquad \vec{E}_T = \vec{E} \cdot e^{-\alpha z} \quad ;(V/m) \qquad \vec{H}_T = \vec{H} \cdot e^{-\alpha z} \quad ;(A/m)$$

- La potencia transmitida por la onda tras haber recorrido una longitud "ℓ" es:

$$\boxed{W_T(z=\ell)\Big|_{dBm} = W_T(z=0)\Big|_{dBm} - \alpha(Np/m) \cdot 8'7(dB/Np) \cdot \ell} \quad ;(dBm)$$

siendo: $W_T(z=0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[V_0 \cdot I_0^*\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{Z_0^*}\right] \cdot |V_0|^2 \quad ,(W)$

¡¡OJO!! La potencia disipada en esos "ℓ" metros será:

$$\boxed{W_{\text{disipada en } \ell \text{ metros}}\Big|_{mW} = W_T(z=0)\Big|_{mW} - W_T(z=\ell)\Big|_{mW}} \quad ,(mW)$$

¡¡OJO!! Con las unidades de esta fórmula respecto de la anterior.

$$= W_T(z=0)\Big|_{mW} \cdot \left(1 - e^{-2\alpha\ell}\right)$$

$$\neq W_{pc} \cdot \ell$$

MODIFICACIÓN DE TEORÍA

- Sin perdidas en los conductores:

Param 1ários
$$\begin{cases} C = \dfrac{\varepsilon'}{k_g} \\ G = \dfrac{\omega\varepsilon''}{k_g} \\ L_{ext} = \mu k_g = L \end{cases}$$

Param 2ários
$$\begin{cases} Z_0 = \eta \cdot k_g = \sqrt{\dfrac{j\omega L}{G + j\omega C}} \underset{\text{si } tg\,\delta \ll 1}{\approx} \sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \gamma_0 = \sqrt{j\omega L(G + j\omega C)} = \alpha_d + j\beta \approx \\ \approx \frac{1}{2} tg\,\delta\, \omega \sqrt{\mu\varepsilon'} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} = \\ = \dfrac{G}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}} + j\omega\sqrt{LC} = \dfrac{W_{pd}}{2W_T(z)} + j\beta \end{cases}$$

$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \cdot C \cdot V(z) \cdot V^*(z)$ (J/m) ≡ Energía electrica almacenada p.u.l

$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} L_{ext} \cdot I(z)\, I^*(z)$ (J/m) ≡ Energía magnetica almacenada p.u.l

$W_{pd} = \frac{1}{4} G \cdot V(z) V^*(z) = 2\alpha_d W_T(z)$ (W/m) ≡ Potencia disipada en el dieléctrico p.u.l

- Con perdidas en los conductores

Param 1ários
$$\begin{cases} C = \dfrac{\varepsilon'}{k_g} \\ G = \dfrac{\omega\varepsilon''}{k_g} \\ L = L_{ext} + L_{int} \begin{cases} L_{ext} = \mu_0 k_g \\ L_{int} = L_c = \dfrac{1}{\sigma\delta\omega} k_g \end{cases} \begin{cases} L \approx L_{ext} = \mu_0 k_g \end{cases} \\ R = R_c = \dfrac{1}{\sigma\delta} k_g \ (\Omega/m) \end{cases}$$

Si se cumplen las condiciones de Leontovich en alta frec

Param 2ários
$$\begin{cases} Z_c = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega L}} \\ \gamma_0 = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega L)} = \alpha_c + \gamma_0 = \alpha_c + \alpha_d + j\beta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} + \dfrac{G}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}} + j\beta \ (m^{-1}) \end{cases}$$

$$k_j = \frac{\oint_c |\bar{J}_s|^2 dl}{\left|\oint_c \bar{J}_s\, dl\right|^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cuando } \bar{J}_s \text{ NO} \\ \text{depende de las coord} \\ \text{transversales es decir} \\ \text{si solo depende de } z \end{array} \right\} = \frac{1}{\text{Perímetro}}$$

↳

Se denomina imp de cuadro o del conductor a:

$$Z_s = \frac{1+j}{\sigma\delta} \longrightarrow R_c + j\omega L_c = Z_s k_j = \frac{1+j}{\sigma\delta} k_j \begin{cases} \mathrm{Re} \rightarrow R_c = \frac{1}{\sigma\delta} k_j \\ \mathrm{Im} \rightarrow L_c = \frac{1}{\sigma\delta\omega} k_j \end{cases}$$

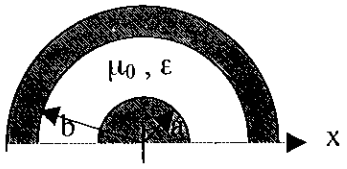
Así: $W_{pc} = \frac{1}{4} R_c I(z) I(z)^* = 2\alpha_c W_T(z)$ (W/m) ≡ Pot. dis en conductores p.u.l

$\langle W_{mc} \rangle = \frac{1}{4} L_{in} + I(z) I(z)^*$ (J/m) ≡ Energía magnética almacenada en conductores p.u.l.

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

III-1 Para poder colocar con facilidad sobre superficies planas se ha pensado en utilizar como línea de transmisión un cable coaxial de conductores ideales partido por la mitad, tal y como se indica en la figura. Suponiendo que la función ϕ para esta geometría (despreciando el efecto de bordes) vale:

$$\phi = V_0 \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} \quad \text{con} \quad a = 1\text{mm} \quad y \quad b = 2\text{mm}$$



y que el dieléctrico utilizado tiene permitividades $9\varepsilon_0$ y μ_0.

a) Determine los valores de los parámetros primarios y secundarios de la línea de transmisión.

b) Si el conductor interior se considera no ideal ($\sigma = 5.8\ 10^7\ S/m$). ¿Cómo y cuánto debería corregir los valores de los parámetros primarios y secundarios?

c) Determine el valor de la potencia disipada en 20 m. de línea a la frecuencia de 100 MHz, cuando la potencia transmitida es de 10 mW.

d) ¿Admite circuito equivalente de elementos concentrados la longitud de línea anteriormente considerada?

Nota: $\nabla_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$ Junio-99

III-2 La figura 1 representa la sección transversal de una línea de transmisión (ε real) de conductores perfectos.

Sabiendo que la solución para el potencial entre placas del problema electrostático equivalente, expresada en coordenadas cilíndricas y despreciando los efectos de borde, es $\phi(r,\varphi) = A\ Ln(r) + B$ para $a \le r \le b$, $-\psi \le \varphi \le \psi$ siendo A y B constantes complejas conocidas:

a) Dibuje el circuito equivalente de una sección de línea de pequeña longitud para este caso, obteniendo las expresiones de sus elementos.

b) Si se considera que el conductor situado en r = a no es perfecto, sino de conductividad σ (S/m), calcule la potencia disipada por unidad de longitud. Modifique el circuito equivalente anterior considerando esta nueva situación. Obtenga la expresión de la constante de propagación del modo TEM.

c) Considerando "b" un valor fijo y "a" variable, calcule la relación que deben cumplir a y b para minimizar la constante de atenuación.

d) Para ln(b/a) = 1 y $\psi = \pi/3$, determine el valor de ε_r para obtener una impedancia característica de 60 Ω.

e) Considerando ahora todos los conductores perfectos, se cierra la estructura anterior con dos placas rectas metálicas perfectas indefinidas colocadas en $\varphi = -\psi$ y en $\varphi = \psi$,tal como se muestra en la figura 2.

Plantee las condiciones de contorno y la ecuación diferencial a resolver para encontrar modos TEM. ¿Qué soluciones encontraría en este caso? Justifique la respuesta.

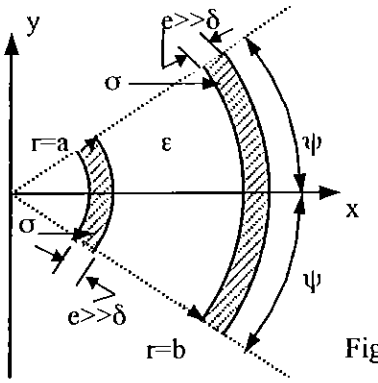


Figura 1

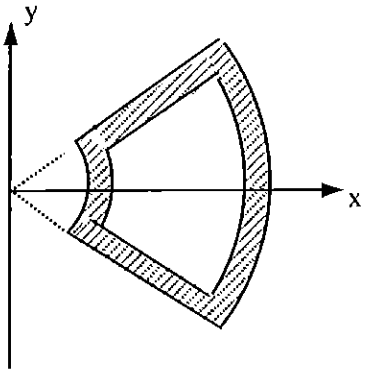


Figura 2

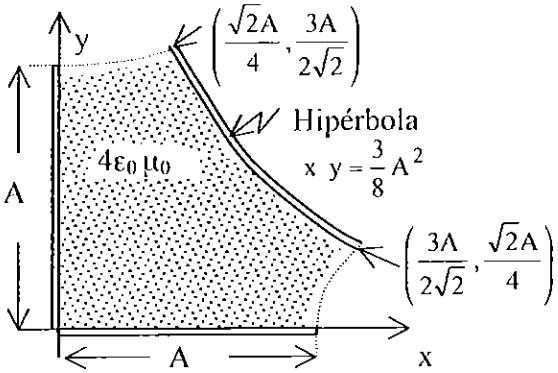
δ = profundidad de penetración en los conductores

Nota: El gradiente de ϕ en coordenadas cilíndricas es: $\nabla\phi = \hat{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

Septiembre-99

III-3 Considere una línea de transmisión constituida por dos conductores perfectos: uno en forma de ángulo recto y otro con forma de hipérbola, rellena de un dieléctrico con permitividades $4\varepsilon_0$ y μ_0 tal que como se indica en la figura (A=1cm.). Suponiendo que la función potencial ϕ para esta geometría (despreciando el efecto de bordes). Viene dada por:

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_0}{A^2}xy & \Rightarrow \text{en la región sombreada} \\ 0 & \Rightarrow \text{en el resto} \end{cases}$$



a) Determine los valores de los parámetros primarios y secundarios de la línea de transmisión

b) Si el conductor en forma de ángulo recto se considera no ideal ¿Cómo y cuánto debería corregir los valores de los parámetros primarios y secundarios?

c) Suponga que el dieléctrico posee pérdidas (tg δ = 0.02) y que el conductor no ideal es de cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m), determine la relación entre las constantes de atenuación debida a las pérdidas en el dieléctrico y en los conductores a la frecuencia de 100 MHz.

d) ¿Admite circuito equivalente de elementos concentrados un tramo de línea de 200 m. de longitud, a la frecuencia anteriormente indicada?

Junio-00

III-4 La figura representa la sección recta de una línea de transmisión con simetría de traslación formada por un plano conductor infinito situado en y=0 y un hilo de radio a situado a una altura h (h>>a) ambos de conductor perfecto y rodeados con dieléctrico aire.

a) Describa el proceso de obtención de las soluciones de campo TEM. ¿Cuántas soluciones hay? Razone la respuesta.

b) Si se conoce la componente en dirección y del campo eléctrico:

$E_y = -A\dfrac{4h(y^2 - x^2 - h^2)}{\left[x^2 + (y-h)^2\right]\left[x^2 + (y+h)^2\right]}e^{-\gamma_0 z}$, donde A es una constante compleja, obtenga la componente x del campo magnético. ¿Cuál es la distribución de corriente en el conductor situado en el plano y=0?

c) Calcule la corriente que circula por el conductor plano y la impedancia característica de la línea si la tensión aplicada es: $V_0 = 2\,A\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2h}{a}\right)$

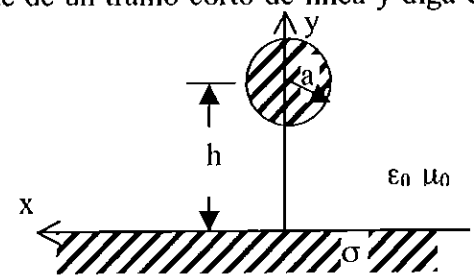
d) Determine la máxima potencia que puede transmitirse si se conoce que el campo eléctrico máximo es la línea es: $E_{max.} = \dfrac{2|A|}{a}\sqrt{\dfrac{h+a}{h-a}}$ (El campo eléctrico de ruptura del aire es $3 \cdot 10^6$ V./m.).

e) Obtenga la expresión de la potencia disipada por unidad de longitud en el caso de que el conductor plano situado en y=0 tenga una conductividad finita σ.

f) Determine los elementos del circuito equivalente de un tramo corto de línea y diga en qué condiciones son válidos.

NOTA: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{\pi}{h}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+h^2)^2} = \frac{\pi}{2h^3}$



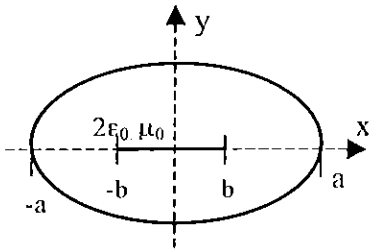
Septiembre-00

III-5 La figura representa la sección transversal de una línea de transmisión formada por dos conductores perfectos: Una placa metálica de anchura 2b situada en el interior de un conductor de sección elíptica con semieje mayor a. La estructura está rellena con un dieléctrico de características $2\varepsilon_0, \mu_0$.

Si se conoce que el campo eléctrico en el plano y = 0 situado en el interior de la línea vale:

$$\vec{E}\,|_{y=0} = \begin{cases} \pm \dfrac{A}{\sqrt{b^2 - x^2}}\,\hat{y}\,e^{-\gamma z} & \text{en } |x| \le b \begin{cases} \text{signo+ : cara superior de la placa} \\ \text{signo- : cara inferior de la placa} \end{cases} \\ \dfrac{A}{\sqrt{x^2 - b^2}}\,\hat{x}\,e^{-\gamma z} & \text{en } b \le x \le a \end{cases}$$

donde A es una constante compleja conocida.



A) Obtenga la tensión aplicada entre conductores.

B) Determine la distribución de corriente en las dos caras de la placa metálica interior y la amplitud de la onda de corriente.

C) Calcule la potencia transmitida y la impedancia característica de la línea.

D) Si en el conductor interior el segmento situado en $-b/2 \le x \le b/2$ se considera no ideal, con conductividad finita σ, calcule la nueva constante de propagación y determine el valor del nuevo elemento en el circuito equivalente de un tramo corto de línea. (Considere que se cumplen las condiciones de Leontovich).

E) Se conecta en cascada con la línea de transmisión condsiderada otra línea con el mismo conductor exterior, rellena con un dieléctrico de parámetros ε_0, μ_0 y de longitud indefinida.¿ Qué nueva anchura 2b, del conductor interior en la nueva línea de transmisión hace que en la primera no se produzca onda estacionaria?

Nota: $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \arg\text{ch}\left(\dfrac{u}{k}\right)$; $\int \dfrac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arg\,\text{sen}\left(\dfrac{u}{k}\right)$

$\int \dfrac{du}{k^2 - u^2} = \dfrac{1}{k}\arg\text{th}\left(\dfrac{u}{k}\right)$ para $|u| \le k$.

Junio-02

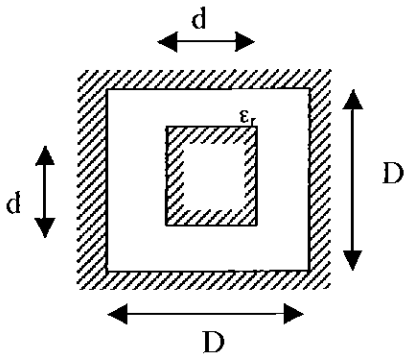
III-6 La figura muestra la sección transversal de un cable cuyo dieléctrico tiene una permitividad relativa dada por $\varepsilon_r' = 1.18$ y $\text{tg}\,\delta = 2\cdot 10^{-3}$, y cuyos conductores tiene una conductividad de 3.10^7 siemens/metro.

Una de estas expresiones es una aproximación válida para su impedancia característica:

$$Z_0 = \frac{\eta_0 d\sigma tg^2\delta}{\sqrt{\varepsilon_r'\left(\dfrac{D+d}{D-d}\right)}\left[2 + 0.558\left(\dfrac{D}{d} - 1\right)\right]}$$

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\left[2 - 0.558\left(\frac{D}{d} - 1\right)\right] e^{-2jBz}$$

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{4\sqrt{\varepsilon_r}\left(\dfrac{2d}{D-d} + 0.558\right)}$$



Indique cuál es la aproximación correcta y explique detalladamente el porqué.

(Continúa)

III-6 (Continuación)

Se ha comprobado que al conectar esta cable a un coaxial de impedancia característica real, de valor 75 Ω, la reflexión producida es despreciable. Por otra parte se ha medido la atenuación introducida por 5 metros de cable a la frecuencia de 300 MHz, obteniéndose 0.6 dB. Teniendo en cuenta que la atenuación debida a los conductores puede aproximarse mediante:

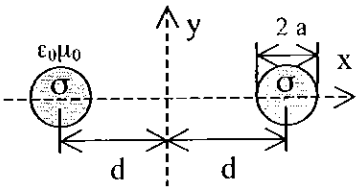
$$\alpha_c = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\pi\sigma\delta\eta_0 D}\left(\frac{\frac{D}{d}+1}{\frac{D}{d}-1}\right)\left[2+0.558\left(\frac{D}{d}-1\right)\right]$$ calcule la dimensiones D y d del cable.

Dibuje un circuito equivalente para un tramo de 15 mm de cable a la frecuencia mencionada, sin calcular los valores de los elementos. ¿Sería válido ese circuito a 6 GHz? ¿Y a 30 MHz?

Nota: $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}(F/m)$, $\mu_0 4\pi 10^{-7}(H/m)$.

Septiembre-03

III-7 Se considera una línea bifilar rodeada con dieléctrico aire, formada por dos hilos de conductor perfecto ($\sigma\rightarrow\infty$) con el mismo radio a, separados una distancia 2d con a <<d. Se conoce que en este caso el campo magnético en el plano y = 0 situado entre los conductores se aproxima mediante la expresión: $\vec{H}|_{y=0}\,(-d+a \le x \le d-a) = \hat{y}\frac{2Bd}{(d^2-x^2)}e^{-\gamma_0 z}$



donde B es una constante compleja.

A) Obtenga la tensión aplicada entre conductores.
B) Sabiendo que el campo magnético en la superficie de cada conductor es circunferencial y de intensidad constante, determine la corriente que circula por ellos. Aproxime la expresión obtenida utilizando la relación a<<d.
C) Obtenga las expresiones de la impedancia característica de la línea, la constante de propagación y la potencia transmitida.
D) Determine la potencia máxima que puede transmitirse si se conoce que el campo máximo se produce en la superficie de los conductores y que el campo de ruptura del aire es E_r V/m.
E) Si consideramos los conductores reales de conductividad σ, cumpliéndose que a es mucho mayor que la profundidad de penetración a la frecuencia de trabajo, obtenga para un tramo corto de línea las expresiones de los elementos del circuito equivalente, y la nueva constante de propagación..

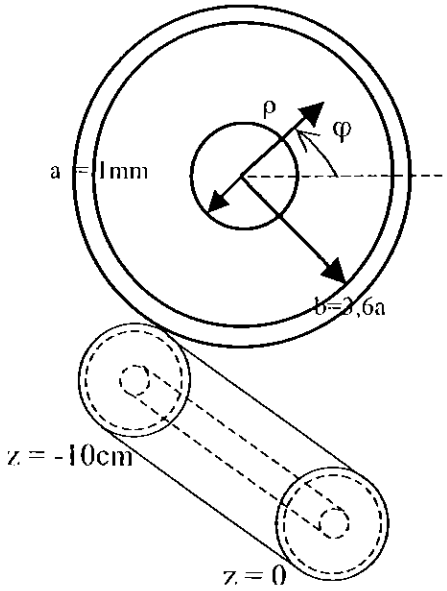
NOTA: $\int\frac{du}{k^2u^2} = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k+u}{k-u}\right)$

Junio-04

III-8 La figura representa la sección transversal de un coaxial formado por conductores que se pueden considerar perfectos, y relleno de un dieléctrico de permitividad relativa 2,25.

Calcule el valor de coeficiente de reflexión que se producirá en este cable cuando se conecte, a partir de z = 0 , otro coaxial, indefinido en z, de impedancia 50 Ω.

Se cortocircuita ahora el cable en z = 0 con un plano de conductor perfecto (como se muestra en la segunda figura) y se aplica en z = -10 cm un generador, de frecuencia 1 GHZ, que genera en el cable un modo TEM incidente que transmite una potencia de 1 mW. Calcule las coordenadas (ρ, φ, z) de los puntos donde se mediría el máximo campo eléctrico, y la intensidad de este.



Volviendo al coaxial del principio del ejercicio, considere ahora que el conductor interior no es perfecto, sino que tiene una conductividad finita y dependiente de la coordenada angular φ en la forma: $\sigma(\varphi) = \dfrac{\sigma_0}{(\varphi^2 - 2\pi(\varphi - \pi))^2}$ donde σ_0 es una constante. Determine la expresión de la constante de atenuación debida a los conductores mediante la aproximación de Leontovich.

NOTA: $z_0 = \eta \dfrac{\ln(b/a)}{2\pi}$, $\vec{E}_t = \dfrac{V_0}{\ln(b/a)} \dfrac{\hat{\rho}}{\rho} e^{-\gamma_0 z}$.

Junio-05

III-9 La figura representa la sección recta de una línea de transmisión con simetría de traslación formada por un plano conductor infinito, situado en y = 0, y un hilo de radio a situado a una altura h(h>>a), ambos de conductor perfecto y rodeados de dieléctrico aire.

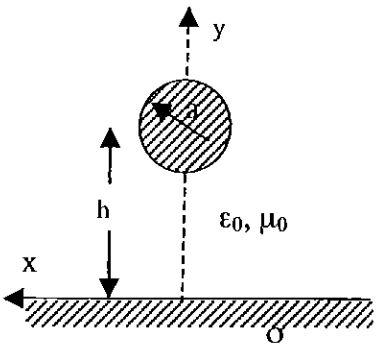
Se conoce que la solución para el potencial del problema electrostático equivalente es:

$\phi(x,y) = A\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + (y-b)^2}\right)$, siendo $b = \sqrt{h^2 - a^2}$ donde A es una constante compleja conocida.

A) Compruebe que la tensión aplicada a la línea, en el caso de verificarse h >>a, y aplicando las aproximaciones oportunas, resulta $V_0 = 2\,A\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2h}{a}\right)$.

B) Sabiendo que la impedancia característica de esta línea de transmisión es $Z_0 = \dfrac{\eta_0}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2h}{a}\right)$ escriba la expresión de la onda de corriente.

C) Calcule el campo eléctrico. Compruebe que dicho campo, en el conductor plano, cumple las condiciones de contorno de conductor perfecto y que su única componente, en y = 0 y z = 0, toma el valor $\dfrac{-4Ab}{x^2 + b^2}$.



Suponiendo ahora que el conductor plano situado en y = 0 tiene una conductividad finita σ:

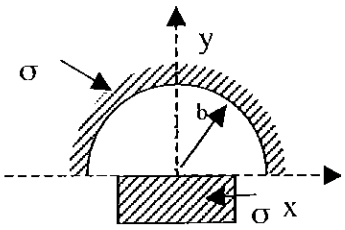
D) Calcule la constante de atenuación, comentando las aproximaciones que realice

E) Determine los elementos del circuito equivalente de un tramo corto de línea y diga en qué condiciones son válidos.

NOTA: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{2b^3}$

Septiembre-05

III-10 La figura representa la sección transversal de una línea de transmisión formada por dos conductores perfectos, $\sigma = \infty$, y un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0(1\text{-}j0.001)$. Se considera que, despreciando el efecto de bordes, sólo hay campo electromagnético no nulo en la región del dieléctrico: $0 \le r \le b$, $0 \le \varphi \le \pi$. Se conoce que el campo eléctrico en el plano $x = 0$ viene dado por la expresión: $\vec{E}|_{x=0} = \dfrac{A}{\sqrt{a^2+y^2}}\hat{y}e^{-\gamma_0 z}$ en $0 \le y \le b$ y que el campo en la superficie de la placa metálica $y = 0$ es: $\vec{E}|_{y=0} = \dfrac{A}{\sqrt{a^2-x^2}}\hat{y}e^{-\gamma_0 z}$



en $|x| \le a$ donde A es una constante compleja conocida. Determine:

A) La diferencia de potencial aplicada entre conductores.

B) La corriente que circula por cada conductor.

C) La expresión de la potencia transmitida.

D) El valor de la constante de atenuación y la fracción de potencia disipada entre $z = 0$ y $z = 10$ metros respecto a la potencia transmitida entre $z = 0$, a la frecuencia de 300 MHz.

E) Las expresiones del valor medio de la energía eléctrica almacenada y la potencia disipada por unidad de longitud.

F) Si consideramos que el conductor situado en $y = 0$ tiene conductividad finita σ en el tramo situado en $0 \le y \le b$, obtenga la nueva constante de propagación.

NOTA: $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2+k^2}} = \operatorname{argsh}\left(\frac{u}{k}\right); \int\frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{k}\right); \int\frac{du}{k^2-u^2} = \frac{1}{k}\operatorname{argth}\left(\frac{u}{k}\right)$ para $|u| \le k$.

Junio-06

III-11

Cuestiones teóricas generales sobre líneas de transmisión:

a) Escriba la expresión con la que se calcula la amplitud de la onda de tensión (en función del campo electromagnético TEM). ¿Por qué esta expresión define unívocamente la amplitud de la onda de tensión?

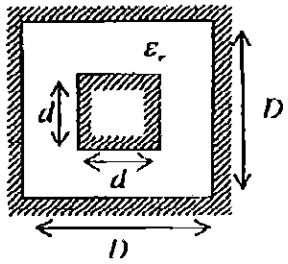
b) ¿Cómo se define la amplitud de la onda de corriente? Escriba la expresión con la que se calcula (en función del campo electromagnético TEM)

c) Comente (con brevedad) el significado de la siguiente igualdad y, sin realizarlo, describa el proceso por el cual se obtiene.

$$\int_{S_i} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} Re\left[V I^*\right]$$

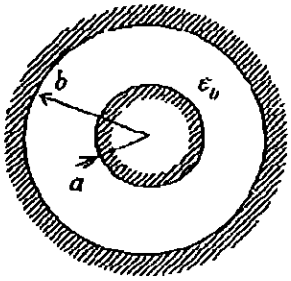
La figura representa la sección transversal de un cable coaxial cuadrado con permitividad relativa ε_r. Las siguientes expresiones presentan dos aproximaciones distintas de su impedancia característica, en función de la relación D/d.

$$Z_{01} = \frac{\eta_0}{2.75\sqrt{\varepsilon_r}} \log_{10}\left(0.953\frac{D}{d}\right)(\Omega) \quad \text{y} \quad Z_{02} = \frac{\eta_0}{4\sqrt{\varepsilon_r}\left[0.558 + \frac{2}{\left(D/d\right)-1}\right]}(\Omega)$$



Justifique razonadamente qué expresión se usa para geometrías con $D/d >> 1$ y cuál para geometrías con $D/d \to 1$

Se desea conectar este coaxial cuadrado con un coaxial circular como el de la figura (manteniendo la relación $D/d=2b/a$), de forma que no se produzca reflexión en su interconexión. Se sabe que el coaxial circular tiene una impedancia característica de 50 Ω y que su radio exterior b= 10 mm. Calcule el resto de las dimensiones de los cables (a, D y d) y el valor de la permitividad relativa (ε_r) de forma que el conductor exterior del coaxial circular circunscriba al conductor exterior del coaxial cuadrado.



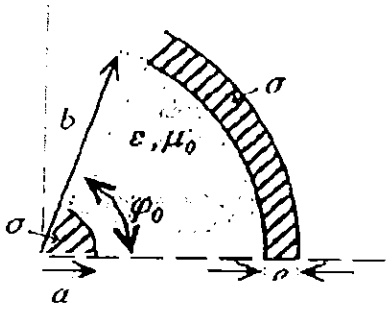
Nota: Utilice la primera de las expresiones (Z_{01}) para realizar este apartado.

Septiembre-2006

III-12

Ejercicio 3 (33%)

La figura representa la sección transversal de una línea de transmisión formada por dos conductores perfectos, $\sigma \to \infty$, y un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = \varepsilon_o(1 - j tg\delta)$ y campo eléctrico de ruptura E_r. Se considera que sólo hay campo electromagnético no nulo en la región del dieléctrico: $a < r < b$, $0 < \varphi < \varphi_0$. La expresión del potencial entre placas del problema electrostático asociado es de la forma:



$$\phi(r) = A \ln(r) + B$$

donde A y B son constantes complejas desconocidas.

Se pide obtener:

-.La expresión de la máxima diferencia de potencial que puede aplicarse sin que se produzca la ruptura del dieléctrico.

-.La impedancia característica de la línea de transmisión.

-.La máxima potencia que se puede transmitir en $z = 0$.

-.En la situación del apartado anterior, calcule las energías eléctrica y magnética almacenadas por unidad de longitud y la potencia disipada por unidad de longitud en $z = 0$.

Si consideramos que los conductores tienen conductividad finita σ y que el dieléctrico es de bajas pérdidas, obtenga la expresión de la nueva constante de propagación e indique en qué condiciones es válida.

Nota : $\nabla\phi = \hat{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\varphi}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

Febrero-2007

III-13

Se dispone de un cable coaxial de radio interior "a" y radio exterior "b", conductor perfecto, impedancia característica 25 Ω y dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 4$. Se aplica a la entrada de dicho coaxial un generador ideal de tensión $v_g(t) = 50 \cos(6\pi \cdot 10^9 t)$ (V). Considerándose dicho coaxial de longitud infinita:

A) Calcule a partir de la función potencial las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético de tipo TEM, que se propagan por dicho coaxial. Dibuje dichos campos en el plano transversal.

B) Sabiendo que el campo máximo que puede soportar el dieléctrico del coaxial es de $3 \cdot 10^6$ (V/m), que se alcanza cuando se aplica una diferencia de potencial de 10^5 (V), obtenga las dimensiones "a" y "b" del coaxial.

Considerando la excitación $v_g(t)$ inicial:

C) Calcule la densidad superficial de corriente en cada uno de los conductores. Dibújelas en el plano transversal.

D) Compruebe que la corriente total a través de cualquier plano z = constante es nula.

E) Calcule la onda de corriente y la onda de tensión. ¿Qué potencia se transmite?

Si a partir de ahora se considera que el conductor interior no es perfecto, sino de conductividad $\sigma = 10^8 / (3\pi^2)$ S/m:

F) Calcule la constante de atenuación. Obtenga el parámetro R.

G) Para el conductor interior:

Obtenga el campo eléctrico tangencial en su superficie comentando en qué condiciones es válido. Escriba una expresión aproximada del campo eléctrico en su interior. Calcule la densidad de corriente. Escriba, sin realizar los cálculos, la expresión de su corriente.

Nota:

$\phi(r,\varphi) = A \ln(r) + B$ para $a < r < b$ $\quad \nabla\phi = \hat{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\varphi}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ $\quad Z_o = \dfrac{\eta}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$\mu_o = 4\pi 10^{-7}\ (H/m)$ $\quad \eta_\sigma = \dfrac{1+j}{\sigma\delta}$, $\quad \gamma_\sigma = \dfrac{1+j}{\delta}$

Junio-2007

III-14

Considere una línea de transmisión constituida por dos conductores perfectos, uno en forma de ángulo recto y otro con forma de hipérbola, rellena de un dieléctrico con permitividad $4\varepsilon_0$ y permeabilidad μ_0, tal y como se indica en la figura. Suponiendo que el campo eléctrico para esta geometría (despreciando efecto de bordes) viene dado por:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{40}{3A^2}\,(y\,\hat{x} + x\,\hat{y})\,e^{-\gamma_0 z} \quad (V/m) & \textit{en la región sombreada} \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

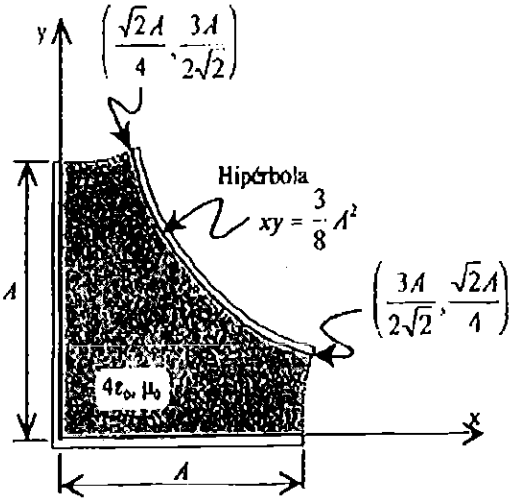
a) Determine el valor de la diferencia de potencial V_0 aplicada entre ambas placas metálicas. Escriba la onda de tensión de la línea de transmisión.

b) Calcule y dibuje cualitativamente sobre la figura la distribución de la corriente superficial en el conductor en forma de ángulo recto. ¿Dónde se encuentra el máximo de la densidad de corriente en dicho conductor?

c) Calcule la onda de corriente de la línea de transmisión. ¿Cuánto vale la impedancia característica?

d) Si el tramo de conductor horizontal ($y=0$, $0 \le x \le A$) se considera no ideal de conductividad $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, calcule la constante de propagación a la frecuencia f_0=100 MHz (considere A= 1 cm)

e) A la frecuencia f_0, dibuje el circuito equivalente de elementos concentrados de un tramo de línea corta de longitud l, especificando los valores de todos los parámetros. ¿En qué condiciones es válido dicho circuito?



Notas: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m), $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ (F/m)

Considere $\begin{cases} sh(x) = x \\ ch(x) = 1 \end{cases}$ *para* $|x| < 0.1$

Febrero-2008

III-15

Se conoce la expresión del campo eléctrico monocromático del modo TEM que se propaga por un cable coaxial de conductores perfectos, dieléctrico de permitividad relativa ε_r=4 y permeabilidad μ_0, radio interior a=0.04 m y radio exterior b= 0.092 m:

$$\vec{E} = \frac{60\,j}{r}\,e^{-j\,40\pi z}\,\hat{r} \qquad \left(\frac{V}{m}\right)$$

A) Calcule la frecuencia de trabajo.
B) Calcule el campo magnético. Obtenga también su expresión en el dominio del tiempo.
C) Calcule la onda de tensión y también su expresión en el dominio del tiempo.
D) Calcule la onda de corriente y también su expresión en el dominio del tiempo.
E) Calcule el valor medio de la potencia que se transmite por el cable.
F) Sabiendo que el campo de ruptura del dieléctrico del coaxial es de $3 \cdot 10^6$ (V/m), ¿cuál es la máxima potencia que se podría transmitir?

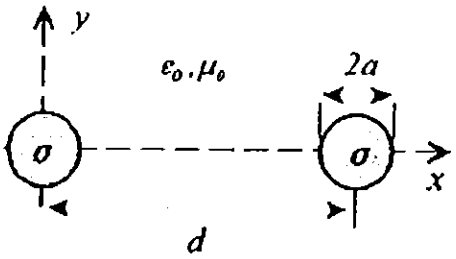
Si a partir de ahora se considera que el conductor exterior del coaxial ($r \ge b$) no es perfecto, sino de conductividad $\sigma = 10^7$ (S/m):

G) Obtenga la expresión de la constante de atenuación.
H) Calcule la potencia disipada en el cable desde el plano z=0 hasta el plano z=500 m.
I) Calcule la atenuación (en decibelios) de la señal en dicho trayecto.

Junio-2008

III-16

La figura representa la sección transversal de una línea bifilar simétrica formada por dos hilos de conductor perfecto ($\sigma \to \infty$) con el mismo radio a, separados una distancia d, y que transmite una señal a 5 MHz. Se conoce que para $a << d$ la impedancia característica de la línea y el campo eléctrico en la superficie del conductor situado sobre el eje z se pueden aproximar mediante las expresiones:



$Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$; $\vec{E}|_{r=a} = \hat{r}\,\frac{B}{a}\,e^{-\gamma_0 z}$ donde B es una constante compleja.

A) Determine la expresión de la corriente que circula por los conductores.

B) Obtenga la expresión de la potencia transmitida.

C) Consideramos ahora los conductores de cobre ($\sigma = 5.8\ 10^7$ S/m). Teniendo en cuenta la simetría de la estructura, calcule el valor de la nueva constante de propagación para $a = 1$ mm., $d = 10$ mm.

D) Calcule la potencia disipada en los 10 primeros metros si la potencia transmitida es de 1mW al comienzo de la línea.

E) Si se conoce que el campo eléctrico máximo se produce en la superficie de los conductores, calcule la máxima tensión que se puede aplicar a la línea sin que se supere el campo de ruptura del aire, $E_R = 3 \cdot 10^6$ V/m.

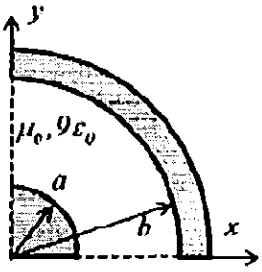
F) Para reducir las pérdidas se recubren los conductores con un material de conductividad $\sigma = 6{,}3 \cdot 10^7$ S/m. ¿Cuál es el espesor mínimo necesario de este recubrimiento que hace que se produzca el efecto deseado a la frecuencia considerada?

Nota: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m)

Septiembre-2008

III-17

Para poder colocar con mayor facilidad sobre esquinas se ha pensado en utilizar como línea de transmisión un cuarto de cable coaxial de conductores ideales, tal y como se indica en la figura. Suponiendo que la función potencial ϕ para esta geometría (despreciando el efecto de bordes) vale:



$$\phi = V_0 \frac{\ln r/a}{\ln b/a} \quad \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases} \quad con\ a = 1mm\ y\ b = 2mm$$

y que el dieléctrico utilizado tiene permitividad $9\varepsilon_0$ y permeabilidad μ_0

a) Determine los valores de los parámetros primarios y secundarios de la línea de transmisión.

b) Si el conductor interior se considera no ideal ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7\ S/m$) ¿Cómo y cuánto debería corregir los valores de los parámetros primarios y secundarios?

c) Determine el valor de la potencia disipada en 20 m de línea a la frecuencia de 100 MHz, cuando la potencia transmitida a la entrada es de 10 mW.

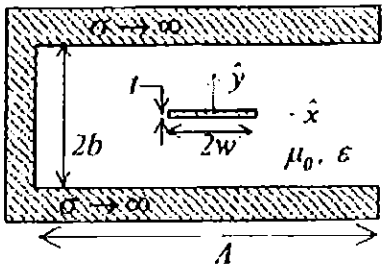
d) ¿Admite circuito equivalente de elementos concentrados la longitud de línea anteriormente considerada?

Nota: $\nabla_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$ $\quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}\left(F/m\right)$ $\quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\left(H/m\right)$

Febrero-2009

III-18

La figura representa una línea de transmisión en la que el espesor t de la lámina conductora interior de anchura $2w$ puede considerarse despreciable.
Considere todos los conductores perfectos.



a) Describa el proceso de obtención de las soluciones de campo TEM. ¿Cuántas hay?
Escriba la ecuación con las condiciones de contorno correspondientes para dichas soluciones.

Para el caso particular de: A=10 mm; w= 1 mm, b= 2 mm, ε_r= 4; se conocen los siguientes campos aproximados en la estructura:

$$\bar{E} = E_0 \hat{y} e^{-\gamma x} \quad para\ x = 0;\ 0^+ \le y \le b \qquad \bar{E} = \frac{wE_0}{\sqrt{w^2 - x^2}} \hat{y} e^{-\gamma x} \quad para\ y = 0^+;\ -w \le x \le w$$

$$\bar{E} = -E_0 \hat{y} e^{-\gamma x} \quad para\ x = 0;\ -b \le y \le 0^- \qquad \bar{E} = \frac{-wE_0}{\sqrt{w^2 - x^2}} \hat{y} e^{-\gamma x} \quad para\ y = 0^-;\ -w \le x \le w$$

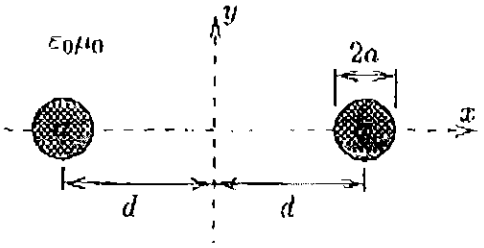
b) Determine la amplitud de la onda de tensión.
c) Determine la amplitud de la onda de corriente.
d) Determine la impedancia característica de la línea de transmisión y la potencia transmitida, supuesto que E_0=8000 (V/m)
e) Encuentre, a la frecuencia de 2 GHz, el circuito equivalente de una sección de línea de 1 mm de longitud.
f) Si el conductor interior tiene una conductividad finita σ, obtenga la expresión de la constante de atenuación debida a las pérdidas en el conductor (no realice la integral).

Nota: $\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = arcsen\left(\frac{u}{k}\right)$ $\qquad \varepsilon_0 = (1/36\pi)10^{-9}$ (F/m) $\quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m)

Junio-2009

III-19

Se considera una línea bifilar formada por dos hilos de conductor perfecto ($\sigma \to \infty$) y radio a separados por aire una distancia $2d$, con $a \ll d$.



El campo eléctrico toma el valor:

$$\vec{E} = A\frac{2d}{d^2 - x^2}\hat{x} \quad \text{en} \quad \begin{cases} -d + a \leq x \leq d - a \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

donde A es una constante compleja.

Determine la tensión aplicada entre los dos conductores.

Sabiendo que el campo magnético en la superficie de cada conductor es circunferencial, y de intensidad prácticamente constante cuando $a \ll d$, determine la corriente que circula por ellos (aproxime la expresión obtenida para $a \ll d$).

Obtenga la expresión de la impedancia característica de la línea, la constante de propagación y la potencia transmitida.

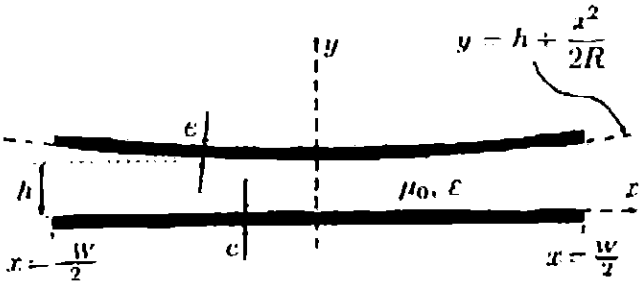
Si se consideran los conductores reales, de conductividad σ, cumpliéndose que a es mucho mayor que la profundidad de penetración en el conductor a las frecuencias de interés, obtenga para un tramo corto de línea las expresiones de los elementos del circuito equivalente, así como la nueva constante de propagación.

Nota: $\displaystyle\int \frac{du}{k^2 - u^2} = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k+u}{k-u}\right)$

Febrero-2010

III-20

Una línea de transmisión está formada por dos placas de conductor separadas por un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = \varepsilon'(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)$ y permeabilidad la del vacío. Una de las placas es plana, y la otra tiene una sección parabólica, tal y como se muestra en la figura adjunta (sección transversal de la línea).



Despreciando el efecto de bordes, y considerando los conductores perfectos, el campo eléctrico del modo TEM de la línea se puede escribir como:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{-2Axy}{(hR + x^2)^2}\, e^{-\gamma z} \\ E_y &= \frac{A}{hR + x^2}\, e^{-\gamma z} \end{aligned}\right\} \text{en} \left\{\begin{aligned} &\frac{-W}{2} \le x \le \frac{W}{2} \\ &0 \le y \le h + \frac{x^2}{2R} \end{aligned}\right.$$

donde A es una constante compleja ($R \gg W \gg h$).

Calcule la expresión de la onda de tensión. Calcule también la expresión de la onda de corriente. Obtenga la expresión de la impedancia característica, así como el valor medio de la potencia que se transmite por la línea.

Sabiendo que el campo máximo del modo se produce en $x = 0$, y que el campo de ruptura del dieléctrico es $E_{ruptura}$, deduzca la expresión de la máxima potencia que se puede transmitir.

Considere, a partir de ahora, que los conductores tienen una conductividad finita, de valor σ. Considerando que las pérdidas en los dos conductores son prácticamente iguales, obtenga la expresión de la constante de atenuación. ¿Qué condición debe cumplir el espesor e para que sea válido este resultado?

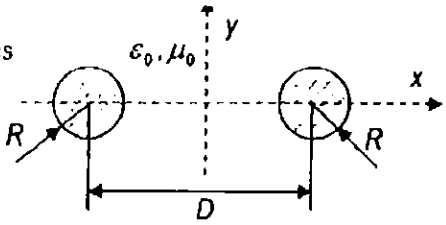
Obtenga la expresión completa de la constante de propagación.

Notas: $\displaystyle\int \frac{du}{k + u^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{u}{\sqrt{k}}\right)$; $\displaystyle\int \frac{du}{(k + u^2)^2} = \frac{1}{2k}\left[\frac{u}{k + u^2} + \frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{u}{\sqrt{k}}\right)\right]$

Junio-2010

III-21

La figura muestra la sección transversal de una línea bifilar de conductores metálicos perfectos de radio R, distancia entre conductores D y dieléctrico aire.



La función potencial de la línea viene dada por

$$\phi(x,y) = A\ln\left[\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right] \quad (V) \quad ; \quad \text{siendo} \quad a = R\sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1}$$

y A una constante.

Se sabe que la capacidad C por unidad de longitud de la línea, viene dada por:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{D}{2R}\right)+\sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2-1}\right]} \; (F/m)$$

A1- Escriba una expresión de la diferencia de potencial entre ambos conductores, sabiendo que ésta es el doble de la existente entre uno de los conductores y el origen de coordenadas.
A2- Determine la relación entre la distancia entre hilos D y el radio de los hilos R, para que la impedancia de la línea sea de 120 (Ω) (en caso necesario haga uso de la igualdad indicada en la Nota). Sabiendo que el radio mínimo de hilo conductor es de 0.1 mm, determine las dimensiones mínimas de la línea.

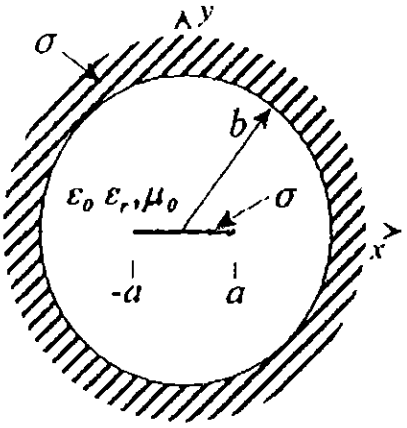
Considere ahora que las dimensiones de la línea bifilar son tales que $D>>R$.
A3- Realice las aproximaciones necesarias para obtener en estas condiciones una expresión aproximada para la función potencial y determine la diferencia de potencial aplicada entre conductores (al igual que se ha indicado anteriormente ésta es el doble de la existente entre uno de los conductores y el origen de coordenadas).
A4- Realice las aproximaciones necesarias para obtener en estas condiciones ($D>>R$) una expresión aproximada para la impedancia característica de la línea y determine la relación D/R para que la impedancia sea 360 (Ω).
A5- Sabiendo que por las simetrías de la línea, en y=0 sólo existe campo eléctrico E_x, obtenga su expresión.
A6- Obtenga la expresión del campo magnético del modo TEM en y=0.
A7- Considerando que el campo magnético en la superficie de cada conductor es circunferencial y de intensidad constante, que los conductores son de conductividad σ (S/m) y que se cumple que R es mucho mayor que la profundidad de penetración a la frecuencia de trabajo, obtenga la expresión de la potencia disipada en los conductores por unidad de longitud.

Nota:

$$\ln\left[\left(\frac{D}{2R}\right)+\sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2-1}\right] = \arg ch\left(\frac{D}{2R}\right) \quad ; \; \nabla_t\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$$

Septiembre-2010

III-22



La figura representa la sección transversal de una línea de transmisión de conductores perfectos formada por una placa metálica de anchura $2a$, que se puede considerar de espesor nulo, situada en el interior de un conductor de sección circular y radio b. La línea está rellena con un dieléctrico sin pérdidas de permitividad ε_r.

Escriba las condiciones de contorno correspondientes al campo eléctrico en la superficie de los conductores. Deduzca a partir de éstas las condiciones de contorno a imponer sobre la función potencial del modo TEM.

Se conoce que el campo eléctrico en el plano x = 0 viene dado por la expresión:

$$\vec{E}|_{x=0} = \frac{A}{\sqrt{a^2+y^2}}\ \hat{y}\ e^{-\gamma_0 z} \quad en \quad 0 \le y \le b$$

, y en la superficie de la placa metálica por:

$$\vec{E}|_{y=0} = \pm\frac{A}{\sqrt{a^2-x^2}}\ \hat{y}\ e^{-\gamma_0 z} \quad en \quad |x| < a \quad \left(\begin{array}{l} signo\ +\ :\ cara\ superior\ de\ la\ placa \\ signo\ -\ :\ cara\ inferior\ de\ la\ placa \end{array}\right)$$

donde A es una constante compleja conocida. Se pide obtener las expresiones de:
- La onda de tensión.
- La amplitud de la onda de corriente que circula por el conductor exterior.
- La impedancia característica de la línea y la potencia transmitida.
- Los valores medios de la energía eléctrica y magnética almacenada por unidad de longitud.

Si consideramos ahora que el conductor interior tiene una conductividad finita σ en el tramo situado en $-a/2 \le x \le a/2$, determine la expresión de la nueva constante de propagación. (Considere que se cumplen las condiciones de Leontovich).

NOTA: $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k^2}} = argsh(\frac{u}{k})$; $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \text{arc}sen(\frac{u}{k})$

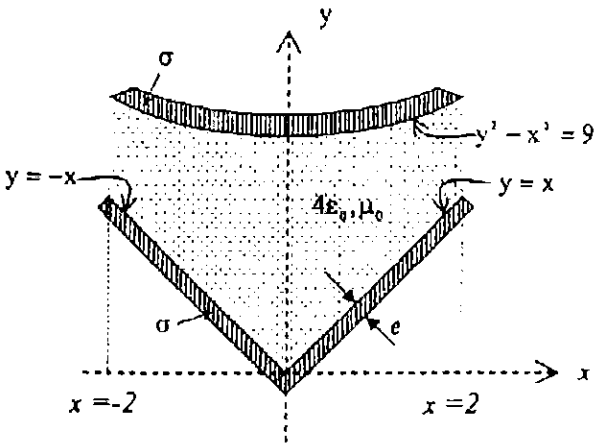
$$\int \frac{du}{k^2-u^2} = \frac{1}{k}\,argth(\frac{u}{k}) \quad para \quad |u| \le k$$

$$\nabla_r\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

Febrero-2011

III-23

Se considera una línea de transmisión formada por dos conductores y un dieléctrico de permitividad $4\varepsilon_0$. La figura representa la sección transversal de la línea, donde se distingue un conductor en forma de hipérbola, $(y^2 - x^2) = 9$, y otro en forma de línea quebrada que forma un ángulo recto, $y = x$, $y = -x$. Se considera que, despreciando el efecto de bordes, sólo hay campo electromagnético no nulo en la región del dieléctrico, punteada en la figura. Una expresión aproximada del potencial del problema electrostático asociado es de la forma: $\phi(x,y) = A\,(y^2 - x^2)$ donde A es una constante compleja que se supone conocida.



Considerando los conductores perfectos ($\sigma \to \infty$):

- Compruebe que la función potencial cumple la ecuación y las condiciones de contorno correspondientes a los modos TEM.
- Determine la expresión de la tensión aplicada a la línea, así como las expresiones de los campos eléctrico y magnético correspondientes al modo TEM.
- Obtenga la expresión de la distribución de la densidad de corriente en el conductor que forma un ángulo recto.
- Calcule el valor de la impedancia característica de la línea y determine la expresión de la potencia transmitida por ésta.
- Calcule el margen de frecuencias aproximado en que un tramo de línea de longitud 1 cm. admite circuito equivalente.

Suponiendo ahora que el conductor que forma un ángulo recto tiene conductividad finita σ, obtenga la expresión de la nueva constante de propagación e indique en qué condiciones es válida.

Nota: $dl\big|_{y=x} = \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,dy = dr$

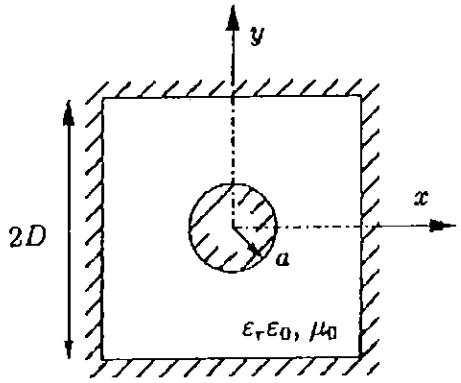
Junio-2011

III-24

La figura muestra la sección transversal de una línea de transmisión compuesta por dos conductores perfectos y coaxiales: el interior de sección circular y radio a; el exterior de sección cuadrada y lado $2D$. Buscando información sobre esta línea de transmisión se han encontrado dos expresiones aproximadas para la impedancia característica de la línea, válidas para relaciones $D/a > 1{,}5$:

$$Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r'}} \ln\left[1{,}08\frac{D}{a}\right] \quad ; \quad Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r'}} \ln\left[\varepsilon_r' \frac{D}{a}\right]$$

Una de ellas es incorrecta. Descártela, y justifique adecuadamente por qué debe descartarla.



La línea está rellena de un dieléctrico con la permeabilidad del vacío, permitividad relativa $\varepsilon_r = 1{,}08 - j0{,}00324$, y campo de ruptura $E_{rup} = 6 \cdot 10^6$ V/m. Al resolver el problema electrostático asociado a la resolución del modo TEM se ha obtenido un potencial aproximable a lo largo de la parte positiva del eje x por la expresión:

$$\Phi(x) = A\left[0{,}49\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2{,}29\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 5{,}08\left(\frac{x}{a}\right) - 3{,}28\right] \quad \text{(V)}$$

donde A es una constante compleja.

Se sabe, además, que el campo eléctrico máximo se produce en el punto de la sección transversal de coordenadas $x = a$, $y = 0$.

Determine las dimensiones de la línea (D y a) para que tenga una impedancia de valor $Z_0 = 200\ \Omega$ y transmita una potencia máxima $W_{T\ max} = 50$ MW.

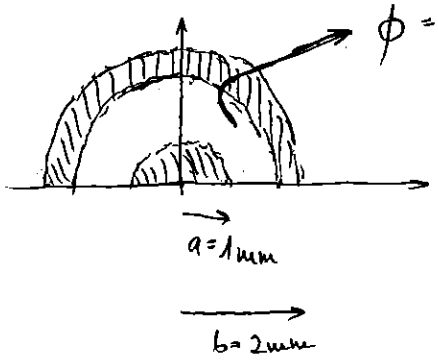
Determine la intensidad de la corriente cuando se conecta a la línea (en $z = 0$) un generador de frecuencia $f_0 = 800$ MHz que entrega la potencia máxima transmisible por la línea. Calcule, además, la potencia que se disipa en el primer metro de la línea, en esa misma situación.

Dibuje un circuito equivalente capaz de representar 5 mm de la línea de transmisión a la frecuencia f_0, y justifique su validez. Calcule el valor numérico de sus elementos, indicando las unidades.

Nota: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m) $\qquad \varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m)

Septiembre-2011

III-1



a) $\gamma_0 = j\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = j2\pi f_0\sqrt{\mu_0 9\varepsilon_0} = j\frac{2\pi f_0\sqrt{9}}{c_0} = j2\pi f_0 \cdot 10^{-8}\ (m^{-1}) \equiv$ CTE PROP DEL MODO TEM

$$Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0 \cdot e^{-\gamma_0 z}}{I_0\ e^{-\gamma_0 z}} = \frac{V_0}{I_0}\ (\Omega) \equiv \text{IMP. característica de la LTD}$$

siendo: $V_0 = \phi(\text{cond } 1) - \phi(\text{cond } 2) = \phi(r=b) - \phi(r=a) = V_0 - 0 = V_0$

CALCULO DE I_0:

$$\bar{E} = (-\nabla_t \phi)\cdot e^{-\gamma_0 z} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}\cdot e^{-\gamma_0 z} = \frac{-V_0}{\ln(b/a)\cdot r}\hat{r}\, e^{-\gamma_0 z}\ (V/m)$$

$$\bar{H} = \frac{\hat{z}\times\bar{E}}{\eta} = \frac{V_0}{\eta\ln(b/a)\cdot r}(-\hat{\varphi})\cdot e^{-\gamma_0 z}\ (A/m)$$

$$\bar{J}_s(r=a) = \hat{n}\times\bar{H}\Big|_{r=a} = \hat{r}\times\bar{H}\Big|_{r=a} = (-\hat{z})\frac{V_0}{\eta\ln(b/a)\,a}\cdot e^{-\gamma_0 z}\ (A/m)$$

$$\bar{J}_s(r=b) = \hat{n}\times\bar{H}\Big|_{r=b} = -\hat{r}\times H\Big|_{r=b} = \hat{z}\frac{V_0}{\eta\ln(b/a)\cdot b}\, e^{-\gamma_0 z}\ (A/m)$$

Calculamos la corriente en $r=a$

$$I_0 = \int_L \bar{J}_s(r=a)\Big|_{z=0}(-\hat{z})\,dl = \int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{V_0}{\eta\ln(b/a)\cdot a}\,a\,d\varphi = \frac{V_0\pi}{\ln(b/a)\cdot\eta}\ (A)$$

Calcular la corriente en $r=b$

$$I_0 = \int_L J_s(r=b)\Big|_{z=0}\hat{z}\,dl = \frac{V_0\pi}{\ln(b/a)\eta}\ (A)$$

La onda de corriente es $I(z) = I_0\, e^{-\gamma_0 z}\ (A)$

Así pues: $Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \eta \frac{\ln(b/a)}{\pi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{9\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln(2)}{\pi} = \frac{120\pi}{\sqrt{9}} \cdot \frac{\ln(2)}{\pi} = 40 \ln(2)\ (\Omega)$

Por otro lado $K_g = \frac{Z_0}{\eta} = \frac{\ln(b/a)}{\pi} = \frac{\ln(2)}{\pi} = 0'22$

$L = \mu_0 K_g = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot K_g = \ldots (H/m) \equiv$ Autoinducción p.u.l

$C = \frac{\varepsilon}{K_g} = \frac{9\varepsilon_0}{K_g} = \frac{9 \frac{10^{-9}}{36\pi}}{K_g} = \ldots (F/m) \equiv$ Capacidad p.u.l.

$G = \frac{\omega\varepsilon''}{K_g} = 0\ (S/m)$ porque no hay perdidas en el dieléctrico

$R = 0\ (\Omega/m)$. porque no hay perdidas en el conductor

b) $\sigma = 5'8 \cdot 10^7\ S/m$ en $r \le a = 1\,mm$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}\ (m) \longrightarrow$ Suponemos que se cumple la condición de Leontovich

Los parametros anteriores ahora son:

$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = Z_0 \left(1 + \frac{\alpha_c}{\gamma_0}\right)\ (\Omega)$ $\qquad \gamma = \alpha_c + \gamma_0 = \alpha_c + j\, 2\pi f_0 \cdot 10^{-8}\ (m^{-1})$

L, C, y G no se modifican

$R = 2\alpha_c \sqrt{\frac{L}{C}} = 2\alpha_c Z_0\ (\Omega/m)$

R por unidad de long.

$G = 0$

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Calculo de α_c:

$\alpha_c = \frac{W_{pc}}{2 W_T(z)}\ (Np/m)$

$W_T(z) = \frac{1}{2} Re\left(V(z) \cdot I^*(z)\right) =$

$= \frac{1}{2} Re\left(V_0 \cdot e^{-j 2\pi f_0 \cdot 10^{-8} z} \cdot \frac{V_0^* \pi}{\eta \ln(b/a)} e^{j 2\pi f_0 10^{-8} z}\right)$

$= \frac{|V_0|^2 \pi}{2\eta \ln(b/a)}\ (W)$

$W_{pc} = \int \frac{1}{2\pi\delta} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)\, dl = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{|V_0|^2}{\eta^2 \ln^2(b/a) \cdot r^2}\Big|_{r=a} a\, d\varphi$

cond

$W_{pc} = \frac{|V_0|^2 \cdot \pi}{2\sigma\delta\eta^2 \ln^2(b/a)\, a}\ (W/m)$

Finalmente $\alpha_c = \frac{W_{pc}}{2 W_T(z)} = 1'5 \cdot 10^{-6} \sqrt{f_{Hz}}\ (Np/m)$

$R = 8'3 \cdot 10^{-5} \sqrt{f_{Hz}}$

c).

$$W_{dis\ en\ 20m} = W_T(z=0)\left(1-e^{-2\alpha\cdot 20}\right) = 10\,mW\left(1-e^{-2\cdot 1'5\cdot 10^{-6}\sqrt{10^9}\cdot 20}\right) = 4'51\,mW$$

d) Admite cto si: $|\gamma_0 \cdot l_{eq}| \leq 0'1$

$|j\cdot 2\pi\cdot 10^{-9}\cdot f_0\cdot 20| = 40\pi \gg$ No admite cto equivalente de elementos concentrados

$\boxed{\text{III}-1}$ resion 2.

a) $L = L_{ext}$

b) C y G no cambian

$$L = L_{ext} + L_{int} \approx L_{ext} = \mu_0 k_g \ (H/m)$$

Si se cumplen condiciones de Leontovich y en alta frec ($L_{int} \approx 0$)

$$R \neq 0 \ \text{y} \ R = \frac{1}{\sigma \delta} k_j \ (\Omega/m)$$

$$k_j = \frac{\oint_0 |\bar{J}_s| dl}{\left|\oint_c |\bar{J}_s| dl\right|^2} = \left\{ \bar{J}_{s_{rea}} = \frac{V_0}{\eta \cdot \ln(b/a) a} \cdot (-\hat{z}) \, e^{-\gamma_0 z} \right\} = \frac{1}{P_{eim}} = \frac{1}{\pi a}$$

como no depende de r ni de φ

$$R = \frac{1}{\sigma \delta \pi a} = 8'3 \cdot 10^{-3} \sqrt{f_{Hz}} \ (\Omega/m) \ \approx \text{Res por u.d.l}$$

Los param 2ários

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} \ (\Omega)$$

$$\gamma_c = \alpha_c + \gamma_0 = \alpha_c + j\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \alpha_c + j 2\pi f_0 \cdot 10^{-8}$$

siendo $\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2 Z_0} = 1'5 \cdot 10^{-6} \sqrt{f_{Hz}} \ (N_p/m)$

e) Para obtener los modos TEM de este medio de transmisión debemos resolver el problema electrostático bidimensional.

La ecuación diferencial y las condiciones de contorno son:

$$\nabla_t^2 \phi(u_1, u_2) = 0 \quad (\text{Ec. de Laplace})$$

$$\phi(u_1, u_2)\Big|_{S\sigma} = V = cte \quad \left(\begin{array}{c}\text{Los cond. perfectos} \\ \text{son equipotenciales}\end{array}\right)$$

Como la región es simplemente CONEXA (SOLO TIENE UN CONDUCTOR) al resolver la ec. anterior obtenemos $\phi(u_1, u_2) = V = cte$

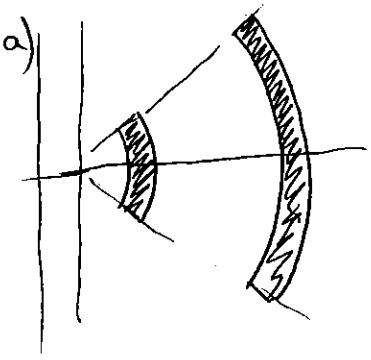
Así pues

$$\bar{E}_t = (-\nabla_t \phi) e^{-\gamma_0 z} = \vec{0}$$

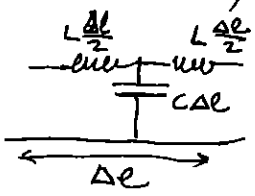
$$\bar{H}_t = \frac{\hat{z} \times \bar{E}_t}{Z_{TEM}} = \bar{0}$$

Por tanto no soport TEM

a)



El ckto eq. de una sección de línea de pequeña long ($|\gamma \cdot l_{sen}| \ll 1$) es:



$$L \cdot \frac{\Delta l}{2} = \mu_0 \cdot k_g \cdot \frac{\Delta l}{2} \quad (H)$$

$$C\Delta l = \frac{\varepsilon'}{k_g} \Delta l = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{k_g} \Delta l \quad (F)$$

Calculo de k_g:

$$V_0 = \phi(\text{cond}1) - \phi(\text{cond}2) = \phi(r=b) - \phi(r=a) = A \ln(b/a) \quad (V)$$

$$\bar{E}_t = (-\nabla_t \phi) e^{-\gamma_0 z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} \cdot e^{-\gamma_0 z} = (-\hat{r}) \frac{A}{r} e^{-j\beta z} \quad (V/m)$$

$$\bar{H}_t = \frac{\hat{z} \times \bar{E}_t}{Z_{TEM}} = (-\varphi) \cdot \frac{A}{\eta \cdot r} e^{-j\beta z} \quad (A/m)$$

$$J_s(r=b) = \hat{n}_s \times \bar{H}\Big|_{cond2} = (-\hat{r}) \times \bar{H}(r=b) = (+z) \frac{A}{\eta b} \cdot e^{-j\beta z} \quad (A/m)$$

$$I_0 = \int_{cond} \bar{J}_s(r=b)\Big|_{z=0} \hat{z}\, dl = \int_{-\psi}^{\psi} \frac{A}{\eta b} \cdot b\, d\varphi = \frac{A \cdot 2\psi}{\eta} \quad (A)$$

$G = 0$ (S/m) ya que $\varepsilon'' = 0$

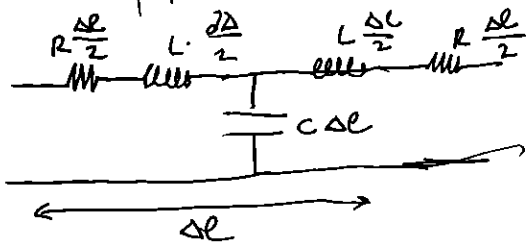
$R = 0$ (Ω/m) ya que $\sigma \to \infty$

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \eta \frac{\ln(b/a)}{2\psi} \quad (\Omega)$$

$$\hookrightarrow k_g = \frac{Z_0}{\eta} = \frac{\ln(b/a)}{2\psi} \quad (\text{ADIM})$$

b) $(\sigma(r=a) \neq \infty)$

Como hay pérdidas en los conductores el cto anterior es:



Ahora: $L = L_{ext} + L_{int} = \mu_0 k_g + \frac{1}{\sigma\delta\omega} k_j \quad (H/m)$

$$R = \frac{1}{\sigma\delta} k_j \quad (\Omega/m)$$

siendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} (m) =$ Prof de penetración

Según el dibujo se cumple condición de Leontovich: $(e \gg \delta)$

$$k_j = \frac{\oint_c |J_s|^2 dl}{\left|\oint_c J_s dl\right|^2} = \left\langle \begin{matrix} \bar{J}_s \text{ no depende} \\ \text{de coord} \\ \text{trans} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{P_{eim}} = \frac{1}{2\psi a}$$

$$W_{pc} = \frac{1}{4} \cdot R\, I(z)\, I^*(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma\delta\, 2\psi a} \cdot \frac{|A|^2 (2\psi)^2}{\eta^2} = \frac{|A|^2\, 2\psi}{4\sigma\delta a \eta^2} \quad (W/m)$$

$$\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} = \frac{1}{2\sigma\delta\, 2\psi a \eta \frac{\ln(b/a)}{2\psi}} = \frac{1}{2\sigma\delta \eta a \ln(b/a)} \quad (W/m)$$

c) Para minimizar la cte de atenuación hay que maximizar $a\ln(b/a)$

$$\frac{\partial a \ln(b/a)}{\partial a} = 1 \cdot \ln(b/a) - \frac{1}{a} \cdot a = 0 \Rightarrow \ln(b/a) = 1 \Rightarrow b = e \cdot a$$

$$\left.\frac{\partial^2 a \ln(b/a)}{\partial a^2} = \frac{-1}{a}\right|_{b=ea} < 0 \Rightarrow b = e \cdot a \quad \text{MAXIMIZA } a\ln(b/a) \text{ o minimiza } \alpha_c$$

d) $\ln(b/a) = 1 \qquad \psi = \pi/3 \qquad$ ¿ε_r si $Z_c = 60\,\Omega$?

$$Z_c = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{j\omega C}} \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \longrightarrow Z_0 = \eta \cdot k_g = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\ln(b/a)}{2\psi} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{2\frac{\pi}{3}} = 60\,\Omega$$

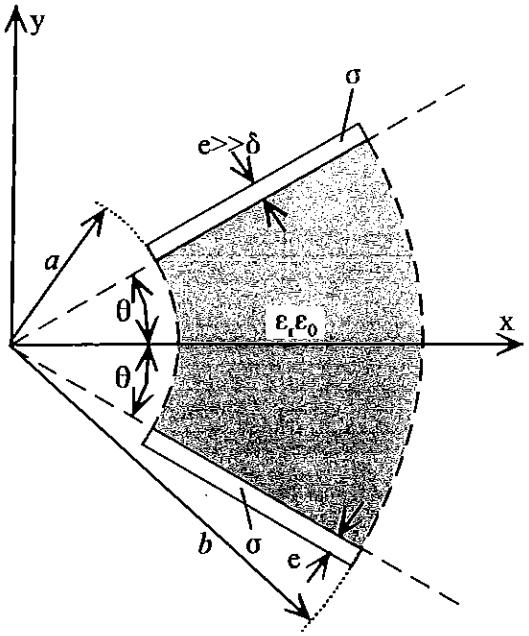
$\hookrightarrow \varepsilon_r = 9$

Dept. de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos.
Campos y Ondas en Telecomunicación.
Curso 2011-2012. Grupo 21.2

EJERCICIO 14 de evaluación continua (entrega 30 de mayo, 12h)

Línea sectorial.

La figura representa la sección recta de una línea de transmisión (ε_r real).



Sabiendo que la solución para el potencial entre placas del problema electrostático equivalente es, despreciando los efectos de borde,

$$\phi(r,\varphi) = A\varphi \quad \text{para} \quad a \le r \le b, \ -\theta \le \varphi \le \theta$$

siendo A una constante compleja conocida, calcular:
a) La tensión aplicada a la línea.
b) Los campos eléctrico y magnético.
c) La corriente en los conductores.
d) La impedancia característica.
e) La potencia transmitida.
f) La resistencia de los conductores por unidad de longitud.
g) La constante de atenuación debida a los conductores.
h) Los valores de los elementos del circuito equivalente de una sección de línea de transmisión de longitud $l \ll c_0/(f\sqrt{\varepsilon_r})$.

0'68 + 0'36 = 1'04

15 | 5

0'1 · 1'5 + 0'2 · 5 = 0'1 + 1'2 = 1'3

LINEA SECTORIAL

$$\phi(r,\varphi) = A\cdot\varphi \quad \text{para } a \le r \le b \;;\; -\theta \le \varphi \le \theta \quad A \in \mathbb{C} \text{ (MATO)}$$

a) $$V_0 = \phi(\text{cond } 1) - \phi(\text{cond } 2) = \phi(\varphi=\theta) - \phi(\varphi=-\theta) = A\cdot\theta - (-A\theta) = 2A\theta$$

b) $$\bar{E} = (-\nabla_t \phi)e^{-\gamma z} = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)\cdot e^{-\gamma z} = (-\hat{\varphi})\frac{A}{r}\cdot e^{-\gamma z} \quad (V/m)$$

$$\bar{H} = \frac{\hat{z}\times\bar{E}}{Z_{TEM}} = (+\hat{r})\frac{A}{\eta\cdot r}\cdot e^{-\gamma z} \quad (A/m)$$

siendo $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ (Ω)

$$\gamma = \alpha_c + \gamma_0 = \alpha_c + j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = \alpha_c + j\frac{2\pi f}{3\cdot10^8}\sqrt{\varepsilon_r} \quad (m^{-1})$$

c) Sabemos que se cumple la cond de Leontovich $(e \gg \delta)$

$$\bar{E}_s(\varphi=\theta) = \frac{1+j}{\sigma\delta}\left(\bar{H}\times\hat{n}_{ext}\right)\Big| = \frac{1+j}{\sigma\delta}\left(\bar{H}(\varphi=\theta)\times\hat{\varphi}\right) = \hat{z}\frac{1+j}{\sigma\delta}\frac{A}{\eta r}\cdot e^{-\gamma z} \quad (V/m)$$

$$E_{int}\Big|_{\substack{\text{conductor}\\ \text{superior}}} = E_s(\varphi=\theta)\cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}(\varphi-\theta)} = \hat{z}\frac{1+j}{\sigma\delta}\cdot\frac{A}{\eta r}\cdot e^{-\gamma z}e^{-\frac{1+j}{\delta}(\varphi-\theta)} \quad (V/m)$$

$$\bar{J}_{int} = \sigma\cdot E_{int} = \hat{z}\frac{1+j}{\delta}\cdot\frac{A}{\eta\cdot r}\cdot e^{-\gamma z}\cdot e^{\frac{1+j}{\delta}(\varphi-\theta)} \quad (A/m^2)$$

En el cond inf analogamente

$$J_{int}\Big|_{inf} = \sigma E_{int} = (-\hat{z})\frac{1+j}{\delta}\frac{A}{\eta r}\cdot e^{-\gamma z}\cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}(-\varphi+\theta)} \quad (A/m^2)$$

d) Sabemos: $V_0 = 2A\theta \Rightarrow Z_0 = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0}$ (Ω)

$$\bar{J}_s(\varphi=\theta) = \hat{n}_s\times\bar{H}(\varphi=\theta) = (-\hat{\varphi})\times\bar{H}(\varphi=\theta) = \hat{z}\frac{A}{\eta\cdot r}e^{-\gamma z} \quad (A/m)$$

$$I_0 = \int_{\substack{\text{cond}\\ \text{sup}}}\bar{J}_s(\varphi=0)\Big|_{z=0}\cdot\hat{z}\cdot dl = \int_a^b\frac{A}{\eta\cdot r}dr = \frac{A}{\eta}\ln(b/a) \quad (A)$$

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{2A\theta}{\frac{A}{\eta}\ln(b/a)} = \eta\frac{2\theta}{\ln(b/a)} \quad (\Omega)$$

e) $$W_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(V(t)\cdot I(z)^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(V_0\cdot e^{-\alpha_c z}\cdot e^{-j\beta z}\cdot I_0^*\cdot e^{-\alpha_c z}\cdot e^{+j\beta z}\right) =$$

$$= \frac{\theta\,|A|^2\cdot\ln(b/a)}{\eta}\,e^{-2\alpha_c z} \quad (W)$$

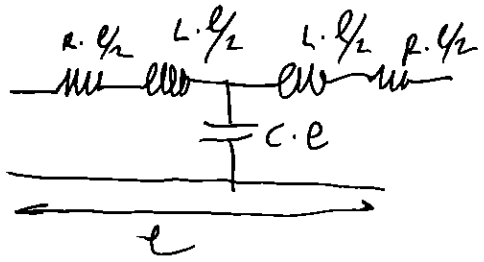
f) $$R_{sup} = \frac{1}{\sigma\delta}K_j = \frac{1}{\sigma\delta}\frac{\oint_c |J_s|^2 dl}{\left|\oint_c \bar{J}_s\, dl\right|^2} = \frac{1}{\sigma\delta}\cdot\frac{\int_a^b \frac{|A|^2}{\eta^2\cdot r^2}e^{-2\alpha_c z}dr}{\left|\int_a^b \hat{z}\cdot\frac{A}{\eta\cdot r}e^{-\alpha_c z}dr\right|^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\delta}\cdot\frac{-1/r\Big|_a^b}{\ln(b/a)^2} = \frac{1/a - 1/b}{\sigma\delta\,\ln^2(b/a)} = \frac{b-a}{\sigma\delta\, b\cdot a\ln^2(b/a)} \quad (\Omega/m)$$

$$R_{tot} = R_{if} + R_{sup} = \frac{2(b-a)}{\sigma\cdot\delta\cdot b\cdot a\,\ln^2(b/a)} \quad (\Omega/m)$$

g) $$\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R}{2\eta\cdot\frac{2\theta}{\ln(b/a)}} = \frac{b-a}{2\theta\,\eta\cdot\sigma\cdot\delta\cdot b\cdot a\cdot\ln(b/a)} \quad (Np/m)$$

h) $l \ll \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$ (como este long admite esto eq)

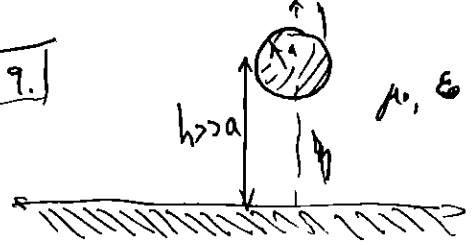


$G = 0$ (S/m) = No hay perdidas en el dieléctrico

$$C = \frac{\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0}{K_g} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\ln(b/a)}{2\theta} \quad (F/m)$$

$$L \simeq L_{ext} + L_{int} = \mu_0 K_g + \frac{1}{\sigma\delta\omega}K_j \simeq \mu_0 K_g = \mu_0\frac{2\theta}{\ln(b/a)} \quad (H/m)$$

III-9.



A) $V_0 = 2A \ln\left(\frac{2h}{a}\right)$

$$V_0 = \phi(\text{cond}1) - \phi(\text{cond}2) = \phi(x=0, y=h+a) - \phi(x=0, y=0) =$$

$$= A \ln\left[\left(\frac{h+a+b}{h+a-b}\right)^2\right] - A \ln\left(\frac{b^2}{(-b)^2}\right) \cong 2A \cdot \ln\left(\frac{2h+a}{a}\right) \cong 2A \cdot \ln\left(\frac{2h}{a}\right)$$

B) $Z_0 = \frac{\eta_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2h}{a}\right) (\Omega)$

$$I(z) = I_0 e^{-\gamma_0 z} = \frac{A}{30} \cdot e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8} z} \ (A)$$

c) $\bar{E}_t = (-\nabla_t \phi) e^{-\gamma_0 z} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{y}\right) \cdot e^{-\gamma_0 z} = \dots =$

$$= \frac{1}{[x^2+(y+b)^2][x^2+(y-b)^2]} \cdot \left[8Axyb\,\hat{x} + 4Ab\,(y^2-x^2-b^2)\,\hat{y}\right] e^{-\gamma_0 z} \ (V/m)$$

La condición de contorno para $\vec{E}$ es: $\hat{n}_{12} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1)\big|_S = \vec{0}$

En $y=0$ $\quad \hat{y} \times (\bar{E}(y=0^+) - \underbrace{\bar{E}(y=0^-)}_{0}) = \dots = \bar{0}$

(Si cumple ya que $\hat{y} \times \hat{y} = 0$ y además $y\big|_{y=0} = 0$)

$$\bar{E}_t\Big|_{\substack{y=0\\z=0}} = -\frac{4Ab}{(x^2+b^2)} \cdot \hat{y} \ (V/m)$$

D) $\sigma \neq \infty$ en $y=0$

$\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} \ (Np/m)$ $\quad$ Suponiendo cond. Leontovich: $R = \frac{1}{\delta\sigma} K_j$

$$R = \frac{1}{\sigma\delta} \frac{\oint_c |\bar{J}_s|^2 dl}{\left|\oint_c \bar{J}_s\, dl\right|^2}$$

$\bar{J}_s(y=0) = \hat{n}_s \times \bar{H}\big|_{y=0} = \hat{y} \times \bar{H}\big|_{y=0} = \hat{y} \times \left(\frac{z \times E(y=0)}{Z_{TOM}}\right) =$

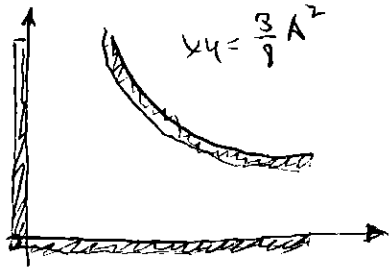
$$\alpha_c = \frac{1}{2\sigma\delta\,\eta_0\, b \ln\left(\frac{2h}{a}\right)} \ (Np/m) \qquad \bar{J}_s = (-\hat{z})\frac{4Ab}{\eta(a^2+b^2)} \ (A/m)$$

E)

$$L = \mu_0 k_g + \frac{1}{\sigma \delta \omega} k_j \approx \mu_0 k_g$$

$$C = \frac{\varepsilon'}{k_g} = \frac{\varepsilon_0}{k_g} \qquad k_g = \frac{z_0}{\eta}$$

III-14.



a) $V(z) = V_0 e^{-\gamma_0 z} = V_0 \cdot e^{-j\frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon_r}}{3\cdot 10^8} z}$ (V)

$\equiv$ ONDA DE TENSIÓN

Cálculo de V_0:

$V_0 = \phi(\text{cond } 1) - \phi(\text{cond } 2) = \phi(\text{HIPERBOLA}) - \phi(\text{RECTO})$

$= \phi\left(A, \frac{3}{8}A\right) - \phi(A, 0) = -\int_{(A,0)}^{\left(A,\frac{3}{8}A\right)} \bar{E}\Big|_{z=0} d\bar{l} =$

$= \int_{(A,0)}^{\left(A,\frac{3}{8}A\right)} -\frac{40}{3A^2}(y\hat{x} + x\hat{y})(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}) = \frac{40}{3A^2}\left[\int_{x=A}^{A} y\,dx + \int_{y=0}^{\frac{3}{8}A} x\,dy\right]$

$= \frac{40}{3A^2}\left[0 + A\left(\frac{3}{8}A - 0\right)\right] = 5$ (V)

III-3 IGUAL

$\phi = \frac{8}{3}\frac{V_0}{A^2}xy$

$V_0 = \phi(\text{HIPERBOLAS}) - \phi(\text{RECTO}) = \phi\left(xy = \frac{3}{8}A^2\right) - \phi(x=0 \text{ ó } y=0)$

$= V_0 - 0 = V_0$

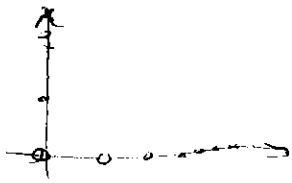
b)

$$\bar{J}_s\Big|_{cond} = \hat{n}_s \times \bar{H}\Big|_{cond} = \begin{cases} \hat{y} \times \bar{H}\Big|_{y=0} = (-\hat{z})\frac{40x}{\eta 3A^2}e^{-\gamma_0 z} \\ \hat{x} \times \bar{H}\Big|_{x=0} = (-\hat{z})\frac{40y}{\eta 3A^2}e^{-\gamma_0 z} \end{cases} \quad (A/m)$$

$$\bar{H} = \frac{\hat{z} \times \bar{E}}{\eta_{TEM}} = \frac{-40}{\eta \cdot 3A^2}(y\hat{y} - x\hat{x})e^{-\gamma_0 z} = \frac{40}{\eta\, 3A^2}(x\hat{x} - y\hat{y})e^{-\gamma_0 z}$$

El valor máximo de estas $\bar{J}_s$ en el conductor están en

$x = A$ y $y = A$



c) $I(z) = I_0\, e^{-j\frac{2\pi f_0}{3\cdot 10^8}\sqrt{4}}$

$$I_0 = \int_{\text{cond.}} \bar{J}_s\Big|_{z=0}(-z)\,dl = \frac{40}{\eta 3A^2}\left[\int_{x=0}^{A} x\,dx + \int_{y=0}^{A} y\,dy\right] = \frac{40}{3\eta} = \frac{2}{9\pi}\ (A)$$

$$Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{5}{2/9\pi} = \frac{45\pi}{2}\ (\Omega) \qquad k_g = \frac{Z_0}{\eta} = \frac{Z_0}{60\pi} = \frac{3}{8}$$

d) $\sigma = 5'8\cdot 10^7\ (S/m)$ $\quad y=0,\ 0\le x\le A$

$$\gamma_c = \alpha_c + \gamma_i = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + j\,\frac{2\pi\cdot 10^8\sqrt{4}}{3\cdot 10^8} = \frac{R}{2Z_0} + j\,\frac{4\pi}{3}\ (m^{-1})$$

$$R = \frac{1}{\sigma\delta}\,k_j\ (\Omega/m) \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \mu_0 \sigma}}$$

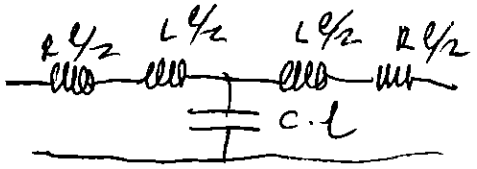
$$k_j = \frac{\oint_c |\bar{J}_s|^2 dl}{\left|\oint_c \bar{J}_s\, dl\right|^2} = \frac{\int_{x=0}^{A}}{\quad} \cdot \frac{(A^2/3)}{A^2/2} = \frac{4}{3A} = \frac{400}{3}$$

$\longrightarrow R$

$\longrightarrow \alpha_c$

$\longrightarrow \delta_c$

e) El siguiente cto es válido si $|\gamma_i\cdot l| \ll 1 \Longrightarrow \left|\frac{4\pi}{3} l\right| \ll 1$



$R\cdot l/2 = \cdots\ (\Omega)$

$C\cdot l = \frac{\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0}{k_g}\, l = \frac{4\varepsilon_0}{3/8}\cdot l = \cdots\ (F)$

$$L\cdot l/2 = (L_{ext} + L_{int})\, l/2 = \left(\mu_0\cdot k_g + \frac{1}{\sigma\delta\omega}\,k_j\right) l/2 =$$

$$= \left(\mu\, 3/8 + \frac{1}{\sigma\delta\, 2\pi f}\,\frac{400}{3}\right) l/2 = \cdots\ (H)$$

III 5

$$E\Big|_{y=0} = \begin{cases} \pm \dfrac{A}{\sqrt{b^2-x^2}}\,\hat{y}\, e^{-\gamma_0 z} & \text{si } |x| \le b \\[2ex] \dfrac{A}{\sqrt{x^2-b^2}}\,\hat{x}\, e^{-\gamma_0 z} & \text{si } b \le x \le a \end{cases}$$

a) $V_0 = \phi(\text{cond}1) - \phi(\text{cond}2) = \phi(x=b) - \phi(x=a) = -\int_a^b E\Big|_{z=0} dl = -\int_{x=a}^{b} \frac{A}{\sqrt{x^2-b^2}}\,dx =$

$$= -A \operatorname{argch}\left(\frac{x}{b}\right)\Big]_a^b = A\left[\operatorname{argch}(a/b) - \cancel{\operatorname{argch}(1)}\ *\right] = A \operatorname{argch}(a/b)$$

b) $$\bar{J}_s\Big|_{cond} = \hat{n}_r \times \bar{H}\Big|_{cond} = \begin{cases} \hat{y} \times \left(\dfrac{-A\hat{x}\, e^{-\gamma_0 z}}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\right) = (+\hat{z})\left(\dfrac{A}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\, e^{-\gamma_0 z}\right) \\[2ex] -\hat{y} \times \left(\dfrac{A\hat{x}\, e^{-\gamma_0 z}}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\right) = (\hat{z})\dfrac{A}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\, e^{-\gamma_0 z} \end{cases}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{z}\times\bar{E}}{Z_{TEM}} = \mp \frac{A}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\,\hat{x}\, e^{-\gamma_0 z}$$

$$I_0 = \int_{cond} \bar{J}_s\Big|_{z=0} \hat{z}\, dl = 2\cdot\frac{A}{\eta}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{2A}{\eta}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{b}\right)\Big]_{-b}^{b} =$$

$$= \frac{2A}{\eta}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2A\pi}{\eta_0/\sqrt{2}} = \frac{A\sqrt{2}}{60}$$

c) $$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \eta\,\frac{\operatorname{argch}(a/b)}{2\pi} = \frac{60 \operatorname{argch}(a/b)}{\sqrt{2}}$$

$$W_T = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(V(z)\, I^*(z)\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(V_0 \cdot I_0^*\right) = \frac{|A|^2\cdot\sqrt{2}\operatorname{argch}(a/b)}{120}$$

D)

$$\gamma_c = \alpha_c + \gamma_0 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + j\,\frac{2\pi f\sqrt{2}}{3\cdot 10^8} = \frac{R}{2Z_0} + j\,\frac{2\pi f\sqrt{L}}{3\cdot 10^8}\ (m^{-1})$$

El nuevo elemento del cto $R/2\ \ell$

Considerando que se cumplen las cond de Leontovich

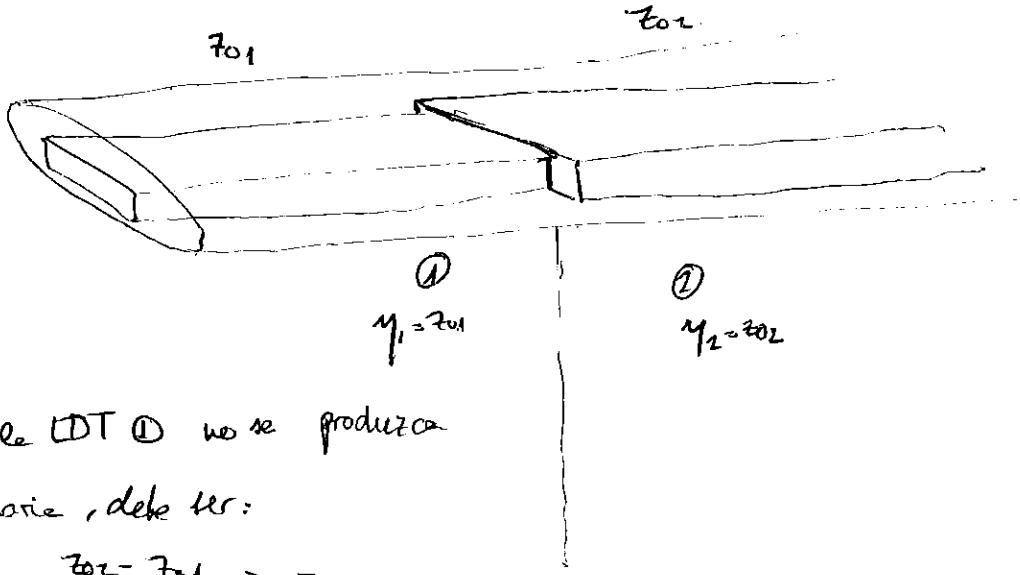
$$R = \frac{1}{\sigma\delta}\ K_j\ (\Omega/m)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}\ (m)$$

$$K_j = \frac{\oint_c |\bar{J}_s|^2\, d\ell}{\left|\oint_c \bar{J}_s\, d\ell\right|^2}\cdot 2 = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \frac{|A|\,|e^{-\gamma_{10}z}|^2}{\eta^2\,(b^2-x^2)}\,dx}{\left|\int_{-b/2}^{b/2} \frac{A\,e^{-\gamma_{10}z}}{\eta\sqrt{b^2-x^2}}\,dx\right|^2}\cdot 2 = 2\,\frac{\frac{1}{b}\,\mathrm{argth}\left(\frac{x}{b}\right)\Big|_{-b/2}^{b/2}}{\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{b}\right)\Big|_{-b/2}^{b/2}} =$$

$$= \frac{2}{b}\,\frac{2\cdot \mathrm{argth}(1/2)}{b\,\pi/3}$$

E)



para que en la LDT ① no se produzca onda estacionaria, debe ser:

$$\rho_{12} = 0 = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \Rightarrow Z_{02} = Z_{01}$$

Como la geom es la misma $k_g = \frac{Z_0}{\eta} = \frac{\mathrm{argch}(a/b)}{2\pi}$

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{argch}(a/b)}{2\pi} = \eta_0\,\frac{\mathrm{argch}(a/b_n)}{2\pi} = Z_{02}$$

Dept. de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos.
Campos y Ondas en Telecomunicación.
Curso 2011-2012. Grupo 21.2

EJERCICIO 15 de evaluación continua (entrega 30 de mayo, 12h)

Dos coaxiales conectados.

Se consideran dos cables coaxiales de conductor perfecto. El cable 1 tiene un conductor exterior de radio b, un conductor interior de radio a_1 y está relleno de un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_{r1} = 1$. El cable 2 tiene un conductor exterior del mismo radio b que el anterior, un conductor interior de radio a_2 y está relleno de un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_{r2} = 4$.
a) Calcule la relación que deben cumplir las dimensiones de ambos cables para que presenten la misma impedancia característica.
b) En ambos cables se excita una onda de tensión de la misma amplitud V_0. Calcule la relación de los valores de campo máximo en ambos cables, indicando dónde se produce dicho máximo.
c) Calcule las dimensiones del cable 2 para que tenga la misma impedancia característica y el mismo campo máximo que el cable 1.

Para las dimensiones calculadas en el apartado anterior:
d) Considere ahora que los conductores interiores no son perfectos, sino de conductividad σ (S/m). Obtenga el parámetro 'resistencia por unidad de longitud' de ambos cables, y calcule su relación. ¿Cuál es la relación entre las constantes de atenuación en ambos cables?
e) Considerando de nuevo los conductores perfectos, se conectan en cascada el coaxial 1 con el coaxial 2 (coaxial 2 de longitud indefinida):

e1) ¿Cuál es el valor del coeficiente de reflexión en la unión de ambos cables?

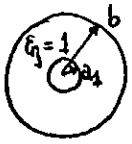
e2) Si se cambia el dieléctrico del coaxial 2 por otro de $\varepsilon_{r2} = 1$, ¿qué vale ahora el coeficiente de reflexión? ¿cuál es ahora el valor del campo eléctrico máximo en el coaxial 1 si la amplitud de la onda de tensión incidente vale V_0?

Notas:
La función potencial en un cable coaxial, en cilíndricas, es $\phi(r,\varphi) = A\ln(r) + B$ para $a \leq r \leq b$.
El gradiente de una función ϕ, en coordenadas cilíndricas, es $\nabla\phi = \hat{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\varphi}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$.

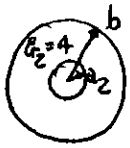
EJERCICIO 15 DE EVALUACIÓN CONTÍNUA DEL GRUPO 21.

- DOS COAXIALES CONECTADOS.

CABLE ①



CABLE ②:



a) En primer lugar calculamos el valor de la impedancia característica para un cable coaxial genérico, con radios a y b y dieléctrico ε_r.

Teniendo en cuenta la NOTA del enunciado, la función potencial en un cable coaxial es: $\phi(r,\varphi) = A \ln r + B$ para $a \le r \le b$.

La amplitud de la onda de tensión será: $\boxed{V_0 = \phi(r=b) - \phi(r=a) = A \ln(b/a)}$

Por otro lado:

$$\vec{E}_t = (-\nabla_t \phi)\cdot e^{-\gamma_0 z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r}\cdot e^{-\gamma_0 z} = (-\hat{r})\cdot\frac{A}{r}\cdot e^{-\gamma_0 z} \quad (a<r<b)$$

$$\vec{H}_t = \frac{\hat{z}\times\vec{E}_t}{\eta} = (-\hat{\varphi})\cdot\frac{A}{\eta\cdot r}\cdot e^{-\gamma_0 z} \quad (a<r<b)$$

$$\vec{J}_s\Big|_{r=a} = \hat{r}\times\vec{H}_t\Big|_{r=a} = (-\hat{z})\cdot\frac{A}{\eta\cdot a}\cdot e^{-\gamma_0 z}$$

$$\boxed{I_0} = \int_L \vec{J}_s\Big|_{\substack{r=a\\ z=0}}\cdot(-\hat{z})\cdot dl = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{A}{\eta\cdot a}\cdot a\, d\varphi = \boxed{\frac{A\cdot 2\pi}{\eta}}$$

Finalmente: $\boxed{Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0}{I_0} = \eta\cdot\frac{\ln(b/a)}{2\pi}}$

Así pues para que ambos tengan la misma impedancia característica:

$$Z_{01} = Z_{02} \Rightarrow \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}}\cdot\frac{\ln(b/a_1)}{2\pi} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cdot\frac{\ln(b/a_2)}{2\pi} \overset{\varepsilon_{r_1}=1 \text{ y } \varepsilon_{r_2}=4}{\Rightarrow} 2\ln(b/a_1) = \ln(b/a_2) \Rightarrow \ln\left[(b/a_1)^2\right] = \ln(b/a_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a_1^2} = \frac{b}{a_2} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_1^2}{b}}$$

b) Observamos en el desarrollo anterior que: $V_0 = A\ln(b/a)$ y $E_{max} = \frac{|A|}{a}$, por tanto:

$$\boxed{\frac{E_{max_1}}{E_{max_2}}} = \frac{(A_1/a_1)}{(A_2/a_2)} = \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\frac{|V_0|}{\ln(b/a_1)}}{\frac{|V_0|}{\ln(b/a_2)}} = \boxed{\frac{a_2\cdot\ln(b/a_2)}{a_1\cdot\ln(b/a_1)}}$$

Como ya hemos visto estos campos máximos se producen en la superficie del conductor interior $r=a$.

c) Para que las impedancias sean iguales ya hemos visto que:

$$\boxed{a_2 = \frac{a_1^2}{b}} \quad \text{Ec.(1)}$$

Para que $E_{max_1} = E_{max_2}$ debe ser: $\boxed{a_2 \cdot \ln(b/a_2) = a_1 \cdot \ln(b/a_1)}$ Ec.(2)

Sustituyendo la ec.(1) en la ec.(2):

$$a_1 \cdot \ln(b/a_1) = \frac{a_1^2}{b} \cdot \ln\left(b^2/a_1^2\right) = \frac{2a_1^2}{b} \cdot \ln(b/a_1) \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{b}{2}} \text{ y } \boxed{a_2 = \frac{a_1^2}{b} = \frac{b}{4}}$$

Por tanto las dimensiones del cable ② para que tenga la misma Z_0 y el mismo E_{max} que el cable ① son:

$$\boxed{b_2 = b_1 = b} \text{ y } \boxed{a_2 = \frac{b}{4}}$$

d) Ahora los conductores interiores no son perfectos y por tanto en un cable coaxial genérico el parámetro "Resistencia por unidad de longitud" será:

$$R_C = \frac{1}{\sigma\delta} k_j = \frac{1}{\sigma\delta} \cdot \frac{\oint_C |J_s|^2 dl}{\left|\oint_C J_s \cdot dl\right|^2} = \frac{1}{\sigma\delta} \cdot \frac{1}{\text{Perímetro}} = \frac{1}{\sigma\delta \cdot 2\pi a}$$

Como $\vec{J_s}\big|_{r=a}$ es independiente de las coordenadas transversales

Así pues:

$$\boxed{R_{C_1} = \frac{1}{2\pi a_1 \sigma\delta} = \left\{\text{Como } a_1 = \frac{b}{2}\right\} = \frac{1}{\pi b \sigma\delta}}$$

$$\boxed{R_{C_2} = \frac{1}{2\pi a_2 \sigma\delta} = \left\{\text{Como } a_2 = \frac{b}{4}\right\} = \frac{2}{\pi b \sigma\delta}} \Rightarrow \boxed{\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = \frac{1}{2}}$$

Además

$$\alpha_C = \frac{R}{2\,\mathrm{Re}(Z_0)} = \left\{\begin{array}{l}\text{Como no hay pérdidas en} \\ \text{el dieléctrico } Z_0 = \eta \cdot k_g = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} k_g \in \mathbb{R}\end{array}\right\} = \frac{R}{2 \cdot Z_0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Como en ambas líneas la impedancia característica es igual: $\boxed{\frac{\alpha_{C_1}}{\alpha_{C_2}} = \frac{\frac{R_1}{2Z_{01}}}{\frac{R_2}{2Z_{02}}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}}$

e) e1) Como el coaxial ② es de longitud infinita el coeficiente de reflexión en la unión de ambos es: $\boxed{\rho = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = 0}$ ya que $Z_{02} = Z_{01}$.

e2) $\boxed{Z_{01} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} \ln(b/a_1) = \left\{\begin{array}{l}\text{Como } \varepsilon_{r_1} = 1 \\ \text{y } a_1 = b/2\end{array}\right\} = \eta_0 \cdot \ln(2)}$ y $\boxed{Z_{02}' = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}'}} \ln(b/a_2) = \left\{\begin{array}{l}\text{Como } \varepsilon_{r_2}' = 1 \\ \text{y } a_2 = b/4\end{array}\right\} = \eta_0 \cdot \ln(4)}$

$\therefore$ Por tanto: $\boxed{\rho' = \frac{Z_{02}' - Z_{01}}{Z_{02}' + Z_{01}} = \frac{\ln(4) - \ln(2)}{\ln(4) + \ln(2)} = \left\{\text{Como } \ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln(2)\right\} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}}$

Finalmente el campo máximo en el coaxial ① es el máximo de la onda estacionaria formada:

$$\boxed{E_{max_1} = E_{inc_{max}}(1 + |\rho'|) = \frac{|A|}{a_1}\frac{4}{3} = \frac{(|V_0|/a_1(b/a_1))}{a_1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4|V_0|}{3 \cdot b/2 \cdot \ln(2)} = \frac{3'85 \cdot |V_0|}{b}}$$

III-15

A) Identificando $e^{-j40\pi z} = e^{-\gamma z}$

Como no hay perdidas en los conductores $\gamma = \gamma_0 = \alpha_d + j\beta = j\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = j40\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow f_0 = 3\,GHz$

B) $\bar{H}_t = \frac{\hat{z}\times\bar{E}_t}{Z_{TEM}} = \hat{\varphi}\cdot\frac{60j}{\eta\cdot r}\cdot e^{-j40\pi z} = \left\{ \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 60\pi \right\} = \hat{\varphi}\frac{j}{\pi\cdot r}e^{-j40\pi z}$ (A/m)

su expresión en el dominio tiempo:

$\bar{H}(\bar{r},t) = Re\left(\bar{H}_t\cdot e^{j\omega_0 t}\right) = (-\hat{\varphi})\frac{1}{\pi r}\cdot sen\left(6\pi\cdot 10^3 t - 40\pi z\right)$ (A/m)

C) $V_0 = \phi(r=a) - \phi(r=b) = -\int_b^a \bar{E}\Big|_{z=0}\bar{dl} = -\int_b^a \frac{60j}{r}dr = 60j\ln(b/a)$ (V)

$V(z) = V_0 e^{-\gamma_0 z} = 60j\ln(b/a)\cdot e^{-j40\pi z} = 50j\, e^{-j40\pi z}$ (V)

$V(z,t) = -50\, sen\left(6\pi\cdot 10^9 t - 40\pi z\right)$

D) $\bar{J}_s\Big|_{r=a} = \hat{n}_s\times\bar{H}\Big|_{r=a} = \hat{r}\times\frac{\hat{\varphi}\,j}{\pi a}\cdot e^{-j40\pi z} = \hat{z}\frac{j}{\pi a}e^{-j40\pi z}$ (A/m)

$I(z) = \int \bar{J}_s\Big|_{r=a}(z)\,\bar{dl} = \frac{j}{\pi a}e^{-j40\pi z}\cdot 2\pi a = j2\cdot e^{-j40\pi z}$ (A)

$I(z,t) = -2\,sen\left(6\pi\cdot 10^9 t - 40\pi z\right)$

E) $\langle W_T\rangle = \frac{1}{2}Re\left(V(z)I^*(z)\right) = 50$ (W)

F) $E_{RUPTURA} = 3\cdot 10^6$

$\hookrightarrow \bar{E} = \frac{60j}{r}e^{-j40\pi z}\hat{r} \Rightarrow E_{max} = \frac{60}{a} = 1500\ V/m < 3\cdot 10^6$

Con la cte de valor 60 (VOLTIOS) obtenemos 1500 V/m de E_{max}, para conseguir $3\cdot 10^6$ V/m de E_{max} la cte debería ser 120.000 (VOLTIOS)

$E_{max} = \frac{120.000j}{r}e^{-j40\pi z}\hat{r}$ $\left\{ \begin{array}{l} V_{max} = \\ H_{t\,max} = \\ J_{s\,max} = \\ I_{0\,max} = \end{array} \right.$

$$W_{T\,max} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(V_{0\,max}\, I_{0\,max}^{*}\right) = 2\cdot 10^{8}\ W$$

G) $\sigma = 10^{7}$ en $r = b$

Suponiendo que se cumple Leontovich $\quad e \gg \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \mu_0 \sigma}}$

$$\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} = \left\{ Z_0 = \frac{V_0}{I_0} \right\} = 25\,(\Omega) = R/50$$

$$R = \frac{1}{\sigma\delta} K_j = \frac{1}{\sigma\delta}\,\frac{\oint_c |J_s|^2\, dl}{\left|\oint_c J_s\, dl\right|^2} = \left\{ J_s = n_s \times \bar{H} \right\} = \frac{1}{\sigma\delta}\,\frac{l}{\text{Perímetro}} =$$

$$\alpha_c = 0'12\cdot 10^{-2}\ (Np/m)$$

H)

$$W_{dis\ en\ el\ metro} = W_T(z=0)\left(1 - e^{-2\alpha\cdot l}\right) = 50\left(1 - e^{-2\cdot 0'12\cdot 10^{-2}\cdot 500}\right) = 34'6\ W$$

I)

$$A_t(dB) = \alpha_c(Np/m)\cdot \text{long}(m) = 8'7\ dB/Np = 5'18\ dB.$$