

FMT4

Carpeta de
Montero Espinosa
(resuelta en 2010)

FMT4 Teoría

TEMA 1 : SERIES DE FOURIER

En lo siguiente abreviamos Desarrollo en Serie de Fourier como DSF.

Febrero 2008 ej1

a) DSF en $[-\pi, \pi]$ de periodo 2π .

b) Igual que lo anterior pero para otra función.

Hay que hablar de la **convergencia** de las anteriores series, algo que resultará fácil puesto que emplearemos siempre los mismos argumentos.

c) Se soluciona acudiendo a la combinación de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. Los cálculos y operaciones son de los más sencillos.

Septiembre 2004 ej1

Éste es el ejercicio tipo de este tema (salvo el apartado d), que es de idea feliz):

a) DSF en $[-\pi, \pi]$ de periodo 2π La función no es par ni impar.

b) Estudio de **convergencia**. Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.

c) **Suma de una serie** a partir del DSF calculado en a)

d) Este es el apartado difícil, aquí hay que saber algo de FMT2 para sumar esta otra serie

e) **Identidad de Parseval**: Muy importante este tipo de apartados.

Septiembre 2007 ej1

Muy parecido al problema anterior puesto que incluye unos apartados muy típicos del tema. En este caso la dificultad es algo mayor ya que los cálculos y las expresiones son algo más complejas, pero el desarrollo en sí es similar.

a) Extensiones pares e impares. Fácil, de dificultad preuniversitaria.

b) Dibujo de una gráfica. Fácil, como lo anterior.

c) DSF de periodo T (es conocido pero lo dejan en función de un parámetro).

d) Estudio de la **convergencia**. Se aborda como todos los apartados en los que analizamos la convergencia (fácil si se han hecho muchos ejemplos y si se conoce la teoría).

e) **Suma de una serie a partir del DSF** calculado antes. Muy típico y además el valor de la suma es conocido por ser muy típico el que aparezca.

f) **Identidad de Parseval**. Importante conocer su fórmula y vital para hallar la segunda suma.

Septiembre 2006 ej1

a) Enunciar la **identidad de Parseval**. Se trata simplemente de saberse la teoría.

b) Pregunta que en principio sorprende, pero que con picardía relacionamos con el apartado anterior: apoyándose en ello se responde pero en necesario acudir a lo aprendido en los temas de series de FMT2 acerca de la convergencia y divergencia de series.

c) DSF con cálculos algo engorrosos. Importante saber desenvolverse en estos casos algo complicados de operar.

d) **Convergencia**.

e) **Suma** de una serie a partir del DSF calculado antes. Aparecen algunas ideas algo felices y conviene tener destreza en las operaciones.

Septiembre 2001 ej1

a) DSF no dicen intervalo ni período así que elegimos $[-1, 1]$.

b) Estudio de **convergencia**. Fácil pues no hay discontinuidades.

c) **Fenómeno de Gibbs**: sólo se produce en las discontinuidades de la función. Como esta función es continua no se produce este fenómeno.

d) Apartado teórico

Junio 1998 ej1

- a) **DSF** de periodo 4 entorno al origen. La función es par (por tanto los coeficientes b_n son nulos).
Atentos que en los a_n salen tres casos distintos en función del valor de n .
- b) Estudio de **convergencia**. Fácil pues no hay discontinuidades.
- c) **Suma de una serie** a partir del DSF calculado en a)

Ejercicio 5 de clase

- a) **DSF** de periodo 2π entorno al origen. Lo único novedoso es que aparecen funciones hiperbólicas.
Las integrales se resuelven haciendo dos veces por partes.
- c) **Suma de una serie** a partir del DSF calculado en a). Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.

Septiembre 1999 ej1

- a) **DSF** no dicen intervalo ni período así que elegimos $[-T/2, T/2]$. La función es par (por tanto los coeficientes b_n son nulos)
- b) Piden **convergencia** del DSF en $x = 0$.
- c) Apartado conceptual. Conviene detenerse para entenderlo.

Junio 2005 ej1

- a) **Dibujar** la función seno y **sustituir** sus valores en la función $u(t)$.
 - b) **DSF** de periodo 2π . Ojo esta función no se puede prolongar para convertirla en par o impar porque el periodo viene fijado en el enunciado.
 - c) Estudio de **convergencia**. Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.
 - d) **Suma de una serie** a partir del DSF calculado en b)
- Este ejercicio es bastante tipo, salvo por el primer apartado que condiciona al resto.

Junio 2006 ej1

Este ejercicio viene a ser prácticamente una repetición del problema anterior. En este caso la función u está definida de otra manera pero el desarrollo de la resolución es similar al de junio de 2005.

- a) Representación gráfica.
- b) **DSF** de periodo 2π .
- c) Piden la **convergencia**.
- d) Hallar el valor de una **suma** conocida. Imprescindible tener bien resueltos los dos apartados anteriores.
- e) Apartado sin demasiados cálculos pero que exige pensar todo lo relacionado con las extensiones pares e impares de las funciones.

Junio 2007 ej1

Este problema es similar a los dos anteriores, también hay definida una función u que termina siendo clave para resolver el ejercicio, pero ahora es algo más complicada de entender (aunque se siguen los mismos razonamientos de antes).

Junio 2008 ej1

- a) **DSF**. ¡Atención! ¡Senos y cosenos hiperbólicos!
- b) Se trata de **sustituir en el DSF anterior**. Operaciones engorrosas y en las que posiblemente se tarde algo más de lo habitual.
- c) **Particularizar la serie anterior para dos valores y combinarlo para obtener el DSF del seno hiperbólico**. Fundamental entender la fórmula del seno hiperbólico y tener bien el apartado primero. Muy técnico.
- d) Idea feliz, independiente de lo demás. Tiene que ver con los **razonamientos de simetría** que aplicamos en las extensiones pares e impares, con ello sale fácil.

Ejercicio 2 de clase

Cambio lineal de variable en un sistema trigonométrico. Aquí expliqué lo que es y para qué sirve. En este ejercicio se hace el cambio más general posible (que luego no se utiliza nunca en la práctica). Más útil son los casos particulares del final de donde se obtiene una conclusión muy práctica: el sistema trigonométrico es el mismo en $[-T/2, T/2]$ y $[0, T]$. Esto nos será útil a partir de ahora cuando nos pidan desarrollar funciones en un intervalo $[0, T]$ que no esté centrado en el origen.

Ejercicio 3 de clase

- a) Piden comprobar si tres sistemas dados son ortogonales. En el sistema $\{1, \cos nx\}$ no olvidarse de comprobar el producto escalar de $\cos nx$ con $\cos mx$.
- b) **Cambio lineal de variable**. Perfecto para poner en práctica lo aprendido en el ejercicio anterior.

Junio 2000 ej 3

- a) **Cambio lineal de variable**.
- b) Ojo con este apartado ya que es difícil. Para calcular la norma que piden utilizaremos la **igualdad de Parseval** (se nos tiene que ocurrir). Hay que dejar el resultado en función de $f(x)$ genérica.
- c) **DSF** no dicen intervalo ni período así que elegimos $[-T, T]$. La función es par (por tanto los coeficientes b_n son nulos). Calcular los a_n es bastante lioso ya que tiene que quedar todo en función de T .
- d) Piden **convergencia** del DSF. Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.

Febrero 2004 ej1

- a) **Cambio lineal de variable**.
 - a) **DSF** de período 4π . Ojo esta función no se puede prolongar para convertirla en par o impar porque el período viene fijado en el enunciado.
 - b) Estudio de **convergencia**. Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.
 - c) **Suma de una serie** a partir del DSF calculado en a)
- Este ejercicio es bastante tipo.

Junio 2003 ej1

- a) **DSF** en $[0, 2\pi]$. Ojo esta función no se puede prolongar para convertirla en par o impar porque el intervalo viene fijado en el enunciado.
- b) Demostraciones teóricas. Difíciles.

Junio 2002 ej1

- a) Piden comprobar si un sistema trigonométrico es **ortogonal** en $[0, 2]$ (completo lo es siempre por definición).
- b) **Cambio lineal de variable**.
- c) **DSF** en $[0, 2]$. Ojo esta función no se puede prolongar para convertirla en par o impar porque el intervalo viene fijado en el enunciado. En este caso la función viene definida por una sucesión de funciones por lo que primero hay que hacer el límite puntual (esto es de FMT2).
- d) **Estudio de convergencia**. Recuerda que en las discontinuidades el DSF siempre toma el valor medio del salto.

Junio 1999 ej3

- a) **DSF** no dicen intervalo ni período pero piden explícitamente que prolonguemos la función para obtener un DSF que contenga solamente senos. Para ello debemos convertirla en una función impar entre $[-l, l]$.

Ejercicio 4 de clase

- a) **DSF** piden explícitamente que prolonguemos la función para obtener un DSF que contenga solamente senos. Para ello debemos convertirla en una función impar entre $[-\pi, \pi]$.
- b) **DSF** Ahora piden explícitamente que prolonguemos la función para obtener un DSF que contenga solamente cosenos. Para ello debemos convertirla en una función par entre $[-\pi, \pi]$.

Septiembre 2000 ej3

- a) **DSF** piden explícitamente que prolonguemos la función para obtener un DSF que contenga solamente senos. Para ello debemos convertirla en una función impar entre $[-2\pi, 2\pi]$.
- b) **DSF** Ahora piden explícitamente que prolonguemos la función para obtener un DSF que contenga solamente cosenos. Para ello debemos convertirla en una función par entre $[-2\pi, 2\pi]$.
- c) Es una idea feliz que utiliza los resultados de los dos apartados anteriores.

Junio 2004 ej1

- a) Demostraciones teóricas. Más asequibles que las de jun'03-ej1, conviene entenderlas. Aparece la definición de **sistema completo**.
- b) **DSF** de periodo 2π entorno al origen. Atención: Dentro de los b_n hay un **caso particular!!**. Esto no suele suceder con frecuencia pero cuando sucede debemos darnos cuenta. El caso particular es el coeficiente b_4 que hay que calcularlo aparte.

Ejercicio 6 de clase

- a) **DSF** de periodo 2π en $[0, 2\pi]$. Atención: Esta vez entre los coeficientes hay dos **casos particulares!** Los casos particulares son los coeficientes a_1 y b_1 que hay que calcularlos aparte.

Ejercicio 1 de clase

Demostración de que un sistema trigonométrico es ortogonal en cierto intervalo, algo que hemos usado habitualmente. Al fin y al cabo se trata de desarrollar unas integrales y ver que todas son nulas.

Ejercicio 7 de clase

Ortogonalización de Gram-Schmidt. Piden ortonormalizar un sistema de cuatro vectores. La segunda parte (lo de los polinomios de Legendre) es anecdótico.

Septiembre 1998 ej1

Este ejercicio es continuación directa del anterior (ej1 de clase)

- a) Piden la **mejor aproximación** de f mediante un sistema finito de cuatro vectores.
- b) Piden la **mejor aproximación** de f mediante un sistema finito de cinco vectores.
- c) **Desigualdad de Bessel**.

Septiembre 2002 ej1

- a) Determinar si el sistema dado es **ortogonal**.
- b) Piden **proyección ortogonal** (Es lo mismo que **mejor aproximación**).
- c) **Desigualdad de Bessel**.

Junio 2001 ej1

- a) Piden la **mejor aproximación** de f mediante un sistema finito de tres vectores (lo primero es comprobar que sea ortogonal). Fíjate que como piden aproximar una función par (un coseno) mediante tres funciones impares (tres senos) el resultado es la función nula $f(x) = 0$. Es decir, en realidad no hace falta hacer ninguna cuenta.
- b) **DSF** en $[-\pi, \pi]$. Es una función par. Los cálculos hay que dejarlos en función del parámetro a .
- c) Apartado interesante: piden calcular $\cot(a\pi)$ que se obtiene particularizando en $x = a$ el DSF obtenido en el apartado b).

TEMA 2 : EDOS DE PRIMER ORDEN

Ejercicio 1 de clase

EDO de variables separadas. No olvidar las soluciones particulares. Estas se obtienen poniendo la EDO en forma explícita $y' = f(x, y)$ e igualando el numerador de $f(x, y)$ a cero.

Ejercicio 2 de clase

EDO lineal con coeficientes variables. Aquí se introduce el método de **variación de parámetros**. Es muy importante entenderlo bien.

Ejercicio 3 de clase

EDO de Bernoulli. Se reduce siempre a una EDO lineal con coeficientes variables tras un cambio de variable que hay que saberse (siempre es el mismo).

Ejercicio 4 de clase

EDO exacta. Primero siempre se comprueba que cumple la condición de EDO exacta y luego se dan los cinco (mini)pasos que vimos en clase.

Junio 2000 ej1 b)

EDO exacta. Como siempre: se comprueba que cumple la condición de exacta y luego se dan los cinco (mini)pasos.

Septiembre 2002 ej2

EDO exacta. a) y b) Muy fáciles. Cuidado con el c): para ver donde no tiene solución ponemos la EDO en forma explícita $y' = f(x, y)$ e igualamos el denominador de $f(x, y)$ a cero

Ejercicio 5 de clase

EDO de factor integrante. Nos dicen que el factor integrante sólo depende de y .

Junio 1999 ej1 a)

EDO de factor integrante. Nos dicen que el factor integrante sólo depende de x .

Ejercicio 6 de clase

EDO de factor integrante. Nos dicen que el factor integrante es de la forma $x^m y^n$. Este ejercicio es muy interesante.

Ejercicio 7 de clase

EDO homogénea: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Para el apartado b) es más rápido hacerlo como $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Ejercicio 8 de clase

EDO autónoma: $y' = f(y)$. No olvidar que estas EDOs suelen tener soluciones particulares.

Ejercicio 9 de clase

Teórico. Es una demostración.

Ejercicio 10 de clase

EDO lineal con coeficientes constantes. Conviene entenderlas muy bien porque luego continúan en el tema 4.

Ejercicio 11 de clase

EDO lineal con coeficientes constantes. Se trata del PVI que aparece normalmente en IACR. Aquí demostramos la fórmula que utilizan en esa asignatura. Ejercicio anecdótico.

Septiembre 1999 ej3

Tanque con agua y sal. En este ejercicio lo complicado es plantear la EDO. En el apartado a) el volumen del tanque es constante pero en el apartado b) hay que tener más cuidado por que el volumen empieza a disminuir (deja de ser constante) a partir de $t = 10$

Septiembre 2002 ej3

Tanque con agua y sal. Este ejercicio es más complicado que el anterior. En ambos apartados el volumen del tanque es constante. En el apartado b) hay que tener claro que el agua que se evapora no lleva sal.

Junio 1996 ej2

- a) **Teorema de existencia y unicidad.** Muy sencillo.
 - b) **Soluciones singulares.** Dibujar las soluciones y buscar la envolvente.
 - c) Dos EDOS: exacta y autónoma
- El apartado d) es del tema 4.

Junio 1998 ej3 a)

- i) **Teorema de existencia y unicidad.**
- ii) **Soluciones singulares.** Dibujar las soluciones y buscar la envolvente.

Septiembre 2000 ej1 a)

Teorema de existencia y unicidad. Muy interesante. Ayuda hacer el dibujo de las soluciones que nos dan. Acuérdate que la raíz cuadrada está definida siempre que el radicando sea mayor o igual a cero y que un cociente no está definido cuando el denominador es igual a cero.

Junio 2000 ej1 a)

Soluciones singulares. Como siempre dibujar las soluciones y buscar la envolvente.

Junio 2001 ej2 a) b)

- a) **Soluciones singulares.** Dibujar las soluciones y buscar la envolvente.
- b) **Teorema de existencia y unicidad.** Complicado.

Septiembre 1998 ej3 a)

- i) y ii) **Teorema de existencia y unicidad.**
- iii) solución analítica.
- iv) **Soluciones singulares.**

Septiembre 2006 ej3

- a) Problema en el que previamente **hay que construir la EDO a partir de los datos aportados** en el enunciado. Esto es lo particularmente difícil, la resolución es sencilla.
- b) **Soluciones singulares.** Importante dominar la explicación a través de la gráfica y saber explicarla con la teoría.

Febrero 2005 ej2

Similar al apartado primero del problema anterior.

Junio 2003 ej3

Ecuaciones de Alexander Alenxandrovich sobre las ecuaciones de la relatividad general. Inclasificable. Es difícil de entender lo que piden en algunos apartados, sin embargo la única EDO que hay que resolver es de variables separadas.

Junio 2006 ej2

Problema **completo** dado que abarca todo el contenido del tema 2, con desarrollos algo farragosos; más concretamente:

- a) Apartado acerca de si **el conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial**. Hay que saber que **toda ecuación lineal homogénea tiene un conjunto de soluciones que resulta ser un espacio vectorial** cuya dimensión es el orden de la ecuación diferencial.
- b) **Existencia y unicidad**.
- c) **Resolución de una EDO homogénea**. Variables separadas.
- d) **Resolución de EDO no homogénea**. **Variación de la constante** a partir del apartado anterior.

TEMA 3 : MÉTODOS NUMÉRICOS

Junio 1999 ej2 a) c)

a) Utilización del **Método de Euler básico**

d) Resolución analítica de la EDO de primer orden (tema 2). Es de variables separadas.

Junio 2002 ej2 a) d)

a) Utilización del **Método de Euler básico**

d) Resolución analítica de la EDO de primer orden (tema 2). Ojo con este apartado que hay que hacer un cambio de variable que se nos tiene que ocurrir sobre la marcha.

Junio 2000 ej1 c)

i) **Construir un método numérico.** Empezar por este que es el más asequible.

ii) Expresarlo en notación Runge-Kutta

iii) Aplicarlo a un ejemplo práctico.

Septiembre 2000 ej1 b)

i) **Construir un método numérico.** Parece igual que el de jun'00 pero es más complicado

ii) Expresarlo en notación Runge-Kutta

iii) Aplicarlo a un ejemplo práctico.

Junio 2001 ej1 c) – Junio 2008 ej2

i) **Construir un método numérico.** Misma idea que en el de sep'00.

ii) Expresarlo en notación Runge-Kutta.

Septiembre 2005 ej3

i) **Construir un método numérico.** Misma idea que en el de sep'00 y que en el de jun'01

ii) Expresarlo en notación Runge-Kutta.

Febrero 2008 ej2

i) **Construir un método numérico.** Misma idea que en los dos anteriores.

ii) Expresarlo en notación Runge-Kutta. Similar que los anteriores.

TEMA 4 : EDOS DE ORDEN n

Ejercicio 1 de clase

EDOs lineales con coeficientes constantes homogéneas. Muy básicas.

Ejercicio 2 de clase

EDOs lineales con coeficientes constantes no homogéneas. Cuidado con los apartados c), d) y e) ya que en estos casos resulta que λ es raíz de la ecuación característica. Muy básicas.

Ejercicio 3 de clase

EDOs lineales con coeficientes constantes no homogéneas. Estas son algo más complicadas, sobre todo la c) donde hay que separar el término independiente en dos partes y el d) donde las raíces de la ecuación característica son complejas.

Ejercicio 4 de clase

EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea. Hay que separar el término independiente en tres partes.

Junio 2002 ej3 a)

EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea. Después de haber hecho los anteriores ejercicios de clase no debe haber problema para resolver esta EDO. Es tan fácil como parece

Septiembre 2001 ej2

EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea. Aquí la EDO depende de un parámetro k y nos piden calcular las soluciones en función de ese parámetro. Es el más complejo de todos y mejor intentarlo el último después de haber comprendido todos los anteriores.

Junio 2007 ej2

EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea. Aquí la EDO depende de los parámetros a y b y el razonamiento para resolverla es análogo al descrito en el problema anterior.

Septiembre 2005 ej2

- a) Simplemente se trata de resolver un determinante siguiendo la teoría de wronskianos que trataremos al final del tema. Muy sencillo.
- b) Al contrario que en los anteriores en los que nos pedían resolver una **EDO lineal con coeficientes constantes homogénea**, aquí tenemos que **construir dicha ecuación a partir de las soluciones dadas**. Mismos razonamientos que en todo lo anterior pero pensando a la inversa.
- c) **Resolución de una EDO de coeficientes constantes no homogénea** similar a las vistas en los ejercicios de clase.

Ejercicio 5 de clase

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. Ejercicio tipo total. Ideal para aprender el “método de los doce pasos”. En el paso 4 aparece una ecuación algebraica.

Junio 1998 ej3 b)

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. En el paso 4 aparece una ecuación algebraica. Ejercicio tipo.

Junio 2001 ej3 c)

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. En el paso 4 aparece una EDO de 1º orden con coeficientes constantes. No dan dato adicional sobre la solución particular pero hay que fijarse que la suma de los tres coeficientes de la EDO es cero por lo que $y(x) = e^x$ es solución particular. Ejercicio tipo.

Septiembre 2006 ej2

Ver apartado resuelto en el que la ecuación está desarrollada siguiendo el método habitual de los doce pasos.

Septiembre 2000 ej2

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. En el paso 4 aparece una EDO de 1º orden con coeficientes constantes. En el apartado a) preguntan por el **Teorema de existencia y unicidad** y en el d) algo sobre el **wronskiano**.

Septiembre 1998 ej3 b)

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. En el paso 4 aparece una EDO lineal de 1º orden con coeficientes variables. Ejercicio tipo.

Junio 1995 ej2

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. En el paso 4 aparece una EDO lineal de 1º orden con coeficientes variables. Ejercicio tipo. Después hay dos apartados cortos y fáciles de EDO lineal con coeficientes constantes y Wronskiano.

Septiembre 2007 ej2

EDO lineal con coeficientes no constantes y homogénea. Método de los doce pasos pero el hecho de conocer dos soluciones particulares gracias al enunciado nos facilitará bastante los cálculos y serán menos los pasos a seguir. Hay que seguir la indicación y con eso es fácil la resolución mientras se hayan entendido los problemas anteriores.

Junio 2008 ej2 c)

EDO lineal con coeficientes no constantes y homogénea. Idea parecida al problema anterior. La fórmula de Liouville nos facilitará bastante el procedimiento de resolución, aunque se puede hacer de otros modos ya asimilados en los problemas anteriores (introduciendo las dos soluciones dadas en la ecuación y de ahí despejando para hallar el polinomio pedido, por ejemplo). Sencillo si se han entendido el resto de problemas parecidos.

Junio 1999 ej1 b)

EDO lineal de 2º orden con coeficientes variables. Nos piden demostrar que la segunda solución particular es de una determinada forma(en función de una integral). Después ya piden resolverla como siempre.

Ejercicio 6 de clase

Wronskiano. Es la demostración de la fórmula de Liouville para orden dos. Muy interesante. Contiene teoría: Derivación de un determinante.

Ejercicio 9 de clase

Wronskiano. Piden calcular el wronskiano de unas funciones definidas a trozos. Interesante.

Junio 2003 ej2 a) b)

Wronskiano. Ejercicio muy interesante sobre dependencia e independencia lineal de soluciones de una EDO.

Junio 2001 ej3 a) b)

Wronskiano. El apartado a) es tipo test. El apartado b) es una demostración muy interesante. Conviene estudiarla hasta entenderla.

Ejercicio 7 de clase

EDO de Euler. Cuidado al principio: hace falta multiplicarla por x para que sea de Euler. Importante: recuerda que hay que saber calcular las derivadas del cambio de variable mediante la **Regla de la cadena** (No basta con sabérselas de memoria).

Ejercicio 8 de clase

EDO de Euler. Importante: recuerda que hay que saber calcular las derivadas del cambio de variable mediante la **Regla de la cadena** (No basta con sabérselas de memoria).

Junio 2005 ej2

EDO de Euler. a) Hay que hacer el cambio $x = e^t$. b) piden resolverla de dos formas: b1) la típica, como EDO lineal con coef. ctes. y b2) convirtiéndola en un sistema de EDOs (se verá en el tema 6).

Junio 2004 ej2 a)

EDO de Euler. Ojo: en este caso el cambio es del tipo $ax + b = e^z$ (que es un poco más complicado que el típico $x = e^t$).

Septiembre 2007 ej3 c)

EDO de Euler en la que nos es necesario acudir al cambio de variable habitual. La EDO resultante quedará en función de un parámetro a y por tanto tendremos que dejarlo indicado en las soluciones correspondientes.

El resto de apartados son los más fáciles: el primero es sobre la estructura de espacio vectorial de soluciones de la EDO (es espacio vectorial mientras la EDO sea lineal y homogénea) y el segundo es uno muy fácil acerca de lo visto para soluciones singulares.

Junio 2000 ej2 a)

Regla de la cadena. Esta EDO no es de Euler pero nos piden hacer un cambio de variable mediante la regla de la cadena. Importantísimo entenderlo bien.

TEMA 5 : RESOLUCIÓN DE EDOS MEDIANTE SERIES

Ejercicio 1 de clase

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto ordinario**.

Ejercicio 2 de clase

EDO de Airy. a) Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto ordinario**. b) En este caso la **serie de potencias** está centrada en $x = 1$ que es un **punto ordinario**. Cuidado en el primer paso, al meter los coeficientes en la serie de potencias.

Junio 2004 ej2

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto ordinario**. Piden convergencia (Fuchs). Ejercicio tipo.

Junio 2000 ej2 b) c) d)

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto ordinario**. La ley de recurrencia es un poco liosa pero dando valores sale algo. Piden convergencia (Fuchs). El apartado c) es un cambio de variable inmediato, no hay que calcular nada.

Junio 2002 ej3 b) c)

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 1$ que es un **punto ordinario**. Basta con obtener la ley de recurrencia de a_n .

Ejercicio 3 de clase

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto singular**.

Junio 2005 ej3

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto singular**. Piden convergencia (Frobenius). Es casi idéntico al ejercicio de clase anterior.

Septiembre 2003 ej1

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto singular**. Piden clasificar los puntos singulares y piden convergencia (Frobenius).

Junio 1998 ej2

EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto singular**. Hay que dejarlo todo en función del parámetro c y las cuentas salen un poco farragosas. Piden convergencia (Frobenius).

Septiembre 1999 ej2

EDO de Chevychev. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 1$ que es un **punto singular**. Muy importante: para introducir los coeficientes en la serie hace falta **Serie de Taylor**. Piden convergencia (Frobenius). Ejercicio muy difícil.

Septiembre 1998 ej2

- a) Estudiar el carácter de los **puntos singulares** y estudiar convergencia (Frobenius)
- b) EDO lineal de 2º orden homogénea. Se resuelve mediante **serie de potencias** centrada en $x = 0$ que es un **punto ordinario**. Piden convergencia (Fuchs). Ejercicio tipo.

Septiembre 2006 ej2

Ejercicio completísimo: el primer apartado exige que se resuelva a través de series y es similar al resto de problemas del tema; en el segundo apartado se resuelve siguiendo los procedimientos vistos en el tema anterior; el tercer apartado sirve como comprobación de que los dos anteriores han de coincidir. Está resuelto muy profundamente y se recomienda encarecidamente analizarlo y comprenderlo.

TEMA 6 : SISTEMAS DE EDOS LINEALES. ESTABILIDAD.

(2 Ecuaciones)

Ejercicio 1 de clase

Resolución de sistemas. Imprescindible recordar cómo se calculan autovalores y autovectores de matrices para poder clasificar el problema y construir la correspondiente solución.

Septiembre 2005 ej3 c)

Igual que uno de los casos pertenecientes al ejercicio anterior.

Ejercicio 2 de clase

Piden **analizar la estabilidad aplicando la definición**, la cual es imprescindible conocer de memoria. También es necesario resolver el sistema.

Ejercicio 3 de clase

Analizar la estabilidad de los sistemas propuestos. Simplemente es **calcular autovalores y fijarse en las partes reales que presentan para aplicar el criterio de teoría y clasificarlos**.

Junio 1995 ej3

Estabilidad. Similar al resto.

Septiembre 1996 ej3

Estabilidad. Igual que lo anterior.

Septiembre 2000 (Parte Práctica)

- a) **Resolución**. Análogamente al resto
- b) **Definición de Estabilidad**. Igual que el número 2 de clase.
- c) **Cálculo de autovalores y criterio de teoría habitual**. Igual que el resto.
- d) Hay que decir que, **al ser sistema lineal con coeficientes constantes, todas las soluciones se comportan, en cuanto a estabilidad, de igual manera**.

Junio 2008 ej3

- a) **Estabilidad**. Similar a los ejercicios de clase y fácil si se sabe manejar con soltura el cálculo de autovalores y el correspondiente criterio.
- b) c) **Simplemente es resolver el sistema** (igualmente que en los problemas de clase) para los valores dados y después **analizar el carácter de las soluciones obtenidas**.
- d) **Función de Liapunov**. Similar al ejercicio 5 de clase.

Septiembre 2003 ej3

Interesante entender por qué una ecuación diferencial de orden n equivale a un sistema de n ecuaciones y saber cómo se pasa de uno a otro.

- a) **Estabilidad**. Similar a los anteriores: cálculo de autovalores y aplicación del criterio habitual.
- b) **El sistema es lineal y con coeficientes constantes, así es que la estabilidad de cualquier solución es similar a la de la solución nula**.
- c) **Interpretación física del movimiento**. Hablar de las características de las funciones trigonométricas (ondas) que componen la solución.
- d) **Resolución** para un caso concreto. Similar a los ya hechos.

Junio 2007 ej3 – Febrero 2008 ej3

- a) Hay que recordar que **el conjunto de soluciones de un sistema tiene estructura de espacio vectorial en el caso de que el sistema sea lineal y homogéneo.**
- b) Es más sencillo de lo que a primera vista puede parecer. **Se trata de sustituir los posibles valores del parámetro y manejar las ecuaciones para poder operar dos ecuaciones diferenciales.** Uno de los casos no tiene solución. Los cálculos son muy engorrosos pero son inevitables.

Ejercicio 4 de clase

Sistema de EDOs no lineal con coeficientes constantes no homogéneo. Dado que no es lineal, **hemos de linealizarlo** aplicando el método propuesto. También es necesario conocer la definición (sencilla) de punto de reposo. Muy mecánico y de fácil comprensión.

Ejercicio 5 de clase

Función de Liapunov. En definitiva se trata de derivar la función dada respecto de la variable independiente del sistema y aplicar los criterios de teoría. Muy mecánico.

(3 Ecuaciones)

Ejercicio 6 de clase

Sistema de tres EDOs lineales con coeficientes constantes.

Junio 2006 ej3

Igual que el anterior pero con otros datos.

Junio 1996 ej3

Sistema de EDOs lineales con coeficientes constantes homogéneas. La matriz no es diagonalizable. Se necesita la matriz de **Jordan**. Ejercicio Tipo.

Febrero 1997 ej3

Sistema de EDOs lineales con coeficientes constantes homogéneas. La matriz no es diagonalizable. Se necesita la matriz de **Jordan**. Ejercicio Tipo.

Junio 2003 ej2 c) d)

Sistema de EDOs lineales con coeficientes constantes. En este caso el sistema no es homogéneo. Ejercicio muy difícil.

Junio 2004 ej3

Sistema de EDOs lineales con coeficientes constantes. En este caso nos piden transformar una EDO lineal en un sistema de EDOs. El cambio de variable que hay que hacer está en la teoría. El resto del ejercicio es tipo. El problema está en que si no sabes obtener el sistema no puedes hacer nada más del ejercicio.

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Tema 1: Series de Fourier

Espacios funcionales euclídeos con sistemas ortonormales. Coeficientes de Fourier. Completitud de series ortonormales y convergencia en media. Serie trigonométrica de Fourier: convergencia en media, puntual y uniforme.

Tema 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Terminología general. Teoremas de existencia, unicidad y continuidad. Soluciones singulares. Ecuaciones resolubles mediante el teorema fundamental del cálculo. Ecuaciones autónomas. Ecuaciones separables. Ecuaciones lineales. Ecuaciones cuasi-lineales y soluciones implícitas. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes.

Tema 3: Métodos numéricos

Planteamiento general. Métodos unipaso: Euler básico, mejorado y modificado; métodos de Runge-Kutta. Errores de discretización y de redondeo. Estimación del error de discretización en los métodos de Runge-Kutta. Método de Runge-Kutta-Fehlberg. Nociones sobre consistencia, convergencia y estabilidad.

Tema 4: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Definiciones generales. Dependencia e independencia lineal de funciones. Ecuación homogénea y sistema fundamental de soluciones. Ecuación no homogénea: método de los coeficientes indeterminados y método de variación de parámetros. Ecuación de Euler.

Tema 5: Resolución mediante series

Soluciones alrededor de un punto ordinario: método directo y método de coeficientes indeterminados. Soluciones alrededor de un punto singular regular: método de Frobenius.

Tema 6: Estabilidad de soluciones

Definiciones generales. Teorema de existencia y unicidad. Resolución de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Conceptos básicos de estabilidad. Estabilidad de soluciones de sistemas autónomos lineales. Retratos de fase de sistemas lineales.

TEMA 1 : ESPACIOS EUCLÍDEOS Y SERIES DE FOURIER**1.1 Espacios funcionales**

En este tema vamos a trabajar con los siguientes conjuntos de funciones:

- $C([a, b]; \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$.
- $CTA([a, b]; \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen :
 - f es continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos $x_i \in (a, b)$ $i = 1, \dots, n$
 - En los puntos de discontinuidad x_i (que son siempre de primera especie o de salto finito) el valor de f es:

$$f(x_i) = \frac{f(x_i^-) + f(x_i^+)}{2}$$

A este tipo de funciones las llamaremos “funciones continuas a trozos con valores asignados en las discontinuidades”.

- $CT([a, b]; \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen :
 - f es continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos donde la discontinuidad es de primera especie o de salto finito.

A este tipo de funciones las llamaremos “funciones continuas a trozos”.

- $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen :
 - f es continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos donde la discontinuidad es de primera especie o de salto finito.
 - f puede tener discontinuidades de segunda especie (salto infinito) en los extremos a y/o b .
 - f^2 es integrable en el sentido propio o impropio.

A este tipo de funciones se las suele llamar “cuadrado integrables”.

Fijate que los elementos de todos estos conjuntos son funciones, no números

A este conjunto también se le denota:

$$L^2([a, b]; \mathbb{R})$$

1.2 Espacios euclídeos. Producto escalar

Importante:

Por ahora nos restringimos a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales

- Sea E un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Un **producto escalar** en E es una aplicación de la forma:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v \rightarrow \langle u, v \rangle$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$1. \langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle \quad \forall u, u', v \in E$$

$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle \quad \forall u, v, v' \in E$$

$$2. \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\langle u, \beta v \rangle = \beta \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$3. \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in E$$

$$4. \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in E, \text{ además } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

- Llamamos **espacio euclídeo** y lo notamos como $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a todo espacio vectorial E sobre el que se ha definido un producto escalar.
- El espacio euclídeo más conocido es el de los números reales $\mathbb{R}^n$ donde está definido el producto escalar de la siguiente forma.

Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, su producto escalar es:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

- Sin embargo, nosotros en este curso no vamos a utilizar el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ ni su producto escalar. Nosotros vamos a trabajar todo el tiempo con los conjuntos de funciones definidos en la página anterior. No debemos olvidar que los elementos de estos conjuntos son funciones.
- Todos los conjuntos de funciones expuestos en la página anterior:

$$(C[a, b], \mathbb{R}), (CTA[a, b], \mathbb{R}), (CT[a, b], \mathbb{R}), \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$$

tienen estructura de espacio vectorial con dimensión infinita (se puede probar).

- Sobre todos estos espacios vectoriales vamos a definir un producto escalar de la siguiente forma:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

se puede probar que esta función es un producto escalar. Y por tanto tenemos que los cuatro conjuntos:

$$(C[a, b], \mathbb{R}), (CTA[a, b], \mathbb{R}), (CT[a, b], \mathbb{R}), (R[a, b], \mathbb{R})$$

son espacios euclídeos con el producto escalar así definido.

- Dicho de forma simple, durante todo este tema calcularemos productos escalares haciendo integrales definidas. Esto se debe a que hemos definido el producto escalar que vamos a utilizar como una integral definida.

Este no es más que el producto escalar que se estudia en el bachillerato

1.3 Norma euclídea

Sea $(E, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo, una **norma** definida en E es una aplicación:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{aligned}$$

Propiedades

1. $\forall u \in E, \quad u \neq 0 \Leftrightarrow \|u\| > 0$
2. $\forall u \in E, \quad u = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0$
3. $\forall u \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
4. $\forall u, v \in E \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
5. $\forall u, v \in E \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
6. $\forall u, v \in E \quad 2\langle u, v \rangle = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$

1.4 Sistemas ortogonales y ortonormales

Sea un espacio euclídeo $(E, \langle, \rangle)$.

- Se dice que dos vectores no nulos $u, v \in E$ son **ortogonales** si su producto escalar es nulo, es decir:

$$\langle u, v \rangle = 0$$

- Se dice que el sistema $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema **ortogonal** si todos sus vectores son ortogonales entre sí, es decir:

$$\langle u_n, u_m \rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} / n \neq m$$

- Se dice que el sistema $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema **ortonormal** si además de ortogonal se cumple que:

$$\|u_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.5 Otras fórmulas de interés

Desigualdad de Bessel

- Si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortogonal:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \frac{|\langle f, f_i \rangle|^2}{\langle f_i, f_i \rangle} \langle f_i, f_i \rangle$$

- Si $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2$$

Identidad de Parseval

- Si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortogonal y completo:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle f, f_i \rangle|^2}{\langle f_i, f_i \rangle} \langle f_i, f_i \rangle$$

- Si $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal y completo:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2$$

$$\|g\|^2 = \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 \langle 1, 1 \rangle + \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \left\langle \cos \frac{2\pi n x}{T}, \cos \frac{2\pi n x}{T} \right\rangle + \sum_{n=1}^N |b_n|^2 \left\langle \sin \frac{2\pi n x}{T}, \sin \frac{2\pi n x}{T} \right\rangle$$

siendo los términos a_n, b_n, a_0 los expresados en el DSF:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

1.6 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de un espacio vectorial existe un método para obtener una base ortogonal. Es decir, una base en la que todos sus elementos son ortogonales entre sí.

Este proceso se llama "Método de ortogonalización de Gram-Schmidt" y es el siguiente:

$$u_1(x) = f_1$$

$$u_2(x) = f_2 - \frac{\langle f_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$$

$$u_3(x) = f_3 - \frac{\langle f_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 - \frac{\langle f_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \cdot u_2$$

$$u_4(x) = f_4 - \frac{\langle f_4, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 - \frac{\langle f_4, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \cdot u_2 - \frac{\langle f_4, u_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} \cdot u_3$$

... ..

$$u_n(x) = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle f_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot u_i$$

Una vez obtenida una base ortogonal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a partir de la base $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de partida puede que necesitemos normalizarla.

Para ello basta dividir cada elemento de la base ortonormal entre su módulo:

$$e_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n\|} = \frac{u_n(x)}{\sqrt{\langle u_n, u_n \rangle}}$$

y así obtenemos una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

1.7 Series de Fourier

Sea $(E, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo (donde E es el conjunto de funciones C , CTA , CT ó $\mathcal{R}$).

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortogonal de elementos de E .

En este caso el sistema tiene infinitos elementos

- A todo elemento $f \in E$ se le puede asociar una serie de la forma:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} \cdot f_i = \frac{\langle f, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1 + \frac{\langle f, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \cdot f_2 + \frac{\langle f, f_3 \rangle}{\langle f_3, f_3 \rangle} \cdot f_3 + \dots$$

denominada **serie de Fourier** de f respecto al sistema $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

A la mejor aproximación también se le denomina **proyección ortogonal**

En este caso el sistema tiene un número finito de elementos

- Si la serie de Fourier es “cortada” en el término n obtendremos una aproximación de ésta, es decir, $f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} \cdot f_i$ que denominaremos **mejor aproximación** de f mediante el sistema $\{f_1, \dots, f_n\}$.

Importante:
Estas expresiones, una vez calculadas, son números

- Al conjunto de escalares:

$$\left\{ \frac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}, i \in \mathbb{N} \right\}$$

se les denomina **coeficientes de Fourier**.

- Si el sistema es ortonormal $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ la serie de Fourier queda:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$$

Observaciones

- La serie de Fourier de una función $f(x)$ no es más que una representación de la función $f(x)$ por medio de una suma ponderada de las funciones que constituyen el sistema ortogonal.
- La ponderación de esta suma viene dada por los coeficientes de Fourier. Es decir, cada elemento de la serie tiene más o menos peso en función del coeficiente que se le asigne.
- Calcular una serie de Fourier consiste, por tanto, en obtener los coeficientes de Fourier.
- La “representación” de la función $f(x)$ mediante su serie de Fourier será tanto más precisa cuanto más términos tenga el desarrollo en serie.
- Se suele decir que la serie de Fourier “aproxima” a la función $f(x)$. Pero, ¿qué significa esto?. Se puede entender de forma intuitiva diciendo que, según vamos añadiendo términos a la serie de Fourier su gráfica tiende a confundirse con la gráfica de la propia función. Es decir, ambas gráficas toman los mismos valores en todos los puntos del eje x .

Esto es sólo una explicación intuitiva nada rigurosa

1.8 Series trigonométricas de Fourier

Dentro de las series de Fourier en general existe un caso particular de especial importancia. Este caso se produce cuando tenemos una función $f(x)$ periódica de periodo T y elegimos como sistema para obtener la serie de Fourier al conjunto formado por:

$$\left\{ 1, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{2\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{T}, \cos \frac{4\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{6\pi x}{T}, \cos \frac{6\pi x}{T}, \dots \right\}$$

que habitualmente denotaremos de la siguiente forma:

$$\left\{ 1, \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

este sistema se denomina **sistema trigonométrico** y se puede comprobar que es ortogonal y completo en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Las series de Fourier desarrolladas con este sistema se denominan **series trigonométricas de Fourier** y son las más importantes de este curso. En las series trigonométricas los coeficientes de Fourier quedan definidos de la siguiente forma:

$$\frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot 1 \, dx}{\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot 1 \, dx}$$

$$\frac{\langle f, \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \rangle}{\langle \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \, dx}{\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi nx}{T} \, dx} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\langle f, \cos \frac{2\pi nx}{T} \rangle}{\langle \cos \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T} \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} \, dx}{\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2\pi nx}{T} \, dx} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sin embargo, a pesar que la teoría sobre este tema es bastante extensa, la forma práctica de calcular una serie trigonométrica de Fourier es bastante mecánica.

De todas formas no se debe olvidar que la serie trigonométrica de Fourier no deja de ser un caso particular de la serie de Fourier general.

La forma práctica que utilizaremos en los ejercicios para calcular series trigonométricas de Fourier se explica en la siguiente hoja.

Recuerda que este conjunto está formado por infinitos vectores

Ojo, el sistema trigonométrico no es ortonormal

La integral del denominador vale T

La integral del denominador vale $T/2$

La integral del denominador vale $T/2$

Cálculo práctico de la serie trigonométrica de Fourier

La serie trigonométrica de Fourier nos permite, básicamente, expresar cualquier función periódica como un sumatorio infinito (serie) de senos y cosenos.

Sea una función $f(x)$ periódica de período T . Entonces su serie de Fourier viene dada por la siguiente expresión :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

donde T es el período de la función y $\{1, \cos \frac{2\pi nx}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}; n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortogonal y completo en $[-T/2, T/2]$ ó $[0, T]$.

Por tanto, para obtener el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier lo único que hace falta calcular son los coeficientes a_n y b_n de los cosenos y de los senos, así como el término independiente a_0 .

- Si $f(x)$ viene definida en el intervalo $[-T/2, T/2]$ los coeficientes se calculan con las siguientes de expresiones:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx \quad n=0,1,2,3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} dx \quad n=1,2,3, \dots$$

- Si $f(x)$ viene definida en el intervalo $[0, T]$ los coeficientes se calculan con las siguientes de expresiones:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx \quad n=0,1,2,3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} dx \quad n=1,2,3, \dots$$

El término independiente siempre se pone dividido entre dos

Fíjate que en el coeficiente del seno la n comienza en 1

Fíjate que el único cambio con respecto al caso anterior está en los índices de integración. Esto se puede demostrar mediante un cambio lineal de variable tal y como se ve en el ejercicio 2 de clase

1.9 Cambio lineal de variable

Sabemos que el sistema trigonométrico $\{1, \sin \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ pero resulta que si cambiamos el intervalo por otro distinto el sistema anterior deja de ser ortogonal.

Donde el intervalo $[a, b]$ ya no tiene por qué ser simétrico

El cambio lineal de variable nos permite obtener un nuevo sistema ortogonal en cualquier intervalo de la forma $[a, b]$ partiendo del sistema que ya conocemos $\{1, \sin \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N}\}$ que es ortogonal en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

El proceso es el siguiente:

1. Partimos del sistema $\{1, \sin \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N}\}$ que es ortogonal en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

2. Hacemos el cambio $x = \alpha t + \beta$, donde falta determinar α y β .

3. Hacemos la siguiente identificación:

$$\begin{aligned} [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] &\rightarrow [a, b] \\ x &\rightarrow t \end{aligned}$$

4. De donde obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{T}{2} &= \alpha a + \beta \\ \frac{T}{2} &= \alpha b + \beta \end{aligned} \right\}$$

5. De aquí calculamos las incógnitas α y β . El nuevo sistema será:

$$\left\{1, \sin \frac{2\pi n(\alpha t + \beta)}{T}, \cos \frac{2\pi n(\alpha t + \beta)}{T}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

que es un sistema ortogonal (y completo) en el intervalo $[a, b]$.

Ver jun 02

En la práctica los espacios utilizados en la casi totalidad de los ejercicios son:

- $L^2\left([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R}\right)$
- $L^2([0, T], \mathbb{R})$

Ver el ejercicio 2 de clase

y resulta que tras el cambio lineal de variable ambos tienen el mismo sistema trigonométrico, es decir, el sistema $\{1, \sin \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y también es ortogonal en $[0, T]$, lo cual es una casualidad bastante útil a efectos prácticos.

Todo lo dicho en esta página también es aplicable si la función viene definida en el intervalo $[0, T]$

En el examen hay que sustituir T por el valor correspondiente en cada ejercicio

1.10 Convergencia de la serie trigonométrica de Fourier

Sea una función $f: [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $F(x)$ su serie trigonométrica de Fourier (DSF).

Convergencia en norma (en media) de la serie de Fourier

Por ser el sistema trigonométrico $\{1, \sin \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N}\}$ ortogonal y completo en el espacio $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$, la serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge en el sentido de la norma (en media) a la función $f(x)$ en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (y a su extensión periódica en $\mathbb{R}$).

Lo mismo dicho de otra forma:

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge en el sentido de la norma del espacio $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$ a la función $f(x)$, pues dicha serie ha sido calculada respecto a un sistema ortogonal y completo en un espacio euclídeo completo. La ortogonalidad del sistema implica que la sucesión de sumas parciales asociada a la serie de Fourier es una sucesión de Cauchy, al estar trabajando en un espacio completo dicha sucesión de Cauchy tendrá un límite en tal espacio. Y aseguramos que ese límite sea precisamente $f(x)$ imponiendo la completitud del sistema.

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Teorema

Si se cumple que (hipótesis):

- $f \in CTA([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$
- $f(\frac{T}{2}) = f(-\frac{T}{2}) = \frac{f(-\frac{T}{2}^+) + f(\frac{T}{2}^-)}{2}$
- $f' \in CT([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$

Entonces (tesis):

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Forma práctica de interpretar el teorema

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ es siempre una función CTA , así pues convergerá puntualmente a $f(x)$ en aquellos puntos en donde $f(x)$ sea continua. En los puntos donde $f(x)$ sea discontinua habrá estudiar cada caso concreto (es decir, puede converger o no).

Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Teorema

Si se cumple que :

- La serie de Fourier converge puntualmente a $f(x)$.
- $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ con $[a, b] \subseteq [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

Entonces (tesis):

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $[a, b]$.

Forma práctica de interpretar el teorema

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier intervalo cerrado donde exista convergencia puntual.

Observación

Siempre se cumple que:

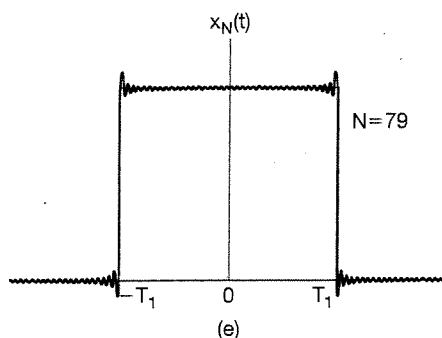
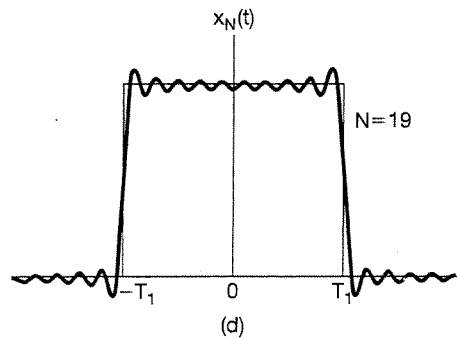
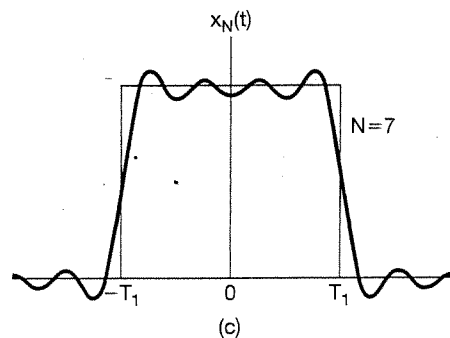
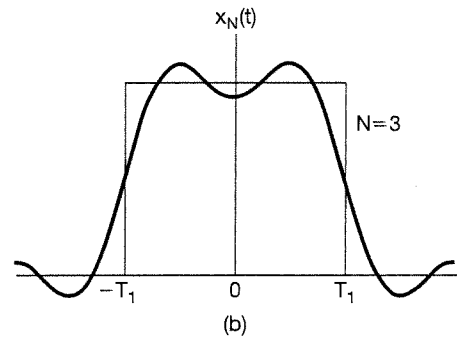
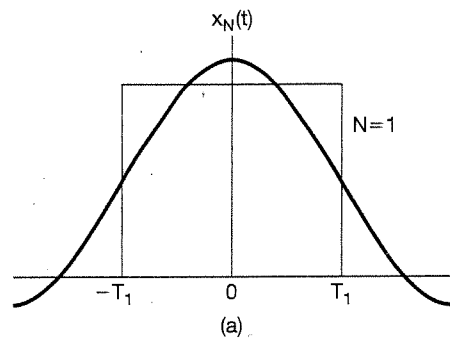
$$\text{Si } F(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) \Rightarrow F(x) \text{ converge puntualmente a } f(x)$$

Pero el recíproco no es cierto, es decir, existen puntos donde hay convergencia puntual pero no hay convergencia uniforme.

Fenómeno de Gibbs

En las cercanías de los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$, la serie de Fourier no converge uniformemente a $f(x)$.

Esto se debe a que en esos puntos cercanos a una discontinuidad se produce un rizado conocido como "Fenómeno de Gibbs". Por mucho que aumentemos los términos de la serie de Fourier la amplitud de este rizado no tiende a cero. Por eso la convergencia no es uniforme en los puntos de discontinuidad.



1.11 Utilización de las simetrías

La utilización de simetrías es muy útil a la hora de calcular el desarrollo en serie de Fourier ya que, la mayor parte de la veces, ahorran mucha labor de cálculo. Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ pueden tener dos tipos de simetrías:

No existe simetría respecto al eje X

Si se cumple $f(-x) = f(x)$ se dice que la función es par (simétrica respecto al eje Y)

Si se cumple $f(-x) = -f(x)$ se dice que la función es impar (simétrica respecto al origen)

Una función no puede ser par e impar al mismo tiempo

De manera que una función puede ser par, impar o ninguna de las dos cosas.

Ejemplos de funciones pares son: $x^2, x^4, \cos x, \dots$

Ejemplos de funciones impares son: $x, x^3, \sin x, \operatorname{tg} x, \dots$

Ejemplos de funciones que no tienen simetrías son: $e^x, \sqrt{x}, \ln x, \dots$

• Propiedades de las funciones simétricas

- La suma, resta, multiplicación y división de funciones pares es par.
- La suma y la resta de funciones impares es impar.
- La multiplicación y división de funciones impares es par.
- La suma y la resta de una función par y otra impar es una función que no es ni par ni impar.
- La multiplicación y la división de una función par y otra impar es una función impar.
- Si f es una función par en $[-T, T]$ se cumple que:

$$\int_{-T}^T f(x) dx = 2 \int_0^T f(x) dx$$

- Si f es una función impar en $[-T, T]$ se cumple que:

$$\int_{-T}^T f(x) dx = 0$$

• Funciones pares $f(-x) = f(x)$

Si la función que vamos a desarrollar en serie trigonométrica de Fourier tiene simetría par entonces:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx \quad n=0,1,2,3, \dots$$

$$b_n = 0$$

con lo que la serie trigonométrica de Fourier queda desarrollada solamente en términos coseno más el término independiente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T}$$

- **Funciones impares** $f(-x) = -f(x)$

Si la función que vamos a desarrollar en serie trigonométrica de Fourier tiene simetría impar entonces:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

con lo que la serie trigonométrica de Fourier queda desarrollada solamente en términos seno sin término independiente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi nx}{T}$$

- **Funciones que no son pares ni impares**

Este caso es el más general donde hay que calcularse todos los coeficientes.

En algunos ejercicios donde la función viene definida entre $[0, T]$ nos piden de forma explícita que obtengamos la serie de Fourier de la función sólo con senos o cosenos. En estos casos lo que tenemos que hacer es prolongar la función de partida para convertirla en una función impar o en una función par en el intervalo $[-T, T]$ según queramos que el DSF contenga solamente senos o cosenos.

En la guía de estudio
vienen ejercicios de
este tipo

Anexo al Tema 1:

A continuación se tienen algunos ejemplos de funciones comunes y sus desarrollos en serie trigonométrica de Fourier correspondientes. Algunas aparecerán en los ejercicios de clase o de examen. Se recomienda en todo caso practicar con ellas y comprobar que, efectivamente, partiendo de la función y acudiendo a lo aprendido en clase, se llega a obtener la serie indicada.

Función $f(t)$	Serie
$f(t) = t \quad -\pi < t < \pi$	$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$
$f(t) = t \quad -\pi < t < \pi$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$
$f(t) = \pi - t \quad 0 < t < 2\pi$	$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$
$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$
$f(t) = \sin t \quad -\pi < t < \pi$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$
$f(t) = \cos t \quad -\pi < t < \pi$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nt}{4n^2 - 1}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ \sin t & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} - \frac{1}{2} \sin t$

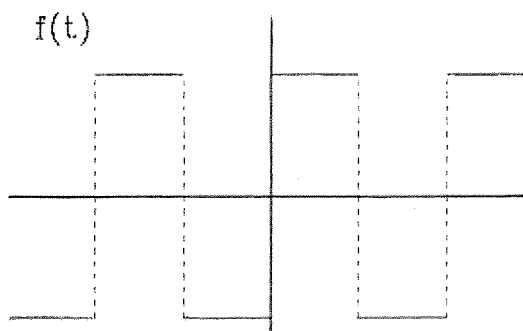
Anexo al tema 1:

A continuación se detallan gráficamente los comportamientos de la función signo y de su desarrollo trigonométrico de Fourier. Nótese que a medida que vamos añadiendo sumandos al desarrollo, éste se va aproximando más y más a la función.

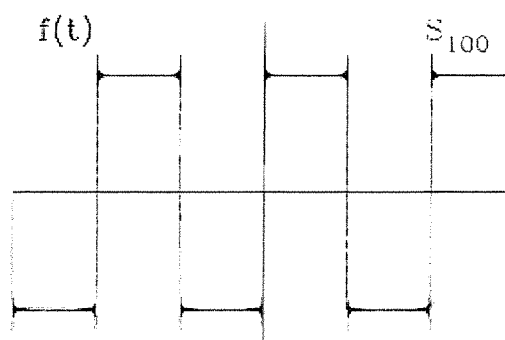
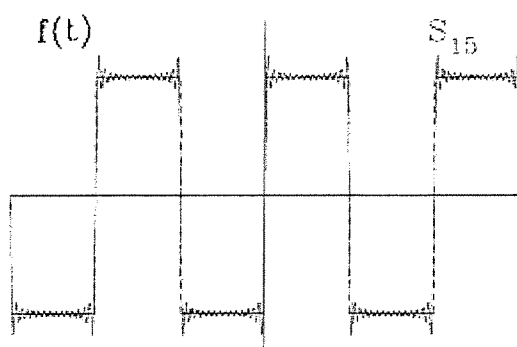
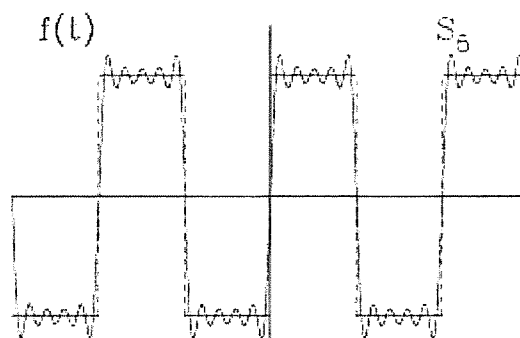
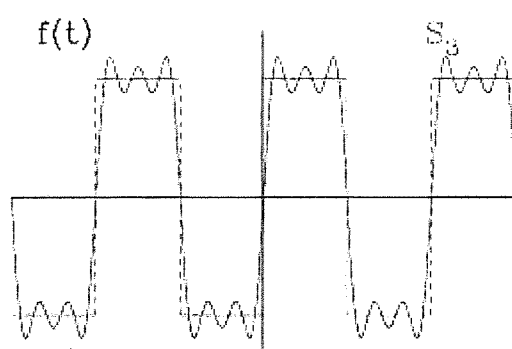
$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

Esta gráfica es la
función original



Estas cuatro gráficas
son desarrollos en serie
de Fourier para
distintos valores de k



TEMA 2: EDO DE PRIMER ORDEN

2.1 Definición

- Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es una ecuación que relaciona una función incógnita $y(x)$ con su derivada y' .
 - Forma explícita o normal: $y' = f(x, y)$
 - Forma implícita: $F(x, y, y') = 0$
 - Forma diferencial: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$
- La solución de una EDO de primer orden es una familia de funciones $y(x)$ que cumplen la ecuación.
- Llamamos **problema de valor inicial** a:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A la ecuación que acompaña a la EDO la llamamos **condición inicial**.

En este tipo de problemas se trata de hallar una única función, dentro del conjunto de funciones que son solución de la EDO, que cumpla, además, la condición inicial.

- No existe un sistema metódico para calcular las soluciones de una EDO. De hecho la mayoría de las EDOs no se pueden resolver. Por tanto, nuestro objetivo se limita a aprender a resolver ciertos tipos conocidos de EDOs para los que se conoce su método de resolución. Estos tipos son los que se presentan a continuación.

2.2 Ecuaciones del tipo $y' = f(x)$

Son las EDOs de primer orden más sencillas que nos podemos encontrar.

Resolución:

$$y(x) = C + \int f(x) dx$$

2.3 Ecuaciones autónomas

Una ecuación autónoma es de la forma :

$$y' = f(y)$$

Resolución: No existe una forma metódica de resolverlas. Normalmente se reducen a EDOs de variables separadas.

Hay que tener cuidado ya que las EDOs autónomas suelen contener soluciones particulares que no están recogidas dentro de la solución general que obtendremos. Normalmente estas soluciones particulares las obtendremos por inspección visual (a ojo).

Recuerda:
Las soluciones de las EDOs son funciones, no números

Fíjate que la característica fundamental de las EDO autónomas es que la variable x no aparece explícita en la ecuación

2.4 EDOs de variables separadas

Una ecuación diferencial de variables separadas es aquella que tiene la forma :

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

también puede aparecer con el siguiente aspecto:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Resolución: Se integra por un lado la variable x y por otro la variable y :

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = 0$$

También hay que tener cuidado con las EDOs de variables separadas ya que suelen contener soluciones particulares que no quedan recogidas dentro de la solución general que obtendremos. En este caso la forma de obtener las soluciones particulares es sistemática y se explicará en los ejemplos.

2.5 Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial homogénea es de la forma :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Resolución: Cambio de variable $y = ux$ y obtenemos una EDO de variables separadas.

2.6 EDOs lineales

Una ecuación lineal (de primer orden) es aquella que tiene la forma :

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Resolución:

La solución de esta EDO viene dada por la siguiente fórmula:

$$y(x) = \left[K + \int g(x) e^{-\int f(x)dx} dx \right] e^{\int f(x)dx}$$

De todas formas no es aconsejable aprenderse esta fórmula de memoria. Para llegar a ella existen dos procedimientos:

1. Calcular la solución general de la EDO homogénea $y' - f(x)y = 0$ y una solución particular de la EDO completa mediante el método de variación de los parámetros (también llamado variación de las constantes).
2. Realizar el cambio de variable $y = uv$

Más exactamente vamos a hablar de EDO lineales con coeficientes variables. Más adelante veremos que cuando los coeficientes de una EDO lineal son constantes se resuelve de otra forma

Ya verás en los ejercicios que no es necesario que memorices la fórmula

La mejor forma de entender estos métodos es mediante ejemplos. Nosotros solamente utilizaremos el primero.

2.7 Ecuación de Bernouilli

Una ecuación de Bernouilli es de la forma :

$$y' = f(x)y + g(x)y^n \quad \text{donde } n \in \mathbb{R}$$

Resolución:

Dividimos entre y^n en ambos lados de la igualdad, después hacemos el cambio de variable $y^{-n+1} = u$ y queda reducida a una EDO lineal.

2.8 EDOs exactas

Se dice que la ecuación diferencial :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

es exacta si existe una función real $F(x, y)$ que llamamos primitiva, definida en D , tal que, en dicho dominio,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

la manera de ver si una EDO es exacta es mediante el siguiente teorema:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \text{ es exacta} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Resolución:

La resolución de una EDO exacta se hace a través de 5 (mini)pasos:

1.- Integramos $P(x, y)$ con respecto a x , suponiendo y constante :

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) = R(x, y) + \varphi(y)$$

2.- Derivamos $F(x, y) = R(x, y) + \varphi(y)$ con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + \varphi'(y)$$

3.- Igualamos $\frac{\partial F}{\partial y}$ a $Q(x, y)$ y despejamos $\varphi'(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

4.- Integramos $\varphi'(y)$ y obtenemos $\varphi(y)$.

5.- La integral general queda en forma implícita:

$$F(x, y) = R(x, y) + \varphi(y) = 0$$

También se puede hacer integrando $Q(x, y)$ en vez de $P(x, y)$. En ese caso también cambiarían los siguientes pasos.

Normalmente en este paso se van términos que están repetidos en ambos lados de la igualdad

En el 4º paso no olvidar la constante que aparece al integrar

En el 5º paso no olvidar igualar a cero la solución

2.9 Ecuaciones diferenciales no exactas. Factores integrantes

Sea una ecuación diferencial del tipo:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

que no es exacta ya que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Un factor integrante para esta ecuación diferencial es una función real $\mu(x,y)$ que admite derivadas parciales continuas, de manera que

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

ya es una ecuación diferencial exacta y se resuelve como tal. Se verifica entonces que

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

desarrollando la derivada del producto en ambos lados de la igualdad queda:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad [1]$$

Una vez llegados a la expresión [1] el enunciado nos tiene que proporcionar algún dato adicional para poder saber la forma exacta que tiene el factor integrante. Los dos siguientes son los casos más habituales (¡pero no los únicos!):

a) Si nos dicen que el factor integrante es función de x únicamente, la expresión [1] queda:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

donde obtenemos la expresión de $\mu(x)$ integrando a ambos lados de la igualdad.

b) Si nos dicen que el factor integrante es función de y únicamente, la expresión [1] queda:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

donde obtenemos la expresión de $\mu(y)$ integrando a ambos lados de la igualdad.

2.10 EDOs lineales con coeficientes constantes

La diferencia con la EDO lineal ya vista en el punto 2.6 es que aquí el coeficiente de la incógnita y es una constante (no varía con respecto a x)

Una EDO lineal (de primer orden) con coeficientes constantes es aquella que tiene la forma :

$$y' = ay + g(x)$$

Resolución

La resolución se hace en dos partes.

Solución General de la Homogénea = SGH

Primero se calcula la solución de la EDO homogénea (sin término independiente): $y' = ay$

La solución general de la EDO homogénea (que llamaremos SGH) es siempre:

$$y_H(x) = Ke^{ax}$$

Solución Particular de la EDO Completa = SPC

Segundo se calcula una solución particular de la EDO completa (con término independiente) mediante el método de **coeficientes indeterminados**. Este método consiste en suponer una solución particular de la EDO basándose en la forma del término independiente.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

Si $g(x) = 4e^{2x}$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = ae^{2x}$

Si $g(x) = xe^{3x}$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = (ax + b)e^{3x}$

Si $g(x) = x^2 - 5$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

Si $g(x) = \cos 2x$ probaremos con una sol. part. de la forma $y_p(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$

Si $g(x) = e^{-x} \sin 4x$ probaremos con una sol. part. de la forma $y_p(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$
etc, ...

Por último para obtener la solución de la EDO completa se suman ambas:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

Observaciones

- El método de los coeficientes indeterminados no siempre es aplicable. En general sólo se puede aplicar cuando el término independiente tiene la forma de "polinomio por exponencial" o "(seno + coseno) por exponencial".
- Volveremos a ver este método de forma completa y rigurosa en el tema 4 cuando estudiemos las EDOs lineales con coeficientes constantes de orden n (páginas T-31, T-32 y T-33).
- En asignaturas aplicadas (IACR, EBAS, etc...) lo común es utilizar la t como variable independiente representando el tiempo (en vez de la x que es la usual en matemáticas).

2.11 Teorema de existencia y unicidad

Sea el Problema de Valor Inicial (PVI) siguiente:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Existencia de solución del PVI

Se supone que la continuidad de funciones de dos variables se ha estudiado ya en FMT2

Si la función $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0)

Entonces:

El PVI tiene al menos una solución $y = y(x)$ definida en (x_0, y_0) .

Unicidad de la solución del PVI

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe y es continua en (x_0, y_0)

Entonces:

Existe una única solución $y = y(x)$ del PVI.

Observación

El teorema de existencia y unicidad de solución de una EDO nos proporciona condiciones suficientes (pero no necesarias). Esto quiere decir que, si se cumple la hipótesis entonces seguro que se cumple la tesis; pero, si no se cumple la hipótesis nada podemos decir sobre la tesis, es decir, se puede cumplir o no cumplir.

2.12 Soluciones singulares

Sea una función $y = \varphi(x)$ que es solución de la EDO $y' = f(x, y)$.

Se dice que $y = \varphi(x)$ es una **solución singular** de la EDO si por cada punto de $y = \varphi(x)$ pasa otra solución de la EDO y ambas tienen la misma tangente en ese punto.

Observaciones

- Toda envolvente de una familia de curvas solución de una EDO es solución singular. Sin embargo, se puede tener una solución singular de la EDO sin necesidad de que ésta sea una envolvente de la familia de curvas solución de dicha EDO.
- Las EDOs lineales no tienen soluciones singulares.
- En los puntos de las soluciones singulares no se verifica el teorema de unicidad de solución.
- No confundir solución particular con solución singular. De hecho, no todas las soluciones particulares son soluciones singulares.

Este punto es importante

TEMA 3: MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 Introducción

- Los métodos numéricos se utilizan en todas las ramas de las matemáticas y sirven para dar una solución aproximada a problemas que no tienen solución analítica.
- La solución que proporciona un método numérico es siempre un número (como su propio nombre indica).
- Nosotros, en esta asignatura, sólo nos centraremos en la resolución mediante métodos numéricos de EDOs de primer orden.
- Dado el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

su solución se puede calcular de dos formas:

Solución analítica:

Una solución analítica de una EDO es una función del tipo:

$$y = y(x) \quad \text{Solución explícita}$$

$$F(x, y) = C \quad \text{Solución implícita}$$

Las EDOs de primer orden que tienen solución analítica las hemos visto ya en el tema 2. Sin embargo ¿qué podemos hacer con aquellas EDO de las que no sabemos calcular su solución analítica?. En este caso podemos calcular una solución numérica.

Solución numérica

Una solución numérica de una EDO se suele dar en forma de tabla de la siguiente forma:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	

En esta tabla los valores x_0 e y_0 vienen dados por la condición inicial del PVI. Los x_i los fijaremos nosotros y la distancia entre ellos lo llamaremos **paso** y lo nombraremos h . El paso h no tiene por que ser fijo.

Nuestro objetivo será encontrar los valores de y_i que serán los que me den el valor aproximado de la solución en el punto x_i .

- Los métodos numéricos se pueden clasificar según dos categorías:
 - unipaso o multipaso
 - explícitos o implícitos

Nosotros vamos a estudiar únicamente los métodos unipaso explícitos.

- **Nomenclatura**

Vamos a utilizar la siguiente nomenclatura para referirnos a los distintos puntos que vamos a utilizar:

$h \equiv$ Valor del paso

$x_i \equiv$ Valor inicial en el paso i de la variable x (valor exacto)

$x_{i+1} \equiv$ Valor final en el paso i de la variable x (valor exacto)

$y(x_i) \equiv$ Valor inicial en el paso i de la variable y (valor exacto)

$y(x_{i+1}) \equiv$ Valor final en el paso i de la variable y (valor exacto)

$y_i \equiv$ Valor inicial en el paso i de la variable y (valor aproximado)

$y_{i+1} \equiv$ Valor final en el paso i de la variable y (valor aproximado)

3.2 Desarrollo en serie de Taylor

No se trata de un método numérico propiamente dicho. Está a medio camino entre los métodos numéricos y los analíticos. La razón de su estudio es que los métodos numéricos que vamos a ver más adelante se basan todos en el desarrollo en serie de Taylor.

La forma de calcular el valor aproximado de la solución del PVI es obteniendo el siguiente desarrollo en serie de Taylor y particularizando en el punto concreto $x_n = x_0 + nh$:

$$y_n = y(x_0) + nh y'(x_0) + \frac{(nh)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(nh)^3}{3!} y'''(x_0) + \dots$$

Observaciones

- Requiere el cálculo de las derivadas sucesivas de la EDO. Esto es costoso en tiempo
- Aunque proporciona una buena aproximación de la función solución cerca del punto x_0 , esta aproximación empeora notablemente según nos alejamos de x_0 .

3.3 Métodos unipaso explícitos

Surgen para intentar solventar los problemas del método de desarrollo en serie.
La filosofía de estos métodos es la siguiente:

-Partimos del PVI original :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Recuerda que:

$$x_1 = x_0 + h$$

-Partiendo siempre de la condición inicial y_0 obtenemos una estimación $y_1 = y_0 + \delta y_0$ de $y(x_1)$ mediante un desarrollo de Taylor de bajo orden.

-Construimos con ello un nuevo PVI con la misma EDO pero cuya condición inicial es la calculada en el apartado anterior:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

- Repetimos este proceso hasta llegar al punto en el que queremos aproximar la solución.

Recuerda que:

$$y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$$

En general se trata de calcular, para cada paso, la siguiente expresión: $y_{i+1} = y_i + \delta y_i$

donde δy_i es una estimación de la variación de y .

La diferencia entre unos métodos y otros estriba, únicamente, en la forma de calcular δy_i .

3.3.1 Método de Euler Básico

Utiliza como δy_i la pendiente en x_i :

$$\delta y_i = h y' = h f(x_i, y(x_i)) \approx h f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \delta y_i = y_i + h f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

3.3.2 Método de Euler mejorado

Utiliza como δy_i la media de las pendientes en x_i y en x_{i+1} :

$$\delta y_i = h \frac{f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))}{2} \Rightarrow \delta y_i = \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Fíjate que en la expresión final aproximamos el valor desconocido y_{i+1} con un Euler básico

$$y_{i+1} = y_i + \delta y_i = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))] \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

3.3.3 Método de Euler modificado

Utiliza como δy_i la pendiente del punto medio entre x_i y x_{i+1} :

Donde: $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$

$$\delta y_i = h f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

Fíjate que en la expresión final aproximamos el valor desconocido $y_{i+\frac{1}{2}}$ con un Euler básico de paso $h/2$

$$y_{i+1} = y_i + \delta y_i = y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

3.4 Métodos Runge-Kutta

3.4.1 Definiciones

Esta definición no es muy rigurosa

- Decimos que un método numérico es de r etapas cuando para calcular y_{i+1} necesitamos evaluar la función r veces.
- Decimos que un método numérico es de orden p cuando su desarrollo "equivalente" en serie de Taylor es de grado p .
- Llamamos **método de Runge-Kutta de r etapas** a

$$y_{i+1} = y_i + a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_r K_r$$

donde:

- $a_j, j = 1, \dots, r$ son constantes escogidas de forma que y_{i+1} se aproxima cuanto sea posible al desarrollo en serie de Taylor de $y(x_{i+1})$.
- $K_j, j = 1, \dots, r$ son estimaciones de δy_i .

3.4.2 Observaciones

- El método de Euler mejorado y el método de Euler modificado son casos particulares del método de Runge-Kutta de dos etapas:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 K_1 + a_2 K_2$$

Euler mejorado,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \quad K_1 = h f(x_i, y_i) \quad K_2 = h f(x_i + h, y_i + K_1)$$

Euler modificado,

$$y_{i+1} = y_i + K_2 \quad K_1 = h f(x_i, y_i) \quad K_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

- No se tiene que confundir el número de etapas con el orden de un método. De hecho, para $r = 1, 2, 3, 4$ se cumple que:
 - Con métodos de Runge-Kutta de r etapas el máximo orden que puede conseguirse es r

Pero sin embargo para $r = 5, 6$ se cumple que:

 - Con métodos de Runge-Kutta de r etapas el máximo orden que puede conseguirse es $r-1$
- El método de Taylor persigue mayor precisión a cambio de que haya que evaluar en (x_i, y_i) las derivadas parciales sucesivas de f . Los métodos de Runge-Kutta intentan conseguir el mismo fin evaluando solamente la función f , pero en varios puntos.

3.5 Error de discretización de los métodos numéricos

Un método numérico nos da siempre una solución aproximada del PVI. Por tanto es muy importante para nosotros conocer el **error de discretización** que viene expresado por:

$$E_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Diferencia entre el valor exacto desconocido y el valor aproximado conocido

Este número, sin embargo, va a ser imposible de calcular pues, como ya sabemos, $y(x_{i+1})$ es un valor desconocido. Por tanto tendremos que conformarnos con una estimación suya. ¿Cómo obtenemos esta estimación del error de discretización?. Lo que haremos es utilizar una segunda estimación $\hat{y}_{i+1}$ de $y(x_{i+1})$ más precisa que y_{i+1} .

Para obtener esta segunda estimación más precisa se pueden utilizar dos técnicas:

Primera técnica

Usar un método del mismo orden p y menor longitud de paso.

Utilizando esta técnica la estimación del error de discretización viene dada por:

$$E_{i+1} \approx \frac{\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}}{1 - 2^{-p}}$$

Segunda técnica

Usar un método con la misma longitud de paso h y mayor orden.

Utilizando esta técnica la estimación del error de discretización viene dada por:

$$E_{i+1} \approx \hat{y}_{i+1} - y_{i+1}$$

Observaciones

- ¿Qué utilidad tiene el cálculo del error?. Normalmente al aplicar métodos numéricos para calcular la solución de un PVI nos interesa que el error cometido al avanzar en la solución numérica no rebase una tolerancia predefinida. La tolerancia usualmente se calcula para un paso determinado y si en un determinado paso se sobrepasa lo que se hace es volver al paso anterior y continuar con un paso menor.
- Además del error de discretización en los métodos numéricos también se comete otro error que es el del redondeo de decimales. A veces este error no es despreciable. Por ejemplo, sabemos que disminuyendo la longitud de paso se consiguen resultados con menor error de discretización. Sin embargo, el disminuir demasiado la longitud de paso puede llevar consigo un aumento de los errores de redondeo con lo que el error global (error de discretización + error de redondeo) puede aumentar.

TEMA 4: EDO's DE ORDEN SUPERIOR

Llamamos EDO de orden n a una relación entre una función incógnita $y(x)$, su variable independiente y sus derivadas hasta orden n :

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, x) = 0$$

En este tema nos centraremos exclusivamente en resolver las EDOs lineales de la forma:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$$

4.1 EDO lineales con coeficientes constantes de orden n

En este tema vamos a estudiar el tipo más simple de ecuación diferencial que existe. Se trata de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales con coeficientes constantes de orden n . Las EDO lineales con coeficientes constantes de orden uno ya fueron vistas en el tema 2 así que aquí se trata de generalizar lo visto allí para ordenes mayores que el primero.

Una EDO lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la siguiente forma:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x)$$

donde $p_1, p_2, \dots, p_n$ son constantes reales o complejas y $q(x)$ es el término independiente.

Resolveremos este tipo de EDO calculando por separado la solución general de la EDO homogénea (que llamaremos SGH) y una solución particular de la EDO completa (SPC). Una vez obtenidas ambas, las sumaremos para obtener la solución general de la EDO completa:

$$y(x) = SGH + SPC \Rightarrow y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Veamos a continuación como se calculan cada una de estas dos soluciones.

Solución general de la EDO homogénea (SGH)

Sea la EDO homogénea:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

La solución general de esta EDO homogénea se calcula a partir de las raíces de la ecuación característica asociada:

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

donde hemos sustituido: $y = 1$, $y' = r$, $y'' = r^2$, ..., $y^{(n-1)} = r^{n-1}$, $y^{(n)} = r^n$.

Dependiendo de que las distintas raíces (soluciones) de esta ecuación característica sean reales o complejas y de su orden de multiplicidad tenemos cuatro posibles casos:

- Raíz real $r = a$ simple,

$$y = A e^{ax}$$

- Raíz real $r = a$ con multiplicidad n ,

$$y = (A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) e^{ax}$$

Recuerda que homogénea significa que quitamos el término independiente

Este es el caso de la EDO de orden uno vista en el tema 2

- Dos raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm \beta i$ simples,

$$y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

- Dos raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm \beta i$ con orden de multiplicidad n ,

$$y = e^{\alpha x} [(A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0) \cos \beta x + (B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x + B_0) \sin \beta x]$$

A continuación, a modo de ejemplo, se muestran todas las posibles combinaciones para las EDOs de orden uno, dos, tres y cuatro según sean las raíces de su ecuación característica asociada:

- $y' + a_1y = 0$ EDO de orden uno (una única posible solución)

$$- r_1 = a \quad y = Ae^{\alpha x}$$

- $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ EDO de orden dos (tres posibles soluciones)

$$- r_1 = a \quad r_2 = b \quad y = Ae^{\alpha x} + Be^{bx}$$

$$- r_1 = a \text{ (doble)} \quad y = (Ax + B)e^{\alpha x}$$

$$- r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

- $y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$ EDO de orden tres (cuatro posibles soluciones)

$$- r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_3 = c \quad y = Ae^{\alpha x} + Be^{bx} + Ce^{cx}$$

$$- r_1 = a \text{ (doble)} \quad r_2 = b \quad y = (Ax + B)e^{\alpha x} + Ce^{bx}$$

$$- r_1 = a \text{ (triple)} \quad y = (Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$$

$$- r_1 = a \quad r_{2,3} = \alpha \pm \beta i \quad y = Ae^{\alpha x} + e^{\alpha x} [B \cos \beta x + C \sin \beta x]$$

- $y^{iv} + a_1y''' + a_2y'' + a_3y' + a_4y = 0$ EDO de orden cuatro (nueve posibles soluciones)

$$- r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_3 = c \quad r_4 = d \quad y = Ae^{\alpha x} + Be^{bx} + Ce^{cx} + De^{dx}$$

$$- r_1 = a \text{ (doble)} \quad r_2 = c \quad r_3 = d \quad y = (Ax + B)e^{\alpha x} + Ce^{cx} + De^{dx}$$

$$- r_1 = a \text{ (triple)} \quad r_2 = d \quad y = (Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x} + De^{dx}$$

$$- r_1 = a \text{ (cuadruple)} \quad y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{\alpha x}$$

$$- r_1 = a \text{ (doble)} \quad r_2 = b \text{ (doble)} \quad y = (Ax + B)e^{\alpha x} + (Cx + D)e^{bx}$$

$$- r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_{3,4} = \alpha \pm \beta i \quad y = Ae^{\alpha x} + Be^{bx} + e^{\alpha x} [C \cos \beta x + D \sin \beta x]$$

$$- r_1 = a \text{ (doble)} \quad r_{2,3} = \alpha \pm \beta i \quad y = (Ax + B)e^{\alpha x} + e^{\alpha x} [C \cos \beta x + D \sin \beta x]$$

$$- r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad r_{3,4} = \gamma \pm \delta i \quad y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x] + e^{\gamma x} [C \cos \delta x + D \sin \delta x]$$

$$- r_{1,2,3,4} = \alpha \pm \beta i \text{ (dobles)} \quad y = e^{\alpha x} [(Ax + B) \cos \beta x + (Cx + D) \sin \beta x]$$

Por supuesto no hace falta aprenderse todas estas soluciones de memoria. Fíjate que siguen una regla muy sencilla de construcción. Basta con saberse los cuatro tipos básicos explicados en la página anterior y combinarlos correctamente.

Solución particular de la EDO completa (SPC)

Una solución particular de la EDO completa SPC se obtiene aplicando el **método de coeficientes indeterminados**. Ya esbozamos este método en el tema 2 con EDO de primer orden. Todo lo que allí se dijo sigue sirviendo pero ahora vamos a terminar de formalizar el procedimiento.

El método de los coeficientes indeterminados consiste en probar una solución particular que tenga la misma forma funcional que el término independiente $q(x)$ de la ecuación, salvo por los coeficientes que habrá que determinar.

- **Primer caso:** El término independiente $q(x)$ es un "polinomio por una exponencial"

Este es un caso particular del siguiente cuando $m=0$

- Si $q(x) = (A_0x^k + A_1x^{k-1} + \dots + A_k)e^{\lambda x}$ la solución particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = (C_0x^k + C_1x^{k-1} + \dots + C_k)e^{\lambda x}$$

- Si $q(x) = (A_0x^k + A_1x^{k-1} + \dots + A_k)e^{\lambda x}$ y además λ es raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Entonces la solución particular va a ser de la forma:

Fíjate que los coeficientes no son los mismos que en $q(x)$

$$y_p(x) = x^m (C_0x^k + C_1x^{k-1} + \dots + C_k)e^{\lambda x}$$

- **Segundo caso:** El término independiente $q(x)$ es un "(seno + coseno) por una exponencial"

Este es un caso particular del siguiente cuando $m=0$

- Si $q(x) = [(A_0x^k + \dots + A_k)\cos \beta x + (B_0x^k + \dots + B_k)\sin \beta x]e^{\alpha x}$ la solución particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = [(C_0x^k + \dots + C_k)\cos \beta x + (D_0x^k + \dots + D_k)\sin \beta x]e^{\alpha x}$$

Fíjate que los coeficientes no son los mismos que en $q(x)$

- Si $q(x) = [(A_0x^k + \dots + A_k)\cos \beta x + (B_0x^k + \dots + B_k)\sin \beta x]e^{\alpha x}$ y $\alpha + \beta i$ es raíz de multiplicidad m de la ecu. característica. Entonces la sol. particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = x^m [(C_0x^k + \dots + C_k)\cos \beta x + (D_0x^k + \dots + D_k)\sin \beta x]e^{\alpha x}$$

Observación

Queda solo una cuestión por resolver: ¿qué ocurre si el término independiente $q(x)$ no tiene una de las formas indicadas más arriba (polinomio por exponencial o seno + coseno por exponencial)? En ese caso existen dos posibilidades:

Primera: Intentar descomponer el término independiente en dos o más funciones que sean de esa forma y aplicar a cada función el método de coeficientes indeterminados.

Segundo: Si lo anterior tampoco es posible habría que recurrir al método de variación de parámetros que es general para cualquier EDO lineal (tenga los coeficientes variables o constantes)

En principio no debe suceder nunca pero...

4.2 Resolución general de las EDOs lineales de orden dos

Ahora vamos a resolver las EDOs lineales de orden dos que son las siguientes:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

Para resolver esta EDO seguimos los siguientes doce pasos:

1) Si nos dan la EDO de otra forma que no sea la anterior (por ejemplo, con un coeficiente distinto de 1 en y'') manipulamos la expresión hasta llegar a ponerla como está aquí.

2) Resolvemos la EDO homogénea:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

que siempre tiene como solución una función de la forma:

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones particulares linealmente independientes de la EDO homogénea.

3) Para encontrar estas dos soluciones particulares el enunciado nos tiene que dar algún dato adicional. Algunos de los más comunes son:

- Nos dan directamente una de las dos soluciones particulares $y_1(x)$
- Nos dan una relación de cociente de la forma: $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = f(x)$
- Si la suma de todos los coeficientes de la EDO suma cero entonces sabemos que una solución particular es siempre $y_1(x) = e^x$

4) Encontramos la otra solución particular $y_2(x)$ mediante la fórmula de Liouville:

$$W(x) = C e^{-\int p_1(x) dx}$$

donde $W(x)$ representa el Wronskiano que se define de la siguiente forma:

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

5) Una vez que hemos simplificado convenientemente la fórmula de Liouville pueden suceder dos cosas:

- Nos queda una ecuación normal (algebraica) donde despejamos $y_2(x)$.
- Nos queda una EDO de primer orden del tipo $y' = f(x, y)$ que tenemos que resolver con las técnicas vistas en el tema 2. Importante: Las constantes que aparecen al resolver esta EDO las elijo yo libremente. No hay que calcularlas.

6) Una vez encontradas las dos soluciones particulares $y_1(x)$ e $y_2(x)$ comprobamos que son linealmente independientes y que, por tanto, forman un sistema $\{y_1(x), y_2(x)\}$ fundamental de soluciones de la EDO homogénea. Para ello comprobamos que:

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0 \quad \forall x$$

Con coeficientes
variables

Método de los doce
pasos

Normalmente esta EDO de primer orden suele ser una EDO lineal con coeficientes constantes

- 7) La solución de la EDO homogénea es, por tanto:

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

- 8) Ahora utilizamos el método de variación de los parámetros (o variación de las constantes) para obtener la solución general de la completa. Este método se basa en suponer que la solución general de la EDO completa tiene la forma:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

- 9) Tras sustituir en la EDO y operar obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ que resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

- 10) Obtenemos mediante integración $C_1(x)$ y $C_2(x)$ y ahora sí que mantenemos las constantes que aparecen al integrar que llamaremos K_1 y K_2 .

- 11) La solución de la EDO completa es, por tanto:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

que en realidad se trata de un conjunto de soluciones pues no hay que olvidar que queda en función de K_1 y K_2 que son constantes a determinar.

- 12) Por último, en el caso en que nos den dos condiciones iniciales (es decir, un PVI) podremos determinar el valor de K_1 y K_2 y obtendremos una única solución que resuelve el PVI.

La demostración de este paso está en la siguiente hoja aunque a efectos prácticos este sistema hay que saberlo de memoria

Este último paso solo se realiza si tenemos un PVI (es decir, además de la EDO nos dan dos condiciones iniciales)

Demostración de los pasos 8 y 9 del método de los doce pasos

Ahora vamos a demostrar la forma de obtener el sistema del paso 9 aplicando el método de variación de los parámetros. Para resolver una EDO mediante los doce pasos no es estrictamente necesario conocer esta demostración pero sí es muy recomendable para posibles preguntas teóricas.

Partimos la EDO homogénea

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

cuya solución general es

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

La idea decisiva ahora es sustituir las constantes C_1 y C_2 por las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$.

Esto da:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

A continuación se intenta determinar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ de manera que la expresión anterior sea una solución de la EDO completa en lugar de serlo de la EDO homogénea.

Para ello derivamos la expresión anterior:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Ahora, para tener dos ecuaciones, suponemos que (grado de libertad):

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad [1]$$

Con lo que la derivada primera derivada nos queda bastante más sencilla:

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Derivamos otra vez para obtener y'' :

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

Ahora se sustituyen y , y' e y'' en la EDO completa:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \Rightarrow$$

$$[C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)] + p_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + p_2(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = 0$$

$$C_1(x)[y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = q(x)$$

Cada una de las expresiones entre corchetes de la ecuación es cero porque tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación homogénea. Por consiguiente, la expresión anterior queda:

$$C_2'(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1'(x) = q(x) \quad [2]$$

Finalmente las ecuaciones [1] y [2] son las ecuaciones que hemos utilizado en el paso 9.

Donde debemos recordar que y_1 e y_2 son soluciones particulares de la EDO homogénea.

Aquí comienza el método de variación de los parámetros

¡¡Idea feliz !!

Este es un paso que hay que saberse ya que es muy difícil que se nos ocurra

En este paso hemos reordenado lo del paso anterior

4.3 Ecuación de Euler

- Una ecuación de Euler es una EDO lineal con coeficientes variables de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = q(x), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Esta ecuación se resuelve mediante un cambio de variable que la convierte en una EDO lineal con coeficientes constantes. El cambio a realizar es:

$$t = \ln x \Rightarrow x = e^t$$

Gracias a esto cambiaremos todas las derivadas de la EDO que dependen de x (es decir, $y'(x)$) por derivadas que dependan de t (esto es, $y'(t)$).

Dado que en los cálculos posteriores va a aparecer la expresión $\frac{dt}{dx}$, calculamos previamente su valor:

$$\left. \begin{aligned} t = \ln x &\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \\ x = e^t &\Rightarrow \frac{1}{x} = e^{-t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

Aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta todo lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \bullet \quad y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'(t) e^{-t} \Rightarrow y'(x) = y'(t) e^{-t} \\ \bullet \quad y''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} [y'(x)] = \frac{d}{dx} [y'(t) e^{-t}] = \frac{d}{dt} [y'(t) e^{-t}] \frac{dt}{dx} = \\ &= \left[\frac{d}{dt} [y'(t)] e^{-t} + y'(t) \frac{d}{dt} [e^{-t}] \right] e^{-t} = [y''(t) - y'(t)] e^{-2t} \Rightarrow y''(x) = [y''(t) - y'(t)] e^{-2t} \\ \bullet \quad y'''(x) &= \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right] = \frac{d}{dx} [y''(x)] = \frac{d}{dx} [[y''(t) - y'(t)] e^{-2t}] = \\ &= \frac{d}{dt} [[y''(t) - y'(t)] e^{-2t}] \frac{dt}{dx} = \left[\frac{d}{dt} [y''(t) - y'(t)] e^{-2t} + [y''(t) - y'(t)] \frac{d}{dt} [e^{-2t}] \right] e^{-t} = \\ &= [[y'''(t) - y''(t)] e^{-2t} - 2[y''(t) - y'(t)] e^{-2t}] e^{-t} = [y'''(t) - y''(t) - 2y''(t) + 2y'(t)] e^{-3t} \\ &\Rightarrow y'''(x) = [y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)] e^{-3t} \\ \bullet \quad y^{(iv)}(x) &= [y^{(iv)}(t) - 6y'''(t) + 11y''(t) - 6y'(t)] e^{-4t} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo todo esto en la EDO inicial obtenemos una EDO lineal con coeficientes constantes:

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = q(e^t), \quad b_i \in \mathbb{R}$$

En el examen no se pueden poner directamente los resultados finales. Hay que escribir todos estos desarrollos según se indica.

Aunque parezca complejo, únicamente se trata de aplicar las reglas de derivación y la regla de la cadena.

Si necesitamos más derivadas las podemos obtener aplicando reiteradamente la regla de la cadena.

Observa que en la expresión de $y^{(n)}(x)$ aparece e^{-nt} . Al sustituir en la EDO inicial irá multiplicando a $x^n = e^{nt}$ y estos términos se cancelarán, quedando únicamente los sumandos de las derivadas de $y(t)$ (Coeficientes constantes)

- También se consideran de Euler las EDO de la forma:

$$a_n(ax+b)^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(ax+b)y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

En este caso el cambio de variable es:

$$t = \ln(ax+b) \Rightarrow ax+b = e^t \Rightarrow x = \frac{e^t - b}{a}$$

y las derivadas, operando de forma análoga a la anterior, quedan:

$$y' = y'_t a e^{-t}$$

$$y'' = (y''_t - y'_t) a^2 e^{-2t}$$

$$y''' = (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) a^3 e^{-3t}$$

$$y^{iv} = (y^{iv}_t - 6y'''_t + 11y''_t - 6y'_t) a^4 e^{-4t}$$

Sustituyendo todo esto en la EDO inicial obtenemos una EDO lineal con coeficientes constantes:

$$b_0 y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y'_t + b_n y = q\left(\frac{e^t - b}{a}\right) \quad b_i \in \mathbb{R}$$

4.4 Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskiano

Definiciones

- Se dice que n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en el intervalo en (a, b) son **linealmente dependientes** sii:

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0) / \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

- Se dice que n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en el intervalo en (a, b) son **linealmente independientes** sii:

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

- Si tenemos n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en un intervalo (a, b) y con derivadas hasta el orden $n-1$, se define el **Wronskiano** de las funciones como:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Resultados para funciones cualesquiera

En este apartado vamos a considerar que las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son funciones cualesquiera. En este caso se cumplen los siguientes resultados:

- Si $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes en $(a, b) \Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
- Si $\exists x_0 \in (a, b) / W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

- Las funciones $y_1, \dots, y_n$ son lin. depen. $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \dots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \dots & \langle y_n, y_n \rangle \end{pmatrix} = 0$

$$\text{siendo } \langle y_i, y_j \rangle = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx.$$

Resultados para soluciones de una EDO lineal homogénea

En este apartado consideramos que las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones particulares de una EDO lineal homogénea de orden n de la forma:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

En este caso particular se cumplen los siguientes resultados:

- $\exists x_0 \in (a, b) / W(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Las soluciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Las soluciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b) W(x_0) \neq 0$

Estas dos definiciones son iguales que las ya estudiadas en FMT1 para vectores

El Wronskiano, una vez calculado, sólo debe depender de x

Las funciones no tienen que ser solución de una EDO

A este determinante se le denomina: Determinante de Gram

La idea importante es la que está subrayada. Es decir, en este caso las funciones son soluciones de una EDO mientras que en el anterior no lo eran.

Es decir: Si el Wronskiano se anula en un punto es que se anula en todos!!

Fíjate que ahora se cumplen los recíprocos

4.5 Teorema de existencia y unicidad

Sea un Problema de Valor Inicial (PVI) formado por una EDO de orden n y n condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x) & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Si las funciones $q(x)$ y $p_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) son continuas en (a, b) entonces podemos asegurar que el PVI tiene solución única en (a, b) .

TEMA 5: RESOLUCIÓN DE EDOs MEDIANTE SERIES .

5.1 Introducción

En este tema vamos a estudiar cómo resolver EDOs mediante series de potencias. Nos limitaremos a resolver EDOs de la forma:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

es decir, nos limitaremos al caso en que:

- La EDO es lineal de orden dos con coeficientes variables..
- La EDO es homogénea, es el decir, el término independiente es nulo, $q(x) = 0$.
- Los coeficientes $p_1(x)$, $p_2(x)$ de la EDO son polinomios o cocientes de polinomios. Si en algún caso no fuese así tendremos que sustituir los coeficientes por su desarrollo en serie de Taylor.

5.2 Desarrollo alrededor de un punto ordinario

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto ordinario** de la EDO si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son analíticas (es decir, continuas y derivables) en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Para resolver EDOs mediante desarrollo en serie de potencias alrededor de un punto ordinario existen dos procedimientos.

Primer procedimiento: Método de coeficientes indeterminados

Este método consiste en suponer que la solución buscada es de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \text{ punto ordinario})$$

y se trata de determinar los coeficientes a_n sustituyendo la solución y sus derivadas:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

en la EDO, $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$.

En la mayoría de los casos el punto ordinario es $x_0 = 0$. En ese caso lo que debemos sustituir en la EDO es:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots$$

Segundo método: método directo

Este método se utiliza mucho menos que el de los coeficientes indeterminados

Hay otro método para obtener la solución de una EDO en forma de serie de potencias. Se trata de aplicar directamente la definición de serie de Taylor. Es decir, si la solución general de la EDO es analítica (continua y derivable) en x_0 entonces la serie de potencias solución que vamos buscando no es más que la serie de Taylor centrada en x_0 .

Veremos cómo se utiliza mediante un ejemplo.

5.3 Convergencia de la solución obtenida

Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia que llamaremos ρ . Este radio de convergencia ρ puede tomar los siguientes valores:

- $\rho = 0$ la serie de potencias sólo converge en su centro x_0 .
- $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ la serie de potencias sólo converge en el intervalo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.
- $\rho = \infty$ la serie de potencias converge en $\mathbb{R}$.

El radio de convergencia de una serie de potencias siempre tiene que ser uno de estos tres casos

Por tanto la solución de la EDO en forma de serie de potencias que nosotros hemos calculado (ya sea por el primer o el segundo método) tendrá un radio de convergencia ρ .

Para determinar ese radio de convergencia de la serie de potencias solución se utiliza el teorema que se enuncia a continuación

Teorema de Fuchs

Sea la EDO $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ y sea x_0 un punto ordinario de la misma, es decir, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son analíticas (continuas y derivables) en x_0 .

Entonces la solución general de la EDO alrededor de x_0 es analítica en x_0 y se puede expresar como una serie de potencias:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{con radio de convergencia } \rho = |x_0 - \rho_1|$$

donde ρ_1 representa el punto singular de la EDO más próximo a x_0 .

Recuerda que nuestro objetivo es siempre determinar cuánto valen los coeficientes a_n .

5.4 Desarrollo alrededor de un punto singular regular

Basta con que una de las dos no lo sea

Se dice que x_0 es un **punto singular** de la EDO si $p_1(x)$ ó $p_2(x)$ no son analíticas (es decir, continuas y derivables) en x_0 .

Se dice que x_0 es un **punto singular regular** de la EDO si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p_1(x) = k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 p_2(x) = k \in \mathbb{R}$$

En caso contrario se dice que x_0 es un punto singular irregular.

Nosotros trabajaremos siempre con puntos singulares que sean regulares.

Método de resolución

Esto lo suponemos por simplicidad

Para explicar el método vamos a suponer que el punto singular regular alrededor del cual estamos calculando la solución es $x_0 = 0$. El método consiste en suponer que la solución buscada es de la forma:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Atención:
Fíjate en que los índices de los sumatorios empiezan todos en cero a diferencia del caso de puntos ordinarios

y se trata de determinar los a_n sustituyendo la solución y sus derivadas:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

en la EDO, $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$.

Como se trata de una ecuación de segundo grado r tendrá siempre dos valores

Los valores de r vendrán siempre determinados por la **ecuación indicial**:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

donde p_0 es el término independiente del polinomio $x p_1(x)$ y q_0 es el término independiente del polinomio $x^2 p_2(x)$.

De todas formas, esta ecuación no hace falta memorizarla pues aparece a la vez que calculamos la relación de recurrencia como coeficiente de a_0 .

Una vez calculadas las raíces r_1 y r_2 de la ecuación indicial comprobamos que:

$$r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$$

Una vez comprobado lo anterior se sustituye r_1 en la relación de recurrencia y se obtiene $a_n(r_1)$ con la que construimos la solución $y_1(x)$. Después sustituimos r_2 en la relación de recurrencia y se obtiene $a_n(r_2)$ con la que construimos $y_2(x)$.

Finalmente la solución de la EDO será de la forma:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

5.5 Convergencia de la solución obtenida

Al igual que pasó con los puntos ordinarios la solución de la EDO en forma de serie de potencias que nosotros hemos calculado alrededor de un punto singular regular tendrá también un radio de convergencia ρ .

Para determinar ese radio de convergencia de la serie de potencias solución se utiliza el siguiente teorema:

Teorema de Frobenius

Sea la EDO $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ y sea x_0 un punto singular regular de la misma.

Entonces la EDO admite como solución general una combinación lineal de dos soluciones particulares:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde estas soluciones particulares se pueden expresar como una serie de potencias de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad \text{con radio de convergencia } \rho = |x_0 - \rho_1|$$

donde ρ_1 representa el punto singular de la EDO más próximo a x_0 sin contar el propio x_0 .

Esta parte del teorema ya lo sabemos de la página anterior

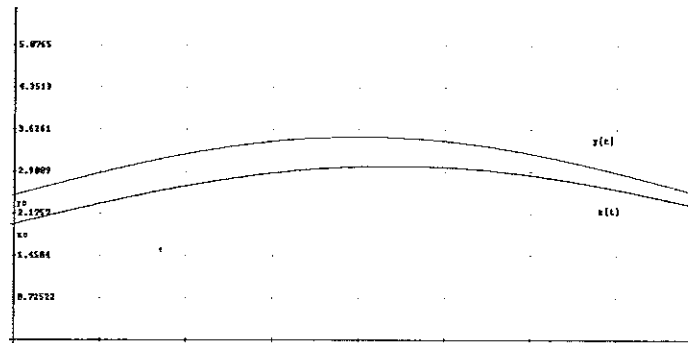
Aquí está lo que nos interesa sobre la convergencia

TEMA 6: ESTABILIDAD. SISTEMAS DE EDOS

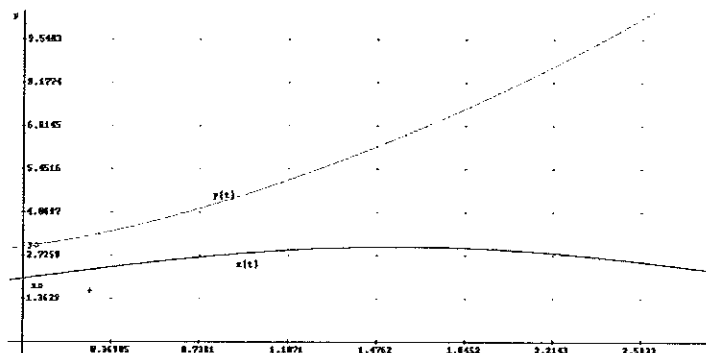
6.1 Introducción

Conceptos intuitivos

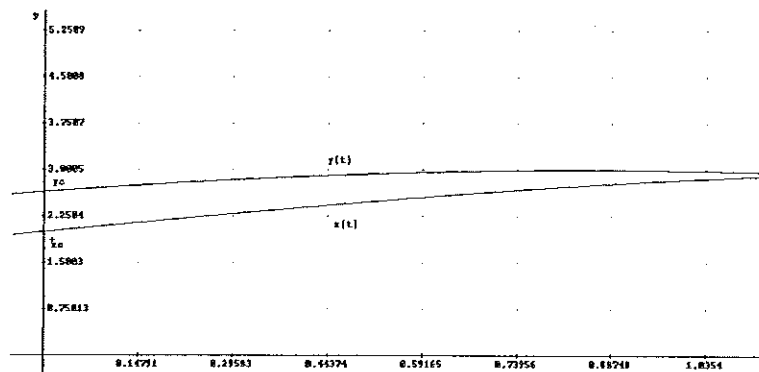
La estabilidad es un concepto que nos dice que a perturbaciones pequeñas en las condiciones iniciales se dan como consecuencia perturbaciones pequeñas en las soluciones:



La inestabilidad es un concepto que nos dice que a perturbaciones pequeñas en las condiciones iniciales se dan como consecuencia perturbaciones grandes en las soluciones.



La estabilidad asintótica es un concepto que nos dice que a perturbaciones pequeñas en las condiciones iniciales se dan como consecuencia perturbaciones pequeñas en las soluciones y además con el tiempo no hay diferencia apreciable entre ambas.



Conceptos matemáticos

- Se dice que la solución $x(t)$ es estable cuando :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier otra
solucion $y(t)$ tal que si $|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \varepsilon$

- Se dirá que $x(t)$ es inestable si no es estable.

- Se dirá que $x(t)$ es asintóticamente estable si:

- Es estable.
- Si en la definición de estabilidad el δ no depende de ε . Es decir:

$\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0$ tal que para cualquier otra
solucion $y(t)$ tal que si $|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \varepsilon$

Nota: Ver que $|x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ equivale a ver que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

6.2 Estabilidad de sistemas de EDOs lineales

Se estudiará siempre la estabilidad en el punto $x_0 = 0$.

Modo de proceder:

1. Tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. Diagonalizaremos la matriz, obteniendo una serie de autovalores y de autovectores:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ y } v_1, \dots, v_n$$

3. Aplicaremos el siguiente resultado teórico:

3.1 Si todas las $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ entonces el punto $x = 0$ es asintóticamente estable.

3.2 Si existe alguna $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ entonces el punto $x = 0$ es inestable.

3.3 Si hubiera autovalores con $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ y se verifica que:

- El número de autovectores linealmente independientes asociados al autovalor λ_i coincide con la multiplicidad algebraica de λ_i .
- El resto de autovalores (en caso de haberlos) tienen $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

entonces $x=0$ es estable (pero no asintóticamente estable)

Recuerda que la multiplicidad algebraica de λ_i es el número de veces que aparece como solución del polinomio característico.

6.3 Sistemas de EDOS lineales con coeficientes constantes homogéneas

Ahora se trata de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, es decir, un sistema de la forma:

$$y' = Ay$$

con A una matriz cuadrada.

Observa que el anterior sistema se puede describir en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Solución general del sistema de EDOS lineales

Lo primero que tenemos que hacer siempre es calcular los autovalores y los autovectores de la matriz A . En este mismo proceso obtendremos las multiplicidades algebraica y geométrica de cada autovalor lo que nos permitirá comprobar si A es diagonalizable o no lo es.

Si A es diagonalizable

Construimos las matrices diagonal D y la matriz de paso P .

A partir de la matriz diagonal D obtenemos e^{Dt} que se define como:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Importante:
No todos los
autovalores
tienen que ser
distintos

Entonces la solución viene dada por:

$$y = Pe^{Dt}C \quad \text{donde } P \text{ es la matriz de paso y } C \text{ un vector de constantes}$$

Si A no es diagonalizable

En este caso construimos la matriz de jordan J y la matriz de paso P (ver apéndice).

A partir de la matriz de Jordan J calculamos la matriz exponencial e^{Jt} . La única diferencia es que esta vez se hará por cajas. De esta forma tenemos que:

Recuerda que cada autovalor puede tener varias cajas asociadas

Si la caja asociada al autovalor λ es de 1×1 la sustituimos por $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Si la caja asociada al autovalor λ es de 2×2 la sustituimos por $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Si la caja asociada al autovalor λ es de 3×3 la sustituimos por $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Entonces la solución viene dada por:

$$y = Pe^{Jt}C \quad \text{donde } P \text{ es la matriz de paso y } C \text{ un vector de constantes}$$

6.4 Paso de una EDO lineal a un sistema lineal de EDOs

Tenemos la siguiente EDO lineal con coeficientes constantes de orden n :

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x)$$

La idea es expresarla como un sistema lineal de primer orden con n ecuaciones.

La forma en que lo vamos a hacer es mediante un cambio de variable:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

Si derivamos la anterior expresión nos queda:

$$\begin{cases} (y_1)' = y' = y_2 \\ (y_2)' = y'' = y_3 \\ \vdots \\ (y_n)' = y^{(n)} = q(x) - p_1 y^{(n-1)} - p_2 y^{(n-2)} - \dots - p_{n-1} y' - p_n y \\ \quad = q(x) - p_1 y_n - p_2 y_{n-1} - \dots - p_{n-1} y_2 - p_n y_1 \end{cases}$$

Por tanto, si reescribimos las ecuaciones en forma de sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \dots & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix}$$

La utilidad de este cambio de variable es que el polinomio característico de la matriz que nos ha salido coincide con la ecuación característica de la EDO lineal (cambiada de signo). Pero las soluciones de la ecuación característica y del polinomio característico son las mismas. En este caso resolver el sistema y resolver la EDO lineal es completamente equivalente. También podemos usar esto para estudiar la estabilidad de ecuaciones y sistemas lineales.

Por ejemplo, para el caso de $n = 3$, la EDO es siempre de la forma:

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = q(x)$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases} \quad \text{derivando} \quad \begin{cases} (y_1)' = y' = y_2 \\ (y_2)' = y'' = y_3 \\ (y_3)' = y''' = q(x) - p_1 y'' - p_2 y' - p_3 y = q(x) - p_1 y_3 - p_2 y_2 - p_3 y_1 \end{cases}$$

y el sistema equivalente queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix}$$

Veamos que el polinomio característico y la ecuación característica coinciden:

Calculamos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \\ & = (-\lambda)^2 (-p_1 - \lambda) - p_3 - [p_2 \lambda] = \lambda^2 (-p_1 - \lambda) - p_3 - p_2 \lambda = \\ & = \lambda^2 (-p_1 - \lambda) - p_3 - [p_2 \lambda] = \lambda^2 (-p_1 - \lambda) - p_3 - p_2 \lambda = \\ & = -p_1 \lambda^2 - \lambda^3 - p_3 - p_2 \lambda = -(\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3) \end{aligned}$$

Ahora calculamos la ecuación característica de la EDO lineal:

$$r^3 - p_1 r^2 - p_2 r - p_3$$

Es decir, que son iguales pero cambiadas de signo.

Apéndice: Autovalores y Autovectores. Diagonalización

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Por simplicidad explicaremos el proceso para una matriz de orden tres. Todo lo que vamos a mostrar es fácilmente generalizable a matrices de otros órdenes.

- Los valores propios (autovalores) de la matriz A vienen determinados por las raíces de su **polinomio característico**, $|A - \lambda I| = 0$
- Llamamos **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i , $m_a(\lambda_i)$, al número de veces que λ_i es raíz del polinomio característico.
- La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores debe ser siempre igual al orden de la matriz.
- Cada uno de los autovalores calculados tiene un conjunto de autovectores asociado. Este conjunto de autovectores asociados a un determinado autovalor forman siempre un subespacio vectorial que llamaremos **autoespacio** S_{λ_i} asociado a λ_i .
- Las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial S_{λ_i} asociado a λ_i siempre son:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todos los vectores solución del anterior sistema son los autovectores de λ_i .

- Llamamos **multiplicidad geométrica** de λ_i , $m_g(\lambda_i)$, a la dimensión del subespacio S_{λ_i} asociado a λ_i , que coincide con el número de parámetros que imponemos para resolver el sistema.
- La multiplicidad geométrica de un autovalor siempre mayor que cero y menor o igual que la multiplicidad algebraica: $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$
- Decimos que una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal formada por sus autovalores:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

de forma que A y D son semejantes $A = P D P^{-1}$, donde P es una matriz de paso formada por autovectores de cada uno de los autoespacios asociados a cada autovalor.

- El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable:

Una matriz es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada uno de sus autovalores coincide con su multiplicidad geométrica.

- Cuando una matriz no es diagonalizable entonces calculamos su matriz de Jordan J , y su matriz de paso P que siempre existe.

Este es un teorema
muy importante del
Álgebra

Apéndice: Nociones sobre la forma canónica de Jordan

Como hemos visto en el apéndice anterior no toda matriz tiene una matriz diagonal semejante a ella. Es decir, no toda matriz es diagonalizable.

Sin embargo sí se puede demostrar que todas las matrices son semejantes a una **matriz de Jordan**.

Una matriz de Jordan está compuesta por los elementos de la diagonal principal, que son los autovalores de la matriz, y por un número indeterminado de unos justo debajo de la diagonal principal. A continuación se muestran, a modo de ejemplo, todos los posibles tipos de matrices de Jordan que existen para matrices de orden tres:

1. $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$ autovalores simples. La matriz de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = a$ doble, $\lambda = b$ simple. Existen dos posibles matrices de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

3. $\lambda = a$ triple. Existen tres posibles matrices de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Los casos para matrices de orden cuatro y superiores son más numerosos pero siguen la misma filosofía.

Cajas de Jordan

Llamamos **caja de Jordan** asociada al autovalor λ a una submatriz de la matriz de Jordan de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dentro de una matriz de Jordan un autovalor puede tener una o más cajas de Jordan asociadas:

El número de cajas que tiene asociadas cada autovalor dentro de la matriz de Jordan es igual a la multiplicidad geométrica del autovalor

Se trata del caso de matriz diagonalizable ya estudiado, que es un caso particular de matriz de Jordan

En los casos 2 y 3 que la matriz de Jordan sea una u otra depende de la multiplicidad geométrica del autovalor como veremos a continuación

Es decir una caja de Jordan contiene en su diagonal principal un único autovalor (no puede tener dos distintos) y justo debajo de la diagonal todas las posiciones están ocupadas por 1

Obtención de la matriz de paso P

Los casos en que la matriz es diagonalizable ya están estudiados en el apéndice anterior

Una vez obtenida la matriz de Jordan J se necesita una matriz de paso P tal que $A = PJP^{-1}$. Vamos a ilustrar aquí los casos posibles para matrices de orden tres. De los seis casos vistos en la página anterior omitimos aquellos en que la matriz es diagonalizable y nos centramos en los tres en que la matriz de Jordan no es diagonal:

Primer caso

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \end{array} \right) \quad \begin{array}{ll} m_a(a) = 2 & m_g(a) = 1 \\ m_a(b) = 1 & m_g(b) = 1 \end{array}$$

Ahora, las columnas de la matriz P (que denominamos u_1, u_2, u_3) se obtienen de la siguiente forma:

Fíjate bien en el vector u_1 . Se calcula así para que sea linealmente independiente de u_2

$$\begin{aligned} u_1 &\Rightarrow (A - aI)^2 u_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - aI)u_1 \neq 0 \\ u_2 &\Rightarrow (A - aI)u_2 = 0 \\ u_3 &\Rightarrow (A - bI)u_3 = 0 \end{aligned}$$

Segundo caso

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \end{array} \right) \quad \begin{array}{ll} m_a(a) = 3 & m_g(a) = 2 \end{array}$$

Ahora, las columnas de la matriz P (que denominamos u_1, u_2, u_3) se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_1 &\Rightarrow (A - aI)^2 u_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - aI)u_1 \neq 0 \\ u_2 &\Rightarrow (A - aI)u_2 = 0 \\ u_3 &\Rightarrow (A - aI)u_3 = 0 \end{aligned}$$

Tercer caso

$$J = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right) \quad \begin{array}{ll} m_a(a) = 3 & m_g(a) = 1 \end{array}$$

Ahora, las columnas de la matriz P (que denominamos u_1, u_2, u_3) se obtienen de la siguiente forma:

Fíjate bien en los vectores u_1 y u_2 . Se calculan así para que sean linealmente independientes de u_3

$$\begin{aligned} u_1 &\Rightarrow (A - aI)^3 u_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - aI)^2 u_1 \neq 0 \\ u_2 &\Rightarrow (A - aI)^2 u_2 = 0 \quad \text{y} \quad (A - aI)u_2 \neq 0 \\ u_3 &\Rightarrow (A - aI)u_3 = 0 \end{aligned}$$

FMT4

Ejercicios de clase

TEMA 1: SERIES DE FOURIER

Ejercicio 1

Demostrar que el sistema trigonométrico

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal en $\mathcal{R}([- \pi, \pi], \mathbb{R})$.

Un sistema es ortogonal en $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ si el producto escalar de dos vectores cualesquiera del sistema, $f(x)$ y $g(x)$, es nulo; esto es, si se satisface $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$, $\forall f, g$. (DEMOSTRACIÓN):

$$\langle 1, \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx = \left. \frac{\sin(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle 1, \cos(nx) \rangle = 0$$

$$\langle 1, \sin(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx = \left. -\frac{\cos(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$$

$$\langle \sin(nx), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \left. \frac{\sin^2(nx)}{2n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle \sin(nx), \cos(nx) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{\cos(nx) \sin(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \\ (n \neq m) \quad & \left(u = \cos(nx) \Rightarrow du = -n \sin(nx) dx \right); \quad \left(u = \sin(nx) \Rightarrow du = n \cos(nx) dx \right) \\ & \left(dv = \cos(mx) dx \Rightarrow v = \frac{\sin(mx)}{m} \right); \quad \left(dv = \sin(mx) dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(mx)}{m} \right) \\ &= \frac{n}{m} \left[\frac{-\sin(nx) \cos(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \right] = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m^2 - n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad m \neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 \Rightarrow \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = 0 \quad (n \neq m) \end{aligned}$$

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \stackrel{\text{1ª INTEGRAL POR PARTES ANTERIOR}}{=} \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \stackrel{(m \neq n)}{=} 0 \Rightarrow \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\begin{aligned} \langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = \frac{\sin(nx) \sin(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \\ (n \neq m) \quad & \left(u = \sin(nx) \Rightarrow du = n \cos(nx) dx \right); \quad \left(u = \cos(nx) \Rightarrow du = -n \sin(nx) dx \right) \\ & \left(dv = \cos(mx) dx \Rightarrow v = \frac{\sin(mx)}{m} \right); \quad \left(dv = \sin(mx) dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(mx)}{m} \right) \\ &= -\frac{n}{m} \left[\frac{-\cos(nx) \cos(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \right] = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m^2 - n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad m \neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \Rightarrow \langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle = 0 \quad (n \neq m) \end{aligned}$$

Por todo ello, el sistema $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal en $\mathcal{R}([- \pi, \pi], \mathbb{R})$

Tema 1
Ejercicio 2

A partir del sistema $\{1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ ortogonal en $R([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, obtener por cambio lineal de variable el correspondiente sistema ortogonal en $R([a, b], \mathbb{R})$, $R([-T, T], \mathbb{R})$ y $R([0, T], \mathbb{R})$

Ejercicio 3

Comprobar que el sistema $\{1, \cos nx, \sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ no es ortogonal en $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$, pero que cualquiera de los sistemas $\{1, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ o $\{\sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ sí lo son. A partir de este resultado obtener, mediante cambio lineal de variable, dos sistemas ortogonales en $\mathcal{R}([0, T], \mathbb{R})$.

Para comprobar que el sistema no es ortogonal, deberemos encontrar dos vectores del mismo cuyo producto escalar no sea cero. Calculamos $\langle 1, \sin nx \rangle$:

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_0^\pi \sin nx dx = \left. -\frac{1}{n} \cos nx \right|_0^\pi = -\frac{1}{n} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

que no es cero para valores de n impares. La conclusión es que $\{1, \cos nx, \sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ no es ortogonal en $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$.

Si analizamos ahora el sistema $\{1, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} n \neq 0 \quad \langle 1, \cos nx \rangle &= \int_0^\pi \cos nx dx = \left. \frac{1}{n} \sin nx \right|_0^\pi = 0, \\ n \neq m \quad \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= \int_0^\pi \cos nx \cos mx dx = \int_0^\pi \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x \Big|_0^\pi = 0, \\ n = m \quad \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n} \sin 2nx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ \langle 1, 1 \rangle &= \int_0^\pi 1 dx = \pi. \end{aligned}$$

con lo que el sistema es ortogonal en $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$, siendo el sistema $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi/2}}; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormal.

Analizando el sistema $\{\sin nx; n \in \mathbb{N}\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} n \neq m \quad \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= \int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \int_0^\pi \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x \Big|_0^\pi = 0, \\ n = m \quad \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= \int_0^\pi \sin^2 nx dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n} \sin 2nx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

y nuevamente el sistema es ortogonal en $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$, siendo el sistema $\{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi/2}}; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormal.

En este caso el cambio lineal de variable será $x = \alpha t + \beta$, debiendo satisfacer las condiciones $x = 0 \Rightarrow t = a$ y $x = \pi \Rightarrow t = b$, donde $a = 0$ y $b = T$. Estas condiciones dan lugar al sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha a + \beta \quad \rightarrow \beta = 0 \\ \pi &= \alpha T + \beta \quad \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{T} \end{aligned}$$

y consecuentemente al cambio de variable $x = \frac{\pi}{T}t$. Con este cambio de variable obtenemos los sistemas

$$\left\{1, \cos \frac{n\pi}{T}t; n \in \mathbb{N}\right\} \text{ y } \left\{\sin \frac{n\pi}{T}t; n \in \mathbb{N}\right\}$$

que serán ortogonales en $\mathcal{R}([0, T], \mathbb{R})$.

Ejercicio 4

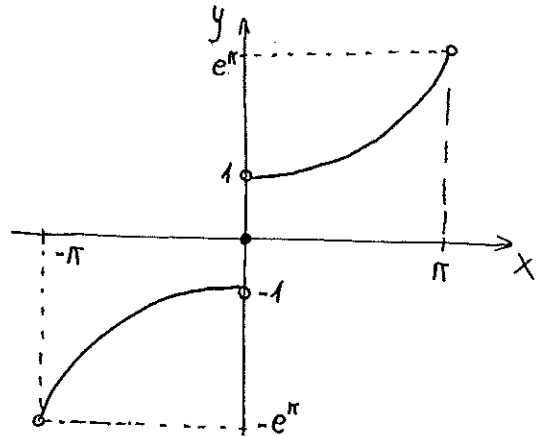
Desarrollar en el intervalo $[0, \pi]$ la función $f(x) = e^x$ en:

- Serie de Fourier que comprenda solamente senos.
- Serie de Fourier que comprenda solamente cosenos.

(a)

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{-x} & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$g(x)$ es una función impar que en $(0, \pi)$ coincide con $f(x)$, luego en $(0, \pi)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos y el de $g(x)$ sólo contiene senos por ser $g(x)$ impar.



$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} g(x) \sin \frac{2\pi n}{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{g(x) \cdot \sin nx}^{\substack{\text{par} \\ \text{impar impar}}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \quad (*)$$

Calculamos a parte la integral:

$$\int e^x \sin nx dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin nx \Rightarrow du = n \cos nx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = e^x \sin nx - n \int e^x \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos nx \Rightarrow du = -n \sin nx dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right]$$

$$= e^x \sin nx - n \left(e^x \cos nx - \int e^x (-n \sin nx) dx \right) = e^x \sin nx - n e^x \cos nx - n^2 \int e^x \sin nx dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+n^2) \int e^x \sin nx dx = e^x \sin nx - n e^x \cos nx \Rightarrow \int e^x \sin nx dx = \frac{e^x}{1+n^2} (\sin nx - n \cos nx)$$

Ahora volviendo a (*):

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^x}{1+n^2} (\sin nx - n \cos nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{\pi}}{1+n^2} (\overbrace{\sin n\pi}^0 - \overbrace{n \cos n\pi}^{(-1)^n}) - \frac{e^0}{1+n^2} (\overbrace{\sin 0}^0 - n \overbrace{\cos 0}^1) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^n}{1+n^2} (0 - n(-1)^n) - \frac{1}{1+n^2} (0 - n \cdot 1) \right) = \frac{2n}{\pi(1+n^2)} (1 - (-1)^n)$$

Por tanto, $b_n = \frac{2n[1 - (-1)^n e^\pi]}{\pi(1+n^2)}$ y la serie de Fourier es:

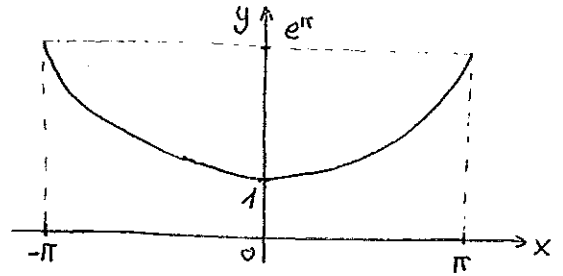
$$G(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \Rightarrow G(x) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} [1 - (-1)^n e^\pi] \cdot \sin nx$$

que coincide con $g(x)$ en $(-\pi, \pi)$ y con $f(x)$ en $(0, \pi)$.

(b)

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ e^{-x} & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$g(x)$ es una función par que en $(0, \pi)$ coincide con $f(x)$, luego en $(0, \pi)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos conteniendo el de $g(x)$ sólo términos en coseno.



$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi} [e^x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (e^\pi - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cdot \cos \frac{2\pi n x}{T} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \cdot \underbrace{\cos nx}_{\text{par}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx$$

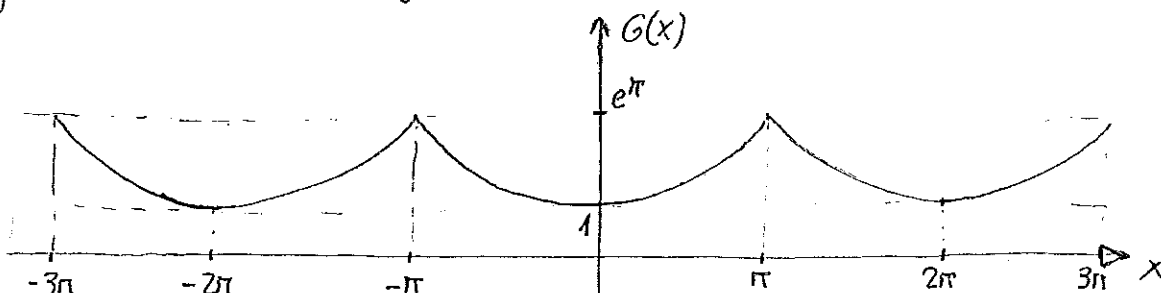
Calculando esta integral de forma similar al apartado a) nos queda:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^x}{n^2+1} (\cos nx + n \sin nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+1} (e^\pi \cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi(n^2+1)} [(-1)^n e^\pi - 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}$ y la serie de Fourier es:

$$G(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x \Rightarrow G(x) \approx \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1} \cos nx$$

$G(x)$ coincide con la función $g(x)$ en $(-\pi, \pi)$ y con $f(x)$ en $(0, \pi)$. La representación gráfica de $G(x)$ es la siguiente:



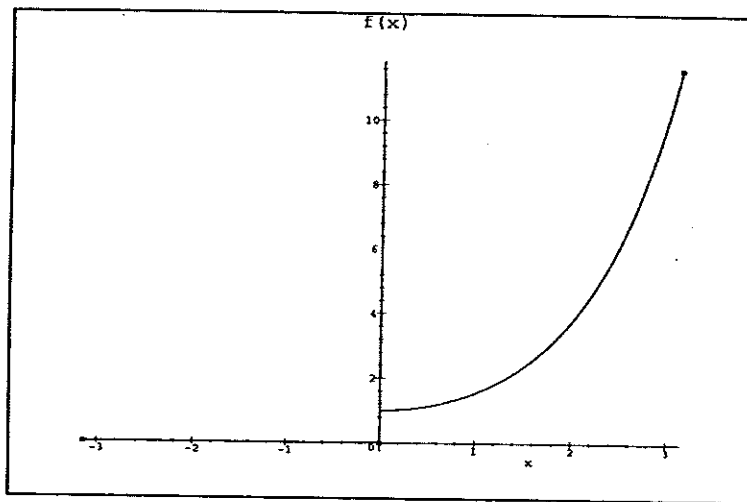
Ejercicio 5

Desarrollar en serie de Fourier de período 2π la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \cosh x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

El desarrollo en serie de Fourier de esta función va a converger puntualmente a $f(x)$ en $(-\pi, 0)$ y en $(0, \pi)$ ya que la función $f \in CT([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ y su derivada $f' \in CT([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. En los puntos de discontinuidad ($x = -\pi$, $x = 0$, y $x = \pi$), dicho desarrollo va a converger a los valores $\frac{\cosh \pi}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\cosh \pi}{2}$ respectivamente. La función tiene la siguiente forma:



Por lo que respecta al cálculo de los coeficientes del desarrollo de Fourier, estos serán:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cosh x dx = \frac{1}{2\pi} \sinh x \Big|_0^{\pi} = \frac{\sinh \pi}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx dx =$$

que resolvemos mediante integración por partes

$u = \cos nx$	$du = -n \sin nx dx$
$dv = \cosh x dx$	$v = \sinh x$

$$= \frac{1}{\pi} \sinh x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh x \sin nx dx =$$

$u = \sin nx$	$du = n \cos nx dx$
$dv = \sinh x dx$	$v = \cosh x$

$$= \frac{\sinh \pi (-1)^n - \sinh 0}{\pi} + \frac{n}{\pi} \cosh nx \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx dx =$$

$$= \frac{\sinh \pi (-1)^n}{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx dx$$

Aparece una expresión recurrente

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx dx = \frac{\sinh \pi (-1)^n}{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx dx = \frac{\sinh \pi (-1)^n}{\pi} - n^2 a_n$$

$$a_n (1 + n^2) = \frac{\sinh \pi (-1)^n}{\pi} \rightarrow a_n = \frac{\sinh \pi (-1)^n}{(1 + n^2)\pi}$$

$$a_n = \frac{\sinh \pi (-1)^n}{(1+n^2)\pi}$$

Obtenido a_n calculamos b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \sin nx dx =$$

$u = \sin nx$	$du = n \cos nx dx$
$dv = \cosh x dx$	$v = \sinh x$

$$= \frac{1}{\pi} \sinh x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh x \cos nx dx =$$

$u = \cos nx$	$du = -n \sin nx dx$
$dv = \sinh x dx$	$v = \cosh x$

$$= 0 - \frac{n}{\pi} \cos nx \cosh x \Big|_0^{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \sin nx dx =$$

$$= -\frac{n}{\pi} ((-1)^n \cosh \pi - 1) - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \sin nx dx$$

Nuevamente aparece una expresión recurrente

$$b_n = -\frac{n}{\pi} ((-1)^n \cosh \pi - 1) - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \sin nx dx = -\frac{n}{\pi} ((-1)^n \cosh \pi - 1) - n^2 b_n$$

$$b_n(1+n^2) = \frac{n}{\pi} (1 - (-1)^n \cosh \pi) \rightarrow b_n = \frac{n}{(1+n^2)\pi} (1 - (-1)^n \cosh \pi)$$

$$b_n = \frac{n}{(1+n^2)\pi} (1 - (-1)^n \cosh \pi)$$

El desarrollo en serie de Fourier será

$$\frac{\sinh \pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh \pi}{(1+n^2)\pi} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1 - (-1)^n \cosh \pi)}{(1+n^2)\pi} \sin nx$$

Para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ empleamos el desarrollo de Fourier en $x = 0$, el cual converge al valor $1/2$. El desarrollo en serie de Fourier será

$$1/2 = \frac{\sinh \pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh \pi}{(1+n^2)\pi} \cos n0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1 - (-1)^n \cosh \pi)}{(1+n^2)\pi} \sin n0 =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{2\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{\sinh \pi} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} = \frac{\pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}$$

Ejercicio 7

En el espacio $CTA([-1,1], \mathbb{R})$, o bien en los espacios $CT([-1,1], \mathbb{R})$ o $R([-1,1], \mathbb{R})$, se considera el sistema infinito $\{x^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$. Aplicando el proceso de ortogonalización, obtener las cuatro primeras funciones del correspondiente sistema ortonormal $\{e_{n-1}(x); n \in \mathbb{N}\}$. Comprobar que para estas cuatro funciones $e_0(x), e_1(x), e_2(x)$ y $e_3(x)$ es válida la relación:

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde

$$\left\{ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n}; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

es el sistema de polinomios de Legendre (puede verificarse que esta relación es válida $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Ejercicio 8

(Repaso del Tema)

A.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \pi & , \text{ si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & , \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, se pide:

- a) Desarrollo en Serie de Fourier.
- b) Analizar la Convergencia de la Serie.
- c) A partir de los resultados anteriores, hallar el valor de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.
- d) Escribir la igualdad de Parseval.

B.- A partir del sistema trigonométrico $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$, ortogonal en $R\left([- \pi, \pi], \mathbb{R}\right)$, obtener el correspondiente sistema ortogonal en $R\left([a, b], \mathbb{R}\right)$ mediante un cambio lineal de variable.

C.- Obtener la mejor aproximación de la función $g(x) = \cos(x)$ en el espacio generado por el sistema $S = \{1, x, x^2\}$.

Primitiva 1

$$\text{Calcular } I = \int x \cos(ax) dx$$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

en nuestro caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos(ax)}_{dv} dx$$

ahora tenemos que calcular du y v . Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

de forma que sustituyendo en la fórmula obtenemos,

$$I = \int x \cos(ax) dx = x \frac{1}{a} \sin(ax) - \int \frac{1}{a} \sin(ax) dx = \frac{x}{a} \sin(ax) - \left(-\frac{1}{a^2} \cos(ax)\right) + C$$

$$\text{Solución: } I = \frac{x}{a} \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + C$$

Primitiva 2

$$\text{Calcular } I = \int x \sin(ax) dx$$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(ax)}_{dv} dx$$

ahora tenemos que calcular du y v . Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sin(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

de forma que sustituimos en la fórmula obteniendo

$$I = \int x \sin(ax) dx = x \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + C$$

$$\text{Solución: } I = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) + C$$

No existe una regla fija para elegir u y dv . Sólo la experiencia nos enseña a elegir correctamente.

Calcular $I = \int x^2 \cos(ax) dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\cos(ax) dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v . Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$$

$$dv = \cos(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

y obtenemos

$$I = \int x^2 \cos(ax) dx = x^2 \frac{1}{a} \sin(ax) - \int \frac{1}{a} \sin(ax) 2x dx = \frac{x^2}{a} \sin(ax) - \frac{2}{a} \int x \sin(ax) dx$$

se trata ahora de resolver

$$I = \int x \sin(ax) dx$$

que calculamos integrando de nuevo por partes. Elegimos :

$$I = \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(ax) dx}_{dv}$$

de forma que,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sin(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

con lo que obtenemos

$$I = \int x \sin(ax) dx = x \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$$

finalmente, sustituyendo el resultado de esta última integral tenemos el resultado

$$I = \frac{x^2}{a} \sin(ax) - \frac{2}{a} \left[-\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) \right] + C = \frac{x^2}{a} \sin(ax) - \frac{2}{a^3} \sin(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + C$$

Solución: $I = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + C$

Calcular $I = \int x^2 \operatorname{sen}(ax) dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\operatorname{sen}(ax) dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v . Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

y obtenemos

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}(ax) dx = x^2 \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) 2x dx = -\frac{x^2}{a} \cos(ax) + \frac{2}{a} \int x \cos(ax) dx$$

se trata ahora de resolver

$$I = \int x \cos(ax) dx$$

que calculamos integrando de nuevo por partes. Elegimos :

$$I = \int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos(ax) dx}_{dv}$$

de forma que ,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos(ax) dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax)$$

con lo que obtenemos

$$I = \int x \cos(ax) dx = \frac{x}{a} \operatorname{sen}(ax) - \int \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax) dx = \frac{x}{a} \operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax)$$

finalmente, sustituyendo el resultado de esta última integral tenemos el resultado

$$I = -\frac{x^2}{a} \cos(ax) + \frac{2}{a} \left[\frac{x}{a} \operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) \right] + C = -\frac{x^2}{a} \cos(ax) + \frac{2x}{a^2} \operatorname{sen}(ax) + \frac{2}{a^3} \cos(ax) + C$$

Solución: $I = \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a} \right) \cos(ax) + \frac{2x}{a^2} \operatorname{sen}(ax) + C$

TEMA 2: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ejercicio 1

Integre la EDO $3e^x \tan y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

Integre la EDO $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

$$y'(x) + y(x) \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$$

Se trata de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) puesto que es una igualdad con incógnita $y(x)$ que en realidad se trata de una función. Al aparecer como máxima derivada la primera es una EDO de 1º orden.

Veamos de qué tipo de EDO de 1º orden se trata:

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) : \text{EDO lineal}$$

Para resolver la EDO lineal daremos siempre dos pasos:

- 1. El primero consistirá en resolver la EDO homogénea asociada (que surgirá de hacer $g(x) = 0$, o bien de considerar únicamente los términos de la EDO completa en los que aparezcan $y(x)$ y sus derivadas, y en todo caso, dicha EDO va a ser del tipo variables separadas).
- 2. El segundo consistirá en hacer variar la constante presente en la solución de la EDO homogénea asociada y forzar a que la función obtenida sea solución de la EDO completa (método de variación de la constante).

$$y'(x) + y(x) \cos(x) = \sin(x) \cos(x) : \text{EDO completa}$$

$$y'(x) + y(x) \cos(x) = 0 : \text{EDO homogénea asociada}$$

(I) Resolución de la homogénea (variables separadas)

$$y'(x) + y(x) \cos(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} + y(x) \cos(x) = 0$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = -y(x) \cos(x) \Rightarrow \frac{dy(x)}{y(x)} = -\cos(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy(x)}{y(x)} = -\int \cos(x) dx$$

$$\ln|y(x)| = -\sin(x) + K ; e^{\ln|y(x)|} = e^{-\sin(x)} \cdot e^K = y(x) = K e^{-\sin(x)}$$

$y_H(x) = K e^{-\sin(x)}$

 $y_H(x)$ es solución de la EDO homogénea según comprobamos a continuación

$$y_H(x) = k e^{-\sin(x)}$$

$$y_H'(x) = -k \cos(x) e^{-\sin(x)}$$

$$y'(x) + y(x) \cos(x) = 0 \Rightarrow -k \cos(x) e^{-\sin(x)} + k e^{-\sin(x)} \cos(x) = 0$$

comprobación correcta $\rightarrow$

$$y_H(x) = k e^{-\sin(x)} \text{ es solución de } y'(x) + y(x) \cos(x) = 0$$

(II) Variación de la constante

$y_H(x) = k e^{-\sin(x)}$ es solución de la EDO homogénea

$y(x) = k(x) e^{-\sin(x)}$ es solución de la EDO completa

A partir de este momento, el objetivo del problema es determinar quien es $k(x)$. Como sabemos que $y(x) = k(x) e^{-\sin(x)}$ es solución de $y'(x) + y(x) \cos(x) = \cos(x) \sin(x)$, la insertaremos en dicha función, la forzaremos a que la cumpla y determinaremos así quien es $k(x)$, que una vez sustituida en $k(x) e^{-\sin(x)} = y(x)$ nos dará la solución de la EDO completa que buscamos.

$$y'(x) = k'(x) e^{-\sin(x)} - k(x) \cos(x) e^{-\sin(x)}$$

sustituyendo en la EDO completa...

$$\underbrace{k'(x) e^{-\sin(x)} - k(x) \cos(x) e^{-\sin(x)}}_{y'(x)} + \underbrace{k(x) e^{-\sin(x)}}_{y(x)} \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$$

si estamos resolviendo bien el problema, los términos con $k(x)$ se cancelan; sólo sobreviven $k'(x)$.

$$k'(x) = \sin(x) \cos(x) e^{\sin(x)}$$

de nuevo tiene que surgir una EDO de variables separadas

$$\frac{dk(x)}{dx} = e^{\sin(x)} \sin(x) \cos(x) \Rightarrow dk(x) = \cos(x) e^{\sin(x)} \sin(x) dx$$

$$\int dk(x) = \int \cos(x) e^{\sin(x)} \sin(x) dx + K$$

$$K(x) = e^{\sin(x)} [\sin(x) - 1] + K \Rightarrow y(x) = \sin(x) - 1 + k e^{-\sin(x)}$$

Ejercicio 3

Integre la EDO $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

EDO de Bernoulli (nunca ha entrado)

Ejercicio 4

$$\text{Integre la EDO } \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + (\arctg x - 2x^2y + 1) dy = 0$$

Esta EDO está escrita en forma diferencial, porque en su expresión aparecen los términos dx y dy . Por este motivo empezamos sospechando que se trata de una EDO exacta.

Siempre que manejemos formas diferenciales comenzaremos por escribirlas del siguiente modo:

$$(\sim) dx + (\sim) dy = 0 \quad \text{¡¡ suma, nunca resta!!}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$P(x,y) \quad Q(x,y)$$

1. Confirmamos que se trata de una EDO exacta verificando la siguiente igualdad entre derivadas parciales:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \text{si no cumple esta igualdad No es exacta}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{1+x^2} - 4xy \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{1+x^2} - 4xy \end{aligned} \right\} \text{coinciden} \Rightarrow \text{EDO exacta}$$

2. Resolución

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \Rightarrow \text{EDO exacta} \Rightarrow \exists F(x,y) : \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &F(x,y) = C \\ &\text{es solución} \end{aligned}$$

$$\ast \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \int dF(x,y) = \int P(x,y) dx \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y) dx + \psi(y)$$

$$F(x,y) = \int \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \psi(y) = y \arctg(x) - x^2 y^2 + \psi(y)$$

$$\ast \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [y \arctg(x) - x^2 y^2 + \psi(y)] = \arctg(x) - 2x^2 y + 1$$

$$\Rightarrow \arctg(x) - 2x^2 y + \psi'(y) = \arctg(x) - 2x^2 y + 1 \Rightarrow \psi'(y) = 1$$

Llegados a este punto, han de cancelarse todos los términos excepto el correspondiente a $\psi'(y)$. Nos quedará una EDO de variables separadas.

$$\psi'(y) = 1 \Rightarrow \psi(y) = y + C \Rightarrow F(x,y) = y \arctg(x) - x^2 y^2 + y + C$$

$$\text{solución: } F(x,y) = C \Rightarrow y \arctg(x) - x^2 y^2 + y + C = C \Rightarrow y \arctg(x) - x^2 y^2 + y = C$$

Nota: Posible comprobación

Despejamos y' de la forma diferencial y sustituimos en ella la derivada de la solución obtenida según la regla de la cadena.

$$\left[\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right] dx + \left[\arctg(x) - 2x^2y + 1 \right] dy = 0$$

dividiendo entre $dx \dots$

$$\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 + \left[\arctg(x) - 2x^2y + 1 \right] \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y' = \frac{2xy^2 - \frac{y}{1+x^2}}{\arctg(x) - 2x^2y + 1}$$

derivamos $y(x) \arctg(x) - x^2 (y(x))^2 + y(x) = C$

$$y' \arctg(x) + y \frac{1}{1+x^2} - 2xy^2 - 2x^2y y' + y' = 0$$

$$y' [\arctg(x) - 2x^2y + 1] = 2xy^2 - \frac{y}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{2xy^2 - \frac{y}{1+x^2}}{\arctg(x) - 2x^2y + 1} \quad \text{comprobado queda}$$

Ejercicio 5

Obtenga la solución implícita de la ecuación diferencial

$$(y - 8xy^2)dx + (3x - 16x^2y)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante que es función sólo de y .

En caso de que la EDO admita factor integrante siempre lo sabremos gracias al enunciado. Tenemos entonces tres opciones: el factor integrante depende sólo de y (como es el caso de este problema, en el que emplearemos la fórmula descrita más abajo para hallar el factor integrante), el factor integrante depende sólo de x (en cuyo caso habría que emplear la fórmula descrita en teoría), y que el factor integrante dependa tanto de x como de y (el mismo enunciado informa de quien es el factor integrante, ver ejercicio 6)

El factor integrante es un término que sirve para multiplicar una EDO que no es exacta y convertirla en EDO exacta.

Factor integrante: $\mu(y)$

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)} dy$$

Para $\mu(x)$ ver la fórmula en teoría.

$$\underbrace{(y - 8xy^2)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(3x - 16x^2y)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3 - 32xy \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 - 16xy \end{array} \right\} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2 - 16xy$$

$$\frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)} = \frac{2 - 16xy}{y - 8xy^2}$$

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{2 - 16xy}{y - 8xy^2} dy = \frac{2(1 - 8xy)}{y(1 - 8xy)} dy \Rightarrow \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{2}{y} dy$$

$$\int \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \int \frac{2}{y} dy \Rightarrow \ln|\mu(y)| = 2 \ln|y| + C \Rightarrow e^{\ln|\mu(y)|} = e^{\ln|y|^2 \cdot C}$$

$$\mu(y) = Cy^2$$

$$[y - 8xy^2]dx + [3x - 16x^2y]dy = 0 \text{ admite como factor integrante}$$

$$\text{a } \mu(y) = Cy^2$$

$$Cy^2[y - 8xy^2]dx + [3x - 16x^2y]dy = 0 \cdot Cy^2$$

$$[y^3 - 8xy^4]dx + [3xy^2 - 16x^2y^3]dy = 0 \text{ EDO exacta}$$

$$\underbrace{\quad}_A(x,y) \quad \underbrace{\quad}_B(x,y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} &= 3y^2 - 32xy^3 \\ \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} &= 3y^2 - 32xy^3 \end{aligned} \right\} \text{ coinciden} \Rightarrow \text{EDO exacta}$$

$$\text{EDO exacta} \Rightarrow \exists F(x,y): \begin{cases} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = A(x,y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = B(x,y) \\ F(x,y) = C \text{ es solución} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = A(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int A(x,y)dx + \varphi(y) = \int (y^3 - 8xy^4)dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = xy^3 - 4x^2y^4 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = B(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [xy^3 - 4x^2y^4 + \varphi(y)] = 3xy^2 - 16x^2y^3$$

$$3xy^2 - 16x^2y^3 + \varphi'(y) = 3xy^2 - 16x^2y^3$$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

Ejercicio 6

Obtenga las curvas integrales de la EDO $(5x^3y + 2y^2) + (2x^4 + 3xy)y' = 0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{N}$

Puesto que la EDO admite el factor integrante $x^m y^n$, emplearemos dicho término para multiplicar la EDO y convertirla así en exacta (de este modo obtendremos m y n).

Una vez obtenida la exacta no nos quedará más que resolverla.

$$(5x^3y + 2y^2) + (2x^4 + 3xy) \overbrace{y'}^{dy/dx} = 0 \quad \text{multiplicando por } dx \dots$$

$$(5x^3y + 2y^2)dx + (2x^4 + 3xy)dy = 0 \quad (\text{forma diferencial})$$

admite a $\mu(x, y) = x^m y^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) como factor integrante.

$$x^m y^n (5x^3y + 2y^2)dx + x^m y^n (2x^4 + 3xy)dy = 0 \quad \text{ha de ser exacta}$$

$$\underbrace{(5x^{m+3}y^{1+n} + 2x^m y^{2+n})}_{P(x, y)} dx + \underbrace{(2x^{4+m}y + 3x^{m+1}y^{1+n})}_{Q(x, y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 5(n+1)x^{m+3}y^n + 2(n+2)x^m y^{n+1}$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2(m+4)x^{m+3}y^n + 3(m+1)x^m y^{n+1}$$

Al tratarse de una EDO exacta por haber sido multiplicada por el factor integrante que admite tenemos que estas dos derivadas parciales son iguales

$$\left. \begin{array}{l} 5(n+1) = 2(m+4) \\ 2(n+2) = 3(m+1) \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}} \quad \text{sustituyendo en la EDO ...}$$

$$\underbrace{(5x^4y^2 + 2xy^3)}_{P(x, y)} dx + \underbrace{(2x^5y + 3x^2y^2)}_{Q(x, y)} dy = 0 \quad \text{EDO exacta}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 10x^4y + 6xy^2 \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 10x^4y + 6xy^2 \end{array} \right\} \text{coinciden} \Rightarrow \text{Exacta}$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y) = x^5y^2 + x^2y^3 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 2x^5y + 3x^2y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(y) = C}$$

$$F(x, y) = x^5y^2 + x^2y^3 + C$$

$$\text{solución: } \boxed{x^5y^2 + x^2y^3 = C}$$

Ejercicio 7

Integrar las siguientes EDO:

a) $x \sin(y/x)(y dx + x dy) + y \cos(y/x)(x dy - y dx)$

b) $(x^2 - xy + y^2)y' + y^2 = 0$

Hallar todas las soluciones de la siguiente EDO autónoma: $y' = y^2 - 1$

$$y' = y^2 - 1 \Rightarrow y' = (y+1)(y-1)$$

Por inspección visual ("a ojo") se observa que $y(x)=1$ e $y(x)=-1$ son soluciones particulares de la EDO.

Si $y \neq \pm 1$ tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{(y+1)(y-1)} = dx \text{ Descomponemos en fracciones simples:}$$

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1)+B(y+1)}{(y+1)(y-1)} \Rightarrow 1 = A(y-1)+B(y+1) \Rightarrow 1 = (A+B)y + B-A$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ B-A=1 \end{array} \right\} A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{-1/2}{y+1} + \frac{1/2}{y-1}$$

Por conveniencia

$$\frac{dy}{(y+1)(y-1)} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y+1} dy - \int \frac{1}{y-1} dy = \int 2 dx \Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y+1| = 2x+C = 2(x-C):$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2(x-C) \Rightarrow \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2(x-C)} \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2(x-C)} \text{ Solución implícita}$$

Ahora vamos a intentar, manipulando la expresión obtenida, obtener una solución explícita:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \pm e^{2(x-C)} = 1 + \frac{y-1}{y+1} = \frac{y+1+y-1}{y+1} = \frac{2y}{y+1} \\ 1 \mp e^{2(x-C)} = 1 - \frac{y-1}{y+1} = \frac{y+1-y+1}{y+1} = \frac{2}{y+1} \end{array} \right\} \frac{1 \pm e^{2(x-C)}}{1 \mp e^{2(x-C)}} = \frac{\frac{2y}{y+1}}{\frac{2}{y+1}} = y$$

$$y(x) = \frac{1+e^{2(x-C)}}{1-e^{2(x-C)}} \Rightarrow y(x) = \coth(C-x) \quad y(x) = \frac{1-e^{2(x-C)}}{1+e^{2(x-C)}} \Rightarrow y(x) = \tanh(C-x)$$

NOTA: Estas soluciones generales no incluyen a las soluciones particulares $y=\pm 1$ hallados al principio.

Ejercicio 9

Notando que la solución general de la EDO lineal de primer orden tiene la forma $y = C\phi(x) + \psi(x)$, con C constante arbitraria, demuéstrese que si conocemos dos soluciones particulares $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la EDO, podemos conocer todas las restantes sin necesidad de realizar ninguna integración.

La solución de la EDO lineal $y' = f(x)y + g(x)$ es siempre de la forma:

$$[1] \quad y = C\phi(x) + \psi(x) \quad , \quad \text{familia de funciones solución dependientes de } C$$

donde $C\phi(x)$ es la solución general de la EDO homogénea siendo C una constante que puede tomar cualquier valor y $\psi(x)$ es una solución particular de la EDO. Asignando valores a la constante C obtengo soluciones particulares de la EDO:

$$\text{Solución particular para } C=C_1: \quad y_1 = C_1\phi(x) + \psi(x) \quad [2]$$

$$\text{Solución particular para } C=C_2: \quad y_2 = C_2\phi(x) + \psi(x) \quad [3]$$

Ahora restamos [1] - [2]:

$$y - y_1 = C\phi(x) + \psi(x) - C_1\phi(x) - \psi(x) \Rightarrow y - y_1 = (C - C_1)\phi(x) \quad [4]$$

Ahora restamos [3] - [2]:

$$y_2 - y_1 = C_2\phi + \psi(x) - C_1\phi(x) - \psi(x) \Rightarrow y_2 - y_1 = (C_2 - C_1)\phi(x) \quad [5]$$

y si dividimos [4] entre [5]:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(C - C_1)\cancel{\phi(x)}}{(C_2 - C_1)\cancel{\phi(x)}} \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = k \Rightarrow y - y_1 = k(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = k(y_2 - y_1) + y_1 \Rightarrow y = k\phi(x) + \psi(x) \quad \text{con } \phi(x) = y_2 - y_1, \quad \psi(x) = y_1$$

que es la solución general de la EDO.

Es decir, conocidas dos soluciones particulares de la EDO de primer orden podemos obtener la solución general y, por tanto, el resto de soluciones, sin necesidad de integrar.

Ejercicio 10

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $3y' + y = e^{-2x}$

b) $2y' + 5y = x^2 + 10$

c) $6y' + y = \cos 2x$

Ejercicio 11

Resolver la siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 4y' + y = 7 \\ y(0) = 12 \end{cases}$$

Generalizar el resultado anterior para el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \tau y' + y = CF \\ y(0) = CI \end{cases}$$

donde $\tau, CF, CI \in \mathbb{R}$.

En este ejercicio se demuestra una fórmula que se utiliza mucho en IACR

ASESINATO EN
LA MANSIÓN Y
DETERMINACIÓN
DEL MOMENTO
DE LA MUERTE

Una mañana de invierno el duque ha sido asesinado en su mansión. El mayordomo y su cocinera son los sospechosos y se trata de descubrir cuál de los dos es el asesino.

Al llegar a la mansión a las 12:00 se comprueba que la temperatura del cadáver es 34 °C y que el termostato de la casa está fijado en 22 °C. Al interrogar a los sospechosos se descubre que tienen sendas coartadas:

- El mayordomo fue visto en la barbería del pueblo desde las 08:00 hasta las 09:00.
- La cocinera fue vista en el mercado desde las 09:00 hasta las 10:00.

Tras el interrogatorio, cuando son ya las 13:00, se vuelve a medir la temperatura del cadáver, obteniéndose como resultado 33 °C.

¿Quién es el asesino?

NOTA: La ley de enfriamiento de Newton establece que la variación de temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del ambiente exterior y la temperatura interior de dicho cuerpo.

SOLUCIÓN

Gracias a procedimientos empíricos se ha descubierto que la temperatura de un objeto varía de forma proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto en cuestión. Esto es lo que se conoce como Ley de Enfriamiento de Newton.

Llamemos $\varphi(t)$ a la temperatura del objeto en el instante t , con lo que la variación de ésta a través del tiempo será $\frac{d\varphi(t)}{dt}$. Sea T la temperatura ambiente, a la cual suponemos constante. Entonces, según lo dicho por la Ley de Enfriamiento de Newton, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\rho[\varphi(t) - T]$$

siendo ρ la constante de proporcionalidad (será una concreta para cada caso y siempre se determinará a través de mediciones experimentales). Nótese además que aparece un signo negativo que nos indica que la tasa de variación es negativa, lo cual significa que el cuerpo pierde calor con el tiempo (en todo momento estamos suponiendo que la temperatura del cuerpo es menor que la temperatura ambiente, con lo que $\varphi(t) < T$ y el miembro derecho de la anterior igualdad es siempre negativo).

Consideremos que el cuerpo sometido a estudio tiene una temperatura inicial φ_0 ; esto es, $\varphi(0) = \varphi_0$. Tenemos pues el problema de valor inicial que detallamos a continuación:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\rho[\varphi(t) - T] \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Pasemos a resolver la ecuación diferencial, que es lineal, de primer orden y no homogénea:

$$\varphi'(t) + \rho\varphi(t) = \rho T$$

Lo primero que hemos de hacer es solucionar la correspondiente ecuación homogénea, que va a ser de variables separadas:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) + \rho\varphi(t) &= 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} + \rho\varphi(t) = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\rho\varphi(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} &= -\rho dt \Rightarrow \int \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} = \int -\rho dt \Rightarrow \ln|\varphi(t)| = -\rho t + C \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\ln|\varphi(t)|} &= e^{-\rho t + C} = e^{-\rho t} e^C = Ce^{-\rho t} \Rightarrow \varphi(t) = Ce^{-\rho t}\end{aligned}$$

La solución de la ecuación homogénea $\varphi'(t) + \rho\varphi(t) = 0$ es pues $\varphi_H(t) = Ce^{-\rho t}$.

Acudiendo al Método de Variación de la Constante, se sabe que la solución de la ecuación completa, $\varphi'(t) + \rho\varphi(t) = \rho T$, es $\varphi(t) = C(t)e^{-\rho t}$. Derivando respecto del tiempo llegamos a lo que sigue:

$$\varphi(t) = C(t)e^{-\rho t} \Rightarrow \varphi'(t) = C'(t)e^{-\rho t} + C(t)(-\rho e^{-\rho t}) \Rightarrow \varphi'(t) = [C'(t) - \rho C(t)]e^{-\rho t}$$

Dado que la función $\varphi(t)$ es solución, cumplirá lo dicho por la ecuación, luego tenemos:

$$\begin{aligned}\underbrace{[C'(t) - \rho C(t)]e^{-\rho t}}_{\varphi'(t)} + \underbrace{\rho C(t)e^{-\rho t}}_{\rho\varphi(t)} &= \rho T \Rightarrow C'(t)e^{-\rho t} = \rho T \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt}e^{-\rho t} = \rho T \Rightarrow \\ \Rightarrow dC(t) &= \rho Te^{\rho t} dt \Rightarrow \int dC(t) = \int \rho Te^{\rho t} dt \Rightarrow C(t) = Te^{\rho t} + K\end{aligned}$$

Puesto que $\varphi(t) = C(t)e^{-\rho t}$ y $C(t) = Te^{\rho t} + K$, llegamos a que $\varphi(t) = [Te^{\rho t} + K]e^{-\rho t}$.

Esto es, la solución de la ecuación diferencial $\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\rho[\varphi(t) - T]$ es la función $\varphi(t) = T + Ke^{-\rho t}$.

Imponemos la condición inicial para resolver el problema de valor inicial:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \Rightarrow T + K = \varphi_0 \Rightarrow K = \varphi_0 - T$$

Esto último, llevado a la expresión de $\varphi(t)$, nos hace tener la solución buscada:

$$\varphi(t) = T + [\varphi_0 - T]e^{-\rho t}$$

Esta expresión rige la temperatura del cuerpo en función del tiempo, pero aún nos falta por concretar quién es la constante ρ . Ya dijimos que esta determinación ha de hacerse a través de mediciones experimentales, de modo que tenemos que acudir a los datos del enunciado para fijar la constante presente en nuestro problema y que a su vez es la que calibra la cantidad de temperatura que se va perdiendo según transcurre el tiempo.

Si, transcurrida una hora tras encontrarse el cuerpo, la temperatura es 33 °C, tenemos que $\varphi(1) = 33$; Llevando este dato a la expresión de $\varphi(t)$, llegamos a que $\varphi(1) = T + [\varphi_0 - T]e^{-\rho}$; por otro lado, la temperatura a la que estaba dicho cuerpo cuando fue descubierto (instante inicial) tenía un valor de 34 °C, luego $\varphi(0) = \varphi_0 = 34$. Y, además, la temperatura ambiente siempre es constante e igual a $T = 22$.

$$33 = 22 + [34 - 22]e^{-\rho}$$

Despejando:

$$33 = 22 + [34 - 22]e^{-\rho} \Rightarrow 11 = 12e^{-\rho} \Rightarrow e^{\rho} = \frac{12}{11} \Rightarrow \rho = \ln\left(\frac{12}{11}\right)$$

Una vez conocida la constante ρ , propia y exclusiva de nuestro caso, podremos afirmar que también es conocida la función $\varphi(t) = T + [\varphi_0 - T]e^{-\rho t}$, la cual queda de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = 22 + [34 - 22]e^{-\ln\left(\frac{12}{11}\right)t} = 22 + 12e^{\ln\left(\frac{12}{11}\right)^{-t}} = 22 + 12e^{\ln\left(\frac{11}{12}\right)^t} = 22 + 12\left(\frac{11}{12}\right)^t$$

En definitiva, la temperatura que tiene el cuerpo en función del tiempo, a raíz de datos experimentales propios de la investigación, es:

$$\varphi(t) = 22 + 12\left(\frac{11}{12}\right)^t$$

Ténganse en cuenta las siguientes observaciones:

- Efectivamente, $\varphi(0) = 34$ (temperatura inicial, al hallarse el cadáver).
- En efecto, $\varphi(1) = 33$.
- $\varphi(t) = 22 + 12\left(\frac{11}{12}\right)^t \Rightarrow \varphi'(t) = 12\left(\frac{11}{12}\right)^t \ln\left(\frac{11}{12}\right) < 0$, lo que quiere decir que la temperatura del cuerpo decrece con el tiempo: se enfría.
- Se satisface la ecuación diferencial:

$$\underbrace{12\left(\frac{11}{12}\right)^t \ln\left(\frac{11}{12}\right)}_{\varphi'(t)} = \underbrace{-\ln\left(\frac{12}{11}\right)}_{-\rho} \left[\underbrace{22 + 12\left(\frac{11}{12}\right)^t}_{\varphi(t)} - \underbrace{22}_{\frac{22}{1}} \right] = \ln\left(\frac{11}{12}\right) 12\left(\frac{11}{12}\right)^t$$

Después de asegurarnos de que lo obtenido se ajusta correctamente al problema, buscamos la conclusión: pretendemos saber a qué instante t corresponde la temperatura normal y habitual de un cuerpo con vida, que es de 37°C . Este valor del tiempo nos indicará el momento en que, presentando la temperatura dicho valor, empezó a decrecer; o lo que es lo mismo: nos informa del momento del asesinato.

$$37 = 22 + 12\left(\frac{11}{12}\right)^t \Rightarrow \frac{15}{12} = \left(\frac{11}{12}\right)^t \Rightarrow \ln\left(\frac{15}{12}\right) = \ln\left(\frac{11}{12}\right)^t \Rightarrow \ln\left(\frac{15}{12}\right) = t \ln\left(\frac{11}{12}\right) \Rightarrow$$

$$0'223143551 = -0'087011376t \Rightarrow t = -\frac{0'223143551}{0'087011376} \Rightarrow t = -2'564533067 \text{ (horas)}$$

El signo negativo significa que el suceso tuvo lugar en un instante anterior al inicial (lo cual es obvio). Concluimos pues que el asesinato sucedió unas dos horas y media antes del hallazgo, en torno a las 09:30. Entre las 09:00 y las 10:00 la cocinera estaba en el mercado, luego el asesino tuvo que ser el mayordomo.

¡¡ EL ASESINO ES EL MAYORDOMO !!

TEMA 4: EDOS DE ORDEN SUPERIOR

Ejercicio 1

Resolver las siguientes EDO lineales con coeficientes constantes homogéneas:

a) $y'' + 2y' + y = 0$

b) $y'' + 3y = 0$

c) $y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 2$

d) $y''' + 5y'' + 6y' = 0$

e) $y''' + 2y'' + y' = 0$

f) $y^{(iv)} + 8y'' + 16y = 0$

a) $y'' + 2y' + y = 0$

Esta ecuación, como las del resto de apartados, es de orden superior a uno (segundo orden, pues la deriv. mayor es la segunda), de coeficientes constantes (multiplicando a y y sus derivadas tenemos ctes. y no funciones) y homogénea (igual a cero).

Empezamos construyendo el polinomio característico.

Pol. caract.: $r^2 + 2r + 1 = 0$

Según sean las raíces de este polinomio ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, múltiples...) construiremos una u otra solución.

$$(r+1)(r+1) = 0 ; \quad r = -1, \quad m_a = 2 \quad (\text{multiplicidad algebraica})$$

Solución: $y(x) = (Ax+B)e^{(-1)x}$ ← una raíz doble

b) $y'' + 3y = 0$

Pol. caract.: $r^2 + 3 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3} = \pm\sqrt{3}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}i$

Solución: raíces: $\begin{cases} r_1 = 0 + \sqrt{3}i & m_a = 1 \\ r_2 = 0 - \sqrt{3}i & m_a = 1 \end{cases}$

$$y(x) = e^{0x} [A \sin(\sqrt{3}x) + B \cos(\sqrt{3}x)]$$

c) $y'' + 5y' + 6y = 0$

Pol. caract.: $r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r+2)(r+3) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = -2 & m_a = 1 \\ r_2 = -3 & m_a = 1 \end{cases}$

Solución:

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \Rightarrow y'(x) = -2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow A+B=3$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow -2A-3B=2$$

$$\left. \begin{matrix} A+B=3 \\ -2A-3B=2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} A=11 \\ B=-8 \end{matrix} \right\} y(x) = 11e^{-2x} - 8e^{-3x}$$

c) $y'''(x) + 5y''(x) + 6y'(x) = 0$

Pol. caract.: $r^3 + 5r^2 + 6r = 0 \Rightarrow (r-0)(r+2)(r+3) = 0$

$$\begin{cases} r_1 = -2, & m_a = 1 \\ r_2 = -3, & m_a = 1 \\ r_3 = 0, & m_a = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + Ce^{0x}$$

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + C$$

d) $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 0$

Pol. caract.: $r^3 + 2r^2 + r = 0 \Rightarrow (r-0)(r+1)(r+1) = 0$

$$\begin{cases} r_1 = 0, & m_a = 1 \\ r_2 = -1, & m_a = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$y(x) = Ae^{0x} + (Bx + C)e^{(-1)x}$$

$$y(x) = A + (Bx + C)e^{-x}$$

e) $y^{(IV)}(x) + 8y''(x) + 16y(x) = 0$

Pol. caract.: $r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \Rightarrow t^2 + 8t + 16 = 0$

$(t+4)^2 = 0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow r = 0 \pm 2i$

$$\begin{cases} r_1 = 0 + 2i, & m_a = 2 \\ r_2 = 0 - 2i, & m_a = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$y(x) = e^{0x} [(Ax + B)\sin(2x) + (Cx + D)\cos(2x)]$$

Ejercicio 2

Resolver las siguientes EDO lineales con coeficientes constantes:

a) $y'' + 5y' + 6y = e^{4x}$

b) $y'' + 5y' + 6y = xe^{4x}$

c) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-2x}$

d) $y''' = x^2$

e) $y'' + 2y' + y = (4x^3 + x)e^{-x}$

Este ejercicio (y sus apartados) es similar al ejercicio anterior, pero ahora no son homogéneas las ecuaciones. Para resolverlas daremos dos pasos: resolveremos la EDO homogénea asociada y construiremos la llamada $y_H(x)$, en función de como sea el término que hace que la EDO no sea homogénea construiremos una solución particular de la misma a la que llamaremos $y_P(x)$ (métodos de los coeficientes indeterminados)

La solución de la EDO no homogénea será $y_H + y_P$

a) $y'' + 5y' + 6y = e^{4x}$; $g(x) = e^{4x}$

solución: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

homogénea:

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0 \Rightarrow \text{solución: } y_H(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

$$g(x) = e^{4x} \xrightarrow[\text{indet.}]{\text{coef.}} y_P(x) = ae^{4x} \quad \text{debemos comprobar que el 4 no es raíz del pol. caract. de la homogénea}$$

como y_P es solución de la EDO no homogénea, derivando y sustituyendo en la EDO la cumplirá y así obtendremos la "a".

$$y'(x) = 4ae^{4x}, \quad y''(x) = 16ae^{4x}$$

$$16ae^{4x} + 5 \cdot 4ae^{4x} + 6ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow a = \frac{1}{42}$$

$$y_P(x) = \frac{1}{42} e^{4x}$$

solución: $y_H + y_P = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + \frac{1}{42} e^{4x}$

$$b) y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = x e^{4x}$$

Se trata de una EDO lineal de 2º orden no homogénea con coeficientes constantes.

Solución: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$y_H(x)$ = solución de la EDO homogénea asociada

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

pol. caract: $r^2 + 5r + 6 = 0 = (r+2)(r+3)$

raíces $\begin{cases} r_1 = -2, m_a = 1 \\ r_2 = -3, m_a = 1 \end{cases} \quad y_H(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$

$y_P(x)$ = solución particular de la EDO completa

$g(x) = x e^{4x} \Rightarrow y_P(x) = (ax+b) e^{4x}$ como 4 no es raíz del polinomio caract. no hay que tocar nada
coef. indet.

como y_P es solución de la EDO, derivamos y sustituimos en la EDO para hallar a y b.

$$y'_P(x) = a e^{4x} + (ax+b) 4 e^{4x} = e^{4x} [4ax + a + 4b]$$

$$y''_P(x) = 4 e^{4x} [4ax + a + 4b] + e^{4x} \cdot 4a = e^{4x} [16ax + 8a + 16b]$$

$$\underbrace{8e^{4x} [2ax + a + 2b]}_{y''_P} + \underbrace{5e^{4x} [4ax + a + 4b]}_{5y'_P} + \underbrace{6(ax+b)e^{4x}}_{6y_P} = x e^{4x}$$

$$42ax + 13a + 42b = x \Rightarrow \begin{cases} 42a = 1 \\ 13a + 42b = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{42} \\ b &= -\frac{13}{42^2} \end{aligned}$$

$$y_P(x) = \frac{e^{4x}}{42} \left[x - \frac{13}{42} \right]$$

$$y(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x} + \frac{e^{4x}}{42} \left[x - \frac{13}{42} \right] \text{ es solución}$$

Ver pág 20 teoría

$$c) y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = x e^{-2x}$$

solución: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$y_H(x)$ = solución de la EDO homogénea asociada

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

pol. caract: $r^2 + 5r + 6 = 0 = (r+2)(r+3)$

raíces $\begin{cases} r_1 = -2, m_a = 1 \\ r_2 = -3, m_a = 1 \end{cases} \quad y_H(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$

$y_P(x)$ = solución particular de la EDO completa

$g(x) = x e^{-2x} \Rightarrow y_P(x) = (ax+b) e^{-2x}$
coef. indet

como -2 sí es raíz del pol. caract. ...

$$y_P(x) = x^1 (ax+b) e^{-2x} = (ax^2 + bx) e^{-2x}$$

$$y'_P(x) = (2ax+b) e^{-2x} - 2e^{-2x} (ax^2 + bx)$$

$$y'_P(x) = e^{-2x} [-2ax^2 + 2(a-b)x + b]$$

$$y''_P(x) = -2e^{-2x} [-2ax^2 + 2(a-b)x + b] + e^{-2x} [-4ax + 2(a-b)]$$

$$y''_P(x) = e^{-2x} [4ax^2 - 4(2a-b)x + 2a - 4b]$$

$$\underbrace{2e^{-2x} [2ax^2 - 2(2a-b)x + (a-2b)]}_{y''_P} + \underbrace{5e^{-2x} [-2ax^2 + 2(a-b)x + b]}_{5y'_P} + \underbrace{6(ax^2 + bx)e^{-2x}}_{6y_P} = \cancel{x e^{-2x}}$$

$$0x^2 + (2a+0b)x + 2a+b = x; \quad 2ax + 2a+b = x$$

$$y_P(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{-2x} = \frac{x}{2}(x-2) e^{-2x} \quad \begin{cases} 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ 2a+b=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

$y(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x} + \frac{x}{2}(x-2) e^{-2x}$ es solución

$$d) y''' = x^2 = x^2 e^{0x}$$

homogénea: $y'''(x) = 0 \Rightarrow r^3 = 0 \Rightarrow r=0, m_a=3$

particular: $g(x) = x^2 e^{0x} \Rightarrow y_P(x) = (ax^2 + bx + c) e^{0x} \cdot x^3$

solución: $y(x) = Ax^2 + Bx + C + \frac{x^5}{60}$

Ejercicio 3

Resolver las siguientes EDO lineales con coeficientes constantes:

a) $y'' - 4y' = xe^{4x}$

b) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

c) $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$

d) $y^{(iv)} - y = 3 \cos x$

$$d) \quad y^{iv} - y = 3 \cos x$$

() Solución general de la EDO homogénea $y^{iv} - y = 0$

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \\ r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i (\alpha=0, \beta=1) \end{cases}$$

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

* Solución particular de la EDO completa.

$$\text{Ensayamos con } y_p(x) = x(a \cos x + b \sin x) = ax \cos x + bx \sin x$$

por ser $r=i$ raíz de la ecuación característica.

$$y_p'(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x$$

$$() y_p''(x) = -a \sin x - a \sin x - ax \cos x + b \cos x + b \cos x - bx \sin x = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x$$

$$y_p'''(x) = -2a \cos x - a \cos x + ax \sin x - 2b \sin x - b \sin x - bx \cos x = -3a \cos x + ax \sin x - 3b \sin x - bx \cos x$$

$$y_p^{iv}(x) = 3a \sin x + a \sin x + ax \cos x - 3b \cos x - b \cos x + bx \sin x = 4a \sin x + ax \cos x - 4b \cos x + bx \sin x$$

Sustituimos en la EDO:

$$y^{iv} - y = 3 \cos x$$

$$4a \sin x + \cancel{ax \cos x} - 4b \cos x + \cancel{bx \sin x} - \cancel{ax \cos x} - \cancel{bx \sin x} = 3 \cos x$$

$$4a \sin x - 4b \cos x = 3 \cos x$$

$$() \begin{cases} 4a = 0 \\ -4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{4} x \sin x$$

Por tanto la solución general de la EDO completa es:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{3}{4} x \sin x}$$

Ejercicio 4

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + y = e^x(x^2 - 1) + 8 \cos x \cos(2x)$$

* Solución general de la homogénea: Ecuación característica de $y'' + y = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-1} = \pm i \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \boxed{y_H(x) = A \cos x + B \sin x}$$

* Solución particular de la completa:

$$f(x) = e^x(x^2 - 1) + 8 \cos x \cos(2x) = \underbrace{e^x(x^2 - 1)}_{f_1(x)} + \underbrace{4 \cos 3x}_{f_2(x)} + \underbrace{4 \cos x}_{f_3(x)}, \text{ con } \cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

• Para $f_1(x)$ ensayamos $y_{p1} = (ax^2 + bx + c)e^x$

$$y'_{p1}(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y''_{p1}(x) = 2ae^x + (2ax + b) \cdot 2e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \quad \left. \begin{array}{l} y'_{p1}(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ y''_{p1}(x) = 2ae^x + (2ax + b) \cdot 2e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \end{array} \right\} \text{Sustituyendo en la EDO:}$$

$$2ae^x + (2ax + b) \cdot 2e^x + (ax^2 + bx + c)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = (x^2 - 1)e^x$$

$$[2ax^2 + (4a + 2b)x + (2a + 2b + 2c)]e^x = (x^2 - 1)e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2 \\ 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 2a + 2b + 2c = -1 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{p1}(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x}$$

• Para $f_2(x)$ ensayamos $y_{p2} = a \cos 3x + b \sin 3x$

$$y'_{p2}(x) = -3a \sin 3x + 3b \cos 3x$$

$$y''_{p2}(x) = -9a \cos 3x - 9b \sin 3x \quad \left. \begin{array}{l} y'_{p2}(x) = -3a \sin 3x + 3b \cos 3x \\ y''_{p2}(x) = -9a \cos 3x - 9b \sin 3x \end{array} \right\} \text{Sustituyendo en la EDO:}$$

$$-9a \cos 3x - 9b \sin 3x + a \cos 3x + b \sin 3x = 4 \cos 3x$$

$$-8a \cos 3x - 8b \sin 3x = 4 \cos 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8a = 4 \Rightarrow a = -1/2 \\ -8b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{p2}(x) = -\frac{1}{2} \cos 3x}$$

• Para $f_3(x)$ ensayamos $y_{p3} = ax \cos x + bx \sin x$

$$y'_{p3}(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x$$

$$y''_{p3}(x) = 2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x \quad \left. \begin{array}{l} y'_{p3}(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x \\ y''_{p3}(x) = 2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x \end{array} \right\} \text{Sustituyendo en la EDO:}$$

$$2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x + ax \cos x + bx \sin x = 4 \cos x$$

$$2a \sin x + 2b \cos x = 4 \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{p3}(x) = 2x \sin x}$$

Por tanto, $\boxed{y(x) = A \cos x + B \sin x + e^x \left(\frac{x^2}{2} - x\right) + \frac{1}{2} \cos 3x + 2x \sin x}$

Ejercicio 5

Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \sin(x)y'' + 2\cos(x)y' - \sin(x)y = 2\cos(2x) \\ y(\pi/2) = 1 \\ y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

sabiendo que el cociente de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea es x .

Se trata de una EDO lineal de 2º orden no homog. de coeficientes no constantes.

[1] Comenzamos haciendo que sea 1 el coef. de y''

En nuestro problema... dividiremos entre $\sin(x)$

nos queda pues $y''(x) + \underbrace{\frac{2\cos(x)}{\sin(x)}}_{p_1(x)} y'(x) - y(x) = \underbrace{\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)}}_{q(x)}$

[2] Resolución de la EDO homogénea asociada:

la solución de la homogénea será:

$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones particulares de dicha EDO homogénea (se dice entonces que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones).

Tendremos que exigir que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sean linealmente independientes y a partir de ahora nuestro objetivo será determinarlas.

[3] Seguimos empleando el dato del enunciado:

En este caso nos informan de que "el cociente de dos soluciones particulares de la homogénea es x "

así pues, $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x \Rightarrow y_2(x) = x y_1(x)$

[4] Fórmula de Liouville:

$$W(x) = e^{-\int p_1(x) dx} = e^{-2 \ln |\sin(x)| + C} = C \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dato}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & x y_1(x) \\ y_1'(x) & y_1(x) + x y_1'(x) \end{vmatrix} = (y_1(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1(x))^2 = C / \sin^2(x) \Rightarrow y_1(x) = \frac{C}{\sin(x)} \Rightarrow y_2(x) = x y_1(x) = \frac{C \cdot x}{\sin(x)}$$

[5] Organizando...

homogénea: $y''(x) + 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y'(x) - y(x) = 0 \Rightarrow$ solución:

$$y(x) = \frac{C_1}{\sin(x)} + \frac{C_2 x}{\sin(x)}$$

El papel de y_1 lo hace $\frac{1}{\sin(x)}$ y el de y_2 lo hace $\frac{x}{\sin(x)}$
podemos comprobar que ambas son soluciones de la homogénea

[6] Confirmación de que y_1 e y_2 son libres (Wronskiano No nulo)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(x)} & \frac{x}{\sin(x)} \\ -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} & \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2(x)} \neq 0$$

[7] Variación de las constantes:

$$y''(x) + 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y'(x) - y(x) = 2 \frac{\cos(2x)}{\sin(x)}$$

$$\text{solución: } y(x) = \frac{C_1(x)}{\sin(x)} + \frac{x C_2(x)}{\sin(x)}$$

[8] Determinar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ con el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) &= q(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \frac{1}{\sin(x)} + C_2'(x) \frac{x}{\sin(x)} = 0 \\ C_1'(x) \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} + C_2'(x) \left(\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \right) = 2 \frac{\cos(2x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

[9] Resolución del sistema (recomendado Cramer):

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{x}{\sin(x)} \\ 2 \frac{\cos(2x)}{\sin(x)} & \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(x)} & \frac{x}{\sin(x)} \\ -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} & \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{2x \cos(2x)}{\sin^2(x)}}{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

$$[10] \quad C_1'(x) = -2x \cos(2x) \Rightarrow C_1(x) = \int -2x \cos(2x) dx$$

$$C_1(x) = -x \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + k_1$$

hacemos lo mismo para C_2

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(x)} & 0 \\ -\cos(x) & 2 \frac{\cos(2x)}{\sin(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(x)} & \frac{x}{\sin(x)} \\ -\cos(x) & \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{2 \cos(2x)}{\sin^2(x)}}{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

$$C_2'(x) = 2 \cos(2x) \Rightarrow C_2(x) = \sin(2x) + k_2$$

[11] Llevando $C_1(x)$ y $C_2(x)$ a la solución obtenemos la construcción definitiva de la solución de la EDO completa.

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)} (C_1(x) + x C_2(x))$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \left[-x \cancel{\sin(2x)} - \frac{1}{2} \cos(2x) + k_1 + x(\cancel{\sin(2x)} + k_2) \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \left[k_1 + k_2 x - \frac{1}{2} \cos(2x) \right]$$

[12] Ajustamos las constantes k_1 y k_2 con las condiciones iniciales.

$$y'(\frac{\pi}{2}) = k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = k_1 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \left[\underbrace{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}_{\sin^2(x)} \right] \Rightarrow y(x) = \sin(x)$$

Ejercicio 6 Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

en donde $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son continuas sobre un intervalo abierto I , entonces el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ está dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = C \exp\left(-\int p_1(x) dx\right) \quad (\text{Fórmula de Liouville})$$

donde C es una constante real.

Ejercicio 7 Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y''' + 5xy'' + 3y' = x$$

Ejercicio 8

Resolver la ecuación diferencial: $x^2 y''' + 2xy'' - 4y' + \frac{4y}{x} = 2x$

Multiplicamos por x :

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4xy' + 4y = 2x^2, \quad x > 0$$

que es una ecuación de Euler. Hacemos las siguientes sustituciones:

$$x = e^t$$

$$y' = y_t' e^{-t}$$

$$y'' = (y_t'' - y_t') e^{-2t}$$

$$y''' = (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t') e^{-3t}$$

La forma de obtener estas expresiones está descrita con detalle en la página T-26.

y nos queda:

$$e^{3t}(y_t''' - 3y_t'' + 2y_t')e^{-3t} + 2e^{2t}(y_t'' - y_t')e^{-2t} - 4e^t \cdot y_t' e^{-t} + 4y = 2e^{2t}$$

$$y_t''' - 3y_t'' + 2y_t' + 2y_t'' - 2y_t' - 4y_t' + 4y = 2e^{2t}$$

$$y_t''' - y_t'' - 4y_t' + 4y = 2e^{2t} \quad \text{EDO lineal de coeficientes constantes.}$$

$$\text{SGH: } r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -4 & +4 \\ x=1 & 1 & 0 & -4 \\ & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(r-1)(r^2-4) = 0$$

$$(r-1)(r-2)(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -2 \end{cases} \quad \text{3 raíces reales distintas}$$

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$$

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \frac{1}{x^2} = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^{-2}$$

Recordamos la EDO: $y_t''' - y_t'' - 4y_t' + 4y = 2e^{2t}$

PC: probamos con una solución del tipo:

$$y_p(t) = mte^{2t}$$

$$y_p'(t) = me^{2t} + 2mte^{2t} = me^{2t}(1+2t)$$

$$y_p''(t) = 2me^{2t}(1+2t) + me^{2t} \cdot 2 = me^{2t}(2+4t) + 2me^{2t} = me^{2t}(4+4t)$$

$$y_p'''(t) = 2me^{2t}(4+4t) + me^{2t} \cdot 4 = me^{2t}(8+8t) + me^{2t} \cdot 4 = me^{2t}(12+8t)$$

$$me^{2t}(12+8t) - me^{2t}(4+4t) - 4me^{2t}(1+2t) + 4mte^{2t} = 2e^{2t}$$

$$() \quad 12m + 8mt - 4m - 4mt - 4m - 8mt + 4mt = 2$$

$$4m = 2 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}, \text{ por tanto: } y_p(t) = \frac{t}{2}e^{2t}$$

$$SGC: \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{2t} = C_1e^t + C_3e^{-2t} + \left(C_2 + \frac{t}{2}\right)e^{2t}$$

Por último, desbaraciando el cambio $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$

$$y(x) = C_1x + C_3x^{-2} + \left(C_2 + \frac{\ln x}{2}\right)x^2$$

$$() \quad \boxed{y(x) = C_1x + \left(C_2 + \frac{\ln x}{2}\right)x^2 + C_3\frac{1}{x^2}}$$

Ejercicio 9

Calcular el Wronskiano entre 0 y 2π de las dos siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \text{sen } x & , \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & , \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \frac{x^2}{2\pi} & , \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

TEMA 5: RESOLUCIÓN MEDIANTE SERIES

Ejercicio 1

Encontrar la solución en serie de potencias de x de la siguiente ecuación:

$$y'' + y = 0$$

Ejercicio 2

Integrar la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' = xy \quad (\text{Ecuación de Airy})$$

utilizando el método de los coeficientes indeterminados,

- a) En series de potencias en x
- b) En series de potencias de $x - 1$

Ejercicio 3

Integrar, por desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = 0$, la ecuación

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

y encontrar su radio de convergencia.

Ejercicio 1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x+y \end{cases}$

a) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$ sistema de 2 EDO's lineal (luego tendrá matriz asociada), de coef. ctes (luego los elementos de la matriz serán números y no funciones) y homogéneo (término independiente nulo)

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A: \text{matriz asociada}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Término independiente}}$$

Se trata de determinar si la matriz asociada es o no es diagonalizable. Para ello hallaremos los autovalores y autovectores y compararemos las multiplicidades.

Autovalores: $|A - \lambda Id| = 0$

$m_g \leq m_a$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Autovectores: $\ker(A - \lambda Id)$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \ker(A - Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow \vec{u} = (u_1, u_2) = (1, 1)$$

Sabemos que la m_a de $\lambda = 1$ es 1 ($m_a(\lambda=1) = 1$).

La m_g de $\lambda = 1$ también es 1, porque surge de hacer $\dim(\mathbb{R}^2) - \text{nº ec. libres} = 2 - 1 = 1$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \ker(A + Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0$$

$$u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow \vec{u} = (u_1, u_2) = (1, -1) \quad \begin{matrix} m_a(\lambda=-1) = 1 \\ m_g(\lambda=-1) = 1 \end{matrix}$$

Las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden para cada autovalor, luego A es diagonalizable $\Rightarrow$ solución:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

↑ autovectores

solución: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

De otro modo:

derivando y sustituyendo tenemos una EDO de 2º orden cuyo pol. caract. tiene como raíces a los autovalores de la matriz del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) = y(t) \Rightarrow x''(t) = y'(t) \\ y'(t) = x(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x''(t) - x(t) = 0 \\ r^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A e^t + B e^{-t} \\ x'(t) = y(t) = A e^t - B e^{-t} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

autovalores: $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \pm i$

solución: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{(0+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{(0-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

autovectores: $i \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -i u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - i u_2 = 0 \end{cases}$

$u_1 - i u_2 = 0 \Rightarrow \vec{u} = (u_1, u_2) = (1, i)$

$\lambda = +i \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 + i u_2 = 0 \end{cases}$

$u_1 + i u_2 = 0 \Rightarrow \vec{u} = (u_1, u_2) = (1, i)$

Las m_a y m_g coinciden para cada valor, luego A es diagonalizable.

solución: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 e^{(0+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}_{z \in \mathbb{C}} + \underbrace{C_2 e^{(0-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\bar{z} = z^* \in \mathbb{C}} = 2 \operatorname{Re}[z]$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \operatorname{Re} \left[C_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] \Rightarrow z = (\alpha + \beta i)(\cos(t) + i \sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\begin{cases} C_1 = \alpha + \beta i \\ e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \end{cases}$

$2 \operatorname{Re}(z) = 2 \operatorname{Re} \left[(\alpha + \beta i)(\cos(t) + i \sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] =$

$= 2 \operatorname{Re} \left[\left[(\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)) + i(\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] =$



$$= \begin{pmatrix} 2\alpha \cos(t) - 2\beta \sin(t) \\ 2\alpha \sin(t) + 2\beta \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)$$

$$y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

$$d) \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

En los dos casos anteriores la matriz era diagonalizable.
(en uno los autovalores $\in \mathbb{R}$ y en el otro $\in \mathbb{C}$)
En este caso, la matriz no es diagonalizable.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{autovalores: } |A - \lambda \text{Id}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad (m_a = 2)$$

$$\text{autovector: } \lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \bar{u} = (0, 1) \quad (m_g = 1)$$

A no diagonalizable $\Rightarrow$ solución:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{0 \cdot t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - \text{Id}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\begin{matrix} \text{autovector} & \text{vector que cumple (*)} \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{1 \cdot t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - 1\text{Id}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$(*) : \begin{cases} (A - \lambda \text{Id})^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & [1] \\ (A - \lambda \text{Id}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & [2] \end{cases}$$

$$[1] \lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda \text{Id})^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ se cumple } \forall v_1, v_2$$

$$[2] \text{ sustituyendo } (\neq) \text{ por } (=) \text{ se cumple cuando } v_2 = 0$$

Así pues, la segunda condición (sin modificar)
se cumple cuando $v_2 \neq 0$ (estos cálculos están hechos
en la búsqueda del autovector).

[1] y [2] se cumplen mientras $v_1 \neq 0$; escogemos $(1, 0)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_2 e^t \\ y(t) &= (C_1 + C_2 t) e^t \end{aligned}}$$

Ejercicio 2

Aplicando la definición, analizar la estabilidad de la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

que verifica las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$.

Ejercicio 3

Analizar la estabilidad de los siguientes sistemas autónomos lineales:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases} ; \text{ d) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - y \end{cases}$$

Se trata de sistemas lineales, homogéneos de coef. ctes. Para estudiar su estabilidad, extraemos su matriz asociada, hallamos sus autovalores, y analizamos las partes reales e imaginarias de cada uno de ellos.

a) Matriz asociada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ autovalores: $\lambda_1 = -1 + 0i$
 $\lambda_2 = -2 + 0i$

Todos los autovalores tienen parte real negativa, luego las soluciones son asintóticamente estables.

b) Matriz asociada: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ autovalores: $\lambda_1 = -1 + 0i$
 $\lambda_2 = 3 + 0i$

Existe al menos un autovalor con parte real positiva, luego las soluciones son inestables.

c) Matriz asociada: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ autovalores: $\lambda_1 = -1 + 2i$
 $\lambda_2 = -1 - 2i$

Todos los autovalores tienen parte real negativa, luego las soluciones son asintóticamente estables.

d) Matriz asociada: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ autovalores: $\lambda_1 = 0 + 3i$
 $\lambda_2 = 0 - 3i$

Todos los autovalores tienen parte real nula, y además existen tantos autovectores como multiplicidades para cada autovalor, luego el sistema es estable, pero no asintóticamente.

ver T-44 teoría

Ejercicio 4

Determinar los puntos de reposo de los siguientes sistemas autónomos no lineales y analizar su estabilidad aplicando el método de linealización:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 - x \\ \frac{dy}{dt} = 3x - x^2 - y \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x-1)(y-1) \\ \frac{dy}{dt} = xy - 2 \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5 - x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 - x \end{cases}$$

Ejercicio 5

I.- Demostrar que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^2y \end{cases}$$

es asintóticamente estable.

II.- Empleando una función de Liapunov de la forma $V(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$, analizar la estabilidad de la solución nula del sistema autónomo lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3 \end{cases}$$

Ejercicio 6

Calcular las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Recuerda que:
valor propio = autovalor
vector propio = autovector

Calculo de los valores propios

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 &\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Procura aplicar siempre que sea posible las propiedades de los determinantes antes de ponerte a calcularlos

ahora calculamos el determinante desarrollando por la primera fila para aprovechar los dos ceros que hay en ella,

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda) \cdot (-2-\lambda) - 4 \cdot (-1)) = 0$$

$$(1-\lambda)((3-\lambda)(-2-\lambda) + 4) = 0$$

$$(1-\lambda)(-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que,

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

por lo que el polinomio característico queda factorizado,

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

Por tanto los valores propios (autovalores) de la matriz A son :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_1 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema con tres incógnitas y sólo dos ecuaciones linealmente independientes. Esto quiere decir que el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t , es decir hacemos $x_3 = t$ y ahora sustituyendo nos queda un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2t = 0 \\ x_1 - x_2 - 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -x_2 - 2t \\ -x_2 - 2t - x_2 - 3t &= 0 \end{aligned}$$

Así que nos queda:

$$\begin{aligned} -2x_2 - 5t &= 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5t}{2} \\ x_1 &= -x_2 - 2t \Rightarrow x_1 = -\left(-\frac{5t}{2}\right) - 2t \Rightarrow x_1 = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Por tanto los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$ son de la forma

$$u = \left(\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t \right) \text{ que, por ejemplo, para } t=1 \text{ queda } u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1 \right).$$

Hemos particularizado $t=1$ por simplicidad pero se podría haber elegido cualquier otro valor para la t

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_2 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 - 4x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = 0 \end{aligned}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t , es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 + 4t = 0 \Rightarrow x_2 = -4t$$

Por tanto los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$ son de la forma $v = (0, -4t, t)$ que, por ejemplo, para $t = 1$ queda $v = (0, -4, 1)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_3 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 & \Rightarrow 4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 & \Rightarrow -x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t , es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 + t = 0 \Rightarrow x_2 = -t$$

Por tanto los autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = -1$ son de la forma $w = (0, -t, t)$ que, por ejemplo, para $t = 1$ queda $w = (0, -1, 1)$.

Así pues, como todos los autovalores tienen igual multiplicidad algebraica que geométrica la matriz dada es diagonalizable y podemos poner la matriz diagonalizada según la expresión:

$$A = PDP^{-1}$$

donde la matriz P es una matriz en la que las columnas son los tres autovectores u , v y w que ya hemos calculado previamente.

Así pues nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Importante:
Cada vector propio tiene que estar en la misma columna en que está su valor propio asociado

FMT4

Problemas de

examen

Integrar la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{a}{x}y' - y = be^x + c\frac{e^x}{x}, \quad x > 0$$

a) para $a=2, b=0, c=2$, sabiendo que, en este caso, la ecuación homogénea admite una solución particular $y_1(x) = \frac{e^x}{x}$.

b) Para $a=0, b=1, c=0$.

c) Si el wronskiano de dos funciones $y_1(x), y_2(x)$ es igual a cero $\forall x \in (a, b)$, ¿Qué puede decirse sobre la dependencia lineal de las funciones en ese intervalo?

a) La EDO que hay que resolver es: $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 2\frac{e^x}{x}$

* Solución general de la homogénea $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{e^x}{x} & y_2 \\ \frac{xe^x - e^x}{x^2} & y_2' \end{vmatrix} = \frac{e^x}{x}y_2' - \frac{xe^x - e^x}{x^2}y_2$$

$$\int p_1(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x + K$$

Aplicando la fórmula de Liouville, $W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$ nos queda:

$$\frac{e^x}{x}y_2' + \frac{(1-x)e^x}{x^2}y_2 = Ce^{-2\ln x + K} = C \cdot e^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot e^K \Rightarrow \frac{e^x}{x}y_2' + \frac{(1-x)e^x}{x^2}y_2 = \frac{1}{x^2}$$

Se trata ahora de resolver una EDO lineal de primer orden para obtener la segunda solución particular $y_2(x)$ de la EDO de segundo orden.

(*) Solución general de la EDO homogénea: $\frac{e^x}{x}y_2' + \frac{(1-x)e^x}{x^2}y_2 = 0$, EDO separable

$$\frac{e^x}{x} \frac{dy_2}{dx} + \frac{(1-x)e^x}{x^2}y_2 = 0 \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = \int \frac{x-1}{x} dx \Rightarrow \ln y_2 = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x - \ln x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = e^{x - \ln x + C} = e^x \cdot e^{\ln \frac{1}{x}} \cdot e^C = K \frac{e^x}{x}$$

• Solución particular por variación de las constantes (variación de los parámetros)

$y_2(x) = K(x) \frac{e^x}{x}$, $y_2'(x) = K'(x) \frac{e^x}{x} + K(x) \frac{xe^x - e^x}{x^2}$ y sustituyendo esto en la EDO de primer orden nos que:

$$\left(K'(x) \frac{e^x}{x} + K(x) \frac{xe^x - e^x}{x^2} \right) \frac{e^x}{x} + \frac{(1-x)e^x}{x^2} K(x) \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow K'(x) \cdot \frac{e^{2x}}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow K'(x) = e^{-2x}$$

$K(x) = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, así pues la solución particular y_2 queda: www.simplyjarod.com

$$y_2(x) = K(x) \frac{e^x}{x} = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right) \frac{e^x}{x} = -\frac{e^{-x}}{2x} + C \frac{e^x}{x} \Rightarrow y_2(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad \text{Hemos hecho } C=0 \text{ y el } -\frac{1}{2} \text{ lo absorbe } C_2.$$

Por tanto la solución general de la EDO homogénea es:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x}}$$

* Solución general de la EDO completa mediante variación de los parámetros.

La solución va a tener la forma $y(x) = C_1(x) \frac{e^x}{x} + C_2(x) \frac{e^{-x}}{x}$

$$\left. \begin{aligned} C_1' \frac{e^x}{x} + C_2' \frac{e^{-x}}{x} &= 0 \\ C_1' \frac{e^x(x-1)}{x^2} - C_2' \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} &= \frac{2e^x}{x} \end{aligned} \right\} \text{ De aquí obtenemos } C_1'(x) \text{ y } C_2'(x).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \frac{e^x(x-1)}{x} & \frac{-e^{-x}(x+1)}{x} \end{vmatrix} = -\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x} = -2$$

$$C_1' = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 2e^x & \frac{-e^{-x}(x+1)}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (-2e^0) = 1 \Rightarrow C_1(x) = \int dx = x + K_1$$

$$C_2' = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ \frac{e^x(x-1)}{x} & 2e^x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} = -e^{2x} \Rightarrow C_2(x) = \int (-e^{2x}) dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + K_2$$

La solución general de la EDO queda:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) = (x + K_1) \frac{e^x}{x} + \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + K_2\right) \frac{e^{-x}}{x} =$$

$$= \underbrace{\left(K_1 \frac{e^x}{x} + K_2 \frac{e^{-x}}{x}\right)}_{SGH} + \underbrace{x \cdot \frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} \frac{e^x}{x}}_{SPC} = K_1^* \frac{e^x}{x} + K_2 \frac{e^{-x}}{x} + e^x \quad \text{con } K_1^* = K_1 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y(x) = K_1^* \frac{e^x}{x} + K_2 \frac{e^{-x}}{x} + e^x}$$

Junio '96
Ejercicio 2

a) Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sin intentar resolverla, ¿Puede asegurar que admite solución? ¿Y si la condición inicial fuese $y(\sqrt{2}) = e^\pi$? En caso de que alguna respuesta haya sido afirmativa, ¿puede asegurar en ese caso que dicha solución será única? Justifique sus respuestas.

b) Suponga que para cierta ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = f(x, y)$$

se encuentran las curvas integrales $(x - C)^2 + y^2 = 4$ ($\forall C \in \mathbb{R}$) ¿Puede afirmar que la recta $y = 2$ es una solución de la citada ecuación? ¿Podría proponer otra solución del mismo tipo? Justifique sus respuestas.

c) Resuelva las ecuaciones diferenciales:

i. $(2xy + y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0$

ii. $y' = \cos^2(y)$

d) Resuelva la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - 2y' + y = 2e^x - xe^{3x}$$

a)

$$\text{P.V.I. (I)} \quad \begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x^2 + [y(x)]^2} & \text{EDO} \\ y(x_0) = y_0 & \text{Condición inicial} \end{cases}$$

Para analizar la existencia y unicidad de soluciones comenzamos acudiendo a la EDO, despejamos $y'(x)$ y a la parte derecha la llamamos $f(x, y)$. Se trata de analizar la continuidad de f y de una de sus derivadas parciales en un punto en concreto.

TEOREMA D EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN P.V.I.

- * Si $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) existe solución al P.V.I.
- * Si $f(x, y)$ No es continua en (x_0, y_0) entonces no podemos asegurar nada acerca de la existencia de soluciones

En el P.V.I (I), $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, que no es continua en $(0, 0)$, luego no podemos asegurar que exista solución al P.V.I (I).

$$\text{PVI (II)} \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} & \text{EDO} \\ y(\sqrt{2}) = e^{**} & \text{CI} \end{cases}$$

$\uparrow$ x_0 $\uparrow$ y_0

En el PVI (II) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, que sí es continua en $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, e^{**})$ luego podemos asegurar que existe solución al PVI (II).

TEOREMA DE UNICIDAD DE SOLUCIÓN AL PVI

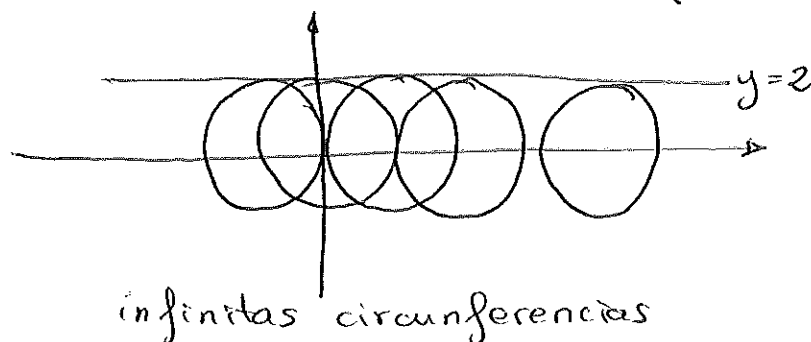
- * Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ es continua en (x_0, y_0) , entonces la solución al PVI es única
- * Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ no es continua en (x_0, y_0) , entonces no podemos asegurar nada acerca de la unicidad de la solución.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \text{ continua en } (x_0, y_0) = (\sqrt{2}, e^{**}) \Rightarrow \text{solución única}$$

b) Se trata de estudiar las soluciones de la EDO $y' = f(x,y)$, que en realidad es una expresión en la que aparece y' despejada como función de algo que depende de x y de y . En ningún caso se trata de resolverla (de hecho no podemos porque desconocemos la ecuación) sino que dibujaremos las curvas que nos aportan como solución y con la gráfica y dos propiedades de teoría encontraremos las llamadas soluciones singulares, que son, como su propio nombre indican, soluciones de la EDO (sustituyendo en $y' = f(x,y)$ las soluciones singulares, se cumple la ecuación) pero no pertenecen a la familia de soluciones dada en el enunciado.

(I) Dibujo de las gráficas de las soluciones

$$(x-c)^2 + y^2 = 4 \quad \text{circunferencias: } \begin{cases} \text{centro } (c, 0) \\ \text{Radio} = 2 \end{cases}$$



(II) Requisitos que ha de cumplir una curva para ser solución singular: (dos requisitos)

a) Por cada punto de la curva candidata a ser solución singular, ha de pasar una de las curvas de la familia de soluciones dada por el enunciado

En nuestro problema...

Por cada punto $(x_0, 2)$ de la recta $y=2$ pasa una circunferencia de la familia de soluciones, cuya ecuación es: $(x-x_0)^2 + y^2 = 4$ (Centro $(x_0, 0)$ y radio=2).

b) En el punto de contacto mencionado anteriormente, la curva candidata a ser solución singular y la curva de la familia de soluciones, han de compartir recta tangente (tener la misma pendiente).

En nuestro problema...

En el punto $(x_0, 2)$ de contacto, tanto la circunf. $(x-x_0)^2 + y^2 = 4$ como la recta $y=2$ comparten tangente, que es la recta $y=2$, según comprobamos perfectamente en la gráfica.

Por estos dos motivos anteriores, la recta $y=2$ es solución singular de la EDO. Siguiendo los mismos razonamientos, $y=-2$ también lo es.

Otros ejemplos:

$y=x$ incumple los dos requisitos } No son soluciones
 $y=0$ incumple el segundo sólo }

c) i. EDO exacta

ii. EDO separable . Nota: $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}(x)$

Anécdota jun07: $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}(x)$

Junio '98
Ejercicio 1

Dada la función

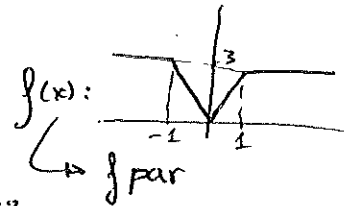
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ 3|x| & \text{si } -1 < x < 1, \\ 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

1. Desarrollarla en serie trigonométrica de Fourier de período 4.
2. Analizar la convergencia de la serie de Fourier calculada.
3. Determinar la suma de la serie anteriormente obtenida, para $x = \pi$.

④

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -2 \leq x \leq -1 \\ -3x & -1 \leq x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad T=4 = \left[-\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right] = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] = [-2, 2]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$



$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \underbrace{f(x)}_{\text{PAR}} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)}_{\text{PAR}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx = \int_0^1 3x \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx + \int_1^2 3 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx =$$

$$= 3 \left[\int_0^1 x \cos \frac{\pi nx}{2} dx + \int_1^2 \cos \frac{\pi nx}{2} dx \right] = 3 (I_1 + I_2)$$

$$I_1 = \int_0^1 x \cos \frac{\pi nx}{2} dx = \frac{2x}{\pi n} \sin \frac{\pi nx}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi nx}{2} dx$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 \right] \\ I_2 &= \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \Big|_1^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{4}{\pi^2 n^2} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 \right] \\ a_n &= 3 [I_1 + I_2] \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{12}{\pi^2 n^2} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 \right]$$

Estudio de $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$:

$$\left. \begin{aligned} n=1 &\Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ n=2 &\Rightarrow \cos \pi = -1 \\ n=3 &\Rightarrow \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ n=4 &\Rightarrow \cos 2\pi = 1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} n &= 4k-3, \cos \frac{\pi n}{2} = 0 \\ n &= 4k-2, \cos \frac{\pi n}{2} = -1 \\ n &= 4k-1, \cos \frac{\pi n}{2} = 0 \\ n &= 4k, \cos \frac{\pi n}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ 1, & n=4k \\ -1, & n=4k-2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{12}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 \right)$$

$$n=2k-1 \Rightarrow a_{2k-1} = \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$n=4k \Rightarrow a_{4k} = 0$$

$$n=4k-2 \Rightarrow a_{4k-2} = \frac{-24}{\pi^2 (4k-2)^2} = \frac{-6}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx = 0$$

PAR IMPAR

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx \Rightarrow T=4$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 \right] = \frac{9}{2}$$

DSF:

$$F(x) = \frac{9}{4} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2}\right)}{(2k-1)^2} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi(4k-2)x}{2}\right)}{(2k-1)^2}$$

$$F(x) = \frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2}\right) + \cos(\pi(2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

Junio '99
Ejercicio 1

a) Sea la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

que admite la solución particular $y_1(x) = e^x$

i. Demostrar que una segunda solución es de la forma $y_2(x) = e^x \int x^n e^{-x} dx$.

ii. Calcular la solución general para $n = 2$.

b) Obtenga la solución implícita de la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante que es función sólo de x .

$$x y''(x) - (x+n) y'(x) + n y(x) = 0$$

$$y''(x) - \left(\frac{x+n}{x} \right) y'(x) + \frac{n}{x} y(x) = 0$$

La solución de esta EDO homogénea es:

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones particulares de la EDO homogénea (sistema fundamental)

La suma de los coef. es cero $\Rightarrow$ Una solución particular es e^x
 $y_1(x) = e^x \Rightarrow$ solución a la EDO es $y(x) = C_1 e^x + C_2 y_2(x)$

Fórmula de Liouville:

$$W(x) = C e^{-\int p_1(x) dx} = C e^{\int \frac{x+n}{x} dx} = C e^{\int dx + n \int \frac{dx}{x}} =$$

$$= C e^{x + n \ln|x| + k} \Rightarrow W(x) = C e^x x^n$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & y_2(x) \\ e^x & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^x (y_2'(x) - y_2(x))$$

$$W(x) = C e^x x^n = e^x (y_2'(x) - y_2(x)) \Rightarrow C x^n = y_2'(x) - y_2(x)$$

Por comodidad tomamos $C=1$ (prohibido $C=0$, pues y_1 e y_2 serían dependientes por ser $W(x)$ nulo)

$$y_2'(x) - y_2(x) = x^n$$

I homogénea: $y_2''(x) = k e^x$

II variación de k : $y_2(x) = k(x) e^x$ solución

$$\underbrace{[k'(x) + k(x)] e^x}_{y_2'} - \underbrace{k(x) e^x}_{y_2} = x^n$$

$$k'(x) = x^n e^{-x} \Rightarrow k(x) = \int e^{-x} x^n dx$$

$$y_2(x) = e^x \int x^n e^{-x} dx$$

solución: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \left[e^x \int x^n e^{-x} dx \right]$$

ii) Sustituyendo $n=2$ en la solución anterior

obtenemos: $y(x) = C_1 e^x + C_2 (x^2 + 2x + 2)$
(hay que integrar dos veces por partes)

b) Factor integrante $\mu(x) = k \cdot x$
por comodidad tomamos $k=1$
solución:

$$x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + C = 0$$

Junio '99
Ejercicio 2

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{60}{x+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (a) Calcular $y(5)$ mediante un método de Euler de paso 1.
 (b) Utilizando un método de orden dos, estimar el error de discretización cometido en cada uno de los pasos y el error de discretización acumulado.
 Nota: Expresa las fracciones como tales, sin operar, para evitar errores de redondeo (emplee $\frac{2}{3}$ y no 0.66).
 (c) Calcule la solución exacta (analítica) del p.v.i.

(a) 1.5 puntos, (b) 1 punto, (c) 0.5 puntos.

PVI $\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \frac{60}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{60}{x+1} \Rightarrow \int dy = \int 60 \frac{dx}{x+1} \Rightarrow y(x) = 60 \ln|x+1| + C \\ y(0) = 0 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow 0 = 60 \ln|0+1| + C = 60 \cdot 0 + C \Rightarrow C=0 \end{array} \right. \Rightarrow$

Solución

$$\Rightarrow y(x) = 60 \ln|x+1|$$

$$y(5) = 60 \ln|5+1| = 60 \ln|6| = 107.5$$

Método de Euler: $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

Paso 1 $\Rightarrow$ Longitud de paso h es 1 $\Rightarrow h = 1$

Estimación de $y(5) \approx y_5$

Euler, $i=0 \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 0 + 1 f(0, 0) = 0 + \frac{60}{0+1} = 60 \rightarrow y_1 = 60$

Euler, $i=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 60 + 1 f(1, 60) = 60 + \frac{60}{1+1} = 90 \rightarrow y_2 = 90$

$x_{i+1} = x_i + 1 = 2$

Euler, $i=4 \Rightarrow y_5 = \dots \rightarrow y_5 = 137$

Junio '99
Ejercicio 3

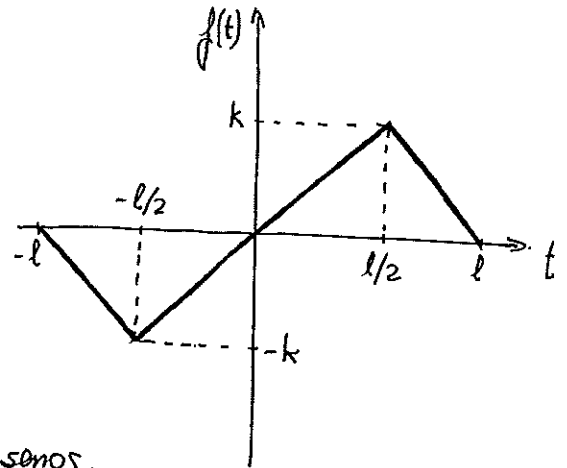
Dada la función:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l}t & 0 < t \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

con l y k constantes positivas, encontrar un desarrollo en Serie de Fourier que contenga únicamente términos en seno.

(3 puntos)

$$\text{Sea } g(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l}(-l-t) & -l < t < -l/2 \\ \frac{2k}{l}t & -l/2 < t < l/2 \\ \frac{2k}{l}(l-t) & l/2 < t < l \end{cases}$$



$g(t)$ es una función impar que en $(-l, l)$ coincide con $f(t)$, luego en $(0, l)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos y el de $g(t)$ sólo contiene senos.

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{2}{2l} \int_{-l/2}^{l/2} g(x) \sin \frac{2\pi n}{2l} x dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \overbrace{g(x)}^{\text{par}} \cdot \overbrace{\sin \frac{\pi n}{l} x}^{\text{impar}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} \left[\int_0^{l/2} \frac{2k}{l} t dt + \int_{l/2}^l \frac{2k}{l} (l-t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt \right] =$$

$$= \frac{4k}{l^2} \left(\int_0^{l/2} t \sin \frac{\pi n}{l} t dt + \int_{l/2}^l l \sin \frac{\pi n}{l} t dt - \int_{l/2}^l t \sin \frac{\pi n}{l} t dt \right) = \frac{4k}{l^2} (I_1 + I_2 - I_3)$$

Veamos cada una de estas integrales. I_1 e I_3 tienen la misma primitiva:

$$\int t \sin \frac{\pi n}{l} t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin \frac{\pi n}{l} t dt \Rightarrow v = -\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} t \end{array} \right] = -t \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} t - \int -\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} t dt =$$

$$= -\frac{l}{\pi n} t \cos \frac{\pi n}{l} t + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} t = \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} t - \frac{l}{\pi n} t \cos \frac{\pi n}{l} t$$

La primitiva de I_2 es inmediata:

$$\int l \sin \frac{\pi n}{l} t dt = \frac{-l^2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} t$$

Ahora sustituimos estos resultados en (*):

$$b_n = \frac{4k}{l^2} \left(\left[\frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} t - \frac{l}{\pi n} t \cos \frac{\pi n}{l} t \right]_0^{l/2} + \left[\frac{-l^2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} t \right]_{l/2}^l - \left[\frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{l} t - \frac{l}{\pi n} t \cos \frac{\pi n}{l} t \right]_{l/2}^l \right)$$

$$= \frac{4k}{l^2} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{l^2}{2\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - 0 + \frac{-l^2}{\pi n} \cos \pi n + \frac{l^2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \pi n + \frac{l^2}{\pi n} \cos \pi n + \right.$$

$$\left. + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{l^2}{2\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} \right) = \frac{4k}{l^2} \left(\frac{2l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \right) = \frac{8k}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}$$

Dando valores a la n :

$$b_1 = \frac{8k}{\pi^2 1^2}, b_2 = 0, b_3 = \frac{8k}{\pi^2 3^2} (-1), b_4 = 0$$

$$b_5 = \frac{8k}{\pi^2 5^2}, b_6 = 0, b_7 = \frac{8k}{\pi^2 7^2} (-1), b_8 = 0$$

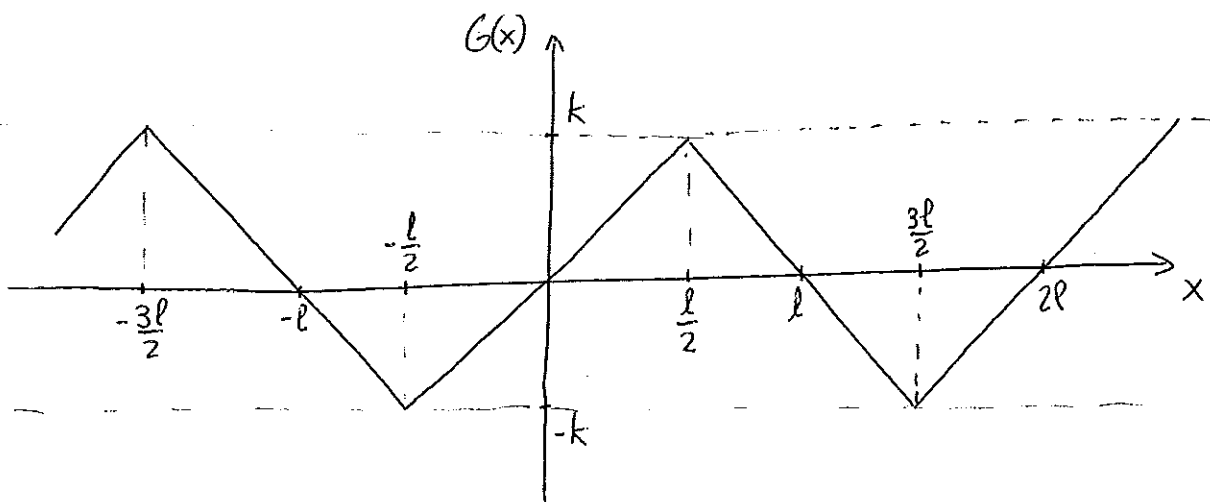
Generalizando:

$$\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = \frac{8k}{\pi^2 (2n-1)^2} (-1)^{n-1} \end{cases}$$

Por tanto el desarrollo en serie de Fourier de $g(t)$ sólo tiene términos impares.

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \Rightarrow G(x) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

() desarrollo de Fourier $G(t)$ obtenido coincide con $g(t)$ en $(-l, l)$ y con $f(t)$ en $(0, l)$.



Septiembre '99
Ejercicio 1

Dada la función:

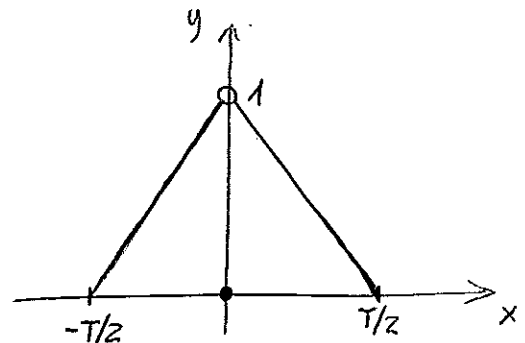
$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 - \frac{2t}{T} & \text{si } 0 < t \leq +\frac{T}{2} \end{cases}$$

- (a) Desarróllela en serie trigonométrica de Fourier.
 (b) Calcule el valor al que converge la serie anterior, para $t = 0$.
 (c) Sin realizar ningún tipo de cálculo, justifique si tendría el mismo desarrollo en Serie trigonométrica de Fourier, la función:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ 1 - \frac{2t}{T} & \text{si } 0 < t \leq +\frac{T}{2} \end{cases}$$

a) $b_n = 0$ por ser $f(t)$ una función par.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \stackrel{\text{par}}{=} 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) dt = \frac{4}{T} \left[t - \frac{t^2}{T} \right]_0^{T/2} = \\ &= \frac{4}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T^2/4}{T} \right) = \frac{4}{T} - 1 = 1 \end{aligned}$$



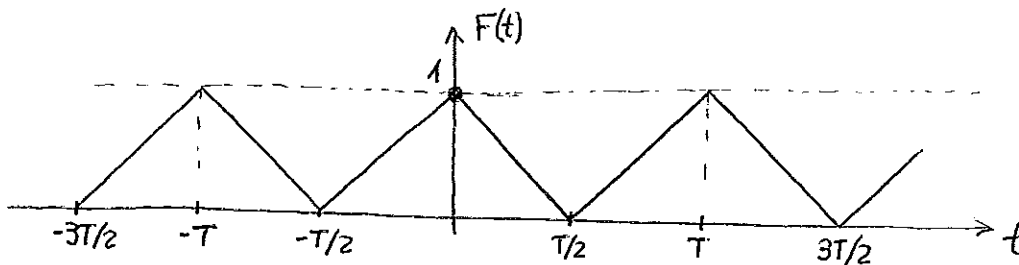
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} t dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = \frac{4}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} t \right]_0^{T/2} - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = \\ &= 4 \left(\frac{1}{2\pi n} \sin(\pi n) - 0 \right) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos \frac{2\pi n}{T} t dt = \left[\begin{aligned} u=t &\Rightarrow du=dt \\ dv &= \cos \frac{2\pi n}{T} t \Rightarrow v = \frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} t \end{aligned} \right] = \\ &= -\frac{8}{T^2} \left\{ \left[\frac{T}{2\pi n} t \sin \frac{2\pi n}{T} t \right]_0^{T/2} - \frac{T}{2\pi n} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} t dt \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{8}{T^2} \left\{ \left(\frac{T}{2n\pi} \cdot \frac{T}{2} \cancel{\sin n\pi t} - 0 \right) + \left[\frac{T}{2n\pi} \cdot \frac{T}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi}{T} t \right]_0^{T/2} \right\} =$$

$$= -\frac{8}{T^2} \left(\frac{T^2}{4n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{T^2}{4n^2\pi^2} \cos 0 \right) = \frac{-2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi)$$

- Si n es par $a_n = 0$
- Si n es impar $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$

Por tanto,
$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{2\pi(2n-1)}{T} t$$



- b) Como $f(t)$ no es continua en $t=0$ la serie de Fourier $F(t)$ converge en ese punto al valor:
- $$F(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

aún cuando $f(0) = 0$.

- c) Las funciones de los apartados a) y b) coinciden excepto en $t=0$, por lo que sus desarrollos en serie de Fourier van a coincidir también. La diferencia entre ambos casos reside en que, en el primero, f y f' son continuas a trozos en $[-T/2, T/2]$ pero $f(0^+) = f(0^-) = 1 \neq f(0) = 0$, por lo que la serie de Fourier converge puntualmente al valor de la función excepto en $t=0$, donde converge a 1, mientras que en el segundo caso f es continua y f' es continua a trozos en $[-T/2, T/2]$ por lo que la serie de Fourier converge, tanto puntual como uniformemente, al valor de f en todo el intervalo.

Septiembre '99
Ejercicio 3

Sea un tanque que contiene en el instante inicial 500 litros de agua, con 50 kg de sal en disolución. En el tanque se vierte una disolución de agua con sal, de concentración 2 kg/litro y a una velocidad de 5 litros/minuto. El tanque tiene un desagüe por el que salen 5 litros de disolución cada minuto. La concentración de la disolución en el tanque se mantiene uniforme mediante la agitación.

- Calcule la cantidad de sal contenida en el tanque, en función del tiempo.
- Si transcurridos diez minutos desde el instante inicial se abre un segundo desagüe por el que sale un litro por minuto, calcule la cantidad de sal contenida en el tanque en función del tiempo.

a) Variable independiente: el tiempo t
Variable dependiente: la cantidad de sal $S(t)$

La variación de sal está relacionada con la sal que entra $\Delta_1 S$ y la que sale $\Delta_2 S$

$$\Delta_1 S = \frac{5 \text{ kg}}{\cancel{\text{L}}} \cdot \frac{2 \cancel{\text{L}}}{\text{min}} \cdot \Delta t_{\text{min}} = 10 \text{ kg} \cdot \Delta t ; \quad \Delta_2 S = \frac{S(t)}{500} \cdot \frac{\cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 5 \cdot \frac{\cancel{\text{L}}}{\text{min}} \cdot \Delta t_{\text{min}} = \frac{S(t)}{100} \text{ kg} \cdot \Delta t$$

Ahora tomamos incrementos instantáneos (es decir sustituimos Δt por dt):

$$d_1 S = 10 dt ; \quad d_2 S = \frac{S(t)}{100} dt \Rightarrow dS = d_1 S - d_2 S$$

y obtenemos la EDO:

$$dS = d_1 S - d_2 S \Rightarrow dS = 10 dt - \frac{S}{100} dt \Rightarrow dS = \left(10 - \frac{S}{100}\right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{S}{100} = 10 \Rightarrow \boxed{S' + \frac{1}{100} S = 10} \text{ EDO lineal con coeficientes constantes}$$

• Solución general de la homogénea: Obtenemos la ecuación característica

$$r + \frac{1}{100} = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{100} \Rightarrow S_H(t) = C e^{-\frac{t}{100}}$$

• Solución particular de la completa: Proponemos la solución $S_p(t) = A \Rightarrow S'_p(t) = 0$

$$S' + \frac{1}{100} S = 10 \Rightarrow 0 + \frac{1}{100} A = 10 \Rightarrow A = 1000 \Rightarrow S_p(t) = 1000.$$

• Solución general de la completa:

$$S(t) = S_H(t) + S_p(t) = C e^{-\frac{t}{100}} + 1000 \Rightarrow \boxed{S(t) = C e^{-\frac{t}{100}} + 1000}$$

E.T.S.I.
Telecomunicación

Junio 2000
Ejercicio 1

Construya un método numérico unipaso para la resolución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ que, para avanzar la solución desde x_i hasta $x_{i+1} = x_i + h$ tome como pendiente de la función la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{3}$ y en $x_i + \frac{2h}{3}$ y que, para la estimación de $y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)$ y de $y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)$ utilice el método de Euler básico aplicado en ambos casos desde x_i (es decir, con longitudes de paso $\frac{h}{3}$ y $\frac{2h}{3}$ respectivamente).

Escriba el algoritmo resultante en la forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + \dots + a_r k_r$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas del método?

Aplice el algoritmo anterior para calcular la solución numérica del problema de valor inicial $y' = x$, $y(0) = 0$ en $x_1 = 0.3$ utilizando una longitud de paso $h = 0.3$, y compare esta solución aproximada con la solución exacta.

Haga una modificación del método numérico anterior para obtener una aproximación más exacta de la solución, estimando $y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)$ con el método de Euler básico pero aplicado ahora en dos pasos: el primero, con longitud de paso $\frac{h}{3}$, para calcular la estimación de $y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)$ a partir de la de $y(x_i)$, y el segundo nuevamente con paso $\frac{h}{3}$ para calcular la estimación de $y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)$ a partir de la de $y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)$.

Escriba el algoritmo resultante en la forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + \dots + a_r k_r$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas de este nuevo método?

SOLUCIÓN

Se quiere construir un método numérico para resolver el problema de valor inicial

Problema
de Valor Inicial

$$(P.V.I.) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

compuesto por una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.), $y'(x) = f(x, y(x))$, y una condición inicial (C.I.), $y(x_0) = y_0$.

La diferencia entre unos métodos y otros estriba, únicamente, en el modo en calcular esta δy_i

Los métodos numéricos unipaso explícitos adoptan todos la siguiente expresión:

$$y_{i+1} = y_i + h\delta y_i,$$

siendo δy_i una estimación de la variación de y cuyo valor pretendemos encontrar. Una vez hecho esto tendremos determinado el método numérico que es solución.

El mismo enunciado nos sugiere cómo hallar tal δy_i : es la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{3}$ y en $x_i + \frac{2h}{3}$.

$x_{i+j} = x_i + jh$ La pendiente en $x_i + \frac{h}{3} = x_{i+\frac{1}{3}}$ es

$$y'(x_{i+\frac{1}{3}}) \approx y' \left(x_{i+\frac{1}{3}}, y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) \right) \approx f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_{i+\frac{1}{3}} \right),$$

donde $y_{i+\frac{1}{3}}$ es la estimación del valor (exacto) $y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right)$, $y_{i+\frac{1}{3}} \approx y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right)$, y cuyo valor nos es desconocido. Para calcularlo, acudimos al método de Euler básico según nos propone el mismo enunciado:

$$y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) \approx y_{i+\frac{1}{3}} = y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y(x_i)) \approx y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)$$

Luego la pendiente en $x_i + \frac{h}{3}$ es

$$y' \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) \approx f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) \right)$$

Procedemos de manera similar para determinar la pendiente en $x_i + \frac{2h}{3} = x_{i+\frac{2}{3}}$. Llegamos a ver que ésta es

$$y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \approx f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} f(x_i, y_i) \right)$$

Entonces, al ser δy_i la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{3}$ y en $x_i + \frac{2h}{3}$, tenemos que

$$\delta y_i = \frac{1}{2} \left[y' \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) + y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta y_i \approx \frac{1}{2} \left[f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) \right) + f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} f(x_i, y_i) \right) \right]$$

Llevando este valor a $y_{i+1} = y_i + h\delta y_i$ quedará ya construido el método numérico que busquemos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)\right) + f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} f(x_i, y_i)\right) \right]$$

Denotando a cada evaluación de $f(x, y(x))$ como k_r , la anterior expresión puede ser escrita como a continuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} hf \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} \underbrace{hf(x_i, y_i)}_{k_1} \right) + \frac{1}{2} hf \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2}{3} \underbrace{hf(x_i, y_i)}_{k_1} \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \underbrace{hf \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1 \right)}_{k_2} + \frac{1}{2} \underbrace{hf \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2}{3} k_1 \right)}_{k_3}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} k_3$$

Runge-Kutta En consecuencia, la forma de Runge-Kutta del método numérico construido es la que sigue:

$$\left(y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} k_3 \right) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2}{3} k_1\right) \end{array} \right\}$$

El número de etapas del método (cantidad de veces que se evalúa f por paso) es por tanto 3.

Consideremos el problema de valor inicial $\begin{cases} y'(x) = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ y apliquemos este algoritmo para

hallar, numéricamente y de forma aproximada, el valor que toma su solución, $y(x)$, en el punto $x_1 = 0.3$ (tomamos como longitud de paso $h = 0.3$). Este valor buscado es, por tanto, $y(x_1)$, y la estimación vendrá pues dada por $y_1 \approx y(x_1)$.

Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y) \\ y'(x) = x \end{array} \right] \Rightarrow f(x, y) = x$$

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0$$

Empleamos con ello las fórmulas de Runge-Kutta correspondientes y nos queda:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 = y_0 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 = \\
 &= 0 + \frac{1}{2}hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{1}{3}hf(x_0, y_0)\right) + \frac{1}{2}hf\left(x_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + \frac{2}{3}hf(x_0, y_0)\right) = \\
 &= \frac{1}{2}0'3f\left(0 + \frac{0'3}{3}, 0 + \frac{1}{3}0'3f(0,0)\right) + \frac{1}{2}0'3f\left(0 + \frac{2 \cdot 0'3}{3}, 0 + \frac{2}{3}0'3f(0,0)\right) = \\
 &= 0'15f\left(0'1, \frac{1}{3}0'3 \cdot 0\right) + 0'15f\left(0'2, \frac{2}{3}0'3 \cdot 0\right) = 0'15 \cdot 0'1 + 0'15 \cdot 0'2 = 0'015 + 0'030
 \end{aligned}$$

En conclusión:

$$y(x_1) \approx y_1 = 0'045$$

Podemos llegar a ver cuánto de real es esta aproximación sin más que resolviendo analíticamente el problema de valor inicial planteado:

$$y'(x) = x \Leftrightarrow \frac{dy(x)}{dx} = x \Leftrightarrow dy(x) = xdx \Leftrightarrow \int dy(x) = \int xdx \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Imponiendo la condición inicial:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow y(0) = \frac{1}{2}0^2 + C \Leftrightarrow C = 0$$

Y por tanto la solución al problema de valor inicial propuesto es

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Evaluada en el punto $x_1 = 0'3$ vemos que $y(x_1) = \frac{1}{2}(0'3)^2$ y queda $y(x_1) = 0'045$, luego la estimación $y_1 \approx y(x_1) = 0'045$ es exacta.

Para el segundo método numérico δy_i sigue siendo la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{3}$ y en $x_i + \frac{2h}{3}$.

La pendiente en $x_i + \frac{h}{3} = x_{i+\frac{1}{3}}$ no sufre modificación alguna según lo propuesto en el enunciado, luego queda igual:

$$y'\left(x_{i+\frac{1}{3}}\right) \approx f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}f(x_i, y_i)\right)$$

La pendiente en $x_i + \frac{2h}{3} = x_{i+\frac{2}{3}}$ es $y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) = f \left(x_{i+\frac{2}{3}}, y \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right) \approx f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_{i+\frac{2}{3}} \right)$, donde es desconocido $y_{i+\frac{2}{3}}$. Para hallarlo, el problema exige hacerlo aplicando el método de Euler básico en dos pasos:

La estimación de $y \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) = y \left(x_i + \frac{2h}{3} \right)$ a partir de $y_{i+\frac{1}{3}}$, que es la estimación de $y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) = y \left(x_i + \frac{h}{3} \right)$, con longitud de paso $\frac{h}{3}$, es:

$$y_{i+\frac{2}{3}} = y_{i+\frac{1}{3}} + \frac{h}{3} f \left(x_{i+\frac{1}{3}}, y_{i+\frac{1}{3}} \right)$$

Ahora bien, para $y_{i+\frac{1}{3}}$, estimación de $y \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) = y \left(x_i + \frac{h}{3} \right)$, nos ordenan escribirla a partir de la estimación de $y(x_i) = y_i$, que es y_i , empleando el método de Euler básico con longitud de paso $\frac{h}{3}$; esto es:

$$y_{i+\frac{1}{3}} = y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)$$

Insertando esta expresión de $y_{i+\frac{1}{3}}$ en la correspondiente a $y_{i+\frac{2}{3}}$ queda:

$$y_{i+\frac{2}{3}} = y_i + \underbrace{\frac{h}{3} f(x_i, y_i)}_{y_{i+\frac{1}{3}}} + \frac{h}{3} f \left(x_{i+\frac{1}{3}}, \underbrace{y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)}_{y_{i+\frac{1}{3}}} \right)$$

Y acudiendo con esta igualdad a la expresión para la pendiente en $x_i + \frac{2h}{3} = x_{i+\frac{2}{3}}$,

$y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) = f \left(x_{i+\frac{2}{3}}, y \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right) \approx f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_{i+\frac{2}{3}} \right)$, obtenemos lo que sigue:

$$y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \approx f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) + \frac{h}{3} f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) \right) \right)$$

Igual que antes pero ahora con diferentes expresiones, al ser δy_i la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{3}$ y en $x_i + \frac{2h}{3}$, se tiene:

$$\delta y_i = \frac{1}{2} \left[y' \left(x_{i+\frac{1}{3}} \right) + y' \left(x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\delta y_i = \frac{1}{2} \left[f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) \right) + f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) + \frac{h}{3} f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) \right) \right) \right]$$

Sustituyendo esto en $y_{i+1} = y_i + h\delta y_i$ terminamos la construcción de nuestro segundo método numérico:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)\right) + f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) + \frac{h}{3} f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)\right)\right) \right]$$

Análogamente al primer método, denotando a cada evaluación de $f(x, y(x))$ como k_r , la igualdad anterior puede ser expresada así:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} \underbrace{hf(x_i, y_i)}_{k_1}\right) + \frac{h}{2} f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{1}{3} \underbrace{hf(x_i, y_i)}_{k_1} + \frac{1}{3} \underbrace{hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} \underbrace{hf(x_i, y_i)}_{k_1}\right)}_{k_2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} \underbrace{hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1\right)}_{k_2} + \frac{h}{2} f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} \underbrace{hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1\right)}_{k_2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} \underbrace{hf\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} k_2\right)}_{k_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} k_3 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la forma de Runge-Kutta del segundo método numérico construido es:

$$\left(y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} k_3 \right) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} k_2\right) \end{array} \right.$$

El número de etapas del método (cantidad de veces que se evalúa f por paso) es por tanto 3.

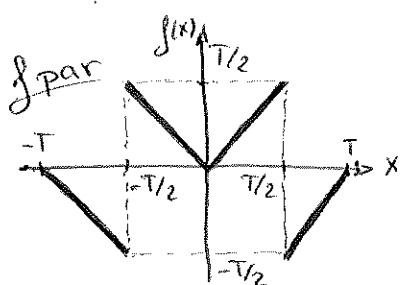
Junio '00
Ejercicio 3

- (a) A partir del sistema trigonométrico $\{1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $R([- \pi, \pi], \mathbb{R})$, deduzca el correspondiente sistema trigonométrico en $R([-T, T], \mathbb{R})$.
- (b) Sea $f: [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función par y tal que $f \in R([-T, T], \mathbb{R})$. Encuentre la expresión de la norma de f respecto al sistema hallado en el apartado a.
- (c) Desarrolle en serie trigonométrica de Fourier la función
- $$f(x) = \begin{cases} -T-x & -T \leq x < -T/2 \\ |x| & -T/2 < x < T/2 \\ x-T & T/2 < x \leq T \end{cases}$$
- (d) Analice la convergencia de la serie de Fourier obtenida.

c)

$$f(x) = \begin{cases} -T-x & -T \leq x < -T/2 \\ |x| & -T/2 < x < T/2 \\ x-T & T/2 < x \leq T \end{cases}$$

Periodo = $2T = \ell$
como T ya está cogida
(pres la dan como dato)
llamaremos al periodo ℓ



$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi nx}{\ell}\right)}_{\text{impar}} dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{\ell}\right) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{1}{T} 2 \int_0^T f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} x dx + \int_{T/2}^T (x-T) dx \right] = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \frac{T^2}{4} + \frac{1}{2} (T^2 - \frac{T^2}{4}) - T \frac{T}{2} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} 2 \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} x \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx + \int_{T/2}^T (x-T) \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx \right] = \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} x \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx + \int_{T/2}^T x \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx - \int_{T/2}^T T \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx \right] = \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^T x \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx - T \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx \right] = \frac{2}{T} [I - TJ] \end{aligned}$$

$$I = \int_0^T x \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx = \frac{Tx}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{T}\right) \Big|_0^T - \frac{T}{\pi n} \int_0^T \sin\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx = \frac{T^2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) \Big|_0^T = \frac{T^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1]$$

$$J = \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{\pi nx}{T}\right) dx = \frac{T}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{T}\right) \Big|_{T/2}^T = -\frac{T}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\frac{T^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] + \frac{T^2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] = \frac{2T}{\pi n} \left[\frac{1}{\pi n} [(-1)^n - 1] + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]$$

$$a_{2k} = 0 ; a_{2k-1} = \frac{2T}{\pi(2k-1)} \left[\frac{1}{\pi(2k-1)} (-2) + \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \right] = \frac{2T}{\pi(2k-1)} \left[(-1)^{k+1} - \frac{2}{\pi(2k-1)} \right]$$

$$f(x) = \frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} \right] \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{T}\right)$$

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < \pi \\ 1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

- Obtenga un desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la misma que sólo contenga términos en seno.
- Obtenga un desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la misma que sólo contenga términos en coseno.
- A partir de los resultados anteriores obtenga el desarrollo de la función:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -2\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \pi \\ 1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

En todos los casos, analice la convergencia de la serie de Fourier obtenida.

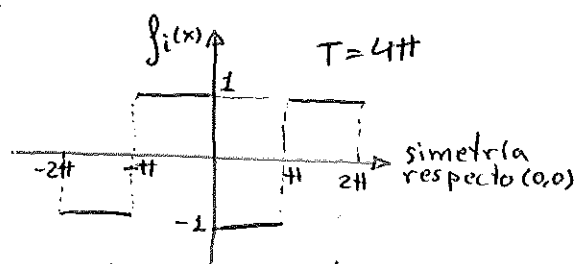
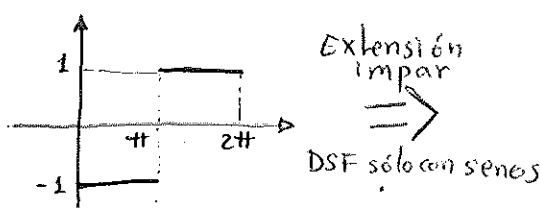
- a) Para obtener el DSF de la función en el intervalo $[0, 2\pi]$ que sólo contenga términos en seno, extenderemos de forma impar a la función en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, construyendo así la función llamada $f_i(x)$, que al ser impar provocará lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_i(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}_{\text{par}} dx \Rightarrow a_n = 0$$

Hallamos el DSF de la función f_i que presentará el siguiente aspecto:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

El DSF de la extensión impar sólo contiene senos.



La extensión periódica de f_i de periodo 4π admitirá DSF, y como en $[0, 2\pi]$, f_i coincide con f , resulta que dicho DSF será el correspondiente a f en $[0, 2\pi]$ y dada la imparidad de f_i , tal DSF sólo contendrá senos. Será por tanto la solución de a)

$$f_i(x) = \begin{cases} -1 & \begin{cases} -2\pi < x < -\pi \\ 0 < x < \pi \end{cases} \\ 1 & \begin{cases} -\pi < x < 0 \\ \pi < x < 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

DSF:

$$F_a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(x) dx \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \Rightarrow a_n = 0$$

Escogemos como periodo la amplitud del intervalo de definición de la extensión (4π)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{2}{T} 2 \int_0^{2\pi} f_i(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_i(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx ; T = 4\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} (-1) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (1) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right]$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} -\sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{2}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) \right]$$

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{2}{n} \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{n} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right]$$

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{n} \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n} \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (1 + (-1)^n) \right]$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

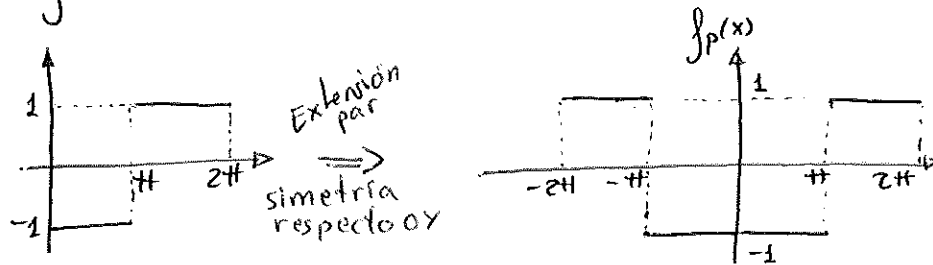
$$\left. \begin{array}{l} n=1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ n=2 \Rightarrow \cos \pi = -1 \\ n=3 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ n=4 \Rightarrow \cos 2\pi = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=1, 3, 5, 7, 9, \dots \\ -1, & n=2, 6, 10, 14, \dots \\ 1, & n=4, 8, 12, 16, \dots \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=4k-3 \\ -1, & n=4k-2 \\ 0, & n=4k-1 \\ 1, & n=4k \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ (-1)^k, & n=2k \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{4k-3} = 0 \\ b_{4k-2} = \frac{-8}{\pi(4k-2)} = \frac{-4}{\pi(2k-1)} \\ b_{4k-1} = 0 \\ b_{4k} = 0 \end{array} \right.$$

$$F_a(x) = \frac{-4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)}$$

b) Para obtener el DSF de f que sólo contenga términos en coseno, prolongaremos de forma par dicha función f desde $[0, 2\pi]$ hasta $[-2\pi, 2\pi]$ y hallaremos el DSF de esta extensión par de periodo $T=4\pi$, precisamente por la paridad tendremos los coeficientes b_n que acompañan a los senos todos nulos, de forma que el DSF sólo albergará cosenos.



$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_p(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}_{\text{impar}} dx \Rightarrow b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_p(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}_{\text{par}} dx = \frac{2}{4\pi} 2 \int_0^{2\pi} f_p(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{4\pi}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} (-1) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (1) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right]$$

$I_3 \qquad I_4$

$$I_3 = \int_0^{\pi} (-\cos\left(\frac{nx}{2}\right)) dx = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$I_4 = \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} [I_3 + I_4] = \frac{-2}{\pi n} 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) ; a_n = \frac{-4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} n=1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ n=2 \Rightarrow \sin \pi = 0 \\ n=3 \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \\ n=4 \Rightarrow \sin 2\pi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & n=4k-3 \\ 0, & n=4k-2 \\ -1, & n=4k-1 \\ 0, & n=4k \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^{k+1}, & n=2k-1 \end{cases}$$

$$F_b(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)}{(2k-1)}$$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = (-1)^k \cdot \frac{4}{\pi(2k-1)}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(x) dx = \frac{2}{4\pi} 2 \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} [x \Big|_0^{\pi} + x \Big|_{\pi}^{2\pi}] \Rightarrow a_0 = 0$$

C) la función g surge de la suma $(f_i + f_p)$ y dividir entre dos, de modo que su DSF es $(F_a(x) + F_b(x))/2$



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n.
28040 MADRID
Teléfono: 913.367.288
Fax: 913.367.289



FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS IV

Examen final.

16 de septiembre de 2000, 12:00 horas.

PARTE PRÁCTICA

Tiempo: 30 minutos.

INSTRUCCIONES

El siguiente ejercicio se convalidará con la puntuación obtenida en las prácticas de laboratorio, en los siguientes términos:

- Si se deja en blanco, se tomará para él la puntuación de las prácticas.
- Si se contesta, se entenderá que se renuncia a la puntuación de las prácticas y se opta por la resultante de la realización del ejercicio.

1. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 4y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

- Resuelva el sistema.
- Aplicando la definición de estabilidad, analice la estabilidad de la solución trivial del sistema.
- Verifique el anterior resultado con el análisis de la estabilidad según los autovalores de la matriz del sistema.
- ¿Se comportarán de la misma forma, en lo que respecta a estabilidad, todas las soluciones del sistema?

1 punto.

Junio '01
Ejercicio 1

Sea a un número no entero y $f(x) = \cos(ax)$, $-\pi < x < \pi$.

- Encontrar la mejor aproximación de la función $f(x)$ en el subespacio generado por $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$.
- Determinar el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de $f(x)$.
- Determinar $\cot(a\pi)$.

a) Para hallar la proyección ortogonal o mejor aprox. de la función $f(x)$ en el subespacio generado por un sistema S , comenzamos por verificar si dicho sistema es o no es ortogonal. (Será ortogonal si y sólo si toda pareja de elementos del sistema tiene producto escalar nulo). En caso de tener sistema S ortogonal, aplicaremos directamente la fórmula de la proyección ortogonal que mostraremos más adelante. Si por el contrario el sistema S no fuera ortogonal, tendríamos que ortogonalizarlo mediante el método de Gram-Schmidt, para obtener así un sistema ortogonal S' sobre el cual aplicar la fórmula anteriormente mencionada.

En nuestro problema...

$S = \{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$, veamos si es o no ortogonal.

Al haber 3 elementos, es fácil encontrar las 3 parejas posibles, pero si el sistema tuviese ∞ elementos estaríamos hablando de ∞ parejas, y el desarrollo que a continuación mostraremos debería hacerse de forma genérica. Como ejemplo de esto tenemos el ejercicio 1 de clase del tema 1 con el sistema $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\} = \{1, \sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \dots, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$ ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

Tenemos 3 parejas de $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$

$$\begin{aligned} * \langle \sin(x), \sin(2x) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot \sin(2x) dx && \left(\begin{array}{l} \text{los límites de integr.} \\ \text{los marca el enunciado} \end{array} \right) \\ * \langle \sin(x), \sin(3x) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot \sin(3x) dx \\ * \langle \sin(2x), \sin(3x) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \cdot \sin(3x) dx \end{aligned}$$

Podemos ver que son nulos de dos formas: integrando por partes (la integral sería cíclica), o viendo que el sistema $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ y aprovechando que $\{\sin(2x), \sin(3x), \sin(x)\}$ es un subsistema, afirmamos que nuestro sistema $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

$$\text{proy}_S(f(x)) : f(x) \approx \frac{\langle f(x), \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle} \sin(x) + \frac{\langle f(x), \sin(2x) \rangle}{\langle \sin(2x), \sin(2x) \rangle} \sin(2x) + \frac{\langle f(x), \sin(3x) \rangle}{\langle \sin(3x), \sin(3x) \rangle} \sin(3x)$$

$$\langle f(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(ax)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(x)}_{\text{impar}} dx = 0$$

por el mismo motivo son cero los otros dos numeradores

$$\langle f(x), \sin(2x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \sin(2x) dx = 0$$

$$\langle f(x), \sin(3x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \sin(3x) dx = 0$$

$$\text{proy}_S(f(x)) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \approx 0}$$

La proyección ortogonal o mejor aprox. de $f(x) = \cos(ax)$ sobre el subespacio generado por el sistema $S = \{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$ en $[-\pi, \pi]$ es $f(x) \approx 0$

b) DSF

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx}{\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx}{T/2}$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle}{\langle \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx}{\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx}{T/2}$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx}{\int_{-T/2}^{T/2} dx} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

Así pues, el DSF puede escribirse del siguiente modo:

$$F(x) = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle} \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f(x), \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle}{\langle \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \rangle} \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

Aquí vemos que el DSF es en realidad la proyección ortogonal o mejor aproximación sobre el subespacio generado por el sistema $\{1, \cos\frac{2\pi nx}{T}, \sin\frac{2\pi nx}{T}\}$ ortogonal en $[-T/2, T/2]$ por lo que es válida la aplicación de la fórmula de la proyección.

En nuestro problema...

$$-\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{\langle \cos(ax), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\langle \cos(ax), \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle}}_{a_n} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\langle \cos(ax), \sin(nx) \rangle}{\langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle}}_{b_n} \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{\langle \cos(ax), \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(ax)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx = \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \sin(ax) \sin(nx) dx = \frac{a}{n} I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin(ax) \sin(nx) dx = \frac{-\sin(a\pi)(-1)^n}{n} + \frac{a}{n} I_1$$

$$I_1 = \frac{a}{n} \frac{\sin(a\pi)(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{n^2}{(n^2 - a^2)} = \frac{a \sin(a\pi)(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} = \frac{a \sin(a\pi)(-1)^n}{a^2 - n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} I_1 = \frac{2a \sin(a\pi)(-1)^n}{\pi(a^2 - n^2)}$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(ax)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{impar}} dx = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = \frac{2}{T} 2 \int_0^{\pi/2} \cos(ax) dx = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} a \cos(ax) dx = \frac{2}{a\pi} \sin(a\pi)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}$$

$$F(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a^2 - n^2)} \cos(nx)$$

$$F(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} \left[1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a^2 - n^2)} \right]$$

desarrollando

$$F(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{-2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - 1)} \cos(x) + \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - 4)} \cos(2x) + \dots + 0 \sin(x) + 0 \sin(2x) + 0 \sin(3x) + \dots$$

$\underbrace{\frac{-2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - 1)} \cos(x)}_{a_1} \quad \underbrace{\frac{2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - 4)} \cos(2x)}_{a_2} \quad \underbrace{0 \sin(x)}_{b_1} \quad \underbrace{0 \sin(2x)}_{b_2} \quad \underbrace{0 \sin(3x)}_{b_3} \dots$

se trata de la mejor aprox. $\frac{\langle f(x), \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle}$ $\frac{\langle f(x), \sin(2x) \rangle}{\langle \sin(2x), \sin(2x) \rangle}$
 Sobre el sistema $\{\cos x, \cos 2x\}$

apartado a

Nota: El denominador de a_n nunca es un número entero, mientras que n siempre lo es ($n \in \mathbb{N}$)
De ahí que $a^2 - n^2 \neq 0$ siempre.

Si hubiese podido ser (por ejemplo) $a=3$, el denom. se anularía en $n=3$. Deberíamos calcular a_3 aparte.
La integral no sería cíclica, sino inmediata.

$$d) \cotg(a\pi)$$

$$\text{Para } x = \pi \Rightarrow \begin{cases} \text{El DSF queda: } \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} \left[1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{a^2 - n^2} \right] \\ \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} \left[1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} \right] \\ \text{El DSF converge puntualmente a } f(\pi) = \cos(a\pi) \\ \text{dado que la función } f(x) = \cos(ax) \text{ es continua} \\ \text{en todo } \mathbb{R}, \text{ el DSF converge puntualmente} \\ \text{a la función, de modo que en } x = \pi, \text{ el} \\ \text{DSF vale } \cos(a\pi). \end{cases}$$

Igualando:

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} \left[1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} \right]$$

$$\frac{\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)} = \cotg(a\pi) = \frac{1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}}{a\pi}$$

Nota: con $a = \frac{1}{2} \dots$

$$\cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi/2} \left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} \right]$$

$$\cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{2}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}}$$

Junio '01
Ejercicio 3

- a) Sean y_1 e y_2 dos funciones definidas en (a, b) y sea $W(x)$ su wronskiano. Indicar únicamente si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:
- a.1) ¿Es posible que $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ siendo $\{y_1, y_2\}$ linealmente independientes en (a, b) ?
- a.2) Si $\{y_1, y_2\}$ son linealmente independientes en (a, b) , entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $W(x_0) \neq 0$.
- a.3) Si $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $W(x_0) \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.
- a.4) Si y_1 e y_2 son soluciones particulares de una EDO lineal homogénea de segundo orden $L[y] = 0, x \in (a, b)$, con coeficientes en (a, b) , se verifica:
- i) $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$; o bien
- ii) $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$,
y no puede darse ningún otro caso.
- b) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la EDO
- $$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$
- con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ derivables, admita soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 tales que $y_2 = xy_1$, es que $p_2(x) = \frac{p_1'(x)}{2} + \frac{p_1^2(x)}{4}$.
- c) Resolver la EDO
- $$(x+1)y'' - y' - xy = (x+1)^2 e^{2x}, x > -1$$

a. 1) VERDAD

Sabemos que si y_1 e y_2 son dos funciones cualesquiera dependientes, su wronskiano es nulo. Y si su $W(x)$ fuese no nulo entonces serían independientes. Ahora bien, podrían ser independientes y su $W(x) = 0$ y también pueden tener $W(x) = 0$ y ser independientes.

Si nos dijeran que y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de una EDO lineal homogénea, el que sean independientes equivale decir de $W(x) \neq 0$ siempre.

a. 2) FALSO

Antes comentamos que era cierto leído del revés.

a. 3) FALSO

Sería verdadero si añadiesen que y_1 e y_2 son soluciones particulares de una EDO lineal homogénea

a. 4) VERDAD

Siendo y_1 e y_2 dos soluciones particulares de una homogénea. Puede suceder: y_1, y_2 dependientes $\Rightarrow W = 0$
 y_1, y_2 independientes $\Rightarrow W$ no se anula en un punto

Si W no se anula en algún punto, no se anula nunca.

Por esto todo, el W es nulo siempre o nunca. ()

Nota: ver página 36 teoría para ver estos comentarios en detalle

b) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la EDO

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ derivables, admita soluciones linealmente independientes y_1 e y_2

tales que $y_2 = xy_1$, es que $p_2(x) = \frac{p_1'(x)}{2} + \frac{p_1^2(x)}{4}$.

Lo vamos a demostrar utilizando la fórmula de Liouville:

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

En nuestro caso tenemos que $y_2 = xy_1$ por lo que el Wronskiano queda:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & xy_1 \\ y_1' & y_1 + xy_1' \end{vmatrix} = y_1^2 + xy_1y_1' - xy_1y_1' = y_1^2$$

$$\begin{aligned} \ln W(x) &= \ln Ce^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \ln y_1^2 = \ln C + \ln e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \ln y_1^2 = \ln C - \int p_1(x)dx \ln e \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \ln y_1 = \ln C - \int p_1(x)dx \end{aligned}$$

Derivando esta última expresión nos queda:

$$\frac{d}{dx}(2 \ln y_1) = \frac{d}{dx} \left(\ln C - \int p_1(x)dx \right) \Rightarrow 2 \frac{y_1'}{y_1} = -p_1(x) \Rightarrow y_1' = -\frac{p_1(x)}{2} y_1$$

Ahora derivando otra vez la última expresión obtenemos y_1'' :

$$y_1' = -\frac{p_1(x)}{2} y_1 \Rightarrow y_1'' = -\frac{p_1'(x)}{2} y_1 - \frac{p_1(x)}{2} y_1'$$

Ahora, puesto que y_1 es solución de la EDO tiene que verificarla. Así pues sustituimos y_1 , y_1' e y_1'' en la EDO y operamos:

$$\begin{aligned} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 &= 0 \Rightarrow -\frac{p_1'(x)}{2} y_1 - \frac{p_1(x)}{2} y_1' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{p_1'(x)}{2} y_1 + \frac{p_1(x)}{2} y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \Rightarrow -\frac{p_1'(x)}{2} y_1 + \frac{p_1(x)}{2} \left(-\frac{p_1(x)}{2} y_1 \right) + p_2(x)y_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{p_1'(x)}{2} y_1 - \frac{p_1^2(x)}{4} y_1 + p_2(x)y_1 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{p_1'(x)}{2} - \frac{p_1^2(x)}{4} + p_2(x) \right) y_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{p_1'(x)}{2} - \frac{p_1^2(x)}{4} + p_2(x) = 0 \Rightarrow p_2(x) = \frac{p_1'(x)}{2} + \frac{p_1^2(x)}{4} \end{aligned}$$

Derivamos como
un producto

Suponemos $y_1 \neq 0$

Septiembre '01
Ejercicio 1

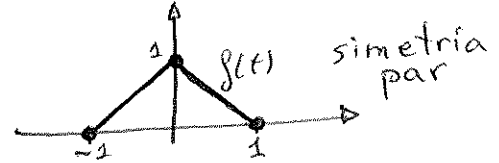
Ver junio 9

Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Obtenga su desarrollo en serie trigonométrica de Fourier.
 (b) Analice la convergencia de la serie de Fourier obtenida.
 (c) ¿Se produce el fenómeno de Gibbs para algún valor de $t \in [-1, 1]$?
 (d) La integral de la serie de Fourier calculada, ¿será el desarrollo en serie de Fourier de la integral de la función $f(t)$ dada? ¿Por qué?

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad T=2$$



a) DSF

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{par}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}_{\text{par}} dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(\pi n t) dt$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \cos(\pi n t) dt - 2 \int_0^1 t \cos(\pi n t) dt = 2I_1 - 2I_2$$

$$I_1 = \int_0^1 \cos(\pi n t) dt = \left[\frac{1}{\pi n} \sin(\pi n t) \right]_0^1 = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 t \cos(\pi n t) dt = \left[\frac{t \sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^1 - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(\pi n t) dt$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \cos(\pi n t) dt \rightarrow v = \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \end{array} \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{\pi n} \cos(\pi n t) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = -2 \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \right) = \frac{-2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \Rightarrow \begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}_{\text{impar}} dt = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{par}} dt = 2 \int_0^1 (1-t) dt = 2 \left[1 - \frac{1}{2} \right] = 1$$

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{\cos((2k-1)\pi t)}{(2k-1)^2}$$

Comprobación:

para $t=0$: $F(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}$; el DSF converge puntualmente a 1.

$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$; El valor de esta suma famosa es correcta.

b)

Convergencia puntual:

La función $f(t)$ es continua en $[-1, 1]$; con corchetes, pues por la gráfica los en $(-1, 1)$ e incluimos el 1 y el -1 porque al hacer la extensión periódica a todo $\mathbb{R}$ de periodo 2 y construir así $f_e(t)$ nos queda que ésta es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en -1 y en 1, (existe solapamiento).

Debido a la continuidad mencionada en $[-1, 1]$ concluimos que el DSF converge puntualmente a $f(t)$ en $[-1, 1]$ y a f_e en todo $\mathbb{R}$ (las gráficas de $F(t)$ y $f(t)$ coinciden).

Nota: Si hubiese habido algún punto donde f_e fuese discontinua el DSF tomaría el valor medio del salto de la discontinuidad.

Convergencia uniforme:

El DSF converge uniformemente a f en todo cerrado donde f sea continua. Ya dijimos que f era continua en $[-1, 1]$, luego F converge uniformemente a f en $[-1, 1]$.

Convergencia en norma:

El sistema trigonométrico $\{1, \cos(n\pi t), \sin(n\pi t)\}$ es ortogonal y completo en $[-1, 1]$ lo que provoca que el DSF converja en norma a f en $[-1, 1]$.

c)

No puede darse el fenómeno de Gibbs en $[-1, 1]$ porque para ello se requiere que existan discontinuidades y no las hay. (ver gráfica)

d) La integral de $F(t)$ contendría, además de una suma de infinitos senos, el término $\frac{1}{2}t$. (los senos procederían de integrar la suma de ∞ cosenos presentes en la expresión de $F(t)$ y el $\frac{1}{2}t$ surgiría de integrar el término $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\delta_0$ presente en la misma expresión). Dicha presencia de $\frac{1}{2}t$ provocaría que la integral de $F(t)$ fuese NO periódica (si lo sería si sólo apareciesen los senos mencionados). Como la integral de $F(t)$ no será por tanto periódica, ni siquiera llegará a ser un DSF, pues éstos son siempre periódicos, y en consecuencia, la integral de $F(t)$ no será el DSF de la integral de $f(t)$.

Septiembre '01
Ejercicio 2

(a) Resuelva la ecuación diferencial

$$y''(x) + 2ky'(x) + y(x) = e^{-kx}$$

analizando las diferentes situaciones en función del valor tomado por el parámetro real k .(b) Tomando $k = 1$, obtenga la solución del problema de valor inicial determinado por las condiciones

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Se trata de una EDO lineal de 2º orden de coeficientes constantes y no homogénea. En función del parámetro k tendremos un polinomio característico u otro, y por tanto, dependiendo de como sea k , las raíces serán reales, complejas, múltiples... y esto determinará la forma de construir las soluciones. Además, acudiremos al método de los coeficientes indeterminados para construir $y_p(x) + y_H(x)$ nos llevará a la solución de la EDO completa.

$$y''(x) + 2ky'(x) + y(x) = e^{-kx}$$

$$\text{solución: } y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$\text{EDO homogénea: } y''(x) + 2ky'(x) + y(x) = 0$$

$$\text{pol. caract. } r^2 + 2kr + 1 = 0$$

$$r = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

$$\text{caso 1: } k^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow k > 1 \text{ ó } k < -1 \Leftrightarrow |k| > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = -k + \sqrt{k^2 - 1}, m_a = 1 \\ r_2 = -k - \sqrt{k^2 - 1}, m_a = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dos raíces} \\ \text{reales simples} \end{array}$$

$$y_H(x) = A e^{(-k + \sqrt{k^2 - 1})x} + B e^{(-k - \sqrt{k^2 - 1})x}$$

$$g(x) = e^{-kx} \Rightarrow y_p(x) = a e^{-kx} \quad \begin{cases} \rightarrow y'_p(x) = -ake^{-kx} \\ \rightarrow y''_p(x) = ak^2 e^{-kx} \end{cases}$$

coef. indet.

$$ak^2 e^{-kx} + 2k[-ake^{-kx}] + a e^{-kx} = e^{-kx}$$

$$ak^2 + 2k(-ak) + a = 1$$

$$-ak^2 + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{1 - k^2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{e^{-kx}}{1 - k^2}$$

$$\text{Solución caso 1: } y(x) = A e^{(-k + \sqrt{k^2 - 1})x} + B e^{(-k - \sqrt{k^2 - 1})x} + \frac{e^{-kx}}{1 - k^2}$$

caso 2: $k^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < k < 1 \Leftrightarrow |k| < 1$

homogénea: pol. caract. $r^2 + 2kr - 1 = 0$

raíces: $-k \pm \sqrt{k^2 - 1} = -k \pm \sqrt{1 - k^2} i$

$r_1 = -k + \sqrt{1 - k^2} i, m_a = 1$
 $r_2 = -k - \sqrt{1 - k^2} i, m_a = 1$ } Dos raíces complejas
 conjugadas

$y_H(x) = e^{-kx} [A \sin(\sqrt{1 - k^2} x) + B \cos(\sqrt{1 - k^2} x)]$

particular: $g(x) = e^{-kx} \Rightarrow y_p(x) = a e^{-kx}$

mismos cálculos que caso 1 $\Rightarrow y_p(x) = \frac{e^{-kx}}{1 - k^2}$

Solución caso 2: $y(x) = e^{-kx} [A \sin(\sqrt{1 - k^2} x) + B \cos(\sqrt{1 - k^2} x)] + \frac{e^{-kx}}{1 - k^2}$

caso 3: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1 \Leftrightarrow |k| = 1$

raíces del pol. caract: $r = -k \pm \sqrt{k^2 - 1} = -k$

$r_1 = -k$
 $r_2 = -k$ } Una raíz
 real doble $y_H(x) = (Ax + B) e^{-kx}$

particular: $g(x) = e^{-kx} \Rightarrow y_p(x) = x^2 a e^{-kx}$

$y'_p(x) = a [2x e^{-kx} - k x^2 e^{-kx}] = a e^{-kx} [2x - k x^2]$

$y''_p(x) = a [(-k e^{-kx})(2x - k x^2) + e^{-kx}(2 - 2kx)]$

$y''_p(x) = e^{-kx} a [k^2 x^2 - (2k + 2k)x + 2]$

$a e^{-kx} [k^2 x^2 - 4kx + 2] + 2ka e^{-kx} [2x - kx^2] + x^2 a e^{-kx} = e^{-kx}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{y''_p} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2k y'_p} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{y_p}$

$(x^2) a k^2 - 2 a k^2 + a = 0 \Rightarrow -a k^2 + a = 0 \Rightarrow a \underbrace{(1 - k^2)}_0 = 0 \quad \forall a$

$(x^1) -4ak + 4ak = 0, \quad \forall a$

$(x^0) 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^{-kx}$

Solución caso 3: $y(x) = (Ax + B) e^{-kx} + \frac{x^2}{2} e^{-kx}$

Junio' 02
Ejercicio 1

Sea la sucesión de funciones $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$f_n(x) = x^n \quad 0 \leq x < 1$$

$$f_n(x) = 1 \quad 1 \leq x \leq 2$$

a)

a.1) ¿ $S = \{1, \sin nx, \cos nx, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortogonal en $L^2([0, 2], \mathbb{R})$? Razone la respuesta.

a.2) Si S no es ortogonal, determine un sistema trigonométrico ortogonal y completo en $L^2([0, 2], \mathbb{R})$.

b) Sea $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

b.1) Calcule el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ respecto de un sistema trigonométrico que sea ortogonal y completo en el espacio $L^2([0, 2], \mathbb{R})$.

b.2) Analice la convergencia en norma, puntual y uniforme de la serie hallada en el apartado anterior.

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, & 0 \leq x < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b.1) DSF

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos \frac{2\pi nx}{T} \rangle}{\langle \cos \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T} \rangle} = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx = \int_1^2 \cos(\pi nx) dx = \frac{\sin(\pi nx)}{\pi n} \Big|_1^2 = 0$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin \frac{2\pi nx}{T} \rangle}{\langle \sin \frac{2\pi nx}{T}, \sin \frac{2\pi nx}{T} \rangle} = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx = \int_1^2 \sin(\pi nx) dx = \frac{\cos(\pi nx)}{\pi n} \Big|_1^2 = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}$$

$$b_{2k} = 0 \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \int_1^2 dx = 1$$

$$b_{2k-1} = \frac{-2}{\pi(2k-1)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[\pi(2k-1)x]}{(2k-1)}$$

b.2) El sistema trigonométrico $\{1, \cos(\pi nx), \sin(\pi nx)\}$ es ortogonal y completo en $[0, 2]$, y esto supone que el DSF converge a $f(x)$. (en norma)

El DSF converge uniformemente a f en todo cerrado donde f sea continua, es decir, en todo cerrado contenido en $(0, 1) \cup (1, 2)$

El DSF converge puntualmente a f en $(0, 1) \cup (1, 2)$ pues f es continua; en $0, 1, 2$ el DSF vale $\frac{1}{2}$

a1) El sistema trigonométrico $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ si es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ y en $[0, 2\pi]$, pero no en $[0, 2]$. Para demostrarlo veremos que existe una pareja cuyo producto escalar es no nulo.

$$\langle 1, \sin(x) \rangle = \int_0^2 \sin(x) dx = \cos(x) \Big|_0^2 = 1 - \cos(2) \neq 0$$

a2) Para encontrar un sistema trigonométrico ortogonal y completo en $[0, 2]$, partiremos de un sistema que sea ortogonal en un intervalo conocido (emplearemos un patrón del sistema $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ (ortogonal) y completo) en $[-\pi, \pi]$ y le efectuaremos el siguiente cambio lineal de variable que conserva ortogonalidad y completitud.

$[-\pi, \pi]$ $\longrightarrow$ $[0, 2]$
Intervalo donde sabemos que $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ es ortogonal y completo Intervalo del enunciado

$$x = \alpha t + \beta$$

$$\left. \begin{aligned} x = -\pi &\Rightarrow t = 0 \Rightarrow -\pi = \alpha \cdot 0 + \beta \Rightarrow -\pi = \beta \\ x = \pi &\Rightarrow t = 2 \Rightarrow \pi = \alpha \cdot 2 + \beta \Rightarrow \alpha = \pi \end{aligned} \right\}$$

$$x = \alpha t + \beta \text{ es } x = \pi t - \pi$$

Con este valor de x sustituimos en $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ y obtenemos el sistema ortogonal y completo en $[0, 2]$.

$\{1, \cos(n(\pi t - \pi)), \sin(n(\pi t - \pi))\}$ ortogonal y completo en $[0, 2]$

$$\begin{aligned} \rightarrow \cos(n\pi t - n\pi) &= \cos(n\pi t) \cos(n\pi) + \sin(n\pi t) \sin(n\pi) = \pm \cos(n\pi t) \\ \rightarrow \sin(n\pi t - n\pi) &= \sin(n\pi t) \cos(n\pi) - \cos(n\pi t) \sin(n\pi) = \pm \sin(n\pi t) \end{aligned}$$

$\{1, \cos(n\pi t), \sin(n\pi t)\}$ es ortogonal y completo en $[0, 2]$

Septiembre '02
Ejercicio 1

En el espacio $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$.

- Determine si el sistema infinito $\{x^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ es o no ortogonal.
- Calcule la proyección ortogonal de $\sin x$ sobre el subespacio generado por $\{1, x\}$ y obtenga la norma del error cometido al aproximar $\sin x$ por su proyección ortogonal.
- Obtenga la mejor aproximación de $\sin x$ en el espacio generado por $\{1, x, x^2\}$.

$$a) \{x^{n-1}, n \in \mathbb{N}\} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$$

Demostremos que el sistema anterior no es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ cuando encontremos una pareja de elementos cuyo producto escalar en $[-\pi, \pi]$ es no nulo.

$$\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3 \neq 0 \Rightarrow \text{NO ortogonal en } [-\pi, \pi]$$

Nota: podría ser ortogonal en otro intervalo

b)

Para hallar la proyección ortogonal de una función sobre un sistema empezamos comprobando si dicho sistema es o no es ortogonal en el intervalo dado. En caso afirmativo, aplicaríamos directamente la fórmula de la proyección ortogonal o mejor aprox. En caso contrario deberíamos ortogonalizar primero mediante Gram - Schmidt para después aplicar la fórmula mencionada.

$\{1, x\} \rightarrow$ veamos que dicho sistema sí es ortogonal en $[-\pi, \pi]$

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = 0 \Rightarrow \text{Ortogonal}$$

Como $\{1, x\}$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ aplicamos la fórmula de la proyección ortogonal directamente:

$$\text{proy}_{\{1, x\}}(\sin(x)) : \sin(x) \approx \frac{\langle \sin(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle \sin(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} x$$

$$\langle \sin(x), 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overset{\text{impar}}{\sin(x)} dx = 0$$

$$\langle \sin(x), x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin(x) dx = 2 \left[x \cos(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x) dx \right] = 2\pi$$

$$\langle x, x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^3 \quad \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right]$$

$$\boxed{\sin(x) \approx 0 + \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi^3} x = \frac{3x}{\pi^2}}$$

Hallaremos el error como la diferencia entre lo aproximado y la aproximación, es decir, la diferencia entre $\sin(x)$ y $\frac{3x}{\pi^2}$ de forma que la norma del error será: $\|\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}\|$

Recordemos que la norma de "algo" es la raíz del producto de ese "algo" consigo mismo.

Por comodidad, para evitar la presencia de las raíces, comenzaremos operando con la norma al cuadrado y al final extraeremos la raíz.

$$\|\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}\|^2 = \langle \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}, \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2} \rangle =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}) (\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{9}{\pi^4} x^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6}{\pi^2} x \sin(x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi \left[\frac{\pi}{2} + \frac{6}{\pi} - \frac{12}{\pi} \right] = \frac{\pi^2 - 6}{\pi} = \|\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}\|^2$$

$$\boxed{\|\sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}\| = \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{\pi}}}$$

c) Nos piden la mejor aproximación del $\sin(x)$, en principio igual que la proy. ortogonal del apartado b, pero ahora en $\{1, x, x^2\}$ en lugar de $\{1, x\}$; la principal diferencia es que ahora el sistema no es ortogonal, por lo que tendremos que usar Gram-Schmidt. ($\langle 1, x^2 \rangle \neq 0$)

$\{1, x, x^2\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ no ortogonal en $[-\pi, \pi]$

$$u_1 = e_1$$

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

Ahora el sistema $\{1, x, x^2 - \frac{\pi^2}{3}\}$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$

Ahora ya podemos aplicar la fórmula:

$$\sin(x) \approx \frac{\langle \sin(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle \sin(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} x + \frac{\langle \sin(x), x^2 - \frac{\pi^2}{3} \rangle}{\langle x^2 - \frac{\pi^2}{3}, x^2 - \frac{\pi^2}{3} \rangle} (x^2 - \frac{\pi^2}{3})$$

(apartado b) $\frac{3x}{\pi^2}$

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) [x^2 - \frac{\pi^2}{3}] dx}{\langle x^2 - \frac{\pi^2}{3}, x^2 - \frac{\pi^2}{3} \rangle} = 0$$

Impar

$$\boxed{\sin(x) \approx \frac{3x}{\pi^2}}$$

En 1922, el matemático soviético Alexander Alenxandrovich Friedmann fue capaz, bajo ciertas hipótesis simplificadoras, de obtener un conjunto sencillo de soluciones de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General que describen el modelo de un universo homogéneo e isótropo. Estas ecuaciones se reducen al problema del valor inicial

$$\begin{cases} 2RR'' + (R')^2 + kc^2 = 0 \\ R(0) = R_0 > 0 \\ R'(0) = v_0 > 0 \end{cases} \quad [1]$$

donde $R(t)$ es el radio del universo y c es la velocidad de la luz en el vacío. El parámetro k determina la geometría del espacio-tiempo, siendo esta plana, esférica o pseudo-esférica para $k = 0$, $k = 1$ ó $k = -1$ respectivamente.

a) Demuestre que, tras multiplicar la ecuación por R' , integrar una vez, e imponer las condiciones iniciales, es posible reescribir [1] en la forma :

$$R(R')^2 + kc^2 R = R_0 v_0^2 + kc^2 R_0 \quad [2]$$

b) Resuelva la ecuación [2] para el caso $k = 0$ (La respuesta contiene signo $\pm$).

c) Pruebe que la solución con signo $+$ conduce a un universo en permanente expansión, mientras que la solución con signo $-$ conduce a un universo que colapsa en un tiempo finito ("Big Crunch").

d) Obtenga el instante de colapso (t tal que $R(t) = 0$) en función de los parámetros del problema. En este caso, ¿hay expansión durante algún periodo de la historia del universo?

a)

Nos dan el sistema :

$$\begin{cases} 2RR'' + (R')^2 + kc^2 = 0 \\ R(0) = R_0 > 0 \\ R'(0) = V_0 > 0 \end{cases} \quad [1]$$

Siguiendo las indicaciones del enunciado multiplicamos [1] por R' e integramos, quedando:

$$2RR'R'' + (R')^3 + (R')kc^2 = 0$$

$$\underbrace{\int 2RR'R'' dR}_A + \int (R')^3 dR + \int (R')kc^2 dR = \int 0 dR \quad [*]$$

Ahora vamos a desarrollar el término que hemos llamado A :

$$A = 2 \int RR'R'' dR = \left[\begin{array}{ll} u = RR' & du = (R')^2 + R(R'') \\ dv = R'dR & v = R' \end{array} \right] =$$

$$= 2 \left\{ R(R')^2 - \int R'[(R')^2 + R(R'')] dR \right\} = 2 \left\{ R(R')^2 - \int (R')^3 dR - \int RR'R'' dR \right\} =$$

$$= 2R(R')^2 - 2 \int (R')^3 dR - 2 \int RR'R'' dR = 2R(R')^2 - 2 \int (R')^3 dR - A$$

Por lo tanto la expresión [*] nos queda:

$$R(R')^2 - \cancel{\int (R')^3 dR} + \cancel{\int (R')^3 dR} + kc^2 \int R' dR = cte$$

$$R(R')^2 + kc^2 R = cte$$

Para hallar la constante, sustituimos la ecuación en $t = 0$.

$$R(0)R'(0)^2 + kc^2 R(0) = cte \quad \begin{matrix} R(0)=R_0 \\ R'(0)=v_0 \end{matrix} \Rightarrow R_0 v_0^2 + kc^2 R_0 = cte$$

Por tanto la ecuación final, nos queda:

$$\boxed{R(R')^2 + kc^2 R = R_0 v_0^2 + kc^2 R_0}$$

b) Ahora nos dicen que $k = 0$.

Por tanto, tenemos que resolver la ecuación: $R(R')^2 = R_0 v_0^2$.

Para ello, la idea es quitarnos el cuadrado de R' , por tanto:

$$\sqrt{R(R')^2} = \sqrt{R_0 v_0^2} \Leftrightarrow \pm \sqrt{R} (R') = \sqrt{R_0 v_0^2}$$

que es una ecuación de separación de variables:

$$\sqrt{R} dR = \pm \sqrt{R_0 v_0^2} dt \Rightarrow \int \sqrt{R} dR = \int \pm \sqrt{R_0 v_0^2} dt \Rightarrow \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{R_0 v_0^2} t + k$$

Halleemos la constante k :

$$\frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}}(0) = \pm \sqrt{R_0 v_0^2} 0 + k \Leftrightarrow \frac{2}{3} R_0^{\frac{3}{2}} = k$$

Luego la solución de la ecuación es: $\frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{R_0 v_0^2} t + \frac{2}{3} R_0^{\frac{3}{2}}$

Simplificando: $\boxed{R = \left(\pm \frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}}$

c)

- Estudiemos la solución con signo positivo:

$$R(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = \infty$$

Por tanto, el universo se expande. Además lo hace de forma permanente ya que si calculamos la derivada primera de $R(t)$ observaremos que es siempre positiva para valores de t positivos. De todas formas hay una forma más sencilla de llegar a este último resultado que veremos en el apartado d).

- Estudiemos la solución con signo negativo:

$$R = \left(-\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} = 0$$

despejando t nos queda:

$$t = \frac{-R_0^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2}} = \frac{2R_0^{\frac{3}{2}}}{3R_0 V_0} = \frac{2R_0}{3V_0} > 0$$

Luego el universo colapsa en tiempo finito y positivo.

d) El tiempo de colapso, que solo tiene sentido para la solución con signo $-$ de la EDO, está calculado en el apartado anterior, siendo este $t = \frac{2R_0}{3V_0} > 0$.

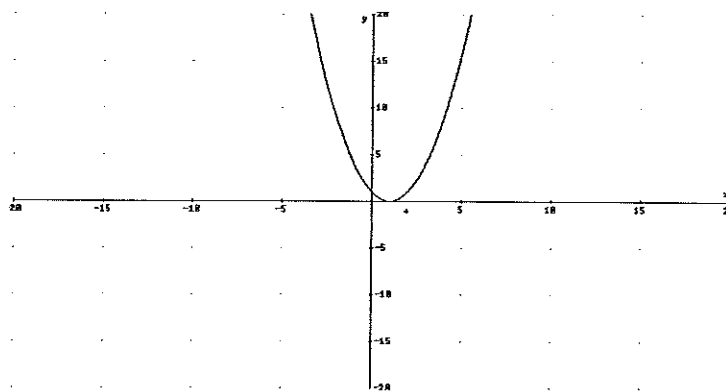
Respecto a si el universo se expande en algún momento de la historia, estudiemos la ecuación

$$R(t) = \left(-\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4} R_0 v_0^2 t^2 + R_0^3 - 3R_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{R_0 v_0^2} t \right)}$$

Lo de dentro de la raíz es una parábola con un único cero en $t = \frac{2R_0}{3V_0}$.

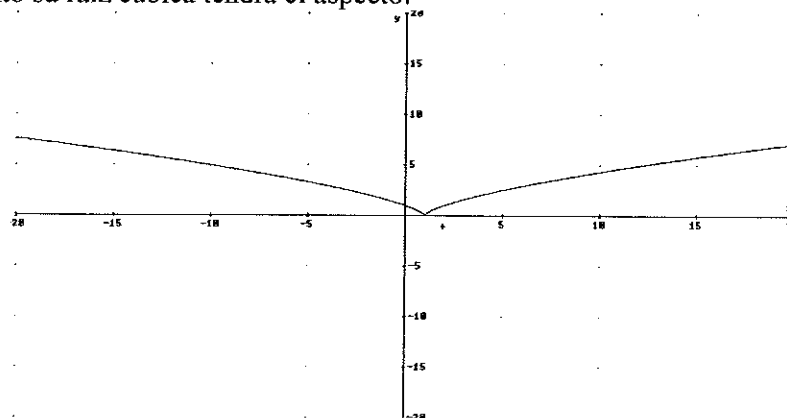
Por otro lado, la parábola es siempre positiva, viene de hacer $\left(-\frac{3}{2} \sqrt{R_0 v_0^2} t + R_0^{\frac{3}{2}} \right)^2$.

Es decir que la parábola tiene este aspecto:



En el caso de la solución con signo $+$ la parábola estaría desplazada a la izquierda del eje y . Es decir, la parábola tiene su único cero (instante del colapso) en una abscisa negativa (tiempo negativo). Por tanto para tiempos mayores que cero el universo se expande permanentemente.

Por la tanto su raíz cúbica tendrá el aspecto:



Luego en la solución con signo $-$ hay un periodo de expansión tras el colapso.

Septiembre'03
Ejercicio 3

Las vibraciones de una masa sujeta a un muelle se obtienen resolviendo la ecuación

diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0$ $a > 0$, $b \geq 0$ (a representa la rigidez del muelle y b la viscosidad del medio).

Dicha ecuación es equivalente al sistema $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -a^2x - 2by \end{pmatrix}$

- a) Estudie la estabilidad de la solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los distintos valores de a y b .
 b) ¿Qué se puede decir de la estabilidad de otra solución distinta de la nula?
 c) Dé una interpretación física del movimiento.
 d) Resuelva el sistema para $b = 4$, $a = 5$.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

a) Calculamos los autovalores de la matriz asociada y con ellos hablamos de la estabilidad de la sol. nula.

$$|A - \lambda Id| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -2b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

caso 1: $b^2 - a^2 > 0$

$$\sqrt{b^2 - a^2} < \sqrt{b^2} = b \Rightarrow -b + \sqrt{b^2 - a^2} < 0$$

ambos autovalores son reales y negativos, luego sus partes reales son negativas y la solución nula es asint. estable

caso 2: $b^2 - a^2 < 0$ ($b \neq 0$)

las partes reales de ambos autovalores van a ser $-b$ (ambas) y como $b \geq 0 \Rightarrow -b$ es negativo, luego la sol. nula es asintóticamente estable

caso 3: $b^2 - a^2 < 0$ ($b = 0$) este caso es $b = 0$

en este caso ambos autovalores tienen parte real nula, luego el sistema es estable pero no asintóticamente estable

caso 4: $b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = a^2$ ($a > 0$, $b \geq 0$) $\Rightarrow a = b$ con $b \neq 0$

las partes reales de ambos autovalores son ambas $-b$, negativas y no nulas, luego $(0,0)$ es asintóticamente estable.

TOTAL: $\begin{cases} b = 0 \Rightarrow \text{sol. nula estable pero no asintóticamente} \\ b \neq 0 \Rightarrow \text{sol. nula asintóticamente estable} \end{cases}$

b) El sistema es lineal y homogéneo, luego todas las soluciones se comportan, en cuanto a estabilidad, igual que la solución nula.

La clasificación del apartado a) y sus soluciones es aplicable al resto de soluciones.

c)

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Autovectores de la matriz asociada:

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - a^2} \Rightarrow b = 4, a = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -4 + 3i, m_a = 1$$

$$\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - a^2} \Rightarrow b = 4, a = 5 \Rightarrow \lambda_2 = -4 - 3i, m_a = 1$$

Autovectores:

$$\lambda_1 = -4 + 3i \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 - 3i & 1 \\ -25 & -4 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (4 - 3i)u_1 + u_2 = 0$$

Las dos ec. son dependientes por su multiplicidad. ¡¡¡jifó!!!

$$\vec{u} = (-1, 4 - 3i)$$

$$\lambda_2 = -4 - 3i \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 + 3i & 1 \\ -25 & -4 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (4 + 3i)u_1 + u_2 = 0$$

$$\vec{u} = (-1, 4 + 3i) \text{ conjugado } \underline{\text{No hay tiempo de calcularlo!!}}$$

$m_a = m_g \Rightarrow A$ diagonalizable $\Rightarrow$ solución:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{(-4+3i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4-3i \end{pmatrix} + C_2 e^{(-4-3i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4+3i \end{pmatrix} = \vec{z} + \vec{z}^*$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{z} + \vec{z}^* = 2\operatorname{Re}[\vec{z}] = 2\operatorname{Re}\left[C_2 e^{(-4+3i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4-3i \end{pmatrix}\right] \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{C_2}_{(\alpha + \beta i)} e^{-4t} e^{3it} = e^{-4t} [\cos(3t) + i \sin(3t)]$$

$$= 2\operatorname{Re}\left[(\alpha + \beta i) e^{-4t} [\cos(3t) + i \sin(3t)] \begin{pmatrix} -1 \\ 4-3i \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2\operatorname{Re}\left[e^{-4t} [(\alpha \cos(3t) - \beta \sin(3t)) + i(\alpha \sin(3t) + \beta \cos(3t))] \begin{pmatrix} -1 \\ 4-3i \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

solución: $x(t) = 2e^{-4t} [-\alpha \cos(3t) + \beta \sin(3t)]$

$$y(t) = 2e^{-4t} [4(\alpha \cos(3t) - \beta \sin(3t)) + 3[\alpha \sin(3t) + \beta \cos(3t)]]$$

Febrero'04
Ejercicio 1

- a) A partir del sistema trigonométrico ortogonal y completo $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, deducir el correspondiente sistema trigonométrico, ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$.
- b) Obtener el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de periodo 4π de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi & 0 < x \leq 2\pi \\ x & 2\pi < x \leq 4\pi \end{cases}$$

- c) Discutir la convergencia de la serie de Fourier hallada.

- d) Hallar la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi}$.

a) Un cambio lineal de variable conserva la ortogonalidad y la completitud.

1.- El sistema trigonométrico $\{1, \cos(\frac{2\pi nx}{T}), \sin(\frac{2\pi nx}{T}); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2, T/2], \mathbb{R})$ y en $L^2([0, T], \mathbb{R})$. Si hacemos $T = 2\pi$ tendremos el caso del enunciado y así comprobamos que $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Esta comprobación podemos hacerla también con la solución final, pero es imprescindible llegar a ella especificando el cambio de variable y mostrando todo el desarrollo siguiente:

2.- CAMBIO LINEAL DE VARIABLE: $x = \alpha t + \beta$

3.- IDENTIFICACIÓN:

Conocemos un sistema trigonométrico ortogonal y completo en $[-\pi, \pi]$, y nos piden hallar el sistema correspondiente en $[0, 4\pi]$, luego la identificación de intervalos será la que sigue:

$$\begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \longrightarrow & [0, 4\pi] \\ x & \longrightarrow & t \end{array} \quad x = \alpha t + \beta \Rightarrow \begin{array}{l} -\pi = \alpha(0) + \beta \\ \pi = \alpha(4\pi) + \beta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\pi \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}t - \pi$$

4.- Sustituyendo $x = \frac{1}{2}t - \pi$ en $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$ llegamos a:

$\{1, \cos[n(\frac{1}{2}t - \pi)], \sin[n(\frac{1}{2}t - \pi)]; n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$.

Se ha de simplificar todo lo posible esta expresión (un tanto compleja). Para ello, añadimos a las fórmulas trigonométricas.

$$\begin{cases} \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\left[n\left(\frac{1}{2}t - \pi\right)\right] = \cos\left[\frac{nt}{2} - n\pi\right] = \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \overset{(-1)^n = \pm 1}{\cos(n\pi)} + \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \overset{0}{\sin(n\pi)} = \pm \cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left[n\left(\frac{1}{2}t - \pi\right)\right] = \sin\left[\frac{nt}{2} - n\pi\right] = \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \overset{(-1)^n = \pm 1}{\cos(n\pi)} - \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \overset{0}{\sin(n\pi)} = \pm \sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

Entonces el sistema hallado nos queda $\{1, \pm \cos(\frac{nt}{2}), \pm \sin(\frac{nt}{2}); n \in \mathbb{N}\}$.

Puesto que los signos no afectan a la ortogonalidad ni a la completitud, podemos eliminarlos. Así pues, el sistema obtenido es el siguiente:

$\{1, \cos(\frac{nt}{2}), \sin(\frac{nt}{2}); n \in \mathbb{N}\}$: ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$.

Ahora sí podemos comprobar que este resultado es correcto.

Como $\{1, \cos(\frac{2\pi nx}{T}), \sin(\frac{2\pi nx}{T}); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2, T/2], \mathbb{R})$ y en $L^2([0, T], \mathbb{R})$, haciendo $T = 4\pi$ llegamos al sistema $\{1, \cos(\frac{nx}{2}), \sin(\frac{nx}{2}); n \in \mathbb{N}\}$ ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$.

b) DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER :
$$f(x) = \begin{cases} 2\pi, & 0 \leq x < 2\pi \\ x, & 2\pi \leq x < 4\pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]$$

$$f \text{ definida en } [0, T] \Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

Como f está definida en $[0, 4\pi] = [0, T] \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(x) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx$$

Además, $f(x)$ no es simétrica respecto a y ni respecto al origen. (no es ni par ni impar) luego no podemos afirmar que $a_n = 0$ ó $b_n = 0$, hemos de hallar ambas integrales.

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(x) \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(x) \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} 2\pi \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx \right] = \frac{1}{2\pi} [I_1 + I_2]$$

$$* I_1 = \int_0^{2\pi} 2\pi \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx = 2\pi \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} \frac{n}{2} \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx = \frac{4\pi}{n} \sin\left(\frac{nX}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{n} \left[\cancel{\sin(n\pi)} - \cancel{\sin(0)} \right] = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$* I_2 = \int_{2\pi}^{4\pi} x \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx = \frac{2x}{n} \sin\left(\frac{nX}{2}\right) \Big|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx =$$

$\left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{nX}{2}\right) dx \Rightarrow v = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nX}{2}\right) \end{array} \right)$

$$= \frac{2}{n} \left[\cancel{4\pi \sin(2\pi n)} - \cancel{2\pi \sin(n\pi)} \right] - \frac{2}{n} \frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{n}{2} \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{4}{n^2} \left[-\cos\left(\frac{nX}{2}\right) \right] \Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4}{n^2} \cos\left(\frac{nX}{2}\right) \Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4}{n^2} \left[\cancel{\cos(2\pi n)} - \cancel{\cos(\pi n)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{4}{n^2} [1 - (-1)^n]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi} [I_1 + I_2] = \frac{1}{2\pi} \left[0 + \frac{4}{n^2} (1 - (-1)^n) \right] \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2} [1 - (-1)^n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & \text{Si } n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n^2}, & \text{Si } n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{4}{\pi (2k-1)^2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(x) \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} 2\pi \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x \sin\left(\frac{nX}{2}\right) dx \right] = \frac{1}{2\pi} [I_3 + I_4]$$

$$* I_3 = \int_0^{2\pi} 2\pi \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = 2\pi \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} \frac{n}{2} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{4\pi}{n} \left[-\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_{2\pi}^0 = \frac{4\pi}{n} \left[\cos(0) - \cos(\pi n) \right] \Rightarrow I_3 = \frac{4\pi}{n} \left[1 - (-1)^n \right]$$

$$* I_4 = \int_{2\pi}^{4\pi} x \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = -\frac{2x}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_{2\pi}^{4\pi} + \frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx =$$

$\left(\begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx \Rightarrow v=-\frac{2}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \end{array} \right)$

$$= -\frac{2}{n} \left[4\pi \cos\left(\frac{n \cdot 4\pi}{2}\right) - 2\pi \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{2}\right) \right] + \frac{2}{n} \frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{n}{2} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{4\pi}{n} \left[2 - (-1)^n \right] + \frac{4}{n^2} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4\pi}{n} \left[(-1)^n - 2 \right] + \frac{4}{n^2} \left[\sin(2\pi n) - \sin(\pi n) \right]$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{4\pi}{n} \left[(-1)^n - 2 \right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{2\pi} [I_3 + I_4] = \frac{1}{2\pi} \frac{4\pi}{n} \left[1 - (-1)^n + (-1)^n - 2 \right] \Rightarrow b_n = -\frac{2}{n}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} 2\pi dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} x^2 \Big|_{2\pi}^{4\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi(2\pi - 0) + \frac{1}{2} \left((4\pi)^2 - (2\pi)^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[4\pi^2 + \frac{1}{2} (12\pi^2) \right] \Rightarrow a_0 = 5\pi$$

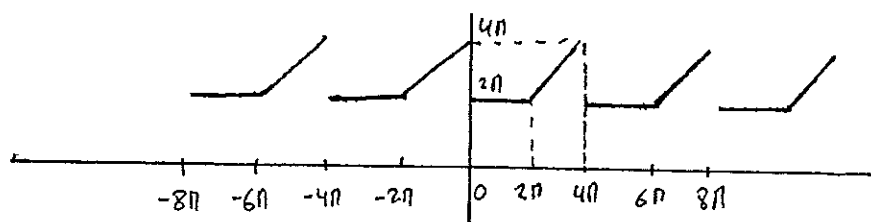
Por tanto, el Desarrollo en serie de Fourier queda:

$$f(x) = \frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left[\frac{(2k-1)x}{2}\right] - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{kx}{2}\right)$$

c) CONVERGENCIA DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER: $\begin{cases} \text{EN NORMA} \\ \text{PUNTUAL} \\ \text{UNIFORME} \end{cases}$ www.simplyjarod.com

* EN NORMA:

El sistema trigonométrico $\{1, \cos(\frac{2\pi n x}{T}), \sin(\frac{2\pi n x}{T}); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2, T/2], \mathbb{R})$ y en $L^2([0, T], \mathbb{R})$. y esto implica que el desarrollo en serie de Fourier converge en norma a $f(x)$ en esos intervalos. En nuestro caso, $T = 4\pi$, y por tanto $\{1, \cos(\frac{nx}{2}), \sin(\frac{nx}{2}); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$, según vimos en el apartado a. Esto supone que el desarrollo en serie de Fourier hallado en el apartado b converge en norma a $f(x)$ en $[0, 4\pi]$, y además converge en norma a $f_e(x)$ en todo $\mathbb{R}$, siendo $f_e(x)$ la extensión periódica de $f(x)$ de período $T = 4\pi$.

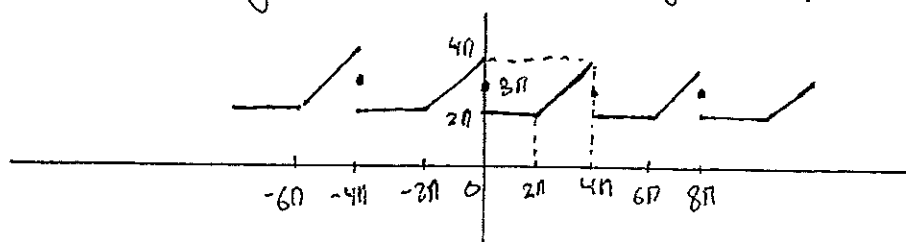


EXTENSIÓN PERIÓDICA DE $f(x)$ DE PERÍODO $T = 4\pi$

* PUNTUAL

El desarrollo en serie de Fourier converge puntualmente a $f_e(x)$ en todos aquellos puntos donde $f_e(x)$ es continua. Si $f_e(x)$ es discontinua en $x = x_0$, entonces el desarrollo toma el valor medio del salto, que es $\frac{1}{2}[f_e(x_0^+) + f_e(x_0^-)]$.

En nuestro caso, $f_e(x)$ es discontinua en $\{4k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, y en estos puntos el desarrollo de Fourier toma el valor $\frac{1}{2}[2\pi + 4\pi] = 3\pi$. En $\mathbb{R} - \{4k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $f_e(x)$ es continua y el desarrollo converge a $f_e(x)$.



CONVERGENCIA DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

* UNIFORME

El Desarrollo en serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier intervalo cerrado donde $f(x)$ sea continua.

Como $f(x)$ es continua en $[0, 4\pi] \Rightarrow$ El Desarrollo en serie de Fourier converge a $f(x)$ uniformemente $\forall [a, b] \subset [0, 4\pi]$.

d) Nos piden hallar
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Si hacemos $x=0$ en el desarrollo vemos que aparece el sumatorio buscado.
Luego tomaremos $x=0$ para llegar a dos conclusiones e igualarlas:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{El Desarrollo en serie de Fourier queda } \frac{5\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \\ \text{El Desarrollo en serie de Fourier converge puntualmente a } 3\pi \text{ (ver gráfica)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Igualando: } 3\pi = \frac{5\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Podemos comprobar que este resultado es correcto; en efecto, es conocido el valor de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Multiplicando en ambos lados por $\frac{4}{\pi}$

llegamos a
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Junio '04
Ejercicio 1

a) Considérese el espacio vectorial $l^2(R) = \left\{ (a_1, \dots, a_n, \dots), a_n \in R / \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$ con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar.

Definimos el producto escalar $\langle (a_1, \dots, a_n, \dots), (b_1, \dots, b_n, \dots) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ y consideramos el

sistema ortonormal $S = \{ \vec{\phi}_n : n \in \mathbb{N} \}$ siendo $\vec{\phi}_n = (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, 0, \dots)$.

a-1) Demuestre que la serie de Fourier de un vector $\vec{a} \in l^2(R)$ con respecto a dicho sistema es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n$.

a-2) Demuestre, de dos formas diferentes, que el sistema S es completo:

- Probando que el único vector ortogonal a S es el vector nulo y
- Probando que, para todo vector, se verifica la identidad de Parseval.

a-3) Demuestre que si:

$$\vec{f}, \vec{g} \in l^2(R) \text{ y } (\forall n \in \mathbb{N} \langle \vec{f}, \vec{\phi}_n \rangle = \langle \vec{g}, \vec{\phi}_n \rangle) \Rightarrow \vec{f} = \vec{g}.$$

b) Halle el desarrollo en serie de Fourier, de periodo 2π , de función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin 4x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2(1 + \sin 4x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

a-1)

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ un vector genérico de $l^2(R)$. Hacemos el producto escalar tal y como viene definido en el enunciado de $\vec{a}$ con cada uno de los vectores del sistema S :

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_1 \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (1, 0, \dots, 0, \dots) \rangle = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 + \dots = a_1$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_2 \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (0, 1, \dots, 0, \dots) \rangle = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 0 + \dots = a_2$$

...

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, \dots) \rangle = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 1 + \dots = a_n$$

...

Por tanto llegamos a la importante conclusión de que $\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora aplicando la definición de la serie de Fourier para un sistema ortonormal tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle \vec{\phi}_n = \langle \vec{a}, \vec{\phi}_1 \rangle \vec{\phi}_1 + \langle \vec{a}, \vec{\phi}_2 \rangle \vec{\phi}_2 + \dots + \langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle \vec{\phi}_n + \dots = \\ &= a_1 \vec{\phi}_1 + a_2 \vec{\phi}_2 + \dots + a_n \vec{\phi}_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n \end{aligned}$$

a-2-1)

Probamos que el único vector ortogonal a S es el vector nulo.El vector nulo es ortogonal a todos los vectores por tanto es ortogonal a los vectores de S :

$$\langle \vec{0}, \vec{\phi}_1 \rangle = \langle \vec{0}, \vec{\phi}_2 \rangle = \dots = \langle \vec{0}, \vec{\phi}_n \rangle = \dots = 0$$

Para comprobar que es el *único* vector ortogonal a S supongamos que existe otro vector $\vec{a}$ ortogonal a S , por tanto:

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_1 \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\phi}_2 \rangle = \dots = \langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle = \dots = 0$$

Ahora bien, por el apartado a-1) hemos concluido que $\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que uniendo ambas cosas resulta que:

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_1 \rangle = a_1 = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_2 \rangle = a_2 = 0$$

...

$$\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle = a_n = 0$$

...

Así nos queda que $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ que es el vector nulo.

a-2-2)

Probamos que S verifica la identidad de Parseval:La identidad de Parseval dice lo siguiente: $\|\vec{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle|^2$

Por un lado:

$$\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Por otro lado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \vec{a}, \vec{\phi}_n \rangle|^2 = [\text{apartado a-1)}] = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{R}} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

que son dos expresiones iguales por tanto se verifica la identidad de Parseval.

a-3)

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}, \vec{\phi}_n \rangle &= \langle \vec{g}, \vec{\phi}_n \rangle \Rightarrow \langle \vec{f}, \vec{\phi}_n \rangle - \langle \vec{g}, \vec{\phi}_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{f} - \vec{g}, \vec{\phi}_n \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\text{apartado a-2-1)}] \Rightarrow \vec{f} - \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f} = \vec{g} \end{aligned}$$

Este apartado es independiente del anterior

b)

Ahora nos piden calcular el desarrollo en serie de Fourier, de periodo 2π , de función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} 4x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2(1 + \operatorname{sen} 4x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Para calcular el desarrollo en serie de Fourier vamos a utilizar el sistema trigonométrico:

$$\left\{ 1, \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

que es ortogonal y completo en $[-T/2, T/2]$.

En nuestro caso como $T = 2\pi$ nos queda el siguiente sistema ortogonal y completo entre $[-\pi, \pi]$:

$$\{1, \operatorname{sen} nx, \cos nx, n \in \mathbb{N}\}$$

Ahora pasamos a calcular los coeficientes:

- Cálculo del coeficiente a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \operatorname{sen} 4x dx + \int_0^{\pi} (2 + 2 \operatorname{sen} 4x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \operatorname{sen} 4x dx + \int_0^{\pi} 2 dx + \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} 4x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \operatorname{sen} 4x dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos 4x}{2} \right]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (0 + 2\pi) = \frac{1}{\pi} 2\pi = 2 \end{aligned}$$

La integral tachada vale cero porque el integrando es una función par y el intervalo es simétrico

- Cálculo de los coeficientes a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (2 \operatorname{sen} 4x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (2 + 2 \operatorname{sen} 4x) \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \operatorname{sen} 4x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} 4x \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \operatorname{sen} 4x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} 4x \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{sen} 4x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx \right) = 0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n} \operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Unimos la primera y la tercera integral porque tienen igual integrando

Recuerda que:
 $\operatorname{sen} n\pi = 0$

- Cálculo de los coeficientes b_n

En este caso hay que tener un poco más de cuidado por que la integral se resuelve de distinta forma para $n \neq 4$ y para $n = 4$ donde aparece un caso particular:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (2 \sin 4x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} (2 + 2 \sin 4x) \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \sin 4x \sin nx dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx + \int_0^{\pi} 2 \sin 4x \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin 4x \sin nx dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin 4x \sin nx dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(4-n)x - \cos(4+n)x] dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4-n)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4+n)x dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{4-n} \sin(4-n)x \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{4+n} \sin(4+n)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{2}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(0 - 0 - \frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{2 - 2 \cos n\pi}{n} = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0, & n \text{ par } (n \neq 4) \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aplicamos que:

$$2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

Atención:

Fíjate que en el caso de $n = 4$ esta expresión no tiene sentido por que estamos dividiendo entre cero.

Recuerda que:

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

Ahora queda el caso particular $n = 4$ (no contenido en la solución anterior) que se resuelve a parte:

$$\begin{aligned}
 b_4 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin 4x dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 4x dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (2 \sin 4x) \sin 4x dx + \int_0^{\pi} (2 + 2 \sin 4x) \sin 4x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 2 \sin^2 4x dx + \int_0^{\pi} 2 \sin 4x dx + \int_0^{\pi} 2 \sin^2 4x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2 4x dx + \int_0^{\pi} 2 \sin 4x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 8x}{2} dx + \int_0^{\pi} 2 \sin 4x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[x - \frac{1}{8} \sin 8x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{2}{4} \cos nx \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - (-\pi) - \frac{2}{4} \cos 4\pi + \frac{2}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2
 \end{aligned}$$

Aplicamos que:

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

Por tanto los coeficientes b_n quedan:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par } n \neq 4 \\ 2, & n = 4 \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Por último aplicamos la expresión del desarrollo en serie trigonométrica de Fourier:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

y sustituyendo los coeficientes calculados nos queda:

$$F(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \Rightarrow F(x) = 1 + 2 \sin 4x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Septiembre'04
Ejercicio 1

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

- Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier de período 2π .
- Discutir la convergencia de la serie de Fourier calculada.
- Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- Utilizando el apartado c), calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Escribir la igualdad de Parseval para dicha serie.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} [-\pi, \pi] = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow T=2\pi \\ T=2\pi \\ \text{(amplitud)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(período)} \end{array}$$

a) Desarrollo en serie trigonométrica de Fourier: DSF $\equiv F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{2\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(nx) dx \rightarrow v = \int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \frac{1}{n} \int n \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$I_1 = \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1); \quad I_1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_1 = \frac{(-1)^n - 1}{\pi \cdot n^2} ; \quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par } (n=2k) \\ \frac{-2}{\pi n^2}, & n \text{ impar } (n=2k-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{-2}{\pi (2k-1)^2} \end{array}$$

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{-2}{\pi (2n-1)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}$$

$u = x \rightarrow du = dx$
 $dv = \sin(nx) dx \rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$I_2 = -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{\pi \cos(\pi)}{n} = -\frac{\pi (-1)}{n} = \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} I_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi (2n-1)^2} \cos\left(\frac{2\pi (2n-1) x}{2\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{2\pi}\right)$$

$$\text{DSF: } F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sin(nx)}{n}$$

b) Convergencia del DSF a la función $f(x)$ dada:

Salvo que digan lo contrario y se refieran a uno en concreto, estudiaremos los tres tipos de convergencia.

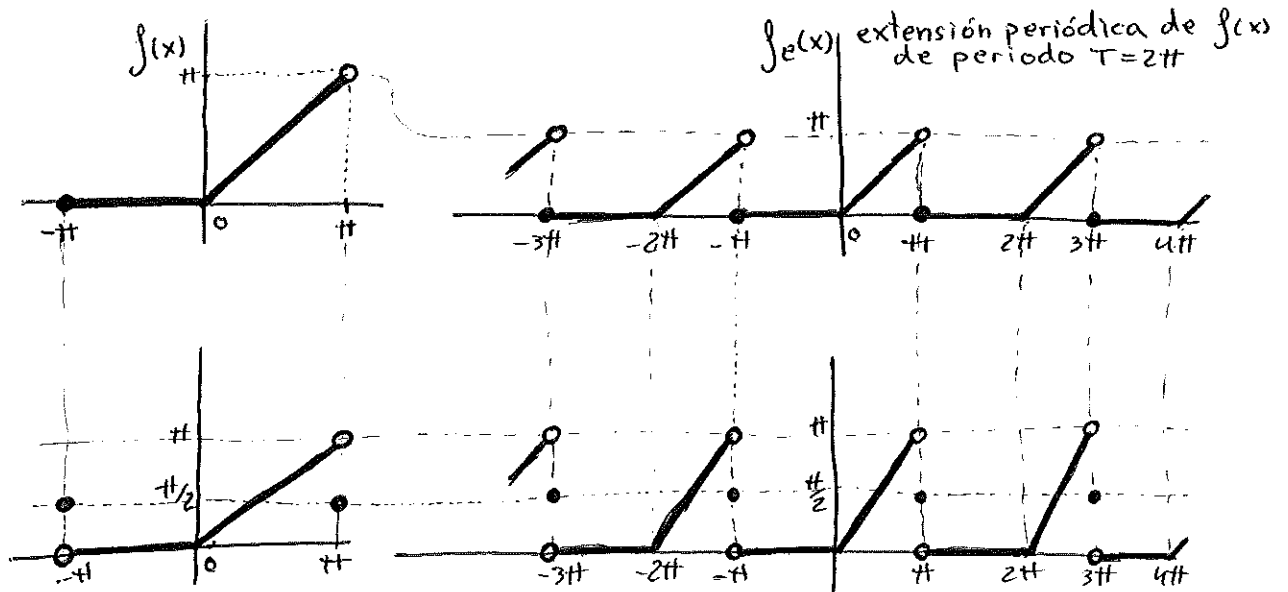
① Convergencia en norma o en media euclídea.

El sistema trigonométrico $\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal y completo en $[-T/2, T/2]$ y en $[0, T]$, y esto provoca que el DSF converja en norma a $f(x)$ en $[-T/2, T/2]$ y en $[0, T]$

En nuestro problema $T = 2\pi \Rightarrow \left\{ 1, \cos(nx), \sin(nx) \right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal y completo en $[-\pi, \pi]$, lo que significa que el DSF $F(x)$ converge en norma a la función $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

Nota: la demostración de que $\left\{ 1, \cos(nx), \sin(nx) \right\}$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ está desarrollada en el ejercicio 1 de clase del tema 1.

② Convergencia puntual del DSF a la función $f(x)$.
En realidad se trata de dibujar las gráficas de la función y del desarrollo y compararlas.



Convergencia puntual del DSF a $f(x)$:

→ Si $f_e(x)$ (extensión periódica de $f(x)$) es continua, entonces la gráfica del DSF y de $f_e(x)$ coinciden, con lo que el DSF converge puntualmente a $f_e(x)$ mientras esta última sea continua.

En nuestro problema... esto ocurre en $\mathbb{R} - \{(2k-1)\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

→ Si $f_e(x)$ es discontinua en el punto $x=\alpha$, entonces el DSF toma como valor el de la mitad del salto de la discontinuidad, cuya expresión es: $\frac{f_e(\alpha^+) + f_e(\alpha^-)}{2}$

En nuestro problema... las discontinuidades están en $(2k-1)\pi$, y el valor medio del salto es $\frac{\pi}{2}$

③ Convergencia uniforme

El DSF converge uniformemente a $f(x)$ en todo intervalo cerrado contenido en un intervalo donde $f_e(x)$ sea continua. (ver feb08)

En nuestro problema... $\forall [a, b] \subset (-\pi, \pi)$

DSF $F(x)$ converge uniformem. a $f(x)$

c) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Para $x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{El DSF queda } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ \text{El DSF converge puntualmente a cero} \\ \text{(ver gráfica del DSF)} \\ \text{igualando... } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \end{array} \right.$

d) Utilizando c), calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right] + \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right]$$

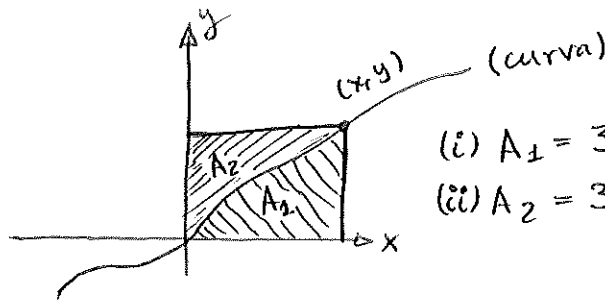
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Febrero '05
Ejercicio 2

Por un punto cualquiera (x, y) de una curva que pasa por el origen se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas. Hallar la curva que divida al rectángulo formado por las dos rectas y los ejes en dos superficies, una de las cuales sea el triple de la otra. Para resolver este problema se ha de plantear y resolver una ecuación diferencial. ¿Son todas las soluciones de dicha ecuación diferencial soluciones del problema planteado?



(i) $A_1 = 3 \cdot A_2$
(ii) $A_2 = 3 A_1$ } "una de las cuales sea el triple de la otra"

$$A_1 = \int_0^x y(s) ds$$

$$A_2 = \underbrace{x \cdot y(x)}_{\text{Área rectángulo}} - \underbrace{\int_0^x y(s) ds}_{A_1}$$

$$\text{caso (i): } A_1 = 3 A_2 \Rightarrow \int_0^x y(s) ds = 3 \left[x y(x) - \int_0^x y(s) ds \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \int_0^x y(s) ds = 3 x y(x) \Rightarrow \int_0^x y(s) ds = \frac{3}{4} x y(x)$$

Puesto que sospechamos que es vital manejar una EDO, habrá de aparecer $y'(x)$, y para ello derivamos las dos partes de la igualdad. Parte derecha: regla de la cadena:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{4} x y(x) \right] &= \frac{3}{4} [y(x) + x y'(x)] \\ \frac{d}{dx} \int_0^x y(s) ds &= y(x) \cdot 1 - y(0) \cdot 0 = y(x) \end{aligned} \right\} y(x) = \frac{3}{4} [y(x) + x y'(x)]$$

$$\frac{1}{4} y(x) = \frac{3}{4} x y'(x); \quad y(x) = 3 x y'(x); \quad 3 y'(x) = \frac{y(x)}{x};$$

$$3 \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y(x)|^3 = \ln |x| + C \Rightarrow \boxed{y(x) = C \sqrt[3]{x}}$$

Esto surge de considerar el caso $A_1 = 3 A_2$ (i)

Para $A_2 = 3 A_1$ tenemos lo siguiente:

si $A_2 = 3 A_1 \Rightarrow A_2/3 = A_1$ luego... donde antes había un 3 ahora pondremos un $\frac{1}{3}$

operando... queda como solución al caso (ii) $\boxed{y(x) = C x^3}$

Junio 2005
Ejercicio 1

Sea la función

$$f(x) = xu(\sin(x)), \quad x \in [0, 2\pi], \quad u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

- Represente gráficamente $f(x)$.
- Obtenga su desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de periodo 2π .
- Analice la convergencia de la serie obtenida.
- A partir de los resultados anteriores, calcule el valor de la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$f(x) = x \cdot u(\sin(x)), \quad x \in [0, 2\pi], \quad u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow [0, T] \Rightarrow T = 2\pi$

b) Desarrollo en serie trigonométrica de Fourier DSF: $F(x)$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx; \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$$

Vemos que sustituir f tal cual está dada por el enunciado en las fórmulas de a_n , a_0 y b_n carece de sentido porque los cálculos serían demasiado complejos: aparece una función u que en principio nos sobra. Empezamos pues por simplificar la expresión de f (ayudándonos de la expresión de $u(t)$).

u será 1, 0, -1 en función de que su variable sea positiva, 0, negativa respectivamente. Estudiamos cuándo la variable ($\sin x$) es positiva, 0, negativa citándonos al intervalo dado $[0, 2\pi]$

$$\textcircled{*} \quad x=0 \Rightarrow \sin(x) = \sin(0) = 0 \Rightarrow u(\sin(x)) = u(\sin(0)) = u(0) = 0$$

$$f(x) = x \cdot u(\sin(x)) = x \cdot 0 = 0$$

$$\textcircled{*} \quad 0 < x < \pi \Rightarrow \sin(x) > 0 \Rightarrow u(\sin(x)) = 1 \Rightarrow f(x) = x \cdot u(\sin(x)) = x \cdot 1 = x$$

$$\textcircled{*} \quad x = \pi \Rightarrow \sin(x) = \sin(\pi) = 0 \Rightarrow u(\sin(x)) = u(\sin(\pi)) = u(0) = 0$$

$$f(x) = x \cdot u(\sin(x)) = x \cdot 0 = 0$$

$$\textcircled{*} \quad \pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin(x) < 0 \Rightarrow u(\sin(x)) = -1 \Rightarrow f(x) = x \cdot u(\sin(x)) = -x$$

$$\textcircled{*} \quad x = 2\pi \Rightarrow \sin(x) = \sin(2\pi) = 0 \Rightarrow u(\sin(x)) = u(0) = 0$$

$$f(x) = x \cdot u(\sin(x)) = x \cdot 0 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ -x, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x = \pi \text{ ó } x = 2\pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x) \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} x \cos(nx) dx}_{I_2} \right]$$

$$I = \int x \cos(nx) dx = x \frac{\sin(nx)}{n} - \int n \frac{\sin(nx)}{n^2} dx$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(nx) dx \rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

$$I = \frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$I_1 = \frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1]$$

$$I_2 = \frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n]$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n] = \frac{2(-1)^n - 2}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} (I_1 - I_2) = \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi (2k-1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin(n\pi) &= 0 \\ \cos(n\pi) &= (-1)^n \\ \sin(2\pi n) &= 0 \\ \cos(2\pi n) &= 1 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx}_{J_1} - \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} x \sin(nx) dx}_{J_2} \right]$$

$$J = \int x \sin(nx) dx = -x \frac{\cos(nx)}{n} + \int n \frac{\cos(nx)}{n^2} dx$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(nx) dx \rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{cases}$$

$$J = -x \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

$$J_1 = -x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^0 + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{-\pi (-1)^n}{n}$$

$$J_2 = -x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{2\pi}^{\pi} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n} [\pi (-1)^n - 2\pi]$$

$$J_1 - J_2 = \frac{\pi}{n} [-2(-1)^n + 2] = \frac{2\pi}{n} [1 - (-1)^n]; \quad b_n = \frac{2}{\pi} [1 - (-1)^n] \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{2k} = 0 \\ b_{2k-1} = \frac{4}{2k-1} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x dx \right] = \frac{1}{2\pi} [\pi^2 - 3\pi^2]$$

$$a_0 = -\pi$$

$$\text{DSF: } F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$F(x) = \frac{-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos[(2k-1)x] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \sin[(2k-1)x]$$

$$F(x) = \frac{-\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

TEORÍA

Convergencia en norma:

El sistema trigonométrico $\{1, \cos(\frac{2\pi n x}{T}), \sin(\frac{2\pi n x}{T})\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal y completo en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y en $[0, T]$, lo que supone que el DSF converge en norma a $f(x)$ en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y en $[0, T]$.

En nuestro problema, $T=2\pi$, y como $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ es ortogonal y completo en $[0, 2\pi]$, el DSF converge en norma a $f(x)$ en $[0, 2\pi]$

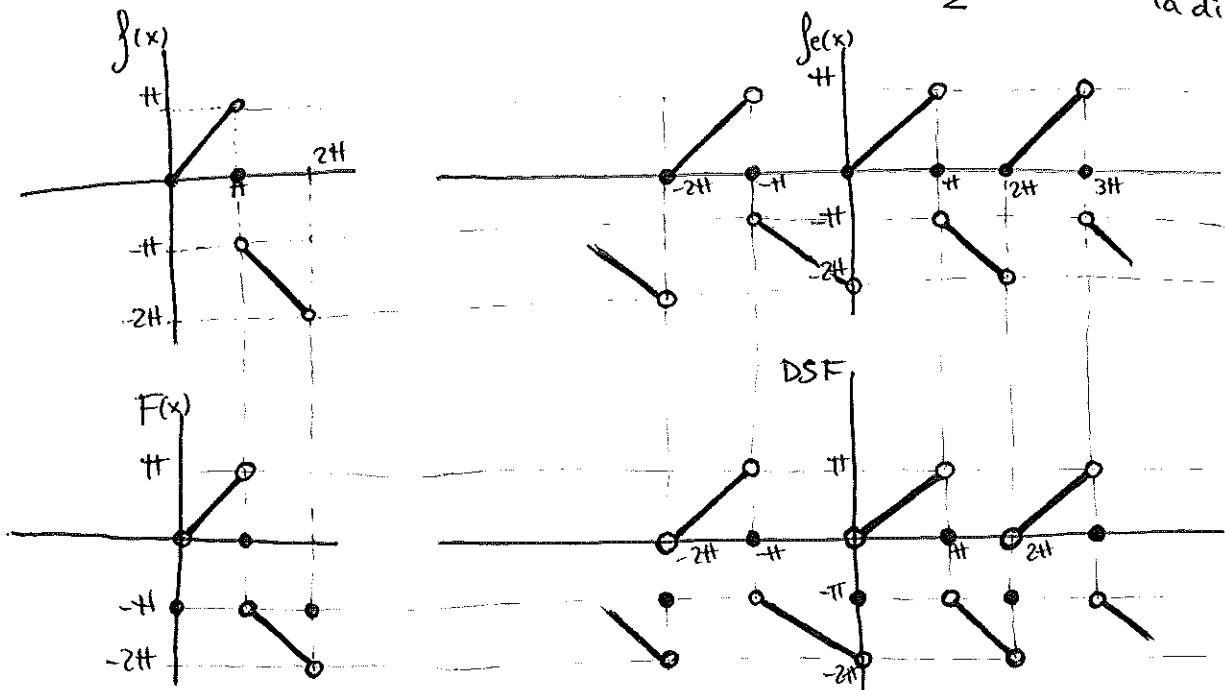
Convergencia puntual:

Interpretación de las gráficas del DSF y de f

Sea f_e la extensión periódica de f de periodo T :

→ si f_e continua $\Rightarrow$ DSF converge puntualmente a la función (sus gráficas coinciden)

→ si f_e discontinua en $x=\alpha \Rightarrow$ DSF converge puntualmente a $\frac{f_e(\alpha^+) + f_e(\alpha^-)}{2}$ = valor medio del salto de la discontinuidad.



$$\text{En } x = (2k-1)\pi, \text{ DSF converge a } 0 = \frac{\int e^{((2k-1)\pi^+)} + \int e^{((2k-1)\pi^-)}}{2} \\ = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

$$\text{En } x = 2k\pi, \text{ DSF converge a } -\pi = \frac{\int e^{(2k\pi^+)} + \int e^{(2k\pi^-)}}{2} \\ = \frac{0 + (-2\pi)}{2}$$

d)

$$\text{En } x=0 \begin{cases} \text{El DSF queda } -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ \text{El DSF converge puntualmente a } -\pi \text{ (ver gráfica)} \end{cases}$$

$$\text{Igualando } \Rightarrow -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

E.T.S.I.
TelecomunicaciónJunio 2005
Ejercicio 2

Sea la E.D.O. de segundo orden

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x + x^3 \quad [1]$$

- a) Mediante un cambio de variable independiente adecuado transfórmela en una E.D.O. de coeficientes constantes. (0.5 puntos)

- b) Sea

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b(t) \quad , \quad a_i \in \mathbb{R} \quad [2]$$

la ecuación obtenida. Resuelva su ecuación homogénea asociada por dos métodos:

- (b.-1) Buscando soluciones particulares linealmente independientes de tipo exponencial. (1.0 puntos)

- (b.-2) A partir del sistema equivalente de dos E.D.O.'s con las funciones incógnita

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = y'(t)$$

(1.0 puntos)

- c) Resuelva la ecuación completa [1]

(1.0 puntos)

SOLUCIÓN

Se trata de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) de segundo orden, no homogénea y con coeficientes no constantes (variables). En particular, podemos identificarla con la expresión

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

$$(n=2, a_2=1, a_1=-2, a_0=2, q(x)=x+x^3),$$

Ecuación de Euler.

luego $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x + x^3$ es una Ecuación de Euler. Su resolución (que es pedida en el apartado c) se aborda mediante el siguiente cambio de variable:

$$t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$$

Gracias a esto cambiaremos todas las derivadas de la E.D.O. que dependen de x (es decir, $y'(x)$ e $y''(x)$) por derivadas que dependan de t (esto es, $y'(t)$ e $y''(t)$), obteniéndose así una E.D.O. lineal con coeficientes constantes (que es precisamente lo que se nos exige en el apartado a):

En las operaciones que siguen aplicamos la regla de la cadena y las normas habituales de derivación (en concreto, la derivada de un producto).

Para $y'(x)$ se tiene:

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'(t) \frac{dt}{dx} \\ t = \ln(x) &\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \\ x = e^t &\Rightarrow \frac{1}{x} = e^{-t} \end{aligned} \right] \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t} \Rightarrow y'(x) = e^{-t} y'(t)$$

Para $y''(x)$:

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} [y'(x)] \Rightarrow y''(x) = \frac{d}{dx} [y'(t)e^{-t}] \Rightarrow$$

$$y'(x) = y'(t)e^{-t}$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} [y'(t)e^{-t}] = e^{-t} \left[e^{-t} \frac{d}{dt} [y'(t)] + y'(t) \frac{d}{dt} [e^{-t}] \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''(x) = e^{-t} [e^{-t} [y''(t)] + y'(t) [-e^{-t}]] \Rightarrow y''(x) = e^{-2t} [y''(t) - y'(t)]$$

Sustituyendo en la ecuación inicial queda:

$$\underbrace{\left(\frac{e^t}{x^2} \right)^2}_{\frac{e^{2t}}{x^2}} \underbrace{\left(e^{-2t} [y''(t) - y'(t)] \right)}_{y''(x)} - \underbrace{\frac{2e^t}{2x}}_{\frac{e^t}{x}} \underbrace{\left(e^{-t} y'(t) \right)}_{y'(x)} + \underbrace{\frac{2y(t)}{2y(x)}}_{\frac{y(t)}{y(x)}} = \underbrace{\frac{e^t}{x}}_{\frac{e^t}{x}} + \underbrace{\left(\frac{e^t}{x^3} \right)^3}_{\frac{e^{3t}}{x^3}}$$

Operando llegamos a la E.D.O. de coeficientes constantes pedida en el apartado a:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + e^{3t}$$

Su ecuación homogénea asociada (cuya resolución exigen en b) es por tanto

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

El polinomio característico correspondiente es $r^2 - 3r + 2 = 0$, con raíces $r_1 = 1 \in \mathbb{R}$ y $r_2 = 2 \in \mathbb{R}$. Al ser ambas reales, sabemos que la solución de la ecuación $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$ es del tipo $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Por tanto, la respuesta tanto al apartado (b.- 1) como al apartado (b.- 2) va a ser

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

Fórmula de
Liouville

Para llegar a esta solución siguiendo el procedimiento que se sugiere en (b.- 1) tenemos que acudir a la fórmula de Liouville:

$$W(t) = W(y_1(t), y_2(t)) = C e^{-\int p_1(t) dt} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix},$$

donde $W(t)$ es el Wronskiano de la ecuación, siendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones particulares linealmente independientes (las cuales queremos encontrar) y $p_1(t)$ el polinomio que multiplica al término de $y'(t)$. Una vez halladas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, la solución de dicha ecuación será una combinación lineal de ambas:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

En este caso, al ser una E.D.O. de coeficientes constantes, $p_1(t) = cte = a_1 = -3$. Tenemos pues:

$$W(t) = C e^{-\int -3 dt} = C e^{3t}$$

Por otro lado, vemos que los coeficientes constantes de la ecuación que queremos resolver tienen suma nula ($a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-3) + 2 = 0$), lo que implica tener a $y_1(t) = e^t$ como una solución particular de la ecuación.

Llevando las dos conclusiones anteriores a la expresión del Wronskiano queda

$$W(t) = Ce^{3t} = \begin{vmatrix} e^t & y_2(t) \\ e^t & y_2'(t) \end{vmatrix} = e^t y_2'(t) - e^t y_2(t) = e^t (y_2'(t) - y_2(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2'(t) - y_2(t) = Ce^{2t}$$

Ecuación Lineal de Primer Orden.

Hallaremos $y_2(t)$ cuando resolvamos la anterior ecuación diferencial, lineal, no homogénea y de primer orden. La solución de la ecuación homogénea asociada será $y_2^H(t)$,

$$y_2'(t) - y_2(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy_2(t)}{dt} = y_2(t) \Leftrightarrow \frac{dy_2(t)}{y_2(t)} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dy_2(t)}{y_2(t)} = \int dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln|y_2(t)| = t + K \Leftrightarrow e^{\ln|y_2(t)|} = e^{(t+K)} = e^t e^K = Ke^t \Leftrightarrow y_2^H(t) = Ke^t$$

Método de Variación de las Constantes.

Y, por el método de variación de las constantes, la solución de $y_2'(t) - y_2(t) = Ce^{2t}$ será $y_2(t) = K(t)e^t$, donde $K(t)$ es una función de t aún sin determinar. Una vez que encontremos esta $K(t)$ conoceremos $y_2(t)$, que, al ser solución de la anterior ecuación, ha de cumplir lo siguiente:

$$\underbrace{(K'(t)e^t + K(t)e^t)}_{y_2'(t)} - \underbrace{(K(t)e^t)}_{y_2(t)} = Ce^{2t} \Leftrightarrow K'(t)e^t = Ce^{2t} \Leftrightarrow K'(t) = Ce^t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dK(t)}{dt} = Ce^t \Leftrightarrow dK(t) = Ce^t dt \Leftrightarrow \int dK(t) = \int Ce^t dt \Leftrightarrow K(t) = Ce^t \Leftrightarrow y_2(t) = \underbrace{Ce^t}_{K(t)} e^t$$

Por tanto, la otra solución particular necesitada es $y_2(t) = Ce^{2t}$ (es válido cualquier valor de la constante C puesto que buscamos una solución particular cualquiera y $e^{2t}, 2e^{2t}, 3e^{2t}, \dots$ son soluciones; por comodidad, escogemos $C = 1$ y con ello $y_2(t) = e^{2t}$).

En definitiva, hemos visto que $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{2t}$ son soluciones particulares de la ecuación $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$ (se puede comprobar fácilmente derivando y sustituyendo); ya dijimos que una solución general de dicha ecuación era una combinación lineal de dos soluciones particulares independientes de la misma, luego esta solución buscada es

Obsérvese que coincide con lo previsto inicialmente.

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

Ahora bien, podemos llegar a la misma solución acudiendo a los sistemas de ecuaciones; en efecto el cambio $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t)$ (sugerido en (b.- 2)) transforma la ecuación $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$ en el siguiente sistema de dos ecuaciones con las incógnitas $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \Rightarrow y_1'(t) = y'(t) \\ y_2(t) &= y'(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1'(t) = y_2(t)$$

Al realizar este cambio el objetivo es escribir las derivadas de las funciones incógnita en función de las propias funciones incógnita.

$$\left. \begin{aligned} y_2(t) = y'(t) &\Rightarrow y_2'(t) = y''(t) \\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 &\Rightarrow y''(t) = -2\underbrace{y(t)}_{y_1(t)} + 3\underbrace{y'(t)}_{y_2(t)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_2'(t) = -2y_1(t) + 3y_2(t)$$

Estas dos últimas igualdades se pueden escribir en una sola de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

de manera que se trata de encontrar la solución del anterior sistema de ecuaciones diferenciales (según lo indicado en (b.- 2).

Estos razonamientos pertenecen al Álgebra Lineal.

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, lo primero que debemos hacer es determinar si la matriz asociada es o no es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Nótese que el polinomio característico de la matriz de (b.- 2) es el mismo que el polinomio característico de la ecuación de (b.-1), con lo que las raíces del primer polinomio son los autovalores de la matriz.

Vemos así que los autovalores asociados a la matriz A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, ambos con multiplicidades algebraicas iguales a uno (por aparecer cada uno de ellos una única vez):

$$m_a(\lambda_1 = 1) = 1 ; \quad m_a(\lambda_2 = 2) = 1$$

Pasemos a hallar los autovectores asociados:

$$\text{Si } \lambda_1 = 1 \Rightarrow A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1=1} &= \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\lambda_1=1} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\} ; \text{ Además, } \dim(S_{\lambda_1=1}) = \text{rango}(A - \lambda_1 I) = 1, \\ &\text{ y por ello la multiplicidad geométrica del autovalor } \lambda_1 = 1 \text{ es } m_g(\lambda_1 = 1) = 1. \end{aligned}$$

Entonces el autovector asociado a $\lambda_1 = 1$ es $\vec{u}_1 = (1, 1)$

$$\text{Si } \lambda_2 = 2 \Rightarrow A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda_2=2} &= \text{Ker}(A - \lambda_2 I) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\lambda_2=2} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\} ; \text{ Además, } \dim(S_{\lambda_2=2}) = \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 1, \\ &\text{ y por ello la multiplicidad geométrica del autovalor } \lambda_2 = 2 \text{ es } m_g(\lambda_2 = 2) = 1. \end{aligned}$$

Entonces el autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es $\vec{u}_2 = (1, 2)$

En definitiva, hemos comprobado que las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden para cada uno de los autovalores de la matriz A :

$$m_a(\lambda_1 = 1) = 1 = m_g(\lambda_1 = 1)$$

$$m_a(\lambda_2 = 2) = 1 = m_g(\lambda_2 = 2)$$

Y esto quiere decir que la matriz A es diagonalizable, luego existe una matriz regular (que admite inversa o cuyo determinante es no nulo) a la que llamamos P tal que se cumple $A = PDP^{-1}$, siendo D diagonal.

Sistema de Ecuaciones con Matriz Diagonalizable.

Dado que la matriz A es diagonalizable, el sistema de ecuaciones que ella define admite como solución a $Y = Pe^{Dt}C$. A continuación se determinan las matrices de esta igualdad:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}: \text{Matriz de soluciones.}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}: \text{Sus columnas son los autovectores de } A.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}: \text{Su diagonal son los autovalores de } A \Rightarrow e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{1t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}: \text{Matriz de constantes.}$$

Se tiene pues:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_Y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} e^{1t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_C = \begin{pmatrix} e^{1t} & e^{2t} \\ e^{1t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{1t} + C_2 e^{2t} \\ C_1 e^{1t} + 2C_2 e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{1t} + C_2 e^{2t} \\ y_2(t) = C_1 e^{1t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos ver que, efectivamente, coincide con la hallada en (b.- 1) y con la prevista al principio.

Puesto que $y_1(t) = y(t)$, la solución que buscamos es

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{1t} + C_2 e^{2t}}$$

Se puede comprobar además que $y'(t) = y_2(t) = C_1 e^{1t} + 2C_2 e^{2t}$.

Por último, pasamos a hallar la solución de la ecuación $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x + x^3$, que, según vimos en el apartado a, era equivalente a resolver la ecuación

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + e^{3t} \quad [2]$$

Principio de Superposición.

El principio de superposición nos permite decir que la solución de [2] será la suma de las dos soluciones correspondientes a las dos siguientes ecuaciones:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t \quad [2.A]$$

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t} \quad [2.B]$$

Método de los
Coeficientes
Indeterminados.

Ambas ecuaciones diferenciales son de coeficientes constantes, de segundo orden y con un polinomio independiente cómodo para hallar una solución particular según el método de los coeficientes indeterminados. Sus soluciones serán la suma de la solución homogénea más una solución particular:

$$\left. \begin{aligned} y_A(t) &= y_A^H(t) + y_A^P(t) \text{ (Solución de [2.A])} \\ y_B(t) &= y_B^H(t) + y_B^P(t) \text{ (Solución de [2.B])} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(t) = y_A(t) + y_B(t) \text{ (Solución de [2])}$$

Además, tienen la misma ecuación homogénea, que precisamente es la protagonista del apartado b y cuya solución ya conocemos, $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, por lo que $y_A^H(t) = y_B^H(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Nos falta pues encontrar las soluciones particulares.

Hay que prestar especial atención en esta solución particular. El coeficiente de t en el exponente coincide con una raíz del polinomio característico, por lo que multiplicamos por t elevado a la multiplicidad de dicha raíz.

El término independiente de [2.A] es $q_A(t) = e^t$, y el método de los coeficientes indeterminados nos sugiere tomar una solución particular de la forma $y_A^P(t) = Ate^t$. Dado que $y_A^P(t)$ es solución de [2.A], cumplirá lo dicho en la ecuación, luego

$$\underbrace{Ae^t(t+2)}_{y''(t)} - 3\underbrace{Ae^t(t+1)}_{3y'(t)} + \underbrace{2Ate^t}_{2y(t)} = e^t \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow y_A^P(t) = -te^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - te^t$$

El término independiente de [2.B] es $q_B(t) = e^{3t}$, y el método de los coeficientes indeterminados nos sugiere tomar una solución particular de la forma $y_B^P(t) = Be^{3t}$. Dado que $y_B^P(t)$ es solución de [2.B], cumplirá lo dicho en la ecuación, luego

$$\underbrace{(9Be^{3t})}_{y''(t)} - 3\underbrace{(3Be^{3t})}_{3y'(t)} + \underbrace{2(Be^{3t})}_{2y(t)} = e^{3t} \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow y_B^P(t) = \frac{1}{2}e^{3t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Entonces $y(t) = y_A(t) + y_B(t) \Rightarrow y(t) = 2C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - te^t + \frac{1}{2}e^{3t}$. Como $2C_1 = cte$, $2C_2 = cte$, podemos escribir $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - te^t + \frac{1}{2}e^{3t}$, y deshaciendo el cambio, $t = \ln(x)$, se tiene:

$$y(x) = C_1 e^{\ln(x)} + C_2 e^{2\ln(x)} - e^{\ln(x)} \ln(x) + \frac{1}{2} e^{3\ln(x)} =$$

$$= C_1 e^{\ln(x)} + C_2 e^{\ln(x^2)} - e^{\ln(x)} \ln(x) + \frac{1}{2} e^{\ln(x^3)} \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 x^2 - x \ln(x) + \frac{1}{2} x^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La Solución de $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x + x^3$ es

$$y(x) = (C_1 - \ln(x))x + C_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3$$

Se puede comprobar que es solución de [1] sin más que derivando y sustituyendo.

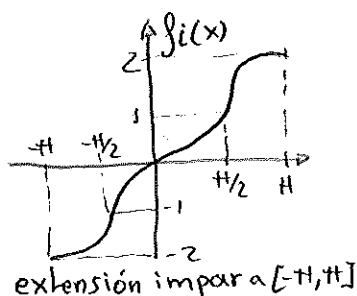
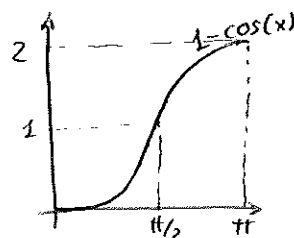
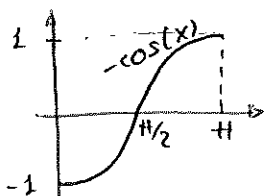
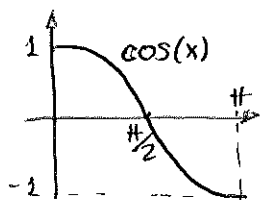
Septiembre 2005
Ejercicio 1

Sea la función $f(x) = 1 - \cos(x)$.

- Justifique que f puede ser representada en $[0, \pi]$ mediante un desarrollo de Fourier de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$. Coméntese la convergencia de la serie en todos los puntos de $[0, \pi]$.
- Calcule los coeficientes a_n .
- Si pensamos en la base tradicional de Fourier, $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n \in \mathbb{N}\}$, donde todos sus elementos son linealmente independientes, ¿cómo se explica que podamos expresar $\cos(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = 1$, es decir, representar uno de ellos (la función 1) como suma de otros elementos de esa base?

Ver: sep 00 - ej. 3 - ap. a

Si extendemos la función $f(x) = 1 - \cos(x)$ de forma impar del intervalo $[0, \pi]$ al intervalo $[-\pi, \pi]$ obtendremos la llamada $f_i(x)$, que será extendida de forma periódica de periodo $T = 2\pi$ a todo $\mathbb{R}$, y admitirá por tanto DSF, el cual en $[0, \pi]$ será el desarrollo de $f(x) = 1 - \cos(x)$ y dada la imparidad solamente contendrá senos. Gráfica y analíticamente queda:



$$f_i(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & 0 < x < \pi \\ \cos(x) + 1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{c_n}_{a_n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum \underbrace{d_n}_{a_n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)$$

Cambio de nomenclatura imprevista por el enunciado. Habitualmente, los coef. que multiplican a los senos son llamados b_n , pero en el enunciado nos exigen que sea a_n , que a su vez son los que habitualmente van con senos.

Para evitarlo: cambiamos esta nomenclatura en el DSF

$$C_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_i(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}_{\text{par}} dx \Rightarrow C_n = 0$$

$$C_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_i(x)}_{\text{impar}} dx \Rightarrow C_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_i(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}_{\text{impar}} dx = \frac{2}{T} 2 \int_0^{T/2} f_i(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx ; T=2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(x)) \sin(nx) dx$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \text{ siendo } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(x)) \sin(nx) dx$$

DSF sólo contiene senos por contener una función impar ($f_i(x)$)
Recordamos que T es la amplitud del intervalo en el que está definida esta función impar, que en este caso es $[-\pi, \pi]$ cuya longitud es 2π

$$b) a_n = \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\pi} \sin(nx) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx) dx}_{I_2} \right]$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx) dx = \frac{\cos(x) \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx}_{I_3}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = \sin(nx) dx \rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{\sin(x) \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx) dx}_{I_2}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \sin(x) \rightarrow du = \cos(x) dx \\ dv = \cos(nx) dx \rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{n} [1 + (-1)^n] - \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} I_2 \right]; I_2 = \frac{n}{n^2 - 1} [1 + (-1)^n]$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{n} [1 - (-1)^n]}_{I_1} - \underbrace{\frac{n}{n^2 - 1} [1 + (-1)^n]}_{I_2} \right]} \Rightarrow \begin{cases} n=2k \Rightarrow a_{2k} = \frac{-4 \cdot 2k}{\pi (2k)^2 - 1} = \frac{8k}{\pi (1 - 4k^2)} \\ n=2k-1 \Rightarrow a_{2k-1} = \frac{4}{\pi (2k-1)} \quad (k \neq 1) \end{cases}$$

Para $n=1$ vemos que la expresión de a_n no es válida, pues uno de los denominadores se hace cero, así pues a_1 ha de calcularse aparte. Estos casos especiales surgen cuando en la expresión de la función cuyo DSF calculamos aparecen términos trigonométricos.

$$\boxed{a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(x)) \sin(1 \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx \right] = \frac{4}{\pi}}$$

Septiembre 2005
Ejercicio 3

- a) Construya un método numérico unipaso para la resolución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ que, para avanzar la solución desde x_i hasta $x_{i+1} = x_i + h$ tome como pendiente de la función la media de las pendientes en $x_i + \frac{h}{4}$ y en $x_{i+1} = x_i + \frac{3h}{4}$, y que, para la estimación de $y\left(x_i + \frac{h}{4}\right)$ e $y\left(x_i + \frac{3h}{4}\right)$ utilice el método de Euler básico aplicado en ambos casos desde x_i (es decir, con longitudes de paso $\frac{h}{4}$ y $\frac{3h}{4}$, respectivamente).

- b) Escribe el algoritmo resultante en forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + \dots + a_r k_r,$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas del método?

- c) Resuelva el problema de valor inicial

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) PVI: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Método numérico unipaso: $y_{i+1} = y_i + \delta y_i$

Se trata de saber quién es δy_i (media de las pendientes de la función solución del PVI $y(x)$ en los puntos $x_i + \frac{h}{4}$ y $x_i + \frac{3h}{4}$ (multiplicamos esa media por h))

Pendiente de $y(x)$ en $x_i + \frac{h}{4}$: $y'(x_i + \frac{h}{4}) = f(x_i + \frac{h}{4}, y(x_i + \frac{h}{4}))$
 Pendiente de $y(x)$ en $x_i + \frac{3h}{4}$: $y'(x_i + \frac{3h}{4}) = f(x_i + \frac{3h}{4}, y(x_i + \frac{3h}{4}))$

Media = $\frac{f(x_i + \frac{h}{4}, y(x_i + \frac{h}{4})) + f(x_i + \frac{3h}{4}, y(x_i + \frac{3h}{4}))}{2}$

$\delta y_i = h \left[\frac{f(x_i + \frac{h}{4}, y(x_i + \frac{h}{4})) + f(x_i + \frac{3h}{4}, y(x_i + \frac{3h}{4}))}{2} \right]$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[\underbrace{f(x_i + \frac{h}{4}, y(x_i + \frac{h}{4}))}_{\text{valores desconocidos}} + \underbrace{f(x_i + \frac{3h}{4}, y(x_i + \frac{3h}{4}))}_{\text{valores desconocidos}} \right]$

Los dos valores surgen de sustituir $x_i + \frac{h}{4}$ y $x_i + \frac{3h}{4}$ en la expresión de $y(x)$, que a su vez se obtendría resolviendo analíticamente el PVI. Como esto último a veces no es posible, probablemente no sepamos quién es $y(x)$, y por tanto desconozcamos $y(x_i + \frac{h}{4})$ y $y(x_i + \frac{3h}{4})$, por eso son valores desconocidos. Los estimamos según indican en el enunciado.

→ Estimación de $y(x_i + \frac{h}{4})$:

$$X_{i+j} = X_i + jh$$

$$y(x_i + \frac{h}{4}) = y(x_i + \frac{1}{4}h) \approx y_{i+\frac{1}{4}}$$

longitud de paso $h/4$

$$y_{i+\frac{1}{4}} = y_i + \frac{1}{4}h f(x_i, y_i)$$

estimación de y_i

El enunciado nos pide:

Euler básico

$$y_{i+j} = y_i + jh f(x_i, y_i)$$

→ Estimación de $y(x_i + \frac{3h}{4})$:

$$y(x_i + \frac{3h}{4}) = y(x_i + \frac{3}{4}h) \approx y_{i+\frac{3}{4}} = y_i + \frac{3h}{4} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{4} f(x_i, y_i)) + f(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3h}{4} f(x_i, y_i)) \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h \underbrace{f(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}h f(x_i, y_i))}_{k_1} + \frac{1}{2}h \underbrace{f(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3}{4}h f(x_i, y_i))}_{k_2}$$

b)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 \quad \begin{cases} k_1 = h f(x_i, y_i) \\ k_2 = h f(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_1) \\ k_3 = h f(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3}{4}k_1) \end{cases}$$

→ método de Runge-Kutta de 3 etapas (3 evaluaciones por paso)

Junio 2006
Ejercicio 2

La corriente de un circuito RL viene dada por la solución del problema de valor inicial (PVI)

$$L(t) \frac{dI}{dt} + I = e(t) \quad , \quad t \in [0, a] \quad [1]$$

$$I(0) = I_0 \quad [2]$$

donde $e(t)$ es la tensión proporcionada por el generador, I es la tensión en bornas de una resistencia de valor unidad y $L(t) \frac{dI}{dt}$ es la tensión en bornas de una bobina, cuya inductancia depende del tiempo según

$$L(t) = 1 - \frac{t}{a} ; 0 \leq t < a, \text{ donde } a > 1$$

- ¿Qué estructura algebraica tiene el conjunto de todas las posibles soluciones de la ecuación [1]?
- Analice la existencia y unicidad de soluciones del (PVI) [1]-[2] en $t \in [0, a)$.
- Resuelva la ecuación [1] para el caso $e(t) = 0$ en $t \in [0, a)$.
- Resuelva el (PVI) para el caso $I_0 = 0$ y $e(t) = 1$ en $t \in [0, a)$.

$$L(t) I'(t) + I(t) = e(t) \quad \text{con } L(t) = 1 - \frac{t}{a} ; 0 \leq t < a, a > 1$$

$$\left(1 - \frac{t}{a}\right) I'(t) + I(t) = e(t)$$

$$\frac{a-t}{a} I'(t) + I(t) = e(t) \Leftrightarrow I'(t) + \frac{a}{a-t} I(t) = \frac{a}{a-t} e(t)$$

EDO lineal de 1er orden

En el apartado d) nos piden resolver un PVI cuya EDO es: $I'(t) + \frac{a}{a-t} I(t) = \frac{a}{a-t}$ pues $e(t) = 1$. Para resolverla deberemos primero resolver la homogénea asociada, que es: $I'(t) + \frac{a}{a-t} I(t) = 0$ (que surge de $e(t) = 0$). Resolviendo la homogénea habremos respondido al c).

$$c) I'(t) + \frac{a}{a-t} I(t) = 0$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{a}{a-t} I(t) = \frac{a}{t-a} I(t) \Rightarrow \int \frac{dI(t)}{I(t)} = \int \frac{a}{t-a} dt \Rightarrow$$

$$\ln |I(t)| = a \cdot \ln |t-a| + C \Rightarrow I(t) = e^{a \ln |t-a| + C} = e^{\ln(t-a)^a} \cdot e^C$$

$I(t) = C_1 (t-a)^a$ es solución a la homogénea

$$d) I'(t) + \frac{a}{a-t} I(t) = \frac{a}{a-t} \quad (e(t) = 1)$$

método de variación de la constante

$$I_H(t) = C(t-a)^a \text{ (solución de la homogénea)}$$

$$I(t) = C(t)(t-a)^a \text{ (solución de la completa)}$$

al ser $I(t)$ solución de la completa, sustituyéndola a ella y a sus derivadas en la EDO se verificará lo dicho en ella.

$$\underbrace{C'(t)(t-a)^a + C(t)a(t-a)^{a-1}}_{I'(t)} + \frac{a}{a-t} C(t)(t-a)^a = \frac{a}{a-t}$$

$$C'(t)(t-a)^a + C(t)a(t-a)^{a-1} - \frac{a}{t-a} C(t)(t-a)^a = \frac{a}{a-t}$$

$$C'(t)(t-a)^a + \cancel{C(t)a(t-a)^{a-1}} - \cancel{aC(t)(t-a)^{a-1}} = \frac{a}{a-t}$$

$$C'(t)(t-a)^a = \frac{a}{a-t} = -a(t-a)^{-1}$$

$$C'(t) = -a(t-a)^{-(a+1)}$$

$$C(t) = -a \int (t-a)^{-(a+1)} dt = -a \frac{(t-a)^{-a-1+1}}{-a-1+1} + C$$

$$C(t) = (t-a)^{-a} + C \Rightarrow I(t) = C(t)(t-a)^a$$

$$I(t) = [(t-a)^{-a} + C](t-a)^a$$

$$I(t) = 1 + C(t-a)^a \text{ es solución de la EDO completa}$$

$$\text{Condición inicial: } I(0) = 0$$

$$I(0) = 0 = 1 + C(t-a)^a \Rightarrow C = \frac{-1}{(-a)^a} \Rightarrow I(t) = 1 - \frac{1}{(-a)^a} (t-a)^a$$

$$I(t) = 1 - \left[1 - \frac{t}{a}\right]^a \text{ solución del P.V.I}$$

Septiembre 2006
Ejercicio 1

a) Sea f una función periódica de periodo 2π cuya serie trigonométrica de Fourier

es $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$. Enuncie la identidad de Parseval.

b) ¿Existe una función $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ cuyos coeficientes de Fourier sean

$$a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0 = 0?$$

c) Halle la serie de Fourier de la función $g(t) = \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

d) Analice la convergencia de la serie obtenida.

e) A partir del resultado del apartado c, compruebe que $\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

$$\begin{aligned} \text{C) } g(t) &= \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3) \text{ en } [-\pi, \pi] \Rightarrow g(-t) = \frac{1}{12}[\pi^2(-t) - (-t)^3] = -g(t) \\ G(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad \text{IMPAR} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{g(t)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}_{\text{par}} dt \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} \text{impar} = 0 = a_n \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{g(t)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}_{\text{impar}} dt = \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{T/2} g(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad a_0 = 0 \text{ (impar)} \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3) \sin(nt) dt = \frac{1}{6\pi} \left[\pi^2 \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt - \int_0^{\pi} t^3 \sin(nt) dt \right] \\ I_1 &= \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{t \cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \\ &\quad \left[u = t \rightarrow du = dt \right. \\ &\quad \left. dv = \sin(nt) dt \rightarrow v = -\frac{\cos(nt)}{n} \right] \\ I_1 &= \frac{t \cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = \frac{-\pi (-1)^n}{n} = \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n} \\ I_2 &= \int_0^{\pi} t^3 \sin(nt) dt = \frac{t^3 \cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} 3t^2 dt \\ &\quad \left[u = t^3 \rightarrow du = 3t^2 dt \right. \\ &\quad \left. dv = \sin(nt) dt \rightarrow v = -\frac{\cos(nt)}{n} \right] \\ I_2 &= -\left(\frac{\pi^3 \cos(n\pi)}{n} \right) + \frac{3}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) t^2 dt = \frac{\pi^3 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi (-1)^n}{n^3} \\ I_3 &= \int_0^{\pi} \cos(nt) t^2 dt = \frac{t^2 \sin(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{2}{n} I_1 = \frac{+2\pi (-1)^n}{n^2} \\ b_n &= \frac{1}{6\pi} \left[\pi^2 \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n} - \left(\frac{\pi^3 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi (-1)^n}{n^3} \right) \right] = \frac{(-1)^n}{n^3} \quad \left[G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nt) \right] \end{aligned}$$

$$e) G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}(nt) = \frac{1}{1^3} \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2^3} \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{3^3} \operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{4^3} \operatorname{sen}(4t) + \dots$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{1^3} \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{3^3} \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5^3} \operatorname{sen}(5t) + \dots \right]}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}[(2n-1)t]} - \underbrace{\left[\frac{1}{2^3} \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4^3} \operatorname{sen}(4t) + \dots \right]}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} \operatorname{sen}(2nt)}$$

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}((2n-1)t) - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}(2nt)$$

Para $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{El DSF queda: } G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}(n\pi) \\ G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \underbrace{\operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^{n+1}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ (-1)^{n+1}, & k = 2n-1 \end{cases} \\ \text{El DSF queda: } G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \\ \text{El DSF converge puntualmente a } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32} \end{array} \right.$

Dado que $g(t)$ es una función polinómica, resulta que es continua en $[-\pi, \pi]$, lo que provoca que las gráficas del DSF y de g en $[-\pi, \pi]$ coincidan, en consecuencia, el DSF en $\pi/2$ toma el valor $g(\pi/2)$.

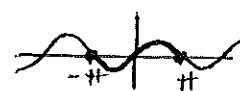
d) Convergencia en norma:

El sistema trigonométrico $\{1, \cos(nt), \operatorname{sen}(nt)\}$ es ortogonal y completo en $[-\pi, \pi]$ lo que supone que el DSF converja en norma en $[-\pi, \pi]$

Convergencia uniforme:

El DSF converge uniformemente a la función g en todo cerrado donde g sea continua.

Evidentemente g es continua en $(-\pi, \pi)$. Veamos lo que ocurre en los extremos: $g(\pi) = 0$, por la imparidad, $g(-\pi) = -g(\pi) = 0$. Esto provoca que a la hora de construir la extensión periódica de periodo 2π a todo $\mathbb{R}$ de $g(t)$, haya solapamiento en los puntos de la forma $(2k-1)\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ hecho que comprobamos a continuación (la gráfica no es real, sólo es un mero esbozo):

El DSF converge uniformemente a g en $[-\pi, \pi]$ cerrado  () solapamiento

Convergencia puntual:

Por lo dicho anteriormente, la extensión periódica de g es continua en todo $\mathbb{R}$ y el DSF converge puntualmente a ella en todo $\mathbb{R}$. En particular, el DSF converge puntualmente en $[-\pi, \pi]$

a) Sea f una función periódica de periodo 2π con DSF $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$. entonces la identidad de Parseval es la siguiente:

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle f(t), f_i(t) \rangle}{\langle f_i(t), f_i(t) \rangle} \right|^2 \langle f_i(t), f_i(t) \rangle$$

$$\|f(t)\|^2 = \left| \frac{1}{2} a_0 \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \underbrace{\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle}_{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \underbrace{\langle \sin(nt), \sin(nt) \rangle}_{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt}$$

$$\|f(t)\|^2 = \left| \frac{1}{2} a_0 \right|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nt)}{2} dt \quad \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2nt)}{2} dt$$

b) Sustituyendo la identidad de Parseval $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_0 = 0$ obtenemos:

$$\|f(t)\|^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 \right]$$

$$\|f(t)\|^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 2\pi \infty = \infty \Rightarrow \text{Si existiese tal función con dichos coeficientes su norma sería infinito, por lo que No existe tal función.}$$

E.T.S.I.
Telecomunicación
Septiembre 2006
Ejercicio 2

Sea la E.D.O. lineal de segundo orden $xy''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0$.

- a) Halle la solución del tipo $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ correspondiente a la raíz mayor de la ecuación indicial y particularícela para $a_0 = \frac{1}{2}$. (2.0 puntos)
- b) Resuélvala buscando dos soluciones particulares de la forma $y_1(x) = e^{rx}$, $y_2(x) = (x-1)^n$. (0.5 puntos)
- c) Expresando la solución general de la E.D.O. como $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, halle los valores de A y B que la hagan coincidir con la solución particular hallada en el apartado a. (1.0 puntos)

SOLUCIÓN

Se trata de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) lineal, de segundo orden, homogénea y con coeficientes no constantes. Comenzamos identificando los coeficientes de la función $y(x)$ y de sus derivadas, y el término independiente:

$$xy''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0 \Rightarrow y''(x) + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{p(x)} y'(x) - \underbrace{\frac{1}{x}}_{q(x)} y(x) = \underbrace{0}_{g(x)}$$

Como $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$ es solución, sabemos que satisface la E.D.O. Hallamos $y'(x)$ e $y''(x)$ derivando y sustituimos en la ecuación:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1} \\ y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} \end{cases}$$

$$\underbrace{x \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}}_{xy''(x)} + \underbrace{(x-1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1}}_{(x-1)y'(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}}_{y(x)} = 0$$

Llegados a este punto, siempre continuaremos dando tres pasos: primero introduciremos dentro de los sumatorios todos los coeficientes que éstos lleven delante; segundo, buscaremos igualar en todos los sumatorios los exponentes de $(x-x_0)$; y tercero, igualaremos también los índices de los sumatorios resultantes.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-1}}_{xy''(x)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r}}_{(x-1)y'(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1}}_{y'(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}}_{y(x)} = 0$$

Los exponentes de $(x-x_0) = x$ son $k+r-1$ y $k+r$. Los primeros pasarán a ser como los segundos sin más que realizar el siguiente cambio:

$$\left(\begin{array}{l} k+r-1 \rightarrow k+r \\ k \rightarrow k+1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} (k+r+1)(k+r) x^{k+r} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} (k+r+1) x^{k+r} \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\underbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)(k+r)x^{k+r}}_{xy''(x)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+r)x^{k+r}}_{xy'(x)} - \underbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)x^{k+r}}_{y'(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}}_{y(x)} = 0$$

Ahora hemos de hacer que en todos los sumatorios, el parámetro k comience a tomar valores en el mismo punto. En el primero y en el tercero, empieza con -1; en el segundo y en el cuarto comienza con 0, luego se tiene:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)(k+r)x^{k+r}}^{1^{\text{er}} \text{ Sumatorio}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+r)x^{k+r} - \\ & - \left(\overbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)x^{k+r}}^{3^{\text{er}} \text{ Sumatorio}} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos reunir todos los sumatorios en uno único y nos queda fuera de él otro término, el que recibe el nombre de polinomio indicial:

$$\underbrace{a_0 x^{r-1} r(r-2)}_{\text{Polinomio Indicial}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(a_{k+1}(k+r+1)(k+r) + a_k(k+r) - a_{k+1}(k+r+1) - a_k) x^{k+r} \right] = 0$$

Las raíces de este polinomio indicial son $r=0$ y $r=2$. El mismo enunciado nos sugiere considerar la mayor de las raíces y descartar la menor, de modo que de ahora en adelante haremos $r=2$. Introduciendo este valor en el término de dentro del sumatorio e igualando a cero obtenemos:

$$(a_{k+1}(k+3)(k+2) + a_k(k+2) - a_{k+1}(k+3) - a_k) = 0$$

Recordemos que el objetivo era hallar los a_k . Se puede estar tentado a despejar este valor directamente de las ecuaciones de una forma diferente a la descrita, pero sería erróneo. Siempre lo haremos según el modo en que hemos desarrollado el problema.

En este punto despejaremos siempre el término con mayor subíndice (en nuestro caso, a_{k+1}) en función del resto. Operando, llegamos a

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{(k+3)}$$

Haciendo el cambio $k+1 \rightarrow k$ conseguiremos tener la expresión para los a_k :

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{(k+2)}$$

Esta igualdad relaciona cada a_k con el anterior, pero queremos una expresión más general en la que cada a_k esté relacionado con un único valor a_{k_0} . La buscamos dando valores:

$$k=1 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{3}$$

$$k=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{4} = -\frac{-\frac{a_0}{3}}{4} = \frac{a_0}{4 \cdot 3}$$

Puesto que $a_0 = \frac{1}{2}$, tenemos que $a_1 = -\frac{1}{3 \cdot 2}$, $a_2 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}$, ..., y en general:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k+2)!}$$

Con esta solución bastaría para contestar al primer apartado, pero la desarrollaremos para escribirla de otra manera y relacionarla con los siguientes apartados.

Con ello, la solución de la E.D.O. queda como sigue:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+2)!} x^{k+2} = \frac{1}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

Haciendo un nuevo cambio de variable, $k+2 \rightarrow k$, o bien observando el anterior desarrollo, se tiene:

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

Es conveniente, por no decir vital, recordar los polinomios de Taylor de las funciones elementales.

Acudimos al desarrollo de Taylor de e^{-x} :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

De tal modo que, despejando, tenemos

$$e^{-x} + (x-1) = \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = y(x)$$

Por lo que concluimos que

$$\boxed{y(x) = e^{-x} + (x-1)}$$

Ahora el objetivo es hallar $C_1(x)$ y $C_2(x)$

El apartado b nos da dos soluciones particulares de la E.D.O., $y_1(x)$ e $y_2(x)$, y nos pide la solución general. Sabemos que ésta tiene la forma $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.

No hay que confundir la r del exponente de la solución particular con la r del polinomio indicial: no son lo mismo, han llamado con la misma letra a cosas diferentes.

$y_1(x) = e^{-rx}$ es solución de la E.D.O, luego la satisface:

$$\underbrace{xr^2 e^{-rx}}_{y_1''(x)} - \underbrace{r(x-1)e^{-rx}}_{(x-1)y_1'(x)} - \underbrace{e^{-rx}}_{y_1(x)} = 0 \Rightarrow xr^2 - r(x-1) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4x}}{2x} = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(x+1)^2}}{2x} = \frac{(x-1) \pm (x+1)}{2x}$$

El signo negativo nos conduce a $r = \frac{-1}{x}$, con lo que la solución sería $y_1(x) = e$, lo cual es falso: sustituyendo en la E.D.O. queda $x \cdot 0 + (x-1) \cdot 0 - e = -e \neq 0$. Descartamos esta opción.

El signo positivo nos lleva a $r = 1$, y la solución sería $y_1(x) = e^{-x}$. Esta solución es cierta, se puede comprobar sin más que sustituyendo en la E.D.O.

Procedemos de manera similar para la otra solución particular: si $y_2(x) = (x-1)^n$ es solución de la E.D.O, cumple lo siguiente:

$$xn(n-1)(x-1)^{n-2} + n(x-1)(x-1)^{n-1} - (x-1)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xn(n-1)(x-1)^{n-2} + (n-1)(x-1)^n = 0$$

Tomando $n=1$ se satisface y por ello concluimos que $y_2(x) = (x-1)$ es la otra solución particular de la E.D.O. (podemos comprobarlo derivando, igual que para la otra solución particular).

Entonces tenemos lo siguiente:

Soluciones particulares: $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = (x-1)$

Solución general: $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)(x-1)$

Las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ las hallaremos resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(x-1) = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x) = 0 \end{cases}$$

Fácilmente se obtiene $C_1'(x) = C_2'(x) = 0$, luego $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son constantes:

$$C_1(x) = A \quad ; \quad C_2(x) = B$$

Y la solución general queda:

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = Ae^{-x} + B(x-1)}$$

En resumen:

Apartado a: Solución $y(x) = e^{-x} + (x-1)$

Apartado b: Solución $y(x) = Ae^{-x} + B(x-1)$

Para que ambas soluciones coincidan, según exige el apartado c, las dos constantes han de ser la unidad:

$$\boxed{A = B = 1}$$

NOTAS

No nos exigen demostrar que $x_0 = 0$ es singular-regular. La demostración sería imprescindible si nos pidieran la solución en serie centrada en $x_0 = 0$ y no nos dieran la expresión de $y'(x)$, puesto que en ese caso tendríamos que decidir qué forma tiene dicha solución.

1.- La solución pedida en el apartado a, $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, es una serie de potencias de x (serie centrada en $x_0 = 0$). Esta expresión es la correspondiente a una solución cuyo centro es un punto singular-regular de la E.D.O. A continuación demostramos que, efectivamente, $x_0 = 0$ es un punto singular-regular:

- Siempre que tratamos de resolver una E.D.O. por series de potencias comenzamos por hacer 1 el coeficiente de $y''(x)$. Para ello, dividimos entre x :

$$xy''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0 \Rightarrow y''(x) + \frac{x-1}{x}y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 0$$

- Llamamos $p(x)$ y $q(x)$ a las funciones que multiplican a $y'(x)$ y a $y(x)$ respectivamente; $g(x)$ será el término independiente:

$$p(x) = \frac{x-1}{x} \quad ; \quad q(x) = -\frac{1}{x} \quad ; \quad g(x) = 0$$

- Vemos que en $x_0 = 0$ estas dos funciones no son analíticas (no son ni continuas ni derivables), por lo que $x_0 = 0$ es un punto singular de la E.D.O.
- Calculamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x-1}{x} = -1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Por ser ambos finitos, el punto singular $x_0 = 0$ es también regular.

Al tratarse $x_0 = 0$ de un punto singular-regular de la E.D.O, la solución de la misma, escrita en serie de potencias centrada en dicho punto tiene la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Es muy habitual que nos pidan el radio de convergencia de la serie, aunque aquí no lo hacen.

2.- El radio de convergencia de la serie es la distancia desde el centro de la serie, $x_0 = 0$, al punto singular más próximo a x_0 que no sea el mismo x_0 . En nuestro caso, no hay punto singular distinto del centro, y por ello esta distancia es infinita: el radio de convergencia es infinito y la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

Podrían habernos pedido que solucionásemos la E.D.O. sin acudir a las series y sin darnos ninguna de las soluciones particulares.

3.- Nos aportaban como dato que $y_1(x) = e^{-x}$ es una solución particular de la E.D.O. Lo podíamos saber de antemano, puesto que la suma de los coeficientes de $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$, alternando signos positivos y negativos, es nula:

$$xy''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0 \Rightarrow +x - (x-1) + (-1) = 0 \Rightarrow \text{Una solución particular es } e^{-x}$$

Gracias a esta solución, podríamos hallar la otra a través de la fórmula de Liouville:

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & y_2(x) \\ -e^{-x} & y_2'(x) \end{vmatrix} = (y_2'(x) + y_2(x))e^{-x}$$

$$W(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{x-1}{x}dx} = e^{\ln(x)-x} = xe^{-x}$$

Igualando Wronskianos encontramos una E.D.O. lineal de primer orden,

$$(y_2'(x) + y_2(x))e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow (y_2'(x) + y_2(x))e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow y_2'(x) + y_2(x) = x,$$

cuya solución abordamos a través del método de variación de las constantes:

- Solución de la E.D.O. homogénea: $y_2^H(x)$

$$y_2'(x) + y_2(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} + y_2 = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{y_2} = -dx \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = \int -dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(y_2(x)) = -x + C \Rightarrow y_2(x) = e^{-x+C} = e^{-x}e^C = Ce^{-x} \Rightarrow y_2^H(x) = Ce^{-x}$$

- La solución completa será entonces $y_2(x) = C(x)e^{-x}$ (haciendo variar la constante) y cumplirá la E.D.O. $y_2'(x) + y_2(x) = 0$:

$$\underbrace{(C'(x) - C(x))e^{-x}}_{y_2'(x)} + \underbrace{C(x)e^{-x}}_{y_2(x)} = x \Rightarrow C'(x)e^{-x} = x \Rightarrow C'(x) = xe^x \Rightarrow$$

Integrando por partes, $\int u dv = uv - \int v du$, con $\begin{pmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{pmatrix}$, llegamos a

$$C(x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \Rightarrow C(x) = (x-1)e^x + C$$

Por tanto, se tiene como solución completa a la siguiente familia de curvas:

$$y_2(x) = C(x)e^{-x} = ((x-1)e^x + C)e^{-x} \Rightarrow y_2(x) = (x-1) + Ce^{-x}$$

Vemos que cualquiera de las infinitas funciones de la forma $y_2(x) = (x-1) + Ce^{-x}$ son soluciones de la E.D.O. inicial $xy''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0$. Tomando $C = 0$ obtenemos $y_2(x) = (x-1)$, que es precisamente la indicada en el enunciado (para $n=1$) y que ha sido hallada anteriormente.

Septiembre 2006
Ejercicio 3

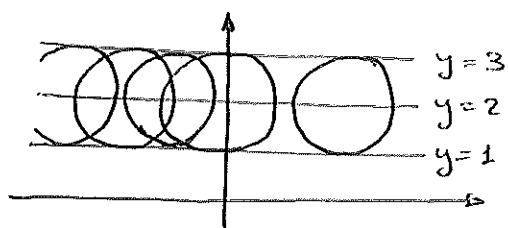
- a) Halle la ecuación de la familia de curvas tal que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera (x, y) sea la mitad de la pendiente de la recta que une el origen con ese punto.
- b) ¿Tienen las ecuaciones diferenciales cuyas familias de curvas solución son $(x-C)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $y = 1 + (x-C)^3$ alguna solución singular común? ¿Y alguna solución singular exclusiva de una de las familias? (dedúzcalo dibujando de forma aproximada las familias de curvas)

similar 8605

b)

* Familia de soluciones: (de la EDO1)

$$(x-C)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad \text{circunferencias: } \begin{cases} \text{centro } (C, 2) \\ \text{radio} = 1 \end{cases}$$



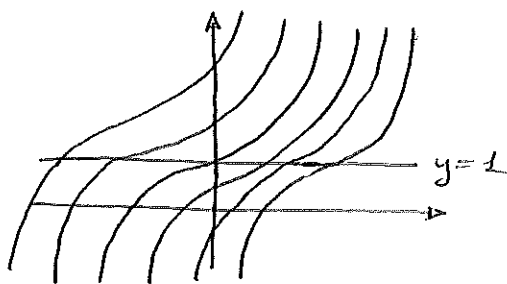
Por cada punto $(x_0, 3)$ de la recta $y=3$ pasa una circunf. de la familia con ecuación $(x-x_0)^2 + (y-2)^2 = 1$

En cada punto de contacto $(x_0, 3)$, la circunferencia anterior e $y=3$ comparten tangente, que es $y=3$. Por los dos motivos: $y=3$ es solución de la EDO1.

Llevando $y=3$ a la igualdad $y' = f_1(x, y(x))$ se cumple lo dicho en ella. Por los mismos razonamientos $y=1$ también es solución singular de la EDO1.

* Familia de soluciones: (de la EDO2)

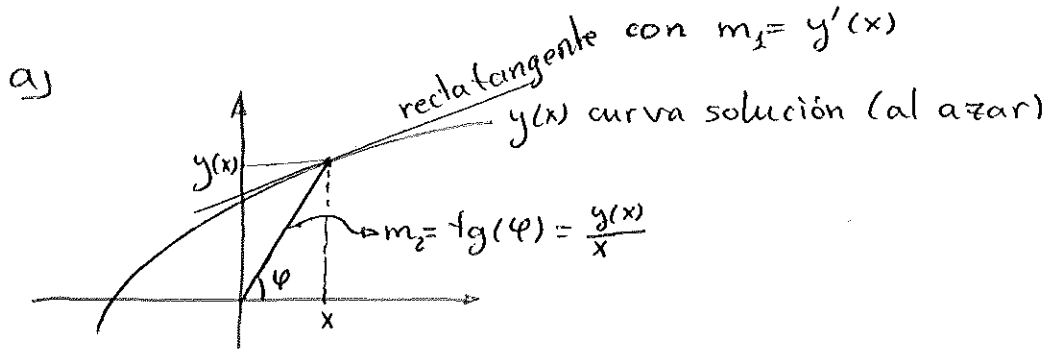
$$y = 1 + (x-C)^3$$



La recta $y=1$ cumple los dos requisitos imprescindibles y necesarios

Por cada punto de $y=1$ pasa una curva de la familia, y en ese punto ambas comparten tangente, que de hecho es $y=1$.

SOLUCIÓN: Las soluciones de la EDO1 son $y=3$ e $y=1$. Las soluciones de la EDO2 son $y=1$. Así pues $y=1$ es solución singular común e $y=3$ es solución singular en exclusiva de la EDO1



$$\left. \begin{array}{l} m_1 = y'(x) \\ m_2 = \frac{y(x)}{x} \end{array} \right\} m_1 = \frac{1}{2} m_2 ; y'(x) = \frac{y(x)}{2x}$$

Era evidente que teníamos que manejar una EDO en la que apareciese $y'(x)$. De hecho, nos hablan de pendientes y tangentes las cuales hacen aparecer $y'(x)$. Nuestro objetivo será buscar $y'(x)$.

$$2y'(x) = \frac{y(x)}{x} ; 2\frac{dy}{dx} = \frac{y(x)}{x} ; \frac{2}{y(x)} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln |y(x)| = \ln |x| + C \Rightarrow \ln |y(x)|^2 = \ln |x| + C$$

$$e^{\ln |y(x)|^2} = e^{\ln |x|} \cdot e^C \Rightarrow (y(x))^2 = C \cdot x$$

$$y(x) = \sqrt{Cx} = \sqrt{C} \sqrt{x} = C \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y(x) = C \sqrt{x}}$$

Junio 2007
Ejercicio 1

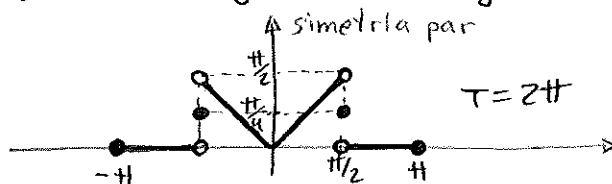
Sea $f_p(x)$ la extensión par $[-\pi, \pi]$, de la función

$$f(x) = xu(g(x)), x \in [0, \pi], \text{ donde } g(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(x), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}, u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

- Represente $f_p(x)$.
- Obtenga el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de periodo 2π de $f_p(x)$
- Analice la convergencia puntual y uniforme de la serie obtenida.
- A partir de los resultados anteriores, calcule el valor de la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\begin{aligned} x \in (0, \frac{\pi}{2}) &\Rightarrow g(x) = \sin(x) > 0 \Rightarrow u(g(x)) = 1 \Rightarrow x \cdot u(g(x)) = x \cdot 1 \Rightarrow f(x) = x \\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) &\Rightarrow g(x) = \cos(x) < 0 \Rightarrow u(g(x)) = 0 \Rightarrow x \cdot u(g(x)) = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow g(x) = g(0) = \sin(0) = 0 \Rightarrow u(g(x)) = u(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow xu(g(x)) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow g(x) = g(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u(g(x)) = u(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow xu(g(x)) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} \\ x = \pi &\Rightarrow g(x) = g(\pi) = \cos(\pi) = -1 \Rightarrow u(g(x)) = 0 \Rightarrow xu(g(x)) = \pi \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$



b)

$$\frac{DSF}{T=2\pi}$$

$$f_p(x) \text{ par} \Rightarrow b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_p(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos(nx) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos(nx) dx = \left. \frac{x \sin(nx)}{n} \right|_0^{\pi/2} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} [\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1]$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2} [\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1]$$

$$a_{4k} = \frac{1}{4k} \cdot 0 + \frac{2}{\pi(4k)^2} [1 - 1] = 0$$

$$a_{4k-1} = \frac{1}{4k-1} (-1) + \frac{2}{\pi(4k-1)^2} [0 - 1] = -\left[\frac{1}{4k-1} + \frac{2}{\pi(4k-1)^2} \right]$$

$$a_{4k-2} = \frac{1}{4k-2} \cdot 0 + \frac{2}{\pi(4k-2)^2} [-1 - 1] = -\frac{1}{\pi(2k-1)^2}$$

$$a_{4k-3} = \frac{1}{4k-3} \cdot 1 + \frac{2}{\pi(4k-3)^2} [0 - 1] = \frac{1}{4k-3} - \frac{2}{\pi(4k-3)^2}$$

$$\text{Integrando... } a_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \begin{cases} 0, & n = 4k \text{ ó } n = 4k-2 \\ 1, & n = 4k-3 \\ -1, & n = 4k-1 \end{cases} \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \begin{cases} 0, & n = 4k-1 \text{ ó } n = 4k-3 \\ 1, & n = 4k \\ -1, & n = 4k-2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\pi}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4k-1} + \frac{2}{\pi(4k-1)^2} \right] \cos((4k-1)x) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[2(2k-1)x]}{(2k-1)^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4k-3} - \frac{2}{\pi(4k-3)^2} \right] \cos[(4k-3)x] \end{aligned}$$

d)

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \quad (n = 2k-1) \\ (-1)^k, & n \text{ par} \quad (n = 2k) \end{cases}$$

para $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos que el 1º y 3º sumatorios son nulos, pues $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ si n impar. Por tanto, el DSF queda:

$$\text{DSF: } \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)\pi]}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

por otro lado, el DSF converge puntualmente a $\pi/4$, que es el valor medio de la discontinuidad f_p en $\pi/2$.
igualando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Se considera la EDO de segundo orden

$$y'' + ay' + y = b \cos(2t) \quad (1)$$

Donde $a, b \geq 0$. Determine para qué valores de los parámetros a y b se verifica que

- a) El conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial.
- b) Toda solución no nula de (1) es periódica.
- c) Toda solución $y(t)$ de (1) verifica $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$

Resolviendo la ecuación para cada uno de los casos.

Antes de nada
debemos clasificar
la EDO

Se trata de una EDO de segundo orden lineal con coeficientes constantes. Lo primero que vamos a hacer es resolver esta ecuación estudiando los distintos resultados que aparecen en función de los parámetros a y b .

Solución general de la EDO homogénea

$$y'' + ay' + y = 0$$

Tomamos la ecuación característica:

$$r^2 + ar + 1 = 0$$

Y la resolvemos:

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \\ r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \end{cases}$$

Por tanto la solución será distinta dependiendo del valor de a (según sea mayor, igual o menor que 2):

$$a = 2 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -1 \text{ raíz real doble}$$

$$a > 2 \Rightarrow r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}, r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \text{ raíces reales simples}$$

$$a < 2 \Rightarrow r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}i, r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}i \text{ raíces complejas conjugadas}$$

Así pues la solución de la EDO homogénea, según los casos, es:

$$a = 2 \Rightarrow y_H(t) = (At + B)e^{-t}$$

$$a > 2 \Rightarrow y_H(t) = Ae^{\left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}\right)t} + Be^{\left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}\right)t}$$

$$0 \leq a < 2 \Rightarrow y_H(t) = e^{-at/2} \left(A \cos \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} t \right)$$

En el tercer caso
como el radicando
es negativo hace-
mos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - 4} &= \\ \sqrt{-(4 - a^2)} &= \\ \sqrt{-1} \sqrt{4 - a^2} &= \\ i \sqrt{4 - a^2} & \end{aligned}$$

Solución particular de la EDO completa

Utilizamos el método de los coeficientes indeterminados, para ello nos fijamos en el término independiente y probamos con una solución de la EDO completa de la forma:

$$y_p(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

cuyas derivadas son:

$$y_p'(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)$$

$$y_p''(t) = -4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t)$$

Así que sustituimos y_p, y_p' e y_p'' en la EDO del enunciado para calcular c_1 y c_2 :

$$y_p'' + a y_p' + y_p = b \cos(2t)$$

$$\underbrace{-4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t)}_{y_p''} + a \underbrace{(-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t))}_{y_p'} + \underbrace{c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)}_{y_p} = b \cos(2t)$$

$$-4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t) - 2ac_1 \sin(2t) + 2ac_2 \cos(2t) + c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) = b \cos(2t)$$

$$(-3c_1 + 2ac_2) \cos(2t) + (-3c_2 - 2ac_1) \sin(2t) = b \cos(2t) + 0 \cdot \sin(2t) \Rightarrow \begin{cases} -3c_1 + 2ac_2 = b \\ -3c_2 - 2ac_1 = 0 \end{cases}$$

Por tanto nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3c_1 + 2ac_2 = b \\ 2ac_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \text{ y resolviéndolo obtenemos: } c_1 = \frac{-3b}{9+4a^2} \quad c_2 = \frac{2ab}{9+4a^2}$$

Por lo que la solución particular que obtenemos es:

$$y_p(t) = \frac{-3b}{9+4a^2} \cos(2t) + \frac{2ab}{9+4a^2} \sin(2t)$$

Fijate que la solución particular es válida valgan lo que valgan a y b

Solución general de la EDO completa

Para obtener la solución general de la EDO completo hay que sumar: $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

Nos quedan por tanto, tres casos:

$$a = 2 \Rightarrow y(t) = (At + B)e^{-t} + \frac{-3b}{9+4a^2} \cos(2t) + \frac{2ab}{9+4a^2} \sin(2t)$$

$$a > 2 \Rightarrow y(t) = Ae^{\left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4}\right)t} + Be^{\left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4}\right)t} + \frac{-3b}{9+4a^2} \cos(2t) + \frac{2ab}{9+4a^2} \sin(2t)$$

$$0 \leq a < 2 \Rightarrow y(t) = e^{-at/2} \left(A \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} t \right) + \frac{-3b}{9+4a^2} \cos(2t) + \frac{2ab}{9+4a^2} \sin(2t)$$

Con las soluciones de la EDO ya calculadas es inmediato resolver los apartados que nos piden:

a) Para este apartado no ni siquiera necesario resolver la ecuación. Debemos saber por teoría que las soluciones de una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes forman un espacio vectorial (si no es homogénea la función nula no es solución de la ecuación y por eso no es espacio vectorial).

Para que la EDO del enunciado (1) sea homogénea basta con exigir que $b = 0$.

Recuerda que una exponencial nunca es una función periódica

b) Para que la solución sea periódica no puede tener exponenciales. En los caso $a = 2$ y $a > 2$ es imposible anular la exponencial. Sin embargo en el tercer caso sí es posible para $a = 0$. Una vez anulada la exponencial lo único que quedan son funciones sinusoidales que sí son periódicas. Así pues:

Las soluciones no nulas de (1) son periódicas si y sólo si $a = 0$

Recuerda que los senos y los cosenos oscilan hasta el infinito y por tanto no "tienden" a nada

c) Para que la solución tienda a cero cuanto $t \rightarrow \infty$ lo que no puede tener la solución son funciones sinusoidales, para ello hacemos $b = 0$ y nos "cargamos" el seno y el coseno. En cuanto al parámetro a observamos que éste puede tomar cualquier valor salvo $a = 0$ ya que con este valor la exponencial desaparece (como hemos dicho en el apartado b), y entonces la solución ya no tendería a cero. Una vez que hemos eliminado las funciones sinusoidales de la solución solo quedan exponenciales con exponente negativo en los tres casos (se puede comprobar fácilmente) que tienden a cero. Así pues,

Recuerda que e^{-x} tiende a cero cuando x tiende a infinito

Las soluciones $y(t)$ de (1) cumplen $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ si y sólo si $b = 0$ y $a > 0$

Nota Final

Este ejercicio tiene cierto parecido con el de Septiembre 2001 ejercicio 2

Fíjate que la clave del ejercicio es "olvidarse" de lo que te están pidiendo y empezar resolviendo la EDO que es lo que mejor sabemos hacer. La resolución es un poco lisa porque todo queda en función de a y b , pero por lo demás es bastante mecánico.

Una vez que tenemos resuelta la EDO hay que pensar un poco. En los tres casos que nos han salido, la solución está compuesta por una exponencial (con exponente negativo) y algunas funciones sinusoidales. Tenemos que:

- Las exponenciales con (cualquier) exponente negativo tienden a cero.
- Las sinusoides son funciones periódicas.

Por tanto la idea está en encontrar los valores de a y b que anulan las exponenciales (para que quede una función periódica en el apartado b) o que anulan las sinusoides (para que quede una exponencial con exponente negativo que tiende a cero en el apartado c).

Junio 2007
Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = a(a-1)x_1^2 + (a+1)x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(1 - a\left(1 - \frac{4}{t^2}\right)\right)x_1 + \frac{a}{t}x_2 + (1-a)\sin(t^2)$$

donde $t > 0$ y el parámetro $a \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

- Comente para qué valores de a el conjunto de soluciones del correspondiente sistema tiene estructura de espacio vectorial.
- Para cada uno de los cuatro valores posibles de a , indíquese si se ha visto en la asignatura un procedimiento general sistemático de resolución del sistema correspondiente. En los casos en los que se conozca, aplíquese dicho procedimiento, dejando simplemente indicadas las operaciones finales resultantes.

Se trata de un sistema de dos EDOs que, según el parámetro a adopte uno u otro valor (hay 4 opciones: $-2, -1, 0, 1$), quedará lineal o no lineal, homogéneo o no homogéneo, desacoplado o acoplado.

a) El conjunto de soluciones del sistema tiene estructura de espacio vectorial cuando el sistema es lineal y homogéneo; en nuestro caso, veremos que queda así para $a=1$.

caso $a=-2$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1^2 - x_2 \\ x_2'(t) = \left[3 - \frac{8}{t^2}\right]x_1 - \frac{2}{t}x_2 + 3\sin^2(t) \end{cases}$$

Se trata de un sistema con las siguientes características:

- * No lineal, pues aparece una de las incógnitas elevada al cuadrado (x_1^2)
- * No homogéneo, pues aparece término independiente no nulo ($3\sin^2(t)$ está presente sin multiplicar a ninguna incógnita ni a ninguna de sus derivadas)
- * Desacoplado; no podemos emplear una ecuación y sustituir en la otra de forma que despejemos una incógnita.
- * De coeficientes no constantes (las incógnitas y sus derivadas están multiplicadas por funciones).

Por ser no lineal, no homogéneo y desacoplado resulta que no existe procedimiento de resolución explicado en la asignatura. (sugieren en el enunciado que al menos un caso no tiene solución)

Caso $\alpha=1$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) \implies x_2(t) = \frac{x_1'(t)}{2} \\ x_2'(t) = \frac{4}{t^2}x_1(t) + \frac{1}{t}x_2(t) \end{cases}$$

Sistema de EDOs lineal, homogéneo, y de coeficientes no constantes. Por este último motivo, intentamos acoplar una de las EDOs en la otra, y si conseguimos algo resoluble, diremos que el sistema está acoplado. En este caso sí lo estará.

$$x_2(t) = \frac{x_1'(t)}{2} \rightarrow x_2'(t) = \frac{x_1''(t)}{2} \text{ lo metemos en la 2ª}$$

$$\frac{x_1''(t)}{2} = \frac{4}{t^2}x_1(t) + \frac{1}{t} \frac{x_1'(t)}{2}$$

$$\frac{1}{2}x_1''(t) - \frac{1}{2t}x_1'(t) - \frac{4}{t^2}x_1(t) = 0 \text{ multiplicando por } 2t^2$$

$$t^2x_1''(t) - tx_1'(t) - 8x_1(t) = 0 \text{ EDO de Euler}$$

$$\text{cambio var: } t = e^r \Leftrightarrow r = \ln|t|$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^r}$$

$$* x_1(t) = x_1(e^r) = x_1(r)$$

$$* x_1'(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dx_1}{dr} \frac{dr}{dt} = x_1'(r) \cdot e^{-r}$$

$$* x_1''(t) = \frac{dx_1'(t)}{dt} = \frac{dx_1'}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d(x_1'(r) \cdot e^{-r})}{dr} \frac{dr}{dt} = (x_1''(r)e^{-r} - x_1'(r)e^{-r})e^{-r}$$

$$\hookrightarrow x_1''(t) = [x_1''(r) - x_1'(r)]e^{-2r}$$

$$\rightarrow e^{2r} \cdot [x_1''(r) - x_1'(r)]e^{-2r} - e^r(x_1'(r) \cdot e^{-r}) - 8x_1(r) = 0$$

$$x_1''(r) - 2x_1'(r) - 8x_1(r) = 0$$

pol. caract:

$$p^2 - 2p - 8 = 0 \Rightarrow p = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Dos raíces reales simples

$$x_1(r) = Ae^{4r} + Be^{-2r}, \quad r = \ln|t|$$

$$x_1(t) = Ae^{4\ln|t|} + Be^{-2\ln|t|} = At^4 + \frac{B}{t^2}$$

$$x_1'(t) = 4At^3 - \frac{2B}{t^3}$$

$$\frac{x_1'(t)}{2} = 2At^3 - \frac{B}{t^3}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= 4At^3 - \frac{2B}{t^3} \\ \frac{x_1'(t)}{2} &= 2At^3 - \frac{B}{t^3} \end{aligned} \right\} \rightarrow x_2(t) = \frac{x_1'(t)}{2} = 2At^3 - \frac{B}{t^3}$$

$$\text{solución } (\alpha=1): \quad \begin{cases} x_1(t) = At^4 + B/t^2 \\ x_2(t) = 2At^3 - B/t^3 \end{cases}$$

Caso $a=0$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + \sin(t^2) \end{cases}$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas lineal, no homogéneo, de coeficientes constantes y acoplado.

En primer lugar resolveremos el sistema homogéneo asociado y por el método de variación de las constantes llegaremos a la solución del sistema completo.

Homogéneo asociado: $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$

$$x_1''(t) = x_2'(t)$$

$$x_1''(t) = x_1(t) \Rightarrow x_1''(t) - x_1(t) = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

$$x_1(t) = A e^t + B e^{-t}$$

$$x_1'(t) = x_2(t) \Rightarrow x_2(t) = A e^t - B e^{-t}$$

la solución del sistema homogéneo es $\begin{cases} x_1(t) = A e^t + B e^{-t} \\ x_2(t) = A e^t - B e^{-t} \end{cases}$

Variación de las constantes:

el sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + \sin(t^2) \end{cases} \quad \text{es} \quad \begin{cases} x_1(t) = A(t) e^t + B(t) e^{-t} \\ x_2(t) = A(t) e^t - B(t) e^{-t} \end{cases}$$

Derivando $x_1(t)$, $x_2(t)$ y sustituyendo todo en el sistema completo obtendremos las funciones $A(t)$ y $B(t)$

$$\begin{cases} \underbrace{[A'(t) + A(t)] e^t + [B'(t) - B(t)] e^{-t}}_{x_1'(t)} = \underbrace{A(t) e^t - B(t) e^{-t}}_{x_2(t)} \\ \underbrace{[A'(t) + A(t)] e^t - [B'(t) - B(t)] e^{-t}}_{x_2'(t)} = \underbrace{A(t) e^t + B(t) e^{-t} \sin(t^2)}_{x_1(t) + \sin(t^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'(t) e^t + B'(t) e^{-t} = 0 \\ A'(t) e^t - B'(t) e^{-t} = \sin(t^2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sumando... } 2A'(t) e^t = \sin(t^2) \\ \text{restando... } 2B'(t) e^{-t} = \sin(t^2) \end{array}$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int e^{-t} \sin(t^2) dt + C_1$$

$$B(t) = -\frac{1}{2} \int e^t \sin(t^2) dt + C_2$$

Solución ($a=0$):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left[\frac{1}{2} \int e^{-t} \sin(t^2) dt + C_1 \right] e^t + \left[-\frac{1}{2} \int e^t \sin(t^2) dt + C_2 \right] e^{-t} \\ x_2(t) &= \left[\frac{1}{2} \int e^{-t} \sin(t^2) dt + C_1 \right] e^t - \left[-\frac{1}{2} \int e^t \sin(t^2) dt + C_2 \right] e^{-t} \end{aligned}$$

Nota: Derivando la primera EDO y sustituyendo en la segunda, obtendríamos la EDO:

$$x_2''(t) - x_1(t) = \sin^2(t)$$

Si aplicásemos el método de los 12 pasos y manejásemos el correspondiente sistema, llegaríamos al mismo sistema con incógnitas A' y B' resuelto anteriormente.

Caso $a = -1$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2(x_1^2(t)) \\ x_2'(t) = \left[2 - \frac{4}{t^2}\right]x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) + 2\sin(t^2) \end{cases}$$

Sistema no lineal, no homogéneo pero acoplado.

Resolveremos la 1ª EDO y con la solución acudirémos a la 2ª.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1^2(t) \Rightarrow \int x_1^{-2}(t) dx_1(t) = \int 2dt \Rightarrow \frac{-1}{x_1(t)} = 2t + K$$

$$x_1(t) = \frac{-1}{2t+K} = \frac{-1}{2t-K} = \frac{1}{K-2t}$$

$$x_2(t) = \left[2 - \frac{4}{t^2}\right] \frac{1}{K-2t} - \frac{1}{t}x_2(t) + 2\sin(t^2) \quad \psi(t)$$

$$\hookrightarrow x_2'(t) + \frac{1}{t}x_2(t) = 2 \left[\left(1 - \frac{2}{t^2}\right) \frac{1}{K-2t} + \sin(t^2) \right] \quad \begin{matrix} \text{EDO lineal de} \\ \text{primer orden:} \\ \text{Variación de cte.} \end{matrix}$$

homogénea:

$$x_2'(t) + \frac{1}{t}x_2(t) = 0 \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{t}x_2(t)$$

$$\int \frac{dx_2(t)}{x_2(t)} = \int \frac{-dt}{t} \Rightarrow \ln|x_2(t)| = -\ln|t| + C \Rightarrow x_2(t) = \frac{C}{t}$$

$$x_2(t) = \frac{C}{t} \Rightarrow x_2(t) = \frac{c(t)}{t} \text{ solución}$$

Derivando x_2 y sustituyendo en la homogénea...

$$\underbrace{\frac{c'(t) - c(t)}{t^2}}_{x_2'(t)} + \underbrace{\frac{1}{t} \frac{c(t)}{t}}_{\frac{1}{t} x_2(t)} = \psi(t); \quad c'(t) = t \psi(t)$$

$$c(t) = \int t \psi(t) dt + cte \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{t} \left[\int t \psi(t) dt + cte \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{t} \left[\int 2t \left[\left(1 - \frac{2}{t^2}\right) \frac{1}{K-2t} + \sin(t^2) \right] dt + cte \right] \\ x_1(t) &= \frac{1}{K-2t} \quad \text{solución } (a = -1) \end{aligned}}$$

Septiembre 2007
Ejercicio 1

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x}{T} & , \text{ si } -\frac{T}{2} \leq x \leq 0 \\ 1 + \frac{4x}{T} & , \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

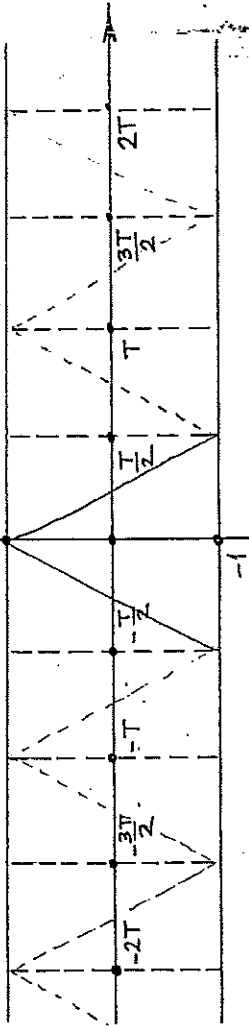
- ¿Es par? ¿Es impar? Justifique la respuesta.
- Dibuje su gráfica.
- Halle su desarrollo $S_F(x)$ en serie trigonométrica de Fourier de periodo T .
- Estudie la convergencia puntual y uniforme de $S_F(x)$ en $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$.
- Calcule el valor de la suma $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.
- Enuncie el teorema de Parseval y particularícelo para la serie de Fourier $S_F(x)$ de $f(x)$. Como aplicación, calcule el valor de la suma $S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

Sea la función

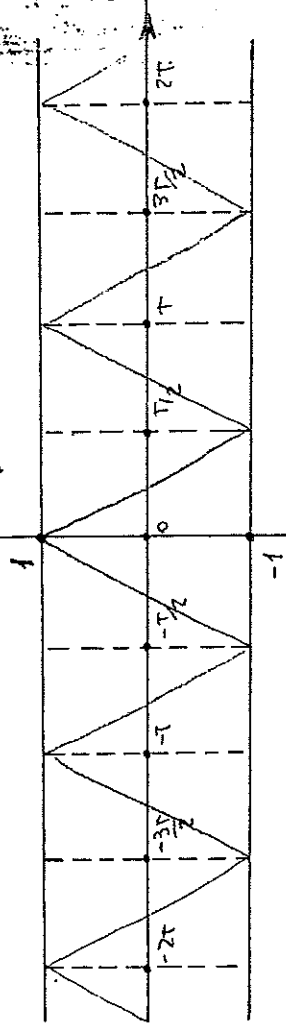
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x}{T} & -\frac{T}{2} \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{4x}{T} & 0 < x \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

- ¿Es par? ¿Es impar? ¿Es alternada?
- Dibujar su gráfica
- Hallar su desarrollo en serie de Fourier de período T : $S_f(x)$ y dibujar su gráfica
- Definir la función $f_T(x)$, extensión periódica de $f(x)$ de período T , y dibujar su gráfica. Escribir su desarrollo en serie de Fourier
- Enunciar el teorema de Dirichlet
- Estudiar la convergencia ordinaria o puntual de $S_f(x)$ en $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$
- Hallar $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$
- Enunciar el criterio de Weierstrass y aplíquese en el estudio de la convergencia uniforme de $S_f(x)$ en $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$
- Enunciar el teorema de Parseval y particularizarlo para $f(x)$ y su desarrollo en serie de Fourier $S_f(x)$
- Hallar $S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$
- Definir una función $g(x)$ en $-T \leq x \leq T$ tal que coincida con $f(x)$ en $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$ y tal que su desarrollo en serie de Fourier tenga sólo armónicos pares. Dibújese su gráfica
- Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de período $2T$, de $g(x)$.

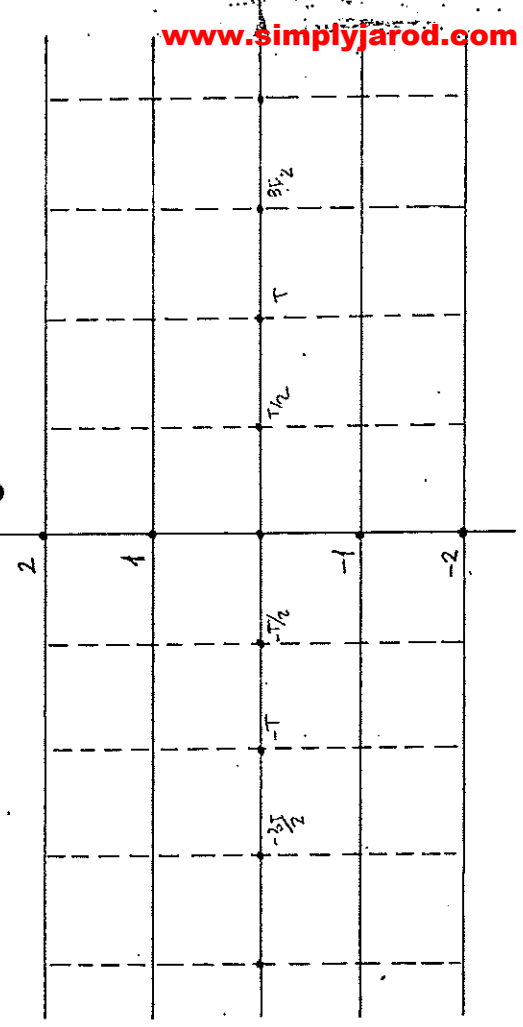
$f(x)$ ———
 $S_f(x)$ - - - -



$f_T(x)$



$g(x)$



$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x}{T}, & -\frac{T}{2} \leq x < 0 \\ 1 - \frac{4x}{T}, & 0 \leq x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

RESUELTO POR IVÁN GUERRERO www.simplyjarod.com
(MONTERO ESPINOSA)

DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

$$S_F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) \right]$$

$$f(x) \text{ definida en } \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) dx$$

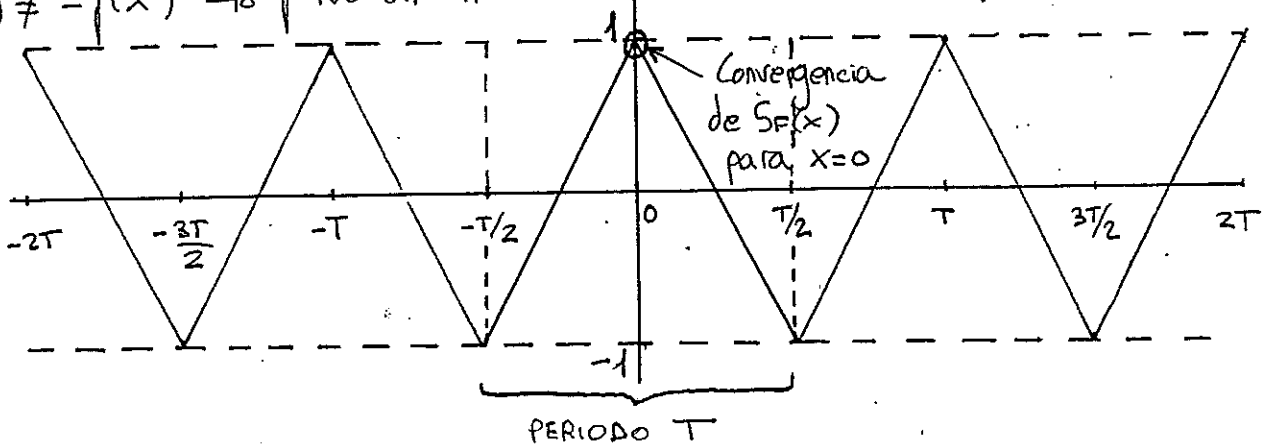
(ℓ es el periodo)

En nuestro caso, $f(x)$ está definida en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] = \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \Rightarrow \ell = T$ (PERIODO) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ SIMÉTRICA RESPECTO OY $\Rightarrow$ PAR

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ NO SIMÉTRICA RESPECTO ORIGEN $\Rightarrow$ NO IMPAR



$f(x)$, definida en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ (par, simétrica respecto OY)

$f_T(x)$, definida en todo $\mathbb{R}$, extensión periódica de f de periodo T (par)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\text{PAR}) \cdot (\text{PAR}) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\text{PAR}) = \frac{2}{T} \left[2 \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \right]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\text{PAR}) \cdot (\text{IMPAR}) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\text{IMPAR}) = \frac{2}{T} [0] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4x}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx - \int_0^{T/2} \frac{4x}{T} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \right]$$

$$= \frac{4}{T} [I_1 - I_2], \text{ siendo } I_1 = \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx, I_2 = \int_0^{T/2} \frac{4x}{T} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx.$$

$$* I_1 = \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{T}{2\pi n} \int_0^{T/2} \frac{2\pi n}{T} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{T}{2\pi n} \left[\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{T}{2\pi n} \left[\sin(\pi n) - \sin(0) \right] = \frac{T}{2\pi n} (0) = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$* I_2 = \int_0^{T/2} \frac{4x}{T} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \text{INTEGRACIÓN POR PARTES}$$

$$= \frac{4}{T} \left[\frac{xT}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) - \frac{T}{2\pi n} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \right] \begin{cases} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \Rightarrow v=\frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \end{cases}$$

$$= \frac{4}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \left[\frac{T}{2} \sin(\pi n) - 0 \sin(0) \right] - \frac{T}{2\pi n} \frac{T}{2\pi n} \int_0^{T/2} \frac{2\pi n}{T} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{4}{T} \left[0 - \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \left(-\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right) \right]_0^{T/2} = \frac{T}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \Big|_0^{T/2}$$

$$= \frac{T}{\pi^2 n^2} \left[\cos(\pi n) - \cos(0) \right] = \frac{T}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] \Rightarrow I_2 = \frac{T}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1]$$

$$a_n = \frac{4}{T} [I_1 - I_2] \Rightarrow a_n = \frac{4}{T} \left[0 - \frac{T}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] \right] = -\frac{4}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] =$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{8}{\pi^2 n^2}, & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2k} = 0, a_{2k-1} = \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \Rightarrow \text{Haciendo } n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/2} dx - \int_0^{T/2} \frac{4x}{T} dx \right] =$$

$$= \frac{4}{T} \left[x \Big|_0^{T/2} - \frac{4}{T} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{4}{T} \left[x \Big|_0^{T/2} - \frac{2}{T} x^2 \Big|_0^{T/2} \right] =$$

$$= \frac{4}{T} \left[\left(\frac{T}{2} - 0\right) - \frac{2}{T} \left(\frac{T^2}{4} - 0\right) \right] = \frac{4}{T} \left[\frac{T}{2} - \frac{T}{2} \right] = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

CONCLUSIÓN:

$$a_{2k} = 0$$

$$b_k = 0 \quad l = T$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$\Rightarrow S_F(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi(2k-1)x}{T}\right)}{(2k-1)^2}$$

$$a_0 = 0$$

$S_F(x)$ es el Desarrollo en Serie de Fourier de $f_T(x)$, extensión periódica de $f(x)$ de período T . En el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, como $f_T(x)$ es precisamente $f(x)$, $S_F(x)$ es el Desarrollo en Serie de Fourier de $f(x)$.

CONVERGENCIAS

CONVERGENCIA DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER ($S_F(x)$)

Convergencia Puntual (Teorema de Dirichlet):

$S_F(x)$ converge puntualmente a $f_T(x)$ en todos aquellos puntos donde $f_T(x)$ es continua. Si $f_T(x)$ es discontinua en el punto $x=\alpha$, entonces $S_F(x)$ toma el valor medio del salto, es decir: $\frac{f_T(\alpha^+) + f_T(\alpha^-)}{2}$

En nuestro caso, $f_T(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto $S_F(x)$ converge puntualmente a $f_T(x)$ en todo $\mathbb{R}$ (en particular, $S_F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$) $\Rightarrow$ Las gráficas de $f_T(x)$ y $S_F(x)$ coinciden (ver página 11)

Convergencia Uniforme (Criterio de Weierstrass)

$f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en todo intervalo cerrado donde $f(x)$ sea continua.

En nuestro caso, $f(x)$ es continua en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, y por tanto $S_F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier intervalo $[a, b] \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Hallar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Haciendo $x=0 \Rightarrow \begin{cases} S_F(x) \text{ queda } S_F(0) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ S_F(x) \text{ converge puntualmente a } 1 \end{cases} \Rightarrow$
 (Ya hemos visto que las gráficas de $f_T(x)$ y $S_F(x)$ son la misma; el valor 1 lo vemos pues en la gráfica de la página n°1.)

$\Rightarrow$ Igualando $\Rightarrow 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

IDENTIDAD (TEOREMA) DE PARSEVAL

IDENTIDAD DE PARSEVAL

Si $\{f_i: i \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortogonal y completo, entonces

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} \right|^2 \langle f_i, f_i \rangle$$

$\{1, \cos(\frac{2\pi n x}{T}), \sin(\frac{2\pi n x}{T}); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y en $[0, T]$
 Por ello, podemos aplicar la Identidad de Parseval, que queda como sigue:

$$\|f(x)\|^2 = \underbrace{\left| \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right|^2}_{|b_0|^2 = 0} \langle 1, 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{\langle f(x), \cos(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle}{\langle \cos(\frac{2\pi n x}{T}), \cos(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle} \right|^2}_{|a_n|^2} \langle \cos(\frac{2\pi n x}{T}), \cos(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle f(x), \sin(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle}{\langle \sin(\frac{2\pi n x}{T}), \sin(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle} \right|^2 \langle \sin(\frac{2\pi n x}{T}), \sin(\frac{2\pi n x}{T}) \rangle$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2} \right|^2 \left\langle \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx \stackrel{(PAR)}{=} 2 \int_0^{T/2} f^2(x) dx = \\ &= 2 \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4x}{T}\right)^2 dx = 2 \left[\int_0^{T/2} dx + \frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} x^2 dx - \frac{8}{T} \int_0^{T/2} x dx \right] = \\ &= 2 \left[x \Big|_0^{T/2} + \frac{16}{3T^2} x^3 \Big|_0^{T/2} - \frac{8}{2T} x^2 \Big|_0^{T/2} \right] = 2 \left[\frac{T}{2} + \frac{16T^3}{24T^2} - \frac{4}{T} \frac{T^2}{4} \right] = \\ &= 2T \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 \right] \Rightarrow \|f(x)\|^2 = \frac{T}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right\rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \stackrel{(PAR)}{=} 2 \int_0^{T/2} \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \\ &= 2 \int_0^{T/2} \frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi n x}{T}\right)}{2} dx = \int_0^{T/2} dx + \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{4\pi n x}{T}\right) dx = x \Big|_0^{T/2} + \frac{T}{4\pi n} \sin\left(\frac{4\pi n x}{T}\right) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{T}{2} + \frac{T}{4\pi n} \left(\cancel{\sin(2\pi n)} - \cancel{\sin(0)} \right) = \frac{T}{2} \Rightarrow \left\langle \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right\rangle = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{La Identidad de Parseval queda } \frac{T}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4 (2k-1)^4} \frac{T}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{32}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \Rightarrow$$

Hallar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$:

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

$g(x)$ definida en $[-T, T]$

$$g(x) = f(x) \text{ en } \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

DSF de $g(x)$ sólo con armónicos pares
(sólo con términos en coseno) $\Leftrightarrow g(x)$ par (SIMÉTRICA RESPECTO OY)

Podemos escoger cualquier función simétrica respecto OY (par) que coincida con $f(x)$ en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$; es decir, nos vale cualquier función con la forma

$$(1) \quad g(x) = \begin{cases} \psi(x), & -T \leq x < -\frac{T}{2} \\ 1 + \frac{4x}{T}, & -\frac{T}{2} \leq x < 0 \\ 1 - \frac{4x}{T}, & 0 \leq x < \frac{T}{2} \\ \psi(-x), & \frac{T}{2} \leq x < T \end{cases} \rightarrow \text{Ahora bien: A la hora de hacer las integrales del DSF, el hecho de tener la función definida en } [0, \frac{T}{2}] \text{ y en } [\frac{T}{2}, T]$$

(PERIODO $2T$)

según se indica hará que aparezcan términos como $\cos(\frac{n\pi}{2})$ y $\sin(\frac{n\pi}{2})$ los cuales no facilitarán los cálculos. Podemos probar con la más sencilla de ellas, $\psi(x) = 0$, y verificarlo:

$$(2) \quad a_n = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2T}\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx =$$

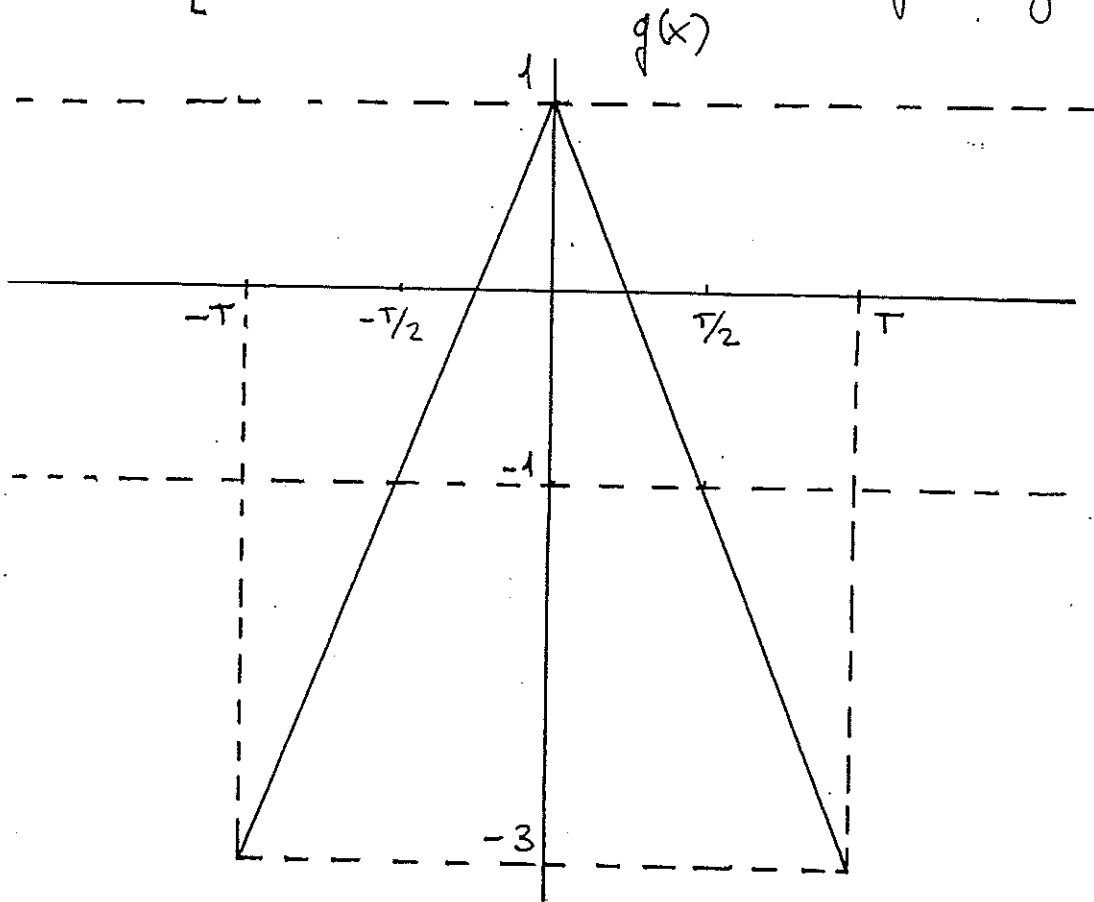
$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx + \int_{T/2}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \right] = \dots$$

Es decir: tener la función definida de forma distinta en $[0, \frac{T}{2}]$ y en $[\frac{T}{2}, T]$ implica que aparezca $\frac{T}{2}$ en los límites de integración, y esto supondrá tener más términos complejos como $\cos(\frac{n\pi}{2})$, $\sin(\frac{n\pi}{2})$.

Pero hay una forma de evitar todo eso: haciendo que $g(x)$ valga lo mismo en $[0, \frac{T}{2}]$ y en $[\frac{T}{2}, T]$, para así tener como límites de integración a 0 y a T.

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x}{T} & , -T \leq x < 0 \\ 1 - \frac{4x}{T} & , 0 \leq x < T \end{cases}$$

→ Con esta función desaparece $T/2$ como límite de integración y se simplifican las integrales y los cálculos.



$g(x)$ par (simétrica respecto OY) $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T g(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{2T}\right) dx \stackrel{(PAR)}{=} \frac{1}{T} 2 \int_0^T g(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{4x}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^T \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx - \frac{4}{T} \int_0^T x \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx \right] = \frac{2}{T} \left[I_1 - \frac{4}{T} I_2 \right]$$

$$* I_1 = \int_0^T \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx = \frac{T}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{T}\right) \Big|_0^T = \frac{T}{\pi n} \left[\cancel{\sin(n\pi)} - \sin(0) \right] = 0$$

$$* I_2 = \int_0^T x \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx = \frac{T}{\pi n} x \sin\left(\frac{\pi n x}{T}\right) \Big|_0^T - \frac{T}{\pi n} \int_0^T \sin\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx =$$

$\left(\begin{array}{l} u = x = 0 \quad du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx = 0 \quad v = \frac{T}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{T}\right) \end{array} \right)$

$$= \frac{T}{\pi n} \left[\cancel{T \sin(n\pi)} - 0 \right] - \frac{T^2}{\pi^2 n^2} \left(-\cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) \right) \Big|_0^T = \frac{T^2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) \Big|_0^T$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{T^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \left[0 - \frac{4}{T} \frac{T^2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \right] = \frac{8}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{16}{\pi^2 n^2}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_{2k} &= 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{16}{\pi^2 (2k-1)^2} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{4x}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) dx \Rightarrow a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{4x}{T}\right) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_0 &= \frac{2}{T} \left[\int_0^T dx - \frac{4}{T} \int_0^T x dx \right] = \frac{2}{T} \left[x \Big|_0^T - \frac{4}{T} \frac{x^2}{2} \Big|_0^T \right] = \\ &= \frac{2}{T} \left[x \Big|_0^T - \frac{2}{T} x^2 \Big|_0^T \right] = \frac{2}{T} \left[T - \frac{2}{T} T^2 \right] = \frac{2}{T} (-T) = -2 \end{aligned}$$

DSF:

$$S_F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{2T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{2T}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_F(x) = -1 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{T}\right)}{(2k-1)^2}$$

Septiembre 2007
Ejercicio 2

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0, \quad [1]$$

suponiendo que un sistema fundamental de soluciones de [1] es de la forma

$$\left\{ y_1(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, v(x)y_1(x) \right\}$$

INDICACIÓN: Con las hipótesis descritas, calcule $v(x)$.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

Se trata de una EDO lineal de 2º orden de coef. no constantes y homogénea, por lo que empezamos haciendo que sea 1 el coeficiente de y'' en nuestro problema se consigue dividiendo la EDO por x^2 .

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0; \quad p_1(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 0$$

La solución de la EDO homogénea

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y(x) = 0$$

será $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, siendo $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones particulares linealmente independientes de la EDO homogénea. De ahora en adelante nuestro objetivo será determinar quienes son $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Empleamos el dato del enunciado: al ser

$\{y_1(x), y_2(x)\} = \left\{ \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, v(x)y_1(x) \right\}$ un sistema fundamental de soluciones de la EDO, resulta que dos soluciones particulares de la misma son $y_1(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ e $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ de forma que la solución de la EDO homogénea es:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} [C_1 + C_2 \cdot v(x)]$$

nuestro objetivo ahora es calcular $v(x)$

Fórmula de Liouville:

$$\begin{aligned} W(x) &= C \cdot e^{-\int p_1(x) dx} = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{-\ln|x| + k} = \\ &= C e^{\ln|x|^{-1}} \cdot e^k \Rightarrow W(x) = \frac{C}{x} \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & v(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x) \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$W(x) = v'(x) y_1^2(x) = v'(x) \frac{\sin^2(x)}{x}$$

igualando Wronskianos...

$$W(x) = \frac{C}{x} = v'(x) \frac{\sin^2(x)}{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{C}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{C}{\sin^2(x)} \Rightarrow \int dv(x) = \int \frac{C}{\sin^2(x)} dx \Rightarrow v(x) = C \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$$

$$v(x) = C [-\cotg(x) + k] = C \cotg(x) + k$$

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) \Rightarrow y_2(x) = [C \cotg(x) + k] \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \quad \cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

solución:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + C_2 [C \cotg(x) + k] \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$y(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot C \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + C_2 k \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underbrace{[C_1 + C_2 k]}_A + C_2 C \underbrace{\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}}_B$$

solución:

$$y(x) = A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + B \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} [A \sin(x) + B \cos(x)]$$

$$v(x) = C \cotg(x) + k \Rightarrow y_2(x) = C \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + k$$

- 1) Podemos tomar C y k cualesquiera con tal de que C sea no nula (si $C=0$, el Wronskiano sería nulo, y esto ha de evitarse para que haya independencia lineal entre y_1 e y_2). Por comodidad haríamos $C=1$ $k=0$, con lo que $y_2(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$$y(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)]$$

- 2) Supongamos que tomásemos $C=0$, entonces $y_2(x)=k$ no es solución. Como y_2 es solución particular de la EDO homogénea, sustituyendo en ella tendríamos

$$\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)k = 0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow k=0, y_2(x)=0.$$

La solución de la EDO sería $y(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

implicaría una sola constante para una EDO de 2º orden, por lo que descartamos $C=0$. Ya dijimos que $W(x) \neq 0$ lo que se consigue haciendo $C \neq 0$, pues $W(x) = \frac{C}{x}$

3) Constantes C y k originales.

$$U(x) = C \cot g(x) + k = e \cot g(x) + H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2(x) = U(x) y_1(x) = \left[e \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + H \right] \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = e \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + H \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + C_2 e \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + C_2 H \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2 H)}_A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \underbrace{C_2 e}_B \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + B \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

4) (Explicación del 2) $C=0, \forall k$

$$U(x) = k \Rightarrow y_2(x) = U(x) y_1(x) = k \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \cdot \text{cte}$$

5)

$$U(x) = C \cot g(x) + k$$

$$y_2(x) = U(x) y_1(x) = \left[C \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + k \right] \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$y_2(x) = C \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + k \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

Aquí vemos todas las soluciones de la EDO homogénea, y si queremos una particular independiente de y_1 , podemos hacer $C=1, k=0$ para obtener y_2 . Nótese que la expresión de y_2 es la solución de la EDO homogénea que coincide con la obtenida antes.

Septiembre 2007
Ejercicio 3

Sea la ecuación diferencial

$$ax^2 y'' + byy' + y = 0, \quad x > 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulas.

- Para qué valores de a y b el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial tiene estructura de espacio vectorial?
- Resuelva la ecuación para el caso $a=0$, $b \neq 0$, y dibuje las soluciones correspondientes para $b=1$. ¿Existe en este caso alguna solución singular?
- Resuelva la ecuación para el caso $b=0$, $a \neq 0$.

a) El conjunto de soluciones de una EDO tiene estructura de espacio vectorial si y sólo si:

- La suma de dos soluciones sigue siendo solución (lo cual se cumple $\Leftrightarrow$ EDO es lineal)
- El producto de un número por una solución sigue siendo solución (lo cual se cumple $\Leftrightarrow$ EDO es homogénea)

Las EDOs lineales y homogéneas tienen un conjunto de soluciones con estructura de espacio vectorial

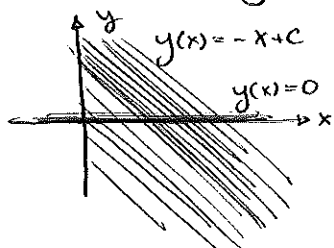
En nuestro caso la EDO es homogénea siempre y será lineal $\forall a \Leftrightarrow b=0$

b) $byy' + y = 0, \quad x > 0, \quad b \neq 0$

$$y(x)[by'(x) + 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y(x) = 0 \\ by'(x) + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{No dividir la} \\ \text{ec. entre } y(x), \text{ pues} \\ \text{ésta puede ser cero.} \end{array}$$

$$b \frac{dy(x)}{dx} = -1 \Rightarrow \int dy(x) = \int -\frac{1}{b} dx \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{b}x + C$$

$$\text{con } b=1 \Rightarrow y(x) = -x + C$$



veamos que no existen soluciones sing.

$$\textcircled{1} \quad ax^2 y''(x) + y(x) = 0, \quad x > 0 \quad \underline{\text{EDO Euler}}$$

Euler $\Rightarrow$ cambio de variable

$$x = e^t \Leftrightarrow t = \ln|x|$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$y(x) = y(e^t) = y(t)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'(t) e^{-t}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(y'(x)) = \frac{dy'(x)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}[y'(t) e^{-t}] =$$

$$= [y''(t) e^{-t} - y'(t) e^{-t}] e^{-t} \Rightarrow y''(x) = e^{-2t} [y''(t) - y'(t)]$$

$$ax^2 y''(x) + y(x) = 0$$

$$a e^{2t} e^{-2t} [y''(t) - y'(t)] + y(t) = 0$$

$$a y''(t) - a y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{coef. constantes}$$

pol. caract: $ar^2 - ar + 1 = 0$

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2a}$$

caso 1: $a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces reales simples

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right] \\ r_2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$y(t) = A e^{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right] t} + B e^{\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right] t} \Rightarrow$$

$$y(x) = A x^{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right]} + B x^{\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{a} \right]}$$

caso 2: $a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces complejas conjugadas

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} i \\ r_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} i \end{aligned} \right\}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} t\right) \right]$$

$$y(x) = \sqrt{x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} \ln|x|\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2a} \ln|x|\right) \right]$$

caso 3: $a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow$ una raíz real doble

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = (A + Bt) e^{\frac{1}{2}t}$$

$$y(x) = \sqrt{x} (A \ln|x| + B)$$

Febrero 2008
Ejercicio 1

Sean las siguientes funciones, definidas en $[-\pi, \pi]$:

$$f_1(t) = t^2 ; f_2(t) = t ; f_3(t) = at^2 + bt + c$$

- Desarrolle $f_1(t)$ en serie trigonométrica de Fourier e indique en qué intervalo la serie converge uniformemente a $f_1(t)$.
- Desarrolle $f_2(t)$ en serie trigonométrica de Fourier e indique en qué intervalo la serie converge uniformemente a $f_2(t)$.
- Obtenga la serie trigonométrica de Fourier asociada a $f_3(t)$. ¿Para qué valores de a, b, c la serie converge uniformemente a $f_3(t)$ en $[-\pi, \pi]$?

$$a) f_1(t) = t^2, t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow T = 2\pi$$

$$DSF: F_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t^2}_{\text{PAR}} \underbrace{\cos(nt)}_{\text{PAR}} dt =$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \left. \frac{t^2 \sin(nt)}{n} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t^2 \rightarrow du = 2t dt \\ dv = \cos(nt) dt \rightarrow v = \frac{\sin(nt)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_1 = -\frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \left. -\frac{t \cos(nt)}{n} \right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \sin(nt) dt \rightarrow v = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_2 = \left. -\frac{t \cos(nt)}{n} \right|_0^{\pi} = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = -\frac{\pi (-1)^n}{n} = \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n}$$

$$I_1 = -\frac{2}{n} I_2 = -\frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2\pi (-1)^{n+2}}{n^2} = \frac{2\pi (-1)^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot I_1 = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t^2}_{\text{PAR}} \underbrace{\sin(nt)}_{\text{IMPAR}} dt = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) dt = \frac{1}{H} \int_H^H t^2 dt = \frac{1}{H} \cdot 2 \int_0^H t^2 dt = \frac{2}{H} \cdot \frac{1}{3} H^3 = \frac{2}{3} H^2$$

$$F_1(t) = \frac{H^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2}$$

b) $f_2(t) = t, t \in [-H, H] \Rightarrow T = 2H$

$$a_n = \frac{1}{H} \int_{-H}^H \overbrace{t \cos(nt)}^{\text{IMPAR}} dt \Rightarrow a_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{f_2(t)}^{\text{IMPAR}} dt \Rightarrow a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{H} \cdot 2 \underbrace{\int_0^H t \sin(nt) dt}_{I_2 \text{ (calculada antes)}} = \frac{1}{H} \cdot 2 \cdot \frac{H}{n} (-1)^{n+1} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$F_2(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

c) $f_3(t) = at^2 + bt + c, t \in [-H, H]$

$$f_3(t) = a f_1(t) + b f_2(t) + c \Rightarrow \text{DSF } F_3(t) = a F_1(t) + b F_2(t) + c$$

$$F_3(t) = \frac{aH^2}{3} + c + 4a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2} + 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

Junio 08
Ejercicio 1

Sea $h: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $h(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión periódica de periodo 2π de h .

- Obtenga el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de f y analice su convergencia.
- Utilizando el apartado anterior y sin hacer un nuevo desarrollo en serie de Fourier, deduzca razonadamente la igualdad

$$\cosh(\pi^2) = \left(\frac{1}{\pi^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 + n^2} \right) \sinh(\pi^2)$$

- Sin calcular integrales, deduzca de forma razonada el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la extensión periódica de periodo 2π de la función $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sinh(\beta x)$, $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Estudie si la siguiente afirmación es correcta:

Sea $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable a trozos. Si

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ entonces } f \text{ es la función nula.}$$

Sea $f(x)$ la extensión periódica de h de periodo $T = 2\pi$ (2π es la amplitud del intervalo de definición de h). Hallaremos el DSF de $f(x)$, y en el intervalo $[-\pi, \pi]$ será el DSF de h .

DESARROLLO EN SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \quad T = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} I_1$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos(nx) dx = \left[\frac{e^{\alpha x} \sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \alpha e^{\alpha x} dx; \quad I_1 = \frac{-\alpha}{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin(nx) dx}_{I_2}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = e^{\alpha x} \rightarrow du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \cos nx dx \rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin(nx) dx = \left[\frac{e^{\alpha x} \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha}{n} \cos(nx) e^{\alpha x} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u = e^{\alpha x} \rightarrow du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin(nx) dx \rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{n} \left[e^{-\alpha\pi} (-1)^n - e^{\alpha\pi} (-1)^n \right] + I_1 \frac{\alpha}{n} = \frac{-2(-1)^n}{n} \left[\frac{e^{-\alpha\pi} + e^{\alpha\pi}}{2} \right] + \frac{\alpha}{n} I_1$$

$$I_2 = \frac{-2(-1)^n}{n} \sinh(\alpha\pi) + \frac{\alpha}{n} I_1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sinh(\alpha\pi) + \frac{\alpha}{n} I_1; \quad I_1 = -\frac{\alpha}{n} I_2$$

$$I_1 = -\frac{\alpha}{n} I_2 = -\frac{\alpha}{n} \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sinh(\alpha\pi) + \frac{\alpha}{n} I_1 \right]$$

$$I_1 = \frac{2\alpha}{n^2} (-1)^n \sinh(\alpha\pi) - \frac{\alpha^2}{n^2} I_1 ; I_1 = \frac{\frac{2\alpha}{n^2} (-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}$$

$$I_1 = \frac{2\alpha(-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{n^2 + \alpha^2}$$

$$I_1 = \frac{\frac{2\alpha}{n^2} (-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{\frac{n^2 + \alpha^2}{n^2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_1 \Rightarrow a_n = \frac{2\alpha(-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{\pi(n^2 + \alpha^2)}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad T = 2\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} I_2$$

$$I_2 = \frac{2(-1)^{n+1} \sinh(\alpha\pi)}{n} + \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\alpha(-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{n^2 + \alpha^2} \right]$$

$$(-1)^n = -(-1)^{n+1}$$

$$I_2 = \frac{2 \sinh(\alpha\pi)}{n} \left[(-1)^{n+1} + \frac{\alpha^2 (-1)^n}{n^2 + \alpha^2} \right] = \frac{2 \sinh(\alpha\pi)}{n} (-1)^{n+1} \left[1 - \frac{\alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \right]$$

$$I_2 = \frac{2 \sinh(\alpha\pi)}{\pi} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^2 + \alpha^2} = \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh(\alpha\pi)}{n^2 + \alpha^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} I_2 = \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh(\alpha\pi)}{\pi(n^2 + \alpha^2)} = b_n$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\pi\alpha} \left[e^{\alpha x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{\pi\alpha}$$

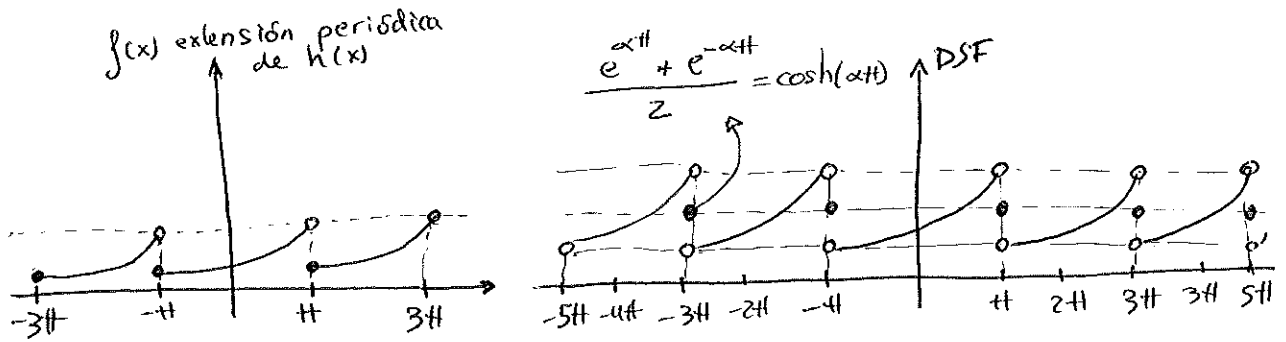
$$a_0 = \frac{2}{\alpha\pi} \left[\frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2} \right] \Rightarrow a_0 = \frac{2 \sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

$$F(x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [\alpha \cos(nx) - n \sin(nx)]}{n^2 + \alpha^2} \right]$$

El estudio de la convergencia puntual nos conducirá a la fórmula enunciada en el apartado b.



b)



$$\text{En } x=H \Rightarrow \begin{cases} \text{DSF} \equiv \frac{\sinh(\alpha H)}{H} \left[\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \right] \\ \text{DSF converge puntualmente a } \cosh(\alpha H) \end{cases}$$

$$\cosh(\alpha H) = \frac{\sinh(\alpha H)}{H} \left[\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \right]$$

para $\alpha = H$...

$$\cosh(H^2) = \left[\frac{1}{H^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + H^2} \right] \sinh(H^2) \quad \text{c.g.d.}$$

c) Tomando $\alpha = \beta$, el DSF de $h(x) = e^{\alpha x} = e^{\beta x}$ es:

$$\frac{\sinh(\beta H)}{H} \left[\frac{1}{\beta} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta \cos(n\pi)}{n^2 + \beta^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(n\pi)}{n^2 + \beta^2} \right]$$

Tomando $\alpha = -\beta$, el DSF de $h(x) = e^{\alpha x} = e^{-\beta x}$ es:

$$\frac{\sinh(-\beta H)}{H} \left[\frac{1}{-\beta} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\beta) \cos(n\pi)}{n^2 + (-\beta)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(n\pi)}{n^2 + (-\beta)^2} \right]$$

$$\frac{\sinh(\beta H)}{H} \left[\frac{1}{\beta} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta \cos(n\pi)}{n^2 + \beta^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(n\pi)}{n^2 + \beta^2} \right]$$

restando y dividiendo entre dos, obtenemos el DSF de:

$$\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} = \sinh(\beta x) \quad \text{que será representado mediante } G(x).$$

$$G(x) = \frac{2 \sinh(\beta H)}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \sin(n\pi)}{n^2 + \beta^2}$$

Junio 2008
Ejercicio 2

- a) Construya un método numérico unipaso para la resolución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ que, para avanzar la solución desde x_i hasta $x_{i+1} = x_i + h$ tome como pendiente de la función la media de las pendientes en x_i , $x_i + \frac{h}{2}$ y en $x_i + h$, y que, para la estimación de $y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ e $y(x_i + h)$ utilice el método de Euler básico con longitud de paso $\frac{h}{2}$, en el primer caso a partir de $y(x_i)$ y en el segundo a partir de la estimación de $y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ recién obtenida.

- b) Escribe el algoritmo resultante en forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + \dots + a_r k_r,$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas del método?

- c) Sea la ecuación diferencial $y'' + p_1(x)y' - \sin(x)y = 0$, $0 < x < \pi$. Sabiendo que $y_1(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ e $y_2(x) = \frac{x}{\sin(x)}$ son dos soluciones linealmente independientes de la misma, calcule el coeficiente $p_1(x)$.

a) PVI: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Método numérico unipaso:
 $y_{i+1} = y_i + h \left[\text{media de las} \right. \\ \left. \text{pendientes de} \right. \\ \left. \text{la solución } y(x) \right]$

Pendiente de $y(x)$ en x_i : $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

Pendiente de $y(x)$ en $x_i + \frac{h}{2}$: $y'(x_i + \frac{h}{2}) = f(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i + \frac{h}{2}))$

Pendiente de $y(x)$ en $x_i + h$: $y'(x_i + h) = f(x_i + h, y(x_i + h))$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\frac{1}{3} \left[\underbrace{f(x_i, y(x_i))}_{\text{valor conocido}} + \underbrace{f(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i + \frac{h}{2}))}_{\text{valor desconocido}} + \underbrace{f(x_i + h, y(x_i + h))}_{\text{valor desconocido}} \right] \right]$$

→ Estimación de $y(x_i)$: $y(x_i) \approx y_i$ $(x_{i+j} = x_i + jh)$ $(y(x_i) \approx y_i)$

→ Estimación de $y(x_i + \frac{h}{2})$: $y(x_i + \frac{h}{2}) = y(x_i + \frac{h}{2}) \approx y_{i+\frac{1}{2}}$

Euler básico:

$$y_{i+j} = y_i + jh f(x_i, y_i) \Rightarrow y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad \text{long. paso } h/2$$

→ Estimación de $y(x_i + h)$: $y(x_i + h) = y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$

Euler básico:

$$y_{(i+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} = y_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) = \\ = \left[y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right] + \frac{h}{2} f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)) \quad \text{long. paso } h/2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3} h \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_1} + \frac{1}{3} h \overbrace{f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} h \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_1})}^{k_2} + \frac{1}{3} h \overbrace{f(x_i + h, y_i + \frac{1}{2} h \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_1} + \frac{1}{2} h \overbrace{f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} h \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_1})}^{k_2})}^{k_3}$$

b)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_i + h, y_i + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2)$$

Runge-Kutta
de 3 etapas
o 3 evaluaciones
de f por paso

Junio 08
Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Estudie su estabilidad según los posibles valores de $a \in \mathbb{R}$.
- Para $a=0$, ¿existe alguna solución del sistema tal que $\|x_1(t), x_2(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$? Calcule la solución para $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$.
- Para $a=4$, ¿existe alguna solución del sistema tal que $\|x_1(t), x_2(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$? ¿Existe alguna solución del sistema tal que $(x_1(0), x_2(0)) \neq (0, 0)$ y $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$?
- Para $a=-1$, utilizando la función de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, demuestre que todo conjunto de la forma $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ es invariante.

a) Consideramos la matriz asociada al sistema y hallamos sus autovalores. La estabilidad será clasificada en función de cómo sean las partes reales e imaginarias de esos autovalores.

matriz asociada: $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

autovalores: $|A - \lambda Id| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)^2 - a = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + (1-a) = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-a)}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + \sqrt{a} \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$a=1$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$ por tener uno parte real nula y el otro parte real negativa: el sistema es marginalmente estable con $a=1$

$a>1$ $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ al menos un autovalor positivo su parte real $\Rightarrow$ soluciones inestables

$a<1$ $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}^- \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ por tener ambos parte real negativa, las soluciones son asintót. estables.



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
A LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad Politécnica de Madrid



Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Avda. Complutense 30 (Ciudad Universitaria), 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS IV
Examen extraordinario de 17 de septiembre de 2008

INSTRUCCIONES:	Escriba nombre y apellidos en todas las hojas que entregue. Comience cada ejercicio en hoja aparte. Coloque el DNI en lugar visible.	Tiempo: 2 horas 30 minutos.
----------------	---	--

1.

- a) Desarrolle en serie de Fourier de cosenos la función $f(x) = \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$.
b) Teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - (2n)^2)^2}.$$

Total 2,5 puntos: a) 1,5 puntos; b) 1,0 puntos.

2.

- a) Construya un método numérico unipaso para la resolución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, que, para avanzar la solución desde x_i hasta $x_{i+1} = x_i + h$, tome como pendiente de la función la media de las pendientes en x_i , $x_i + (h/2)$ y $x_i + h$, y que, para la estimación de $y(x_i + (h/2))$ e $y(x_i + h)$, utilice el método de Euler básico con longitud de paso $h/2$, en el primer caso a partir de $y(x_i)$ y, en el segundo, a partir de la estimación de $y(x_i + (h/2))$ recién obtenida.

- b) Escriba el algoritmo resultante en forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_r k_r,$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas del método?

- c) Construya ahora un método que, para calcular el incremento de la función incógnita al avanzar la solución desde x_i hasta $x_{i+1} = x_i + h$, tome para la pendiente la media de las estimaciones de los métodos de Euler mejorado y Euler modificado (NOTA: Euler mejorado toma la media de las pendientes de la función en los extremos, x_i y $x_i + h$, mientras que Euler modificado toma la pendiente del punto medio $x_i + (h/2)$).

- d) Escriba este nuevo algoritmo en forma de método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_r k_r,$$

donde r es el número de etapas. ¿Cuál es el número de etapas del método?

- e) Compare los métodos obtenidos en b y d. ¿Son iguales? ¿Alguno de ellos da un peso mayor a la estimación del valor de la función en alguno de los puntos x_i , $x_i + (h/2)$, $x_i + h$?

Total 2,5 puntos: a) 0,7 puntos; b) 0,3 puntos; c) 0,7 puntos; d) 0,3 puntos; e) 0,5 puntos.

Sigue al reverso