Universidad Politécnica de Madrid

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n.
28040 MADRID
Teléfono: (91) 336.72.88
Fax: (91) 336.72.89

MMT1 - F00 - 1/8

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen de Febrero (3 de febrero de 2000)

Problema 1.
Dada la función de variable compleja:

$$f(z) = r(x)\cdot\Phi(y) + jv(x,y)$$

determinar la forma de las funciones r y Φ, para que f(z) sea holomorfa (suponiendo que v(x,y) es armónica) y determinar en este caso f(z).

Nota: si se precisa pueden utilizarse transformadas de Laplace.
(Máximo 2 hojas) **(3 puntos)**

Problema 2.

a) Demostrar que: $|\text{sen}\, z|^2 = \text{sh}^2 y + \text{sen}^2 x$

b) Hallar el valor máximo del módulo de la función:

$$f(z) = \text{sen}\, z \qquad \text{cuando} \quad z \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$$

e indicar el punto donde se alcanza dicho valor máximo.
(Máximo 1 hoja) **(2 puntos)**

Problema 3.
Dada la función:

$$F(z) = \frac{1}{2z-6}\,\text{sen}\,\frac{z}{z-2} + \cos^3\frac{1}{z}$$

a) Determinar las singularidades de F(z), en el plano complejo finito, indicando su naturaleza.

b) Considerando el plano complejo ampliado, especificar la naturaleza del punto $z = \infty$ para la función F(z).

c) Calcular el valor de la integral de F(z) a lo largo de la curva $|z| = 4$. Idem sobre la curva $|z| = \frac{5}{2}$.
(Máximo 2 hojas) **(3 puntos)**

Problema 4.
Utilizando transformadas de Laplace y, en concreto, mediante el uso de la integral de inversión, resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

(2 puntos)
(Máximo 1 hoja)

Dada la función de variable compleja

$$f(z) = r(x).\phi(y) + j\,v(x,y)$$

determinar la forma de las funciones r y ϕ para que $f(z)$ sea holomorfa (suponiendo que v es armónica) y determinar en este caso $f(z)$.

Solución: $u(x,y) = r(x)\phi(y)$ debe de ser una función armónica, luego $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = r'(x)\phi(y) \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r''(x)\phi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = r(x)\phi'(y) \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r(x)\phi''(y) \end{array}\right\}$$

$$r''(x)\phi(y) + r(x)\phi''(y) = 0 \Rightarrow \frac{r''(x)}{r(x)} = -\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = c \in \mathbb{R}$$

$r''(x) - c\,r(x) = 0$ y $\phi''(y) + c\,\phi(y) = 0$. Ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por la Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}[r''(x)] - c\,\mathcal{L}[r(x)] = 0 \Rightarrow s^2R(s) - s\underbrace{r(0)}_{=k_1} - \underbrace{r'(0)}_{=k_2} - c\,R(s) = 0 \qquad k_1 \text{ y } k_2 \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{L}[r] = R(s)$

$$(s^2 - c)R(s) = k_1 s + k_2 \Rightarrow R(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s^2 - c} = k_1\frac{s}{s^2-c} + k_2\frac{1}{s^2-c}$$

Aquí se presentan varios casos según sea c

1.º $c \neq 0$ $\quad R(s) = k_1\frac{s}{s^2-(\sqrt{c})^2} + \frac{k_2}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{c}}{s^2-(\sqrt{c})^2} \Rightarrow$ mirando en las tablas de la trans. de Laplace

$\Rightarrow r(x) = k_1 \operatorname{ch}(\sqrt{c}x) + \frac{k_2}{\sqrt{c}}\operatorname{sh}(\sqrt{c}x)$. En cuanto $\phi(x)$ se cambia c por $-c$

$$\phi(y) = k_3 \operatorname{ch}(\sqrt{-c}x) + \frac{k_4}{\sqrt{-c}}\operatorname{sh}(\sqrt{-c}x) = k_3\operatorname{ch}(j\sqrt{c}x) + \frac{k_4}{j\sqrt{c}}\operatorname{sh}(j\sqrt{c}x)$$

$$\phi(y) = k_3\cos(\sqrt{c}x) + \frac{k_4}{j\sqrt{c}}j\operatorname{sen}(\sqrt{c}x)$$

$$^{*}U(x,y)=r(x)\phi(y)=\overset{=A}{(K_1K_3)}ch(\sqrt{c}\,x)\cos(\sqrt{c}\,y)+\frac{\overset{=B}{(K_1K_4)}}{\sqrt{c}}ch(\sqrt{c}\,x)\,sen(\sqrt{c}\,y)+$$

$$+\frac{\overset{=C}{(K_2K_3)}}{\sqrt{c}}sh(\sqrt{c}\,x)\cos(\sqrt{c}\,y)+\frac{\overset{=D}{(K_2K_4)}}{c}sh(\sqrt{c}\,x)\,sen(\sqrt{c}\,y)\qquad A,B,C,D\in\mathbb{R}$$

Para hallar $f(z)$ utilizamos la expresión

$$f(z)=2U\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2j}\right)+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}\ \text{ya que } U(0,0) \text{ está definido}$$

$$f(z)=2A\,ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)\cos\left(\sqrt{c}\frac{z}{2j}\right)+\frac{2B}{\sqrt{c}}ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)sen\left(\sqrt{c}\frac{z}{2j}\right)+\frac{2C}{\sqrt{c}}sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)\cos\left(\sqrt{c}\frac{z}{2j}\right)+$$

$$+\frac{2D}{c}sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)sen\left(\sqrt{c}\frac{z}{2j}\right)+\alpha=A\,ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)-\frac{Bj}{\sqrt{c}}2ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)+$$

$$+\frac{C}{\sqrt{c}}2sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)ch\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)-\frac{Dj}{c}sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)sh\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)+\alpha=A\left(1+sh^2\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)\right)+\left(\frac{C}{\sqrt{c}}-j\frac{B}{\sqrt{c}}\right)\cdot$$

$$\cdot\,sh(\sqrt{c}z)-j\frac{D}{c}sh^2\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)+\alpha=\left(+A-j\frac{D}{c}\right)sh^2\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{c}}(C-jB)sh(\sqrt{c}z)+A+\alpha=$$

$$=\boxed{\alpha_1 sh^2\left(\sqrt{c}\frac{z}{2}\right)+\frac{\alpha_2}{\sqrt{c}}sh(\sqrt{c}z)+\underbrace{A+\alpha}_{\alpha_3}=f(z),\ c\in\{\mathbb{R}-0\},\alpha_1,\alpha_2\text{ y }\alpha\in\mathbb{C},\ A\in\mathbb{R}}$$

2º) Si $c=0$ $\quad r''(x)=0\Rightarrow r(x)=A_1x+B_1\quad A_1$ y $B_1\in\mathbb{R}$.

Igualmente $\phi''(y)=0\Rightarrow\phi(y)=A_3y+B_3\quad A_3$ y $B_3\in\mathbb{R}$.

$$U(x,y)=A_1A_2xy+A_1B_2x+A_2B_1y+B_1B_2,\quad A_1,A_2,B_1\text{ y }B_2\in\mathbb{R}$$

$$f(z)=2\left[A_1A_2\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2j}+2A_1B_2\frac{z}{2}+2A_2B_1\frac{z}{2j}+B_1B_2\right]+\alpha=\underline{\underline{jAz^2+\alpha_1z+\alpha_2}}$$

con $A\in\mathbb{R}$, α_1 y $\alpha_2\in\mathbb{C}$

* Mantengo la $\sqrt{c}$ para hacer evidente que cuando $c<0$ la función $u(x,y)$ sigue siendo real.

Problema 2

a) Demostrar que: $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x$

b) Hallar el máximo del módulo de $f(z) = \operatorname{sen} z$ cuando $z \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ e indicar dónde se alcanza dicho máximo.

Soluc.

a) Vemos que: $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+jy) = \operatorname{sen} x \underbrace{\cos(jy)}_{=\operatorname{ch} y} + \cos x \underbrace{\operatorname{sen}(jy)}_{-\frac{1}{j}\operatorname{sh} y} =$

$$= \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y$$

Luego:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = (Re(\operatorname{sen} z))^2 + (Im(\operatorname{sen} z))^2 = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x (1+\operatorname{sh}^2 y) + (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sh}^2 y =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \cancel{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sh}^2 y} + \operatorname{sh}^2 y - \cancel{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sh}^2 y}$$

Con lo que:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

b) Vemos que $f(z) = \operatorname{sen} z$ es una función:
- entera, luego holomorfa en el abierto conexo $\mathring{R}$, con $R = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$
- no constante en $\mathring{R}$
- continua en R

Luego, por el principio del modulo máximo:

$|\operatorname{sen} z|$ alcanza su máximo en $Fr(R)$, nunca en $\mathring{R}$.

Es claro que si tenemos:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

Entonces: $|\operatorname{sen} z|^2$ alcanza su máximo donde lo alcancen $\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sh}^2 y$, siempre que $(x,y)\in R$

En R, $\operatorname{sh}^2 y$ alcanza su máximo en $y = 2\pi$ (pues $\operatorname{sh} y$ crece con y)
$\operatorname{sen}^2 x$ alcanza su máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

Luego: $|\operatorname{sen} z|^2$ alcanza su máximo en los puntos: $\begin{cases} z_1 = \frac{\pi}{2} + j2\pi \\ z_2 = \frac{3\pi}{2} + j2\pi \end{cases}$

y su valor es: $\max_{z\in R} |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sh}^2 2\pi + 1 = \operatorname{ch}^2 2\pi$

Por tanto: $|\operatorname{sen} z|$ alcanza su máximo en z_1 y z_2 y $\max_{z\in R}|\operatorname{sen} z| = \operatorname{ch} 2\pi$

3er Problema

Dada la función $F(z) = \frac{1}{2z-6} \operatorname{sen} \frac{z}{z-2} + \cos^3 \frac{1}{z}$

a) Determinar las singularidades de $F(z)$ en el plano complejo finito, indicando su naturaleza

b) Considerando el plano complejo ampliado, especificar la naturaleza de $z=\infty$ para $F(z)$

c) Calcular la integral de $F(z)$ sobre $|z|=4$ y $|z|=5/2$

a) $z=3$: polo simple

$z = 0, 2$: ptos singulares esenciales

0'5 ptos

b) $z \to \frac{1}{w}$: transformación biunívoca y continua que transforma un entorno de $z=\infty$ en un entorno de $w=0$

$$F\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{2-6w} \operatorname{sen} \frac{1}{1-2w} + \cos^3 w$$

$$F\left(\frac{1}{w}\right)\Big|_{w=0} = 1$$

$z=\infty$: pto regular

0'5 ptos

c) $$\oint_{|z|=4} F(z)\,dz = -2\pi j \,\text{Res}\{F(z), z=\infty\} =$$
$$= 2\pi j \left[\sum \text{Res}\{F(z), z=0,2,3\} \right]$$

0'5 ptos

$$\text{Res}\{F(z), z=\infty\} = -\lim_{w\to 0} \left\{ \frac{d}{dw} F\left(\frac{1}{w}\right) \right\} = -\frac{1}{2} \,\text{sen}\, 1$$

$$\oint_{|z|=4} F(z)\,dz = \pi j \,\text{sen}\, 1$$

1 pto

$$\oint_{|z|=5/2} F(z)\,dz = -2\pi j \left[\sum \text{Res}\{F(z), z=3,\infty\} \right]$$

0'2 ptos

$$\text{Res}\{F(z), z=3\} = \frac{1}{2} \,\text{sen}\, 3$$

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} F(z)\,dz = j\pi \left(\text{sen}\, 1 - \text{sen}\, 3\right)$$

0'3 ptos

4º PROBLEMA

Problema propuesto para el examen de MMTI, febrero 2000

- Utilizando transformadas de Laplace y, en concreto, mediante el uso de la integral de inversión, resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=c \qquad ; \qquad c\in R$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

SOLUCION:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}+4\mathcal{L}\{y'(t)\}+4\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}[c]$$

$$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$$

$$\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)$$

$$\mathcal{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}[c]=\frac{c}{s}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=\frac{c}{s} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{c}{s(s^2+4s+4)}=\frac{c}{s(s+2)^2}$$

Ptos singulares:

$s=0$ Polo simple

$s=-2$ Polo doble.

$$y(t)=\mathcal{L}_J^{-1}[Y(s)]=\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{st}\cdot c}{s(s+2)^2},s=0\right\}+\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{st}\cdot c}{s(s+2)^2},s=-2\right\}$$

$$\text{Res}\left\{\frac{c\,e^{st}}{s(s+2)^2}, s=0\right\} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{c\,e^{st}}{\cancel{s}(s+2)^2} = \frac{c}{4}$$

$$\text{Res}\left\{\frac{c\,e^{st}}{s(s+2)^2}, s=-2\right\} = \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left[\cancel{(s+2)^2}\,\frac{c\,e^{st}}{s\,\cancel{(s+2)^2}}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -2}\frac{c.t.e^{st}.s - c\,e^{st}}{s^2} = c\lim_{s\to -2}\frac{e^{st}(t\cdot s-1)}{s^2} =$$

$$= \frac{c}{4}e^{-2t}(-2t-1) = \frac{-c}{4}e^{-2t}(2t+1)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{c}{4} - \frac{c}{4}e^{-2t}(2t+1) = \frac{c}{4}\left[1-e^{-2t}(2t+1)\right]$$

Comprobación:

$$y(t) = \frac{c}{4}\left[1-e^{-2t}(2t+1)\right]$$

$$y'(t) = \frac{c}{4}\left(2e^{-2t}(2t+1) - 2e^{-2t}\right) = c\cdot t\cdot e^{-2t}$$

$$y''(t) = c\,e^{-2t} - 2ct\,e^{-2t} = c\,e^{-2t}(1-2t)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$c\,e^{-2t}(1-2t) + 4c\,t\,e^{-2t} + c\left[1-e^{-2t}(2t+1)\right] =$$

$$= \cancel{c\,e^{-2t}} - 2c\cancel{t}\,e^{-2t} + 4c\cancel{t}\,e^{-2t} + c - \cancel{2}ct\,e^{-2t} - \cancel{c\,e^{-2t}} = \underline{\underline{c}}$$

2º MMT1 - FEB'01 - 1/8

Universidad Politécnica de Madrid

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n.
28040 MADRID
Teléfono: 913.36.72.88
Fax: 913.36.72.89

METODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen de Febrero (7 de Febrero de 2001)

Tiempo 2 horas 30 minutos.

Ejercicio 1° a) Hallar una función holomorfa f(z) tal que cumpla las siguientes condiciones:

$$\mathrm{Re}[f'(z)] = 3(x^2 - y^2) - 4y. \qquad f(1+j) = 0$$

3 puntos (1 hoja)

b) Hallar $\int_{-1}^{1} f(z)dz$, donde $f(z) = z^{j}$, $|z|>0$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$

y el camino de integración sea el contorno $\gamma = \{\, |z| = 1, \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0 \,\}$

1 punto (1hoja)

Ejercicio 2° a) Dar un desarrollo en serie de potencias, conveniente, que caracterice el punto del infinito $z=\infty$ para la función $f(z) = z^2 \,\mathrm{sh}\frac{1}{z}$. A la vista del desarrollo en serie obtenido, indicar su naturaleza (tener en cuenta la transformación que se realiza para dicha clasificación).

b) Idem el punto $z = 0$ (indicar la naturaleza de $z = 0$).

c) Calcular el residuo de f(z) en $z = \infty$ utilizando la serie encontrada en el apartado a).

d) Hallar $\oint_{\gamma} z^{-2}\,\mathrm{sh}\frac{1}{z}\,dz$, siendo $\gamma \equiv |z| = 2$.

3 puntos (1 hoja)

Ejercicio 3°. Calcular, utilizando la Trans. de Laplace el valor de f(t) que satisface la ecuación diferencial

$$f'(t) + 4f(t) = -4e^{-4t}$$

Siendo $f(0) = 4$.

3 puntos (2 hojas)

VARIABLE COMPLEJA

Abril 98

Funciones analíticas

2-MMT1-FEB'01-2/8

Hallar una función holomorfa $f(z)$ tal que cumpla las siguientes condiciones:

$$Re[f'(z)] = 3(x^2-y^2)-4y$$

$$f(1+j) = 0$$

1er Q)

Solución: $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}$, Luego $Re[f'(z)] = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2-3y^2-4y \Rightarrow$

$\Rightarrow u = 3\frac{x^3}{3} - 3y^2x - 4yx + \phi_1(y) = \underline{x^3-3xy^2-4xy+\phi_1(y)}$. Pero

por C.R. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2-3y^2-4y \Rightarrow v = 3x^2y - 3\frac{y^3}{3} - 4\frac{y^2}{2} + \phi_2(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v = 3x^2y - y^3 - 2y^2 + \phi_2(x)}$. Pero por la 2ª condición de C.R.

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 4x + \phi_1'(y) = -(6xy + \phi_2'(x)) = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + \phi_1'(y) = -\phi_2'(x) \Rightarrow \phi_1'(y) + \phi_2'(x) = 4x \Longrightarrow$

$\Rightarrow \phi_1'(y) = b,\ \phi_2'(x) = 4x - b \Longrightarrow \begin{cases} \phi_1(y) = by + a \\ \phi_2(x) = 4\frac{x^2}{2} - bx + c \end{cases}$

$\Rightarrow \phi_2(x) = 2x^2 - bx + c$; a, b y c $\in \mathbb{R}$

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + by + a$

$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2y^2 + 2x^2 - bx + c$

$f(z) = x^3-3xy^2-4xy+by+a+j(3x^2y-y^3-2y^2+2x^2-bx+c)$

$f(1+j) = 1-3-4+b+a+j(3-1-2+2-b+c) \Rightarrow \underline{a=6-b},\ \underline{c=b-2}$

$$\boxed{f(z) = x^3-3xy^2-4xy+by+6-b+j(3x^2y-y^3-2y^2+2x^2-bx+b-2)}$$

$$\boxed{f(z) = z^3+2jz^2-bjz+6-b+(b-2)j}$$

Otro procedimiento Problema 1º a) 2º procedimiento

Vamos a hallar $f'(z)=g(z)$. Conocemos la parte real de $g(z)=u(x,y)=3(x^2-y^2)-4y$. Por el procedimiento de Milne-Thomson.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6y-4,\ g'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-j\frac{\partial u}{\partial y}=6x+j(6y+4)$$

$$g(z)=\int[u'_x(z,0)-j\,u'_y(z,0)]\,dz+\alpha=\int(6z+j4)\,dz+\alpha \quad \alpha\in\mathbb{C}$$

$$=\frac{6z^2}{2}+j4z+a+bj=3z^2+j4z+a+jb^{*}$$. Hallando la parte real de $g(z)$, $Re[g(z)]=3(x^2-y^2)-4y+a=3(x^2-y^2)-4y\Rightarrow \underline{a=0}$

$$g(z)=3z^2+j4z+jb=f'(z)$$

$$f(z)=\int(3z^2+4jz\,jb)\,dz+\beta^{\in\mathbb{C}}=z^3+2jz^2+jbz+c+dj^{*}$$

$$f(1+j)=(1+j)^3+2j(1+j)^2+jb(1+j)+c+dj=0$$

$$2j(1+j)+2j(2j)+jb-b+c+dj=0\Longrightarrow \boxed{c=b+6}\ \boxed{d=-b-2}$$

$$2j-2-4+jb-b+c+dj=-2-4-b+c+j(b+2+d)=0\Rightarrow c=b+6,\ d=-2-b$$

$$\boxed{f(z)=z^3+2jz^2+jbz+6+b+(-b-2)j}$$

Otro procedimiento. - Problema 1º a) 3er procedimiento

Igualmente vamos a hallar $f'(z)=g(z)$ pero ahora por el procedimiento formal.

$$f'(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2j}\right)+\alpha^{\in\mathbb{C}}=2\cdot3\left[\frac{z^2}{4}-\frac{z^2}{4j^2}\right]-8\frac{z}{2j}+\alpha=$$

$=3z^2+4jz+a+bj^{*}$ que estamos ya en el mismo punto que lo que está marcado con asterisco negro en el procedimiento anterior

Otro procedimiento 4.º procedimiento. Problema 1.º a

$f'(z) = u_x + j v_x = u_x - j u_y$

$u_x = 3x^2 - 3y^2 - 4y \quad u = x^3 - 3xy^2 - 4xy + \varphi(y)$ B

$u'_y = \cancel{0} - 6xy - 4x + \varphi'(y)$. Aplicamos Milne Thomson

$$\int \left[u'_x(z,0) - j u'_y(z,0) \right] dz + \alpha^{\in \mathbb{C}} = \int \left[3z^2 - j(-4z + \varphi'(0)) \right] dz + \alpha =$$

$$= z^3 + 2jz^2 - \varphi'(0) j z + c + dj \underset{\uparrow}{=} z^3 + 2jz^2 - jbz + c + dj \,^{*}$$

$\varphi'(0) = b \in \mathbb{R}$

Expresión análoga a la del asterisco rojo del 2.º procedimiento.

Otro procedimiento. Problema 1.º a 5.º Procedimiento

Sabemos $u'_x = 3(x^2 - y^2) - 4y$

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + \varphi(y)$. Comprobemos la Ec. de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 4x + \varphi'(y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + \varphi''(y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cancel{6x - 6x} + \varphi''(y) = 0$, $\varphi(y) = by + a$

a y $b \in \mathbb{R}$

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + by + a$

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + c + dj = 2\left[\frac{z^3}{8} - 3\frac{z}{2}\frac{z^2}{4j^2} - 4\frac{z}{2}\frac{z}{2j} + b\frac{z}{2j} + a\right] + c + dj =$$

$$= \frac{z^3}{4} + \frac{3z^3}{4} + 2jz^2 + b\frac{z}{j} + \underbrace{2a + c}_{c} + dj = z^3 + 2jz^2 - jbz + c + dj \,^{*}$$

Expresión análoga a la del asterisco rojo del 2.º Procedimiento

RV Churchill
Pag 132 N.º 9.
1989-90

VARIABLE COMPLEJA

4. Integración en el plano complejo

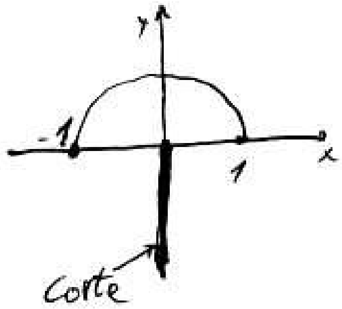
Hallar $\int_{-1}^{1} f(z)\,dz$ donde:

$$f(z) = z^{j}, \quad |z|>0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

y el camino de integración sea cualquier ~~contorno~~ que una -1 y 1 por encima del eje real.

1ºb) Solución:

La función $z^j = e^{j \lg z}$ es una función multivaluada. Pero la determinación definida $|z|>0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ tiene el corte en $y<0$.



Luego $f(z) = z^j, |z|>0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ es una función analítica en el semiplano superior. La integral es independiente del camino y basta por lo tanto con hallar una primitiva.

$$\int_{-1}^{1} z^j\,dz = \left.\frac{z^{j+1}}{j+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1-j}{2}\left[\left.e^{(j+1)\lg z}\right|_{-1}^{1} = \frac{1-j}{2}\left[e^{(j+1)\lg 1} - e^{(j+1)\lg(-1)}\right] =\right.$$

$$= \frac{1-j}{2}\left[e^{(j+1)(\overset{=0}{L_g 1}+j0)} - e^{(j+1)[\overset{=0}{L_g 1}+j\pi]}\right] = \frac{1-j}{2}\left[1 - e^{(j+1)j\pi}\right] =$$

$$= \frac{1-j}{2}\left[1 - e^{-\pi}\underbrace{e^{j\pi}}_{=-1}\right] = \underline{\underline{\frac{1-j}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)}}$$

2º Ejercicio

a) $\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!\, z^{2n+1}}$, $|z|>0$

$$f(z) = z^2 \operatorname{sh}\frac{1}{z} = z + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{1-2n}}{(2n+1)!}$$

$0<|z|<\infty$

$z=\infty$: polo simple de $f(z)$

1pto

b) $$f(z) = z + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{1-2n}}{(2n+1)!}$$

$0<|z|<\infty$

$z=0$: pto singular esencial de $f(z)$

1pto

c) $\operatorname{Res}[f(z), z=\infty] = -a_{-1} = -\frac{1}{6}$

0'5 pto

d) $$\oint_{|z|=2} z^{-2} \operatorname{sh}\frac{1}{z}\, dz = \oint \frac{z^2 \operatorname{sh}\frac{1}{z}}{z^4}\, dz =$$

$$= 2\pi j\, a_3 = 0$$

0'5 pto

Calcular utilizando T. de L. el valor de $f(t)$ que satisface la E.D.:

$$f'(t)+4f(t)=-4e^{-4t}$$

siendo $f(0)=4$

Solución:

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)=sF(s)-4$$

$$\mathcal{L}[-4e^{-4t}]=-4\mathcal{L}[e^{-4t}]=-4\frac{1}{s+4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f'(t)]+4\mathcal{L}[f(t)]=-4\mathcal{L}[e^{-4t}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sF(s)-4+4F(s)=\frac{-4}{s+4} \Rightarrow (s+4)F(s)=\frac{-4}{s+4}+4=\frac{4s+12}{s+4}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{4s+12}{(s+4)^2} \quad ; \quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right]$$

Procedimiento a)

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+4}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+4)^2}\right]=$$

$$=4e^{-4t}-4e^{-4t}\cdot t=\underline{\underline{4e^{-4t}(1-t)}}$$

Procedimiento b)

$$f(t)=\mathcal{L}_{1}^{-1}\left[\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right]=\operatorname{Res}\left\{e^{st}\frac{4s+12}{(s+4)^2}, s=-4\right\}$$

$s=-4$ polo doble $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left\{e^{st}\frac{4s+12}{(s+4)^2}, s=-4\right\} = \lim_{s\to -4}\frac{d}{ds}\left[\cancel{(s+4)^2}\, e^{st}\frac{4s+12}{\cancel{(s+4)^2}}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -4}\left[t\, e^{st}(4s+12) + e^{st}\cdot 4\right] = t\, e^{-4t}(-16+12) + 4e^{-4t} =$$

$$= 4e^{-4t}(1-t)$$

2º MMT1 - SEP'01 - 1/5

Universidad Politécnica de Madrid

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n.
28040 MADRID
Teléfono: (91) 336.72.88
Fax: (91) 336.72.89

MÉTODOS MATEMÁTICOS A TELECOMUNICACIÓN I

Examen Final 7 de Septiembre de 2001

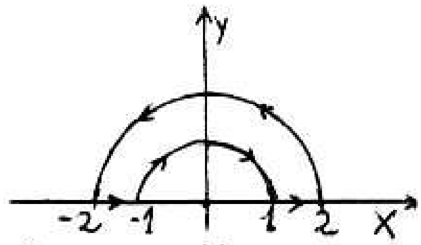
Tiempo 2 horas

Ejercicio 1º

Sea $\operatorname{Im}[f'(z)] = 2xy - y + 1$ y $\operatorname{Re}[f'(j)] = 1/\pi$. Determinar la función *f(z)*, sabiendo que es holomorfa en todo el plano complejo.

3 puntos (1 hoja).

Ejercicio 2º



a) Calcular $I_1 = \oint_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$ siendo C el contorno de la fig.

b) Calcular $I_2 = \oint_C \frac{chz}{z^{n+1}} dz$ e $I_3 = \oint_C \frac{shz}{z^{n+1}} dz$ siendo n un nº entero y positivo y C el contorno definido por $|z| = 1$.

a) 2 puntos (1 hoja).
b) 2 puntos (1 hoja).

Ejercicio3º

Sabiendo que, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, se verifica que $\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t\,f(t)$.

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]$.

3 puntos (1 hoja).

Ejercicio 1° VARIABLE COMPLEJA 3p. ~~Jun 2001~~ MMT1 - SEP'01 - 2/5

Funciones holomorfas

Si $Im[f(z)] = 2xy - y + 1$ y $Re[f'(j)] = \frac{1}{\pi}$. Determinar la función $f(z)$, sabiendo que es holomorfa en todo el plano complejo.

Solución: Si $f(z)$ ha de ser holomorfa en todo el plano complejo, $f'(z)$ también. Si llamamos $f'(z) = U + jV$ sabemos que $f'(z) = 2jV\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + C$ $\left(C = \overline{f(0)}\right)$ $C \in \mathbb{C}$

$f'(z) = U(x,y) + j\overbrace{(2xy - y + 1)}^{V(x,y)}$, $f'(z) = 2j\left(2\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2j} - \frac{z}{2j} + 1\right) + C \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(z) = z^2 - z + 2j + C$.

Como $f'(z) = Re[f'(z)] + j\,Im[f'(z)]$, para $z = j$ tenemos

$f'(j) = Re[f'(j)] + j\,Im[f'(j)] \Rightarrow -1 - j + 2j + C \underset{\substack{\uparrow \\ z = 0 + 1j}}{=} \frac{1}{\pi} + 2.0.1 - 1 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow j - 1 + C = \frac{1}{\pi} + 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi} + 1 - j$. O sea

$f'(z) = z^2 - z + 2j + \frac{1}{\pi} + 1 - j = z^2 - z + j + \frac{1}{\pi} + 1$. Luego

$$\underline{f(z) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\pi} + j\right)z + \alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 1º   <u>otro procedimiento</u>

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 2xy - y + 1$$

$V = x^2y - yx + x + \varphi(y)$ para hallar $\varphi(y)$ usamos el hecho de que V es una función armónica

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 2xy - y \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 - x + \varphi'(y), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \varphi''(y). \text{ Luego } 2y + \varphi''(y) = 0$$

$$\varphi''(y) = -2y \Rightarrow \varphi'(y) = -\int 2y\,dy = \frac{-2y^2}{2} + a = -y^2 + a, \quad \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + ay + b$$

$a \in R$, $b \in R$

$V = x^2y - yx + x - \frac{y^3}{3} + ay + b$ pero

$$Re[f'(z)] = \frac{\partial u}{\partial x} \underset{C-R}{=} \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 - x + \varphi'(y) = x^2 - x - y + a$$

para $z = j = \begin{matrix} 0+1j \\ x+yj \end{matrix}$

$$Re[f'(j)] \underset{\text{enunciado}}{=} \frac{1}{\pi} \underset{x=0,\,y=1}{=} 0 - 0 - 1 + a \Rightarrow \underline{\underline{a = 1 + \frac{1}{\pi}}}$$

$b \in R$

$$V = x^2y - yx + x - \frac{y^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)y + b$$

Si utilizamos el <u>procedimiento de Milne Thomson</u>, conocemos $V(x, y)$. Sabemos

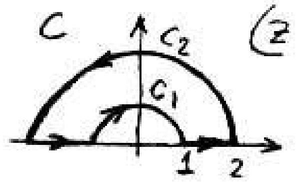
$$f'(z) = V'_y + jV'_x, \quad f(z) = \int [V'_y(z,0) + jV'_x(z,0)]\,dz + a$$

$$V'_y = x^2 - x - y + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right), \quad V'_x = 2xy - y + 1$$

$$f(z) = \int \left[z^2 - z + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) + j1\right] dz = \underline{\underline{\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\pi} + j\right)z + \alpha}}$$

Ex. Septiembre 2001

a) $¿I = \oint_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$?



b) $¿I_1 = \oint_{\Gamma} \frac{ch z}{z^{n+1}}\, dz$? , $¿I_2 = \oint_{\Gamma} \frac{sh z}{z^{n+1}}\, dz$? , $\Gamma: |z| = 1$

a) $z = e^{j\theta}$, $z = e^{j\theta}$

$$\oint_C = \int_{-2}^{-1} dx + \int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}\, dz + \int_1^2 dx + \int_{C_2} \frac{z}{\bar{z}}\, dz =$$

$$= 2 + \int_{\pi}^{0} j e^{j3\theta}\, d\theta + \int_0^{\pi} 2j e^{j3\theta}\, d\theta = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

b) $$I_1 = 2\pi j \operatorname{Res}\left\{ \frac{ch z}{z^{n+1}}, z = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Res}\left\{ \frac{ch z}{z^{n+1}}, z = 0 \right\} = \begin{cases} \frac{1}{n!} & , n = \dot{2} \\ 0 & , n \neq \dot{2} \end{cases}$$

$$I_1 = \begin{cases} \frac{2\pi j}{n!} & , n = \dot{2} \\ 0 & , n \neq \dot{2} \end{cases}$$

$$I_2 = 2\pi j \operatorname{Res}\left\{ \frac{sh z}{z^{n+1}}, z = 0 \right\} = \begin{cases} \frac{2\pi j}{n!} & , n \neq \dot{2} \\ 0 & , n = \dot{2} \end{cases}$$

Ejercicio 3º

mmT1 - SEP/01 - 5/5

MMT I **Septiembre 2001**

Recordando que, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, se verifica que $\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t \cdot f(t)$; calcular

$$\mathcal{L}^{-1}[\ln(1+\frac{1}{s^2})]$$

Solución:

Haciendo $\quad F(s) = \ln(1+\frac{1}{s^2}) = \ln\frac{1+s^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F'(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)}$

Por otra parte:

$$\frac{-2}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)} \quad \Rightarrow \quad A=-2; \quad B=2; \quad C=0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{-2}{s}+\frac{2s}{s^2+1}] = -2\,\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}] = -2(1-\cos t)$$

y, como $\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t \cdot f(t)$, resulta que:

$$-2(1-\cos t) = -t \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$$

luego,

$$\mathcal{L}^{-1}[\ln(1+\frac{1}{s^2})] = \frac{2(1-\cos t)}{t}$$

MMT1 - FEB'02 - 1/6

ETSIT UPM

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

MMT1- FEB'02- 1/6

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen de Febrero (8 de Febrero de 2002)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Ejercicio 1. Sea la función

$$f(z) = \text{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right),\ 0 \neq z \neq -1,$$

donde $\text{Ln}z = \text{Ln}|z| + j\text{Arg}z$, con $-\pi < \text{Arg}z \leq \pi$.

a) Estudiar la región en la que f es holomorfa.

b) Sea $\gamma(t) = -1 + re^{jt}$, $r > 1$, $t \in [-\pi, \pi]$. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$.

a) 1,5 ptos. b) 2 ptos. (Máximo 1 hoja)

Ejercicio 2.

a) Sea a un número complejo cualquiera ($a \in \mathbb{C}$) y sea C la circunferencia unidad $z = e^{j\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Demostrar que:

$$e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)\, z^n, \quad 0 < |z| < \infty$$

siendo

$$J_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - a\,\text{sen}\,\theta)d\theta, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

b) Sabiendo que $\int_0^\pi \cos(\theta + j\,\text{sen}\,\theta)d\theta = -\frac{9}{5}j$, calcular:

$$i)\quad \text{Res}\left[e^{\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}, z = 0\right]; \qquad ii)\quad \text{Res}\left[e^{\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}, z = \infty\right].$$

c) La función $f(z) = e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$, con $a \neq 0$, ¿puede estar acotada en un entorno perforado de $z = 0$? Razona la respuesta.

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Ejercicio 3.

a) Sabiendo que $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, $\quad p > 0$, calcular $\mathcal{L}[t^a]$, $a > -1$.

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, sabiendo que la función de error se define de la forma:

$$\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du,$$

y utilizando la identidad $\dfrac{1}{\sqrt{s}-1} = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \dfrac{1}{s-1}\right)$, calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right].$$

Nota. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

a) 1,5 ptos. b) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Problema 1. Sea la función

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right), \quad 0 \neq z \neq -1,$$

donde $\mathrm{Ln} z = \mathrm{Ln}|z| + j\mathrm{Arg} z$, con $-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi$.

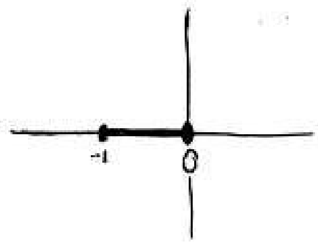
a) Estudiar la región en la que f es holomorfa. (1,5 puntos)

b) Sea $\gamma(t) = -1 + re^{jt}$, $r > 1$, $t \in [-\pi, \pi]$. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$. (2 puntos)

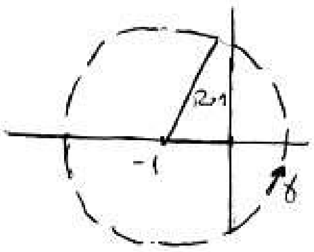
Respuesta:

a) f será holomorfa excepto en aquellos puntos en los que $\frac{z}{1+z} = a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, es decir, puntos de la forma $z = \frac{a}{1-a} = -1 + \frac{1}{1-a}$ con $a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \equiv [-1, 0] \subset \mathbb{R}$

Como los puntos $z=0$ y $z=-1$ están explícitamente excluidos del dominio, la región donde f es holomorfa es $\boxed{\mathbb{C} - \{z = x + 0j \ , x \in [-1, 0]\}}$



b)



$\int_\gamma \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) dz$ Sea $u = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right)$, $du = \frac{1+z}{z} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} dz = \frac{1}{z(1+z)} dz$

$dv = dz$, $v = z$

Una primitiva de f es, entonces, $z \cdot \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) - \int z \frac{1}{z(1+z)} dz = \overline{z\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) - \mathrm{Ln}(1+z)} \ (\equiv F(z))$

Esta primitiva es holomorfa en $\mathbb{C} - (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$

Entonces $\boxed{\int_\gamma \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) dz} = \lim_{t \to \pi} F(\gamma(t)) - \lim_{t \to -\pi} F(\gamma(t)) = -j\pi - (+j\pi) = \boxed{-2\pi j}$

Ejercicio 2. MMT1- FEB'02-3/6

a) Sea a un número complejo cualquiera ($a \in \mathbb{C}$) y sea C la circunferencia unidad $z = e^{j\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Demostrar que:

$$e^{\frac{a}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)\, z^n, \quad 0 < |z| < \infty$$

siendo

$$J_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - a \operatorname{sen}\theta)d\theta, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

(dichos coeficientes son las denominadas funciones de *Bessel* de 1ª especie y orden n).

b) Sabiendo que $\int_0^{\pi} \cos(\theta + j \operatorname{sen}\theta)d\theta = -\frac{9}{5}j$, calcular:

$$i)\quad \operatorname{Res}\left[e^{\frac{j}{2}(z-\frac{1}{z})}, z = 0\right]; \qquad ii)\quad \operatorname{Res}\left[e^{\frac{j}{2}(z-\frac{1}{z})}, z = \infty\right].$$

c) La función $f(z) = e^{\frac{a}{2}(z-\frac{1}{z})}$, con $a \neq 0$, ¿puede estar acotada en un entorno perforado de $z = 0$? Razona la respuesta.

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Soluc.

a) La función $f(z) = e^{a/2(z-\frac{1}{z})}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$. Luego admite un desarrollo en serie de Laurent en $0<|z|<\infty$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad 0<|z|<\infty \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{C\uparrow} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

En nuestro caso, los coeficientes a_n dependerán de la elección realizada para $a \in \mathbb{C}$. Así, si escribimos:

$$a_n = J_n(a),$$

tendremos:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C\uparrow} \frac{e^{a/2(z-\frac{1}{z})}}{z^{n+1}}dz \underset{\substack{C:\, z=e^{j\theta} \\ -\pi\leq\theta\leq\pi}}{=} \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{a/2(e^{j\theta}-e^{-j\theta})}}{e^{j\theta(n+1)}} j e^{j\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{j}} \cancel{j}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\theta n} e^{a/2(2j \operatorname{sen}\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(a \operatorname{sen}\theta - n\theta)} d\theta =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(a \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta}_{\substack{= \\ 2\int_0^{\pi} \cos(n\theta - a\operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ \text{(pues } \cos z \text{ es } \underline{par}\text{)}}} + \frac{1}{2\pi} j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(a \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta}_{\substack{= \\ 0 \text{ (pues sen } z \text{ es } \underline{impar}\text{)}}} =$$

Por tanto: $$J_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - a \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \quad \text{c.q.d.}$$

b) Si tomamos $a = j$ y llamamos $f_j(z) = e^{j/2(z-\frac{1}{z})}$ tenemos que:

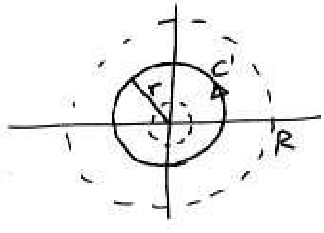
$$\operatorname{Res}[f_j(z), z=0] + \operatorname{Res}[f_j(z), z=\infty] = 0$$

Así tenemos: $$\operatorname{Res}[f_j(z), z=0] = J_{-1}(j) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(-\theta - j\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = -\frac{9}{5\pi} j$$

y por tanto: $$\operatorname{Res}[f_j(z), z=\infty] = -\operatorname{Res}[f_j(z), z=0] = \frac{9}{5\pi} j$$

c) Consideramos un entorno perforado de $z=0$: $D: 0<|z|<R \supset C': z = re^{j\theta}$

Sabemos que: $$J_n(a) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C'} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$



Supongamos que $f(z)$ está acotada en D y en particular en C', tal que: $|f(z)| \le M, \ \forall z \in C'$

Tenemos: $$|J_n(a)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\int_{C'} ds = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\frac{M}{r^{n+\cancel{1}}}\cdot \cancel{2\pi r} = \frac{M}{r^n}$$

En particular: $$\underset{n\in\mathbb{N}}{|J_{-n}(a)|} \le M r^n \xrightarrow{r\to 0} 0 \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Es decir, la serie de Laurent quedaría reducida a una serie de Taylor pues carecería de parte ppal, lo cual es una contradicción pues $z=0$ es un pto singular <u>esencial</u> de $f(z)$.

Luego, $f(z)$ no está acotada en D. c.q.d.

Ejercicio 3

1.- Sabiendo que $\Gamma(P) = \int_0^\infty x^{P-1} e^{-x}\,dx$, $P>0$,
calcular $\mathcal{L}[t^a]$, $a\in\mathbb{R} / a>-1$

Teniendo en cta el resultado anterior y
2.- Sabiendo que la función de error
$erf(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$ y utilizando
la identidad:

$$\frac{1}{\sqrt{s}-1} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)$$

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right]$

Nota: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

1.- $\mathcal{L}[t^a] = \int_0^\infty t^a e^{-st}\,dt \quad \{st = x\} =$

$$= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^{(a+1)-1} e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

$(a+1) > 0$
$Re\, s > 0$

2.- $\frac{1}{\sqrt{s}-1} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{s-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\mathcal{L}\left[t^{-1/2}\right] = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s-1}\right] = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, e^{t-x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \quad \left\{ x = u^2 \right\} =$$

$$= e^{t}\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du = e^{t}\operatorname{erf}\sqrt{t}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^{t}\left(1 + \operatorname{erf}\sqrt{t}\right)$$

MMT1 - SEP02 - 1/6

ETSIT UPM

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen de Septiembre (2 de Septiembre de 2002)

Tiempo: 2 horas 45 minutos

Ejercicio 1.

Sea
$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

a) Indicar si $u(x,y)$ es armónica en algún abierto conexo del plano complejo.

b) Encontrar $f(z)$ holomorfa tal que $\mathrm{Re}[f(z)] = u(x,y)$ y $f(0) = j$.

a) 1,5 ptos. b) 2 ptos. (Máximo 2 hojas)

Ejercicio 2.

a) Calcular, descomponiendo en fracciones simples y aplicando exclusivamente la fórmula de la integral de Cauchy, la integral
$$I = \int_C \frac{3z}{z^4-16}\,dz,$$
siendo C la elipse de ecuación $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{45} = 1$.

b) Por integración de la función $f(z) = \dfrac{e^{jz}}{z-ja}$, $a > 0$, sobre un contorno apropiado, calcular
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos x + x \operatorname{sen} x}{a^2+x^2}\,dx.$$

a) 1,5 ptos. b) 2 ptos. (Máximo 2 hojas)

Ejercicio 3.

a) Enumera (explicando su significado) un conjunto de condiciones que garanticen que una función $f(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ admita transformada de Laplace, analítica en cierto semiplano $\mathrm{Re}\,s > \sigma$, especificando si se trata de condiciones necesarias, suficientes o necesarias y suficientes.

b) Aplicando la transformada de Laplace, y haciendo uso exclusivamente de la tabla de transformadas y las propiedades de la misma, resolver el PVI:
$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = g(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
siendo:
$$g(t) = 1 - u_7(t) \qquad \text{con} \qquad u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases} \quad (a \geq 0)\,.$$

c) Analiza el comportamiento de la solución hallada en el apartado b) para $t \to \infty$.

a) 0,5 ptos. b) 2 ptos. c) 0,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Sep 2002

Ejercicio 1

Sea $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + (y-1)^2}$

a) Indicar si u es armónica en alguna región del plano complejo. (1'5 puntos)

b) Encontrar $f(z)$ holomorfa tal que $\operatorname{Re} f = u$ y $f(0) = j$. (2 punto)

Respuesta:

a) u no puede ser armónica en $z = j$ $(x=0, y=1)$ pues $\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y)$ no existe.

Para estudiar si es armónica en $\mathbb{C} - \{j\}$ empleemos un cambio a polares con origen en $(0,1)$: $\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = 1 + r\,\text{sen}\,\theta \end{array}$ La ecuación de Laplace es $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$

$$u(r,\theta) = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \qquad u_r = \frac{-\cos\theta}{r^2} \qquad u_\theta = \frac{-\text{sen}\,\theta}{r}$$

$$u_{rr} = \frac{2\cos\theta}{r^3} \qquad u_{\theta\theta} = \frac{-\cos\theta}{r}$$

Luego $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{r} - \dfrac{\cos\theta}{r} - \dfrac{\cos\theta}{r} = 0$ y, por tanto,

$\boxed{u \text{ es armónica en } \mathbb{C} - \{j\}}$

b) Por ser armónica en el origen, se puede escribir $f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + C$, es decir, ($C \in \mathbb{C}$)

$$f(z) = 2\frac{z/2}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2j} - 1\right)^2} + C = \frac{z}{\cancel{\frac{z^2}{4}} - \cancel{\frac{z^2}{4}} - \frac{z}{j} + 1} + C = \frac{jz}{j - z} + C$$

La constante C está determinada por la condición $j = f(0) = \left.\dfrac{jz}{j-z}\right|_{z=0} + C$, i.e. $C = j$.

con lo cual $\boxed{f(z) = \dfrac{jz}{j-z} + j = \dfrac{jz + j(j-z)}{j-z} = \dfrac{1}{z-j}}$

1.- Calcular, aplicando exclusivamente la fórmula de la integral de Cauchy, la integral: $I = \int_C \frac{3z}{z^4-16}\,dz$ siendo C la elipse de ecuación $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{45} = 1$

2.- Por integración de la función $f(z) = \frac{e^{jz}}{z-ja}$ sobre un contorno apropiado, calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x}{a^2+x^2}\,dx$

1.- $z^4 - 16 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm 2 \quad , \; z_{3,4} = \pm 2j$

$$\frac{3z}{z^4-16} = \frac{3}{16}\left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-2j} - \frac{1}{z+2j}\right)$$

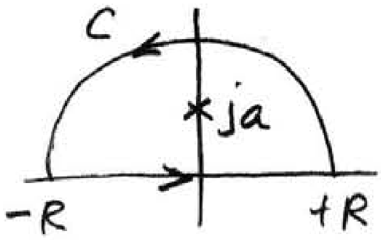
$$I = \frac{3}{16}\left[\int_C \frac{dz}{z-2} + \int_C \frac{dz}{z+2} - \int_C \frac{dz}{z-2j} - \int_C \frac{dz}{z+2j}\right]$$

Apl. la F. de la I de C. :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$I = \frac{3}{16}\, 2\pi j\,(1+1-1-1) = \underline{\underline{0}}$$

2.- $\oint_{\Gamma} \frac{e^{jz}}{z-ja}\,dz = 2\pi j \, \mathrm{Res}_{z=ja}$

Γ 

$$\mathrm{Res}_{z=ja} = \lim_{z\to ja} (z-ja)\frac{e^{jz}}{z-ja} = e^{-a}$$

$$\int_{C\circlearrowleft} \frac{e^{jz}}{z-ja}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{jx}}{x-ja}\,dx = 2\pi j e^{-a} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ 0\le \arg z \le \pi}} \frac{1}{z-ja} = 0 \longrightarrow 3^{er} \text{ L. de Jordan}: \quad \lim_{R\to\infty} \int_{C\circlearrowleft} \frac{e^{jz}}{z-ja}\,dz = 0$$

Tomando limites cuando $R\to\infty$ en (1)

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x-ja}\,dx = 2\pi j e^{-a}$$

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x + j\,\mathrm{sen}\, x)(x+ja)}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi j e^{-a}$$

Identificando partes imaginarias

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x + a\cos x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi e^{-a}$$

Ejercicio 3.

a) Enumera (y explica su significado) un conjunto de condiciones que garanticen que una función $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ admita transformada de Laplace, analítica en cierto semiplano $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, especificando si se trata de condiciones necesarias, suficientes o necesarias y suficientes.

b) Aplicando la transformada de Laplace, y haciendo uso exclusivamente de la tabla de transformadas y las propiedades de la misma, resolver el PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = g(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

siendo: $$g(t) = 1 - u_7(t) \qquad \text{con} \qquad u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases} \quad (a \geq 0).$$

c) Analiza el comportamiento de la solución hallada en el apartado b) para $t \to \infty$.

a) 0,5 ptos. b) 2 ptos. c) 0,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Soluc. Por el Teorema de convergencia de la transformada de Laplace, sabemos que si una función $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ verifica las 2 condiciones suficientes que citamos a continuación, puede asegurarse la existencia de su correspondiente transformada de Laplace: $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ y es analítica en un cierto semiplano $\mathrm{Re}\, s > \sigma$:

1) $f(t)$ es continua a trozos en cualquier intervalo finito $[0,a]$; es decir es continua en cualquier intervalo finito $[0,a]$ salvo en un nº finito de puntos en los que las discontinuidades son de primera especie (o de salto)

2) $f(t)$ es de orden exponencial, es decir $\exists M > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ ctes tales que:
$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

En este caso se puede afirmar que $\exists!\ \sigma$, $-\infty \leq \sigma < \infty$, tal que:
$$\int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \begin{cases} \text{converge si } \mathrm{Re}\, s > \sigma \\ \text{diverge si } \mathrm{Re}\, s < \sigma \end{cases}$$

Por lo que, en este caso se puede afirmar que la transformada de Laplace de $f(t)$:
$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

existe y es analítica en el semiplano: $D = \{ s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > \sigma \}$ siendo $\sigma \leq \rho$ con: $\rho = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq M e^{\alpha t},\ \forall t \geq 0 \}$

b) Aplicamos la transf. de Laplace a la EDO, denotando $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + 2\left(sY(s) - \cancel{y(0)}^{0}\right) + 5\,Y(s) = \mathcal{L}(g(t))$$

y calculamos:

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(1 - u_7(t)) = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(u_7(t)) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-7s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

y obtenemos:

$$(s^2+2s+5)\,Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-7s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Despejamos:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)} - \frac{e^{-7s}}{s(s^2+2s+5)} \qquad (*)$$

y aplicando la transf. de Laplace inversa en $(*)$, obtenemos:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{s(s^2+2s+5)}\right)$$

Para resolver, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{1/5}{s} - \frac{(s+2)/5}{s^2+2s+5} = \frac{1/5}{s} - \frac{(s+2)/5}{(s+1)^2+2^2}$$

y calculamos separadamente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/5}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)/5}{(s+1)^2+2^2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{s(s^2+2s+5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{5s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}(s+2)/5}{(s+1)^2+2^2}\right) =$$

$$= \frac{u_7(t)}{5} - \frac{u_7(t)\,e^{-(t-7)}}{5}\left(\cos(2(t-7)) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-7))\right)$$

Con lo que la solución del PVI es:

$$y(t) = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \frac{u_7(t)}{5} + \frac{u_7(t)\,e^{-(t-7)}}{5}\left(\cos(2(t-7)) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-7))\right)$$

c) Analizamos el comportamiento de $y(t)$ para $t\to\infty$

Para $t>7$: $\frac{1}{5}$ y $\frac{u_7(t)}{5}$ se cancelan pues $u_7(t) = \begin{cases} 0, & t<7 \\ 1, & t\geq 7\end{cases}$

Por otra parte: $e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ y $e^{-(t-7)} \xrightarrow[t-7\to\infty]{} 0$

Por lo que la solución del PVI, $y(t)$, tiende a 0 para $t\to\infty$.

ETSIT UPM

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

FEB'03 1/6

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria ordinaria, 27 de Enero de 2003)

Tiempo: 2 horas 45 minutos

Problema 1.

a) Dada la función $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ holomorfa en un abierto conexo $\mathcal{D}$ tal que $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathcal{D}$, demuestre que las familias de curvas de nivel $u(x, y) = C_1$ y $v(x, y) = C_2$, siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias, se cortan perpendicularmente en $\mathcal{D}$. (Recuérdese que, en este caso, es suficiente con probar que los gradientes de u y v son perpendiculares).

b) Indique, razonadamente, las hipótesis que debería cumplir $g(x, y)$ para que pueda aplicarse el resultado del apartado anterior al cálculo de las trayectorias ortogonales a la familia $g(x, y) = C$, siendo C una constante real arbitraria.

c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, obtenga las trayectorias ortogonales a la familia de curvas planas

$$xy(x^2 - y^2) = C, \quad C \text{ constante real arbitraria.}$$

Indique un punto del plano donde no se pueda asegurar la ortogonalidad de las curvas que pasan por él.

a) 1 pto. b) 1 pto c) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Problema 2.
Sea

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)}.$$

a) Obtenga el desarrollo de Laurent de f centrado en $z_0 = 0$ y convergente en $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| > 1\}$.

b) Calcule las integrales

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma z^2 f(z) dz, \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma z^3 f(z) dz,$$

siendo $\gamma(t) = 2e^{jt}, \ t \in [0, 2\pi]$.

a) 2 ptos. b) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Problema 3.
Derivando respecto al parámetro la función

$$\Gamma(p + 1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx, \quad p + 1 > 0,$$

encuentre la expresión de

$$\mathcal{L}(\operatorname{Ln} t)$$

en función de $\Gamma'(1)$, donde $\mathcal{L}$ denota Transformada de Laplace.

1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

FEB'03 2/6

ETSIT
UPM

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

APELLIDOS: .... **NOMBRE:** ....

ATENCIÓN

Si se responde a este problema adicional (que, en tal caso, deberá entregarse en esta misma hoja) se entenderá que se renuncia a la nota obtenida en el examen-test y se tomará la nota obtenida en este problema. Los alumnos que prefieran conservar la nota del examen-test, no deberán entregar este problema.

Problema adicional

Considerando que si dos funciones continuas $f(t), g(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tienen una misma Transformada de Laplace $\mathcal{H}(s)$ en $\mathrm{Re}s > \sigma$, entonces se verifica que $f(t) = g(t), \forall t \geq 0$, exprese en términos de funciones elementales la función dada por

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1}\, dx, \qquad t \geq 0.$$

1,5 ptos. (Máximo: esta hoja)

P 1

a) $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$

$\vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conds de C-R}}}{=} -\frac{\partial u}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{j}$

$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v$

c.q.d.

b) Si, siempre que $g(x,y)$ sea una función armónica en un dominio $\Rightarrow$ Para todo pto de este dominio admita derivadas parciales de 2º orden continuas y satisfaga la ecuación de Laplace

c) $g(x,y) = xy(x^2-y^2)$ verifica ser una función armónica

$\Rightarrow x^3y - xy^3 = u(x,y) = Re[f(z)]$

$f'(z) = u_x - j u_y = 3x^2y - y^3 - j(x^3 - 3xy^2)$

apl. el T. de Milne-Thompson

$f'(z) = -jz^3 \longrightarrow f(z) = -j\frac{z^4}{4} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Trayectorias $\perp$:

$v = Im[f(z)] = cte \rightarrow y^4 + x^4 - 6x^2y^2 = C, C \in \mathbb{R}$

Un pto del plano donde no se puede asegurar la $\perp$: $f'(z) = 0 \longrightarrow x=0, y=0$

Problema 2 (3'5 ptos) (Feb 03)

Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$

a) Obtenga el desarrollo de Laurent de f centrado en 0 y convergente en $|z|>1$

b) Calcule las integrales $I_1 = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_\gamma z^2 f(z)\,dz$, $I_2 = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_\gamma z^3 f(z)\,dz$,

donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Solución:

ⓐ
$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z}\,\frac{1/z^2}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z^2}\right)} \overset{|z|>1}{=} \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n =$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+3}} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} - \frac{1}{z^9} + \dots}$$

ⓑ Escribiendo el des. Laurent como $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$, con $c_k = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$,
$z_0 = 0$

se obtiene $c_{-3} = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-2}}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma z^2 f(z)\,dz$ y $c_{-4} = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int z^3 f(z)\,dz$.

Por tanto, $\boxed{I_1 = c_{-3} = 1}$, $\boxed{I_2 = c_{-4} = 0}$.

Nota: el apdo b) se puede resolver también de forma sencilla utilizando residuos, sin necesidad de haber resuelto el a).

Problema 3

Derivando respecto al parámetro la función

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx, \quad p+1>0$$

encuentre la expresión de

$$\mathcal{L}(\ln t)$$

en función de $\Gamma'(1)$, donde $\mathcal{L}$ denota Transformada de Laplace.

Soluc.

Consideramos: $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx \quad , \quad p>-1$

Derivamos respecto al parámetro p

$$\Gamma'(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p \ln x \, dx$$

Tomamos $p=0$ y obtenemos

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx \underset{x=st}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^\infty (\ln s + \ln t) e^{-st} s \, dt =$$

$$= s \ln s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} dt}_{= 1/s, \ \operatorname{Re} s>0} + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} \ln t \, dt}_{\mathcal{L}(\ln t)} = \ln s + s\,\mathcal{L}(\ln t), \ \operatorname{Re} s>0$$

Así pues, obtenemos:

$$\mathcal{L}(\ln t) = \frac{1}{s}\left(\Gamma'(1) - \ln s\right), \quad \operatorname{Re} s>0$$

FEB '03 6/6

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION

Universidad Politécnica de Madrid

ETSIT UPM

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

APELLIDOS: .... **NOMBRE:** ....

ATENCIÓN

Si se responde a este problema adicional (que, en tal caso, deberá entregarse en esta misma hoja) se entenderá que se renuncia a la nota obtenida en el examen-test y se tomará la nota obtenida en este problema. Los alumnos que prefieran conservar la nota del examen-test, no deberán entregar este problema.

Problema adicional

Considerando que si dos funciones continuas $f(t), g(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tienen una misma Transformada de Laplace $\mathcal{H}(s)$ en $\mathrm{Re}\,s > \sigma$, entonces se verifica que $f(t) = g(t), \forall t \geq 0$, exprese en términos de funciones elementales la función dada por

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1}\,dx, \qquad t \geq 0.$$

1,5 ptos. (Máximo: esta hoja)

Soluc. Si llamamos $f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1}$, $t \geq 0$

y obtenemos:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \cos tx \, \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) = \int_0^\infty \mathcal{L}(\cos tx)\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^2}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

(Re $s>0$)

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s^2+x^2} + \frac{1}{x^2+1}\right)\frac{s}{s^2-1}\,dx, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

$$\frac{1}{(s^2+x^2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{s^2+x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{-1/(s^2-1)}{s^2+x^2} + \frac{1/(s^2-1)}{x^2+1}$$

Así pues: $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{s^2-1} \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{s}\Big|_0^R + \mathrm{arctg}\,x\Big|_0^R \right] =$

$$= \frac{s}{s^2-1}\left(-\frac{1}{s}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Observamos, por otra parte, que si consideramos la función:

$$g(t) = \frac{\pi}{2}e^{-t},\ t \geq 0 \longleftrightarrow \mathcal{L}(g(t)) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Con lo que $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t)) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1} = H(s)$, Re $s > 0$

Luego, aplicando la propiedad enunciada, obtenemos: $f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-t}$, $t \geq 0$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria extraordinaria, 6 de Septiembre de 2003)

Tiempo: 2 horas 45 minutos

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *Se atenderán sólo aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en el enunciado de los problemas.*
- *No se corregirá ningún examen de alumnos que no estén ubicados en el aula que les corresponde según la distribución publicada.*

Problema 1.
a) Sabiendo que cierta distribución de temperatura puede modelarse mediante una función armónica $T : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, y cumpliéndose que:

1) la temperatura en cada punto varía de forma inversamente proporcional a la distancia del punto al origen, y

2) la temperatura en las circunferencias centradas en el origen y de radios $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ es de 0º C y de 70º C, respectivamente;

hallar la expresión de T.

b) Hallar la familia de funciones holomorfas cuya parte imaginaria sea la función T.

a) 2 ptos. b) 1 pto. (Máximo 1 hoja)

Problema 2.
a) Indicar razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, para cada uno de los casos a1) - a3):
Sea f continua en un compacto conexo no vacío $\mathcal{K}$, y holomorfa y no constante en el interior de $\mathcal{K}$. Entonces, el *mínimo* absoluto de

a1) $|e^{f(z)}|$

a2) $|f(z)|^2$

a3) $-|f(z)|^2$

se alcanza en la frontera $\partial\mathcal{K}$.

b) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| < 1$, y $\gamma_n^+(t) = 1 + ne^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular

$$I = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_n^+} \frac{2nz_0^n}{z^2 - n^2} dz.$$

a) 1,5 ptos. b) 1,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

Problema 3.
Utilizando la transformada de Laplace y suponiendo que la ecuación que describe un circuito LC es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = V(t),$$

siendo $Q(t)$ la carga en el condensador y $V(t)$ el voltaje aplicado, calcular la carga $Q(t)$ caso de ser

$$Q(t=0) = 1,\ Q'(t=0) = 0,\ L = 1,\ C = \frac{1}{4}\ \text{ y }\ V(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi,\ t \ge 2\pi. \end{cases}$$

2,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

ETSIT UPM

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

APELLIDOS: .... **NOMBRE:** ....

ATENCIÓN

Si se responde a este problema adicional que, en tal caso, deberá entregarse en esta misma hoja (junto con el resto del examen), se entenderá que se renuncia a la nota obtenida en el examen-test y se tomará la nota obtenida en este problema. Los alumnos que prefieran conservar la nota del examen-test, no deberán entregar este problema.

Problema adicional

a) Admitiendo que $\mathcal{L}[g(t)] = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}[I_\tau(t)]$, donde $\mathcal{L}$ denota transformada de Laplace, y siendo

$$I_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & 0 \le t < \tau \\ 0, & t \ge \tau, \end{cases}$$

calcular la transformada de Laplace de la función $g(t)$.

b) Utilizando el resultado anterior, resolver el PVI:

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

a) 1 pto. b) 0,5 ptos. (Máximo: esta hoja)

Solución:

a) Usando la func. escalón unitario, podemos reescribir $I_\tau(t)$ como

$$I_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\left[u(t) - u(t-\tau)\right].$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[I_\tau(t)] = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\tau s}}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[g(t)]} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}[I_\tau(t)] = \lim_{\tau\to 0} \frac{1-e^{-\tau s}}{\tau s} \underset{\text{L'Hôpital }(0/0)}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{\cancel{s}e^{-\tau s}}{\cancel{s}} \boxed{= 1}.$$

[Alternativamente, sin usar func. escalón:

$$\mathcal{L}[I_\tau(t)] = \int_0^\tau \frac{1}{\tau} e^{-st}\,dt = \frac{1}{\tau}\left(\frac{-1}{s}\right)\left[e^{-st}\right]_0^\tau = \frac{-1}{s\tau}(e^{-s\tau}-1) = \frac{1-e^{-s\tau}}{s\tau}$$]

b) $s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + 4Y(s) = \mathcal{L}[g(t)] = 1$

$$\Rightarrow (s^2+4)Y(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t}$$

Problema 1.

a) Sabiendo que cierta distribución de temperatura puede modelarse mediante una función armónica $T : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, y cumpliéndose que:

1) la temperatura en cada punto varía de forma inversamente proporcional a la distancia del punto al origen, y

2) la temperatura en las circunferencias centradas en el origen y de radios $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ es de 0º C y de 70º C, respectivamente;

hallar la expresión de T.

Solución.-

a) $T : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ función **armónica.**

La temperatura (T) en cada punto (x, y) varía de forma inversamente proporcional a la distancia del punto al origen

$$\Downarrow$$

$$T = T(h(x,y)); \quad h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\};$$

o bien,

$$T = T(h(r,\theta)); \quad h(r,\theta) = \frac{1}{r}, \ r > 0.$$

La función T ha de ser armónica, es decir ha de verificar $\Rightarrow \nabla^2 T = 0, \forall (r,\theta), r > 0$.

Observamos que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{dT}{dh}\dfrac{\partial h}{\partial r} = \dfrac{dT}{dh}\left(-\dfrac{1}{r^2}\right), & \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \dfrac{d^2T}{dh^2}\left(-\dfrac{1}{r^2}\right)^2 + \dfrac{dT}{dh}\left(\dfrac{2}{r^3}\right) \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 0, & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \end{cases}$$

Luego:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{1}{r} = 0;$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2T}{dh^2}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{dT}{dh}\left(\frac{2}{r^3}\right) - \frac{dT}{dh}\left(\frac{1}{r^3}\right) = 0$$

Con lo que, simplificando, obtenemos:

$$\frac{d^2T}{dh^2}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{dT}{dh}\left(\frac{1}{r^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2T}{dh^2} + r\frac{dT}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2T}{dh^2} + \frac{1}{h}\frac{dT}{dh} = 0.$$

Resolvemos la ecuación anterior, escribiéndola de la forma

$$T'' + \frac{1}{h}T' = 0,$$

y mediante el cambio:

$$Z = T' = \frac{dT}{dh}$$

podemos escribir la ecuación de la forma:

$$Z' + \frac{1}{h}Z = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dZ}{Z} = -\frac{1}{h}dh \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\,|Z| = -\,\mathrm{Ln}\,h + \mathrm{Ln}\,C_1 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{C_1}{h}$$

Y, deshaciendo el cambio,

$$T' = \frac{C_1}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dh} = \frac{C_1}{h} \quad \Rightarrow \quad T = C_1\,\mathrm{Ln}\,h + C_2,$$

obtenemos la expresión de T:

$$T = C_1\,\mathrm{Ln}\,h + C_2, \qquad C_1, C_2 \text{ ctes} \in \mathbb{R},$$

que es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Finalmente, aplicando las condiciones dadas en 2),

$$\begin{cases} 0 & = C_1\,\mathrm{Ln}\,1 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ 70 & = C_1\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{70}{\mathrm{Ln}\,2} \end{cases}$$

obtenemos la función que modela la distribución de temperatura:

$$T = -\frac{70}{\mathrm{Ln}\,2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r > 0.$$

b) La familia de funciones holomorfas $f(z)$ cuya parte imaginaria es T, puede obtenerse aplicando el método de Milne Thompson:

$$f(z) = \int \frac{\partial T}{\partial y}(z,0)\,dz + j\int \frac{\partial T}{\partial x}(z,0)\,dz + K.$$

Así, teniendo en cuenta que:

$$T = C_1\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + C_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = C_1\frac{x}{x^2+y^2} & \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x}(z,0) = \frac{C_1}{z} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = C_1\frac{y}{x^2+y^2} & \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial y}(z,0) = 0 \end{cases},$$

obtenemos

$$f(z) = j\int C_1\frac{dz}{z} + K = j\,C_1 \ln z + K, \;\; K \in \mathbb{C}.$$

Imponemos ahora que T sea la parte imaginaria (lo que nos permitirá determinar K_1, siendo $K = K_1 + jK_2$) :

$$f(z) = j\,C_1(\mathrm{Ln}\,r + j\,\mathrm{Arg}\,z) + K = -(C_1\,\mathrm{Arg}\,z + K_1) + j\,(C_1\,\mathrm{Ln}\,r + K_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(z) = -C_1\,\mathrm{Arg}\,z + K_1 + j\,T \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{70}{\mathrm{Ln}\,2}, \;\; K_2 = 0, \quad \text{pues } T = -\frac{70}{\mathrm{Ln}\,2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{70}{\mathrm{Ln}\,2}\,\mathrm{Ln}\,r$$

Por tanto, la familia de funciones pedida es:

$$f(z) = j\,\frac{70}{\mathrm{Ln}\,2}\,\ln z + K_1, \;\; K_1 \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.

a) Indicar razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, para cada uno de los casos a1) - a3):

Sea f continua en un compacto conexo no vacío $\mathcal{K}$, y holomorfa y no constante en el interior de $\mathcal{K}$. Entonces, el *mínimo* absoluto de

a1) $|e^{f(z)}|$

a2) $|f(z)|^2$

a3) $-|f(z)|^2$

se alcanza en la frontera $\partial\mathcal{K}$.

b) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| < 1$, y $\gamma_n^+(t) = 1 + ne^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular

$$I = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_n^+} \frac{2nz_0^n}{z^2 - n^2} dz.$$

a) 1,5 ptos. b) 1,5 ptos.

Solución:

a) En los casos a1) y a3), la afirmación es *verdadera*:

- En el caso a1), basta aplicar el principio del módulo máximo a $\frac{1}{e^{f(z)}}$, que es holomorfa dado que $e^{f(z)} \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.
- En el caso a3), $f^2(z)$ es holomorfa, y basta aplicar el principio del módulo máximo a esta función.

En el caso a2), la afirmación es *falsa*. Contraejemplo: $f(z) = z$ en cualquier compacto conexo que contenga en su interior al origen. El mínimo absoluto se encuentra en $z = 0$.

b) Denominando $I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_n^+} \frac{2nz_0^n}{z^2-n^2} dz$, se tiene $I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$. El integrando de I_n tiene dos polos simples en $\pm n$, y sólo el situado en $+n$ queda encerrado por la curva γ_n^+. De esto resulta

$$I_n = \text{Res}_{z=n} \frac{2nz_0^n}{z^2 - n^2} = \lim_{z \to n} (z - n) \frac{2nz_0^n}{z^2 - n^2} = \lim_{z \to n} \frac{2nz_0^n}{z + n} = z_0^n.$$

Por lo tanto,

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} z_0^n = \frac{z_0}{1 - z_0}.$$

Problema 3.

Utilizando la transformada de Laplace y suponiendo que la ecuación que describe un circuito LC es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = V(t),$$

siendo $Q(t)$ la carga en el condensador y $V(t)$ el voltaje aplicado, calcular la carga $Q(t)$ caso de ser

$$Q(t=0) = 1,\ Q'(t=0) = 0,\ L = 1,\ C = \frac{1}{4} \ \text{ y } \ V(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi,\ t \ge 2\pi. \end{cases}$$

2,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

Solución:

$$Q'' + 4Q = V(t) = \begin{cases} 1 , & -\pi \le t < 2\pi \\ 0 , & 0 \le t < \pi ,\ t \geq 2\pi \end{cases}$$

Podemos expresar $V(t)$ como

$$V(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi) \quad ,$$

siendo u la función escalón unitario.

Tomando transformadas de Laplace:

$$(s^2+4)F(s) - s\cancelto{1}{Q(0)} - \cancelto{0}{Q'(0)} = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \quad ,$$

de donde $\displaystyle F(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{descomp.} \\ \text{fracc. simples}}}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right] = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) .$$

usando prop. $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = u(t-a)f(t-a)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right] = \frac{1}{4}u(t-\pi)\left[1 - \cos 2(t-\pi)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\right) = \frac{1}{4}u(t-2\pi)\left[1 - \cos 2(t-2\pi)\right]$$

alternativamente, estas transform. se pueden calcular med. residuos

Y sustit^{do} obtenemos finalmente

$$\boxed{Q(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos 2t + \frac{1}{4}u(t-\pi)[1 - \underbrace{\cos 2(t-\pi)}_{=\cos 2t}] - \frac{1}{4}u(t-2\pi)[1 - \underbrace{\cos 2(t-2\pi)}_{=\cos 2t}]}$$

O bien, consid^{do} las func. escalón:

- Para $0 \le t < \pi$: $Q(t) = \cos 2t$,
- Para $\pi \le t < 2\pi$: $Q(t) = \cos 2t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2t$,
- Para $t \geq 2\pi$: $Q(t) = \cos 2t + \cancel{\frac{1}{4}(1-\cos 2t) - \frac{1}{4}(1-\cos 2t)} = \cos 2t$,

es decir:

$$\boxed{Q(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + 3\cos t) , & 0 \le t < \pi \\ \cos 2t , & 0 \le t < \pi ,\ t \geq 2\pi \end{cases}} \ ,$$

.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria ordinaria. 4 de Febrero de 2004)

Tiempo: 2 horas 45 minutos

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *Se atenderán sólo aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en el enunciado de los problemas.*
- *No se corregirá ningún examen de alumnos que no estén ubicados en el aula que les corresponde según la distribución publicada.*

Problema 1.
a) Estudiar la continuidad y la holomorfía en el punto $z = j$ de la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z-j)^5}{|z-j|^4}, & z \neq j \\ 0, & z = j. \end{cases}$$

b) Sea $v = v(\varphi(x, y)) \neq$ cte. siendo $\varphi(x, y) = x^2 - ay^2$.

b-1) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función $v(x, y)$ es la parte imaginaria de una función holomorfa.

b-2) Para $a = -1$, hallar la función holomorfa correspondiente, $g(z)$, que además verifique $g(1) = 0$ y $g'(2j) = \frac{1}{2}$.

a) 1,5 ptos. b-1) 1 pto. b-2) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Problema 2.

a) Calcule las singularidades de

$$f(z) = \frac{1}{(e^z + 1)(z^2 + \pi^2)},$$

ignorando el punto del infinito. Clasifíquelas en singularidades evitables, polos y singularidades esenciales. Indique el orden de los polos.

b) Siendo $f(z)$ la función definida en el apartado anterior, calcule

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz,$$

donde $\gamma^+(t) = j3\pi + \pi e^{jt},\ t \in [-\pi, \pi]$.

a) 1,5 ptos. b) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Problema 3.
Calcular, mediante residuos, la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{s^6(1-s)}$$

3,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

Problema 1.

a) Estudiar la continuidad y la holomorfía en el punto $z = j$ de la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z-j)^5}{|z-j|^4}, & z \neq j \\ 0, & z = j. \end{cases}$$

b) Sea $v = v(\varphi(x, y)) \neq$ ctc. siendo $\varphi(x, y) = x^2 - ay^2$.

b-1) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función $v(x, y)$ es la parte imaginaria de una función holomorfa.

b-2) Para $a = -1$, hallar la función holomorfa correspondiente, $g(z)$, que además verifique $g(1) = 0$ y $g'(2j) = \frac{1}{2}$.

a) 1,5 ptos. b-1) 1 pto. b-2) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Solución:

a) Continuidad de $f(z)$ en $z = j$

$$\lim_{z \to j} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(x + j(y-1))^5}{|x + j(y-1)|^4} = \lim_{r \to 0} \frac{r^5 e^{j5\theta}}{r^4} = 0.$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y - 1 &= r\sin\theta \end{cases}$$

Luego: $\lim_{z \to j} f(z) = 0 = f(j) \quad \to \quad$ $f(z)$ es continua en $z = j$.

Holomorfía de $f(z)$ en $z = j$

Veamos si $f(z)$ es diferenciable en $z = j$, es decir veamos si $\exists f'(z)|_{z=j}$

$$\lim_{z \to j} \frac{f(z) - f(j)}{z - j} = \lim_{z \to j} \frac{\frac{(z-j)^5}{|z-j|^4} - 0}{z - j} = \lim_{z \to j} \frac{(z-j)^4}{|z-j|^4} = \lim_{r \to 0} \frac{(re^{j\theta})^4}{r^4} = \lim_{r \to 0} e^{j4\theta} \quad \text{no existe.}$$

Otra forma de comprobar que $f(z)$ no es holomorfa en $z = j = (0, 1)$.
Vemos que

$$f(x, 1) = \frac{x^5}{x^4} = x \quad \Rightarrow \quad u(x, 1) = x, \;\; v(x, 1) = 0.$$

$$f(0, y) = \frac{(jy - j)^5}{(jy - j)^4} = j(y-1) \quad \Rightarrow \quad u(0, y) = 0, \;\; v(0, y) = y - 1.$$

Vemos si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en el punto $z = j = (0, 1)$, para ello calculamos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 1) - u(0, 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = \lim_{y \to 1} \frac{u(0, y) - u(0, 1)}{y - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{y - 1} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x, 1) - v(0, 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, 1) = \lim_{y \to 1} \frac{v(0, y) - v(0, 1)}{y - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{y - 1}{y - 1} = 1$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es
Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

Luego, en efecto se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en $z=(0,1)$, pues

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,1)=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,1)=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)=0.$$

Sin embargo, vemos que

$$f(x,y)=\frac{(x+j(y-1))^5}{(x^2+(y-1)^2)^2} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} u(x,y)= & \frac{x^5-10x^3(y-1)^2+5x(y-1)^4}{(x^2+(y-1)^2)^2} \\ & \\ v(x,y)= & \frac{5x^4(y-1)-10x^2(y-1)^3+(y-1)^5}{(x^2+(y-1)^2)^2}\end{array}\right.$$

Con lo que para $(x,y)\neq(0,1)$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{[5x^4-30x^2(y-1)^2+5(y-1)^4](x^2+(y-1)^2)^2-2(x^2+(y-1)^2)2x[x^5-10x^3(y-1)^2+5x(y-1)^4]}{(x^2+(y-1)^2)^4}$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\frac{5(y-1)^8}{(y-1)^8}=5 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to 1}\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=5\neq\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)=1.$$

Por lo que, $\frac{\partial u}{\partial x}$ no es continua en el punto $(0,1)$, (es fácil comprobar que las funciones $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ tampoco son continuas en el punto $(0,1)$).

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(z)\ \text{no es holomorfa en } z=j.}$$

b-1) Tenemos que $v=v(\varphi(x,y))$, con $\varphi(x,y)=x^2-ay^2$.
Si v es la parte imaginaria de una función holomorfa, necesariamente ha de ser armónica en un abierto conexo D, es decir ha de verificar la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad \forall(x,y)\in D$$

Calculamos

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial v}{\partial x} = & \frac{dv}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{dv}{d\varphi}\,(2x) \\ & \\ \frac{\partial v}{\partial y} = & \frac{dv}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{dv}{d\varphi}\,(-2ay)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = & \frac{d^2v}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{dv}{d\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{d^2v}{d\varphi^2}(4x^2)+\frac{dv}{d\varphi}\,(2) \\ & \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = & \frac{d^2v}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{dv}{d\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{d^2v}{d\varphi^2}(4a^2y^2)+\frac{dv}{d\varphi}\,(-2a)\end{array}\right.$$

Luego, si ha de cumplir la ecuación de Laplace, se ha de verificar

$$0=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{d^2v}{d\varphi^2}[4(x^2+a^2y^2)]+\frac{dv}{d\varphi}\,2(1-a).$$

Es decir,

$$\frac{\frac{d^2v}{d\varphi^2}}{\frac{dv}{d\varphi}}=\frac{2(a-1)}{4(x^2+a^2y^2)}, \tag{1}$$

y para que esta expresión sea integrable se ha de verificar

$$\frac{2(a-1)}{4(x^2+a^2y^2)}=\phi(x^2-ay^2) \quad\Rightarrow\quad a^2=-a, \quad a=0,-1.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

La expresión (1) puede integrarse también para $a = 1$, pues en este caso $\frac{d^2v}{d\varphi^2} = 0$, con lo que $v = A(x^2 - y^2) + B$, con A, B — ctes reales.

$$\Downarrow$$

La constante a puede tomar los valores $a = 0, 1$ y -1.

b-2) para $a = -1$, tenemos $v = v(\varphi(x, y))$, con $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.
Es decir, sustituyendo en (1),

$$\frac{\frac{d^2v}{d\varphi^2}}{\frac{dv}{d\varphi}} = \frac{2(-2)}{4(x^2 + y^2)} = \frac{-1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\varphi},$$

e, integrando, obtenemos

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{dv}{d\varphi}\right) = -\operatorname{Ln}\varphi + C_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{d\varphi} = \frac{e^{C_0}}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad v = C_1 \operatorname{Ln}\varphi + C_2.$$

Luego:

$$v(x, y) = C_1 \operatorname{Ln}(x^2 + y^2) + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}^+, C_2 \in \mathbb{R} \qquad (\text{armonica en } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}).$$

Calculamos finalmente la función $g(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, utilizando las fórmulas de Milne-Thompson

$$g(z) = \int \left(\frac{\partial v}{\partial y}(z, 0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(z, 0)\right) dz + K, \quad K \in \mathbb{C}.$$

Vemos que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z, 0) = 2C_1\,\frac{1}{z},$$

luego

$$g(z) = 2C_1 j\ \ln z + K$$

y, aplicando las condiciones dadas

$$0 = g(1) = 0 + K \quad \Rightarrow \quad K = 0$$

$$g'(z) = 2jC_1\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = g'(2j) = 2jC_1\frac{1}{2j} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2},$$

con lo que

$$\underline{g(z) = j\ \ln z}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

Problema 2 (3 puntos).

a) (1'5 puntos) Calcule las singularidades de

$$f(z) = \frac{1}{(e^z+1)(z^2+\pi^2)},$$

ignorando el punto del infinito. Clasifíquelas en singularidades evitables, polos y singularidades esenciales. Indique el orden de los polos.

b) (1'5 puntos) Siendo $f(z)$ la función definida en el apartado anterior, calcule

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz,$$

donde $\gamma^+(t) = j3\pi + \pi e^{jt},\ t \in [-\pi, \pi]$.

a) 1,5 ptos. b) 1,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Solución:
a) Las singularidades vienen definidas por los ceros del denominador:

$$e^z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \{\pm j\pi, \pm j3\pi, \pm j5\pi, \ldots\} = \{j(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,;$$
$$z^2 + \pi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm j\pi.$$

Por lo tanto, el conjunto de singularidades es $\{j(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Aplicando la definición, es inmediato comprobar que todas ellas son **polos**, siendo $\pm j\pi$ polos **dobles** y el resto **simples**.

b) La curva γ^+ representa una circunferencia positivamente orientada, centrada en $j3\pi$ y de radio π. La única singularidad que encierra es el polo simple $j3\pi$, de donde se deduce que

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = j2\pi \mathrm{Res}_{z=j3\pi} f(z) = j2\pi \lim_{z\to j3\pi} \frac{z-j3\pi}{(e^z+1)(z^2+\pi^2)} = j2\pi \frac{1}{-8\pi^2} \lim_{z\to j3\pi} \frac{z-j3\pi}{(e^z+1)} = \boxed{\tfrac{j}{4\pi}.}$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s. n. 28040 MADRID
http: www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

Problema 3.
Calcular, mediante residuos, la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{s^6(1-s)}$$

3,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

Solución:
Vemos que

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0,$$

con lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6(1-s)}\right] = \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(1-s)}, s = s_k\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(1-s)}, s=0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(1-s)}, s=1\right],$$

verificándose que

$$s = 0 \quad \to \quad \text{polo de orden } 6$$

$$s = 1 \quad \to \quad \text{polo simple.}$$

Hallamos los dos residuos

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(s-1)}, s=1\right] = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{-e^{st}}{s^6(s-1)} = -e^t$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(s-1)}, s=1\right] = a_{-1} \quad (\text{coef. de } s^{-1} \text{ de la serie de Laurent de } \tfrac{e^{st}}{s^6(1-s)} \text{ centrada en } s=0).$$

Hallamos esta serie

$$\left.\begin{array}{ll} e^{st} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, s^n, & |s| < \infty \\ \frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n, & |s| < 1 \\ \frac{1}{s^6}, & |s| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e^{st}}{s^6(1-s)} = \frac{1}{s^6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\, s^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n\right), \quad 0 < |s| < 1.$$

El producto de Cauchy de las series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\, s^n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s^n$ tiene a

$$1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^5}{5!}$$

como coeficiente del término s^5, luego el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de la función $\frac{e^{st}}{s^6(1-s)}$ será

$$a_{-1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^5}{5!},$$

y, por tanto,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^6(s-1)}, s=1\right] = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^5}{5!}.$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6(1-s)}\right] = -e^t + 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^5}{5!}.$$

MMT1 - FEB05 - 1/6

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria ordinaria, 11 de Febrero de 2005)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *Se atenderán sólo aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en el enunciado de los problemas.*
- *No se corregirá ningún examen de alumnos que no estén ubicados en el aula que les corresponde según la distribución publicada.*

Problema 1.
a) Sabiendo que si $f(z) : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto conexo D y $f'(z) = 0$, $\forall z \in D$, entonces $f(z) =$ cte en D; encuentre razonadamente la forma más general de una función holomorfa $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ en un abierto conexo D, que verifica que $|f(z)|^2 =$ cte en D.

b) Si $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + j(\arg z + 2\pi)$, $0 < \arg z < 2\pi$; calcule:

b-1) $I_1 = \int_{C_1} z^3 \operatorname{Ln} z \, dz$, siendo $C_1 : |z| = 3$ recorrida en sentido antihorario (positivo).

b-2) $I_2 = \int_{C_2} z^3 \operatorname{Ln} z \, dz$, siendo $C_2 : |z+1| = \frac{1}{2}$ recorrida en sentido antihorario (positivo).

a) 1 pto. b-1) 1 pto. b-2) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Problema 2.
Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{sen} \frac{1}{z-1}.$$

a) Analice la naturaleza de las singularidades de la función $f(z)$ en el plano complejo ampliado.
b) Encuentre todos los posibles desarrollos en serie alrededor de $z = 1$ de la función $f(z)$.
c) Calcule la integral de la función $f(z)$ a lo largo de la curva $C : |z-1| = \frac{3}{2}$ recorrida en sentido horario (negativo).
d) Encuentre el valor de la integral de la función $f(z)$ a lo largo de la curva $C' : |z-2| = 5$ recorrida en sentido antihorario (positivo).

a) 0,5 ptos. b) 1,5 ptos. c) 0,5 ptos. d) 0,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

Problema 3.
Encontrar la transformada inversa de Laplace de la función

$$X(s) = \frac{1}{s^4 - 1}$$

mediante el Teorema de los Residuos. Determine la abcisa de convergencia $\sigma(x)$ de $x(t)$.

3 ptos. (Máximo 1 hoja)

Cuestión adicional (1 pto.)
a) Determine el conjunto A de valores de z para los que la función $g(z) = \cos z + j \operatorname{sen} z$ toma valores reales,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (\cos z + j \operatorname{sen} z) \in \mathbb{R}\}.$$

b) Obtenga los valores de z que verifican $g(z) = -1$.

Nota importante.- Si se entrega la respuesta a esta cuestión adicional junto con el examen, se entenderá que el alumno renuncia automáticamente a la nota obtenida en las pruebas realizadas durante el curso.

1er problema

a) $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = cte \quad , \forall z \in D$$

$$\left.\begin{array}{l} 2u u_x + 2 v v_x = 0 \\ 2u u_y + 2 v v_y = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y}$$

$$u_x v_y - v_x u_y \underset{\uparrow}{=} u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 = 0$$

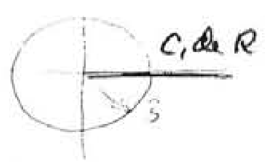
Apl. conds de C-R

$$\Downarrow$$

$$f'(z) = 0 \longrightarrow f(z) = cte$$

$$cte \in \mathbb{C}$$

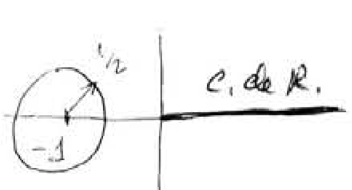
b) b-1) $z = 3e^{j\theta}, \quad dz = j3e^{j\theta} d\theta$



$$I_1 = \int_0^{2\pi} (3e^{j\theta})^3 \underbrace{L(3e^{j\theta})}_{L3 + j(\theta + 2\pi)} j3e^{j\theta} d\theta =$$

$$= 81j \left[(L3 + j2\pi) \int_0^{2\pi} e^{4j\theta} d\theta + j \int_0^{2\pi} \underbrace{\theta}_{u} \underbrace{e^{4j\theta} d\theta}_{dv} \right] =$$

$$= j\pi \frac{81}{2}$$

b-2) 

$$I_2 = 0$$

(apl. el T. de Cauchy ó el T. de los residuos)

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

Problema 2.
Sea la función
$$f(z) = \frac{1}{z}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1}.$$

a) Analice la naturaleza de las singularidades de la función $f(z)$ en el plano complejo ampliado.
b) Encuentre todos los posibles desarrollos en serie alrededor de $z = 1$ de la función $f(z)$.
c) Calcule la integral de la función $f(z)$ a lo largo de la curva $C : |z-1| = \frac{3}{2}$ recorrida en sentido horario (negativo).
d) Encuentre el valor de la integral de la función $f(z)$ a lo largo de la curva $C' : |z-2| = 5$ recorrida en sentido antihorario (positivo).

Sol.

a) Los puntos singulares de $f(z)$ en $\mathbf{C}$ son $z = 0$ y $z = 1$.
Observamos que $z = 0$ es un polo simple, mientras que $z = 1$ es una singularidad esencial.
El caracter del punto $z = \infty$ lo estudiamos analizando el caracter de $w = 0$ en $f\left(\frac{1}{w}\right)$, y resulta ser un punto regular.

b) Por el apartado anterior, los anillos centrados en $z = 1$ donde $f(z)$ es holomorfa son:

$$1) \qquad 0 < |z-1| < 1;$$
$$2) \qquad 1 < |z-1|$$

Calculamos los desarrollos de la función en estos anillos.

1) En el anillo $0 < |z-1| < 1$,

$$\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}, \qquad 0 < |z-1|$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \qquad |z-1| < 1$$

Luego, aplicando el producto de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

tenemos
$$f(z) = \frac{1}{z}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}(z-1)^{n-3k-1}\right), \quad 0 < |z-1| < 1.$$

2) En el anillo $1 < |z-1|$,

$$\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}, \qquad 0 < |z-1|$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{\frac{1}{z-1}+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \qquad 1 < |z-1|$$

Luego, aplicando el producto de Cauchy, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}\right)\frac{1}{(z-1)^{n+k+2}}, \qquad 1 < |z-1|.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

c) Este apartado puede realizarse de diversas formas. La opción más sencilla es observar que si los coeficientes de la serie de Laurent en la segunda corona de convergencia, a la que pertenece la curva C, verifican la expresión

$$a_k = \frac{1}{2\pi j}\int_{C\uparrow}\frac{f(z)}{(z-1)^{k+1}}\,dz,$$

entonces, es fácil ver que

$$\int_{C\downarrow} f(z)\,dz = \int_{C\downarrow}\frac{\frac{1}{z}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1}}{(z-1)^0}\,dz = -2\pi j a_{-1} = -2\pi j\,0 = 0, \qquad (\text{pues } k+1=0, \text{ luego } k=-1),$$

siendo a_{-1} es el coeficiente de $(z-1)^{-1}$ del desarrollo de $f(z)$ en $1<|z-1|$ mostrado en el punto 2) de b).

d) En este caso, tenemos

$$\int_{C'\uparrow} f(z)\,dz = \int_{C'\uparrow}\frac{1}{z}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi j\,(\mathrm{Res}[f(z),z=0]+\mathrm{Res}[f(z),z=1]) = -2\pi j\,\mathrm{Res}[f(z),z=\infty].$$

Elegimos la segunda opción y calculamos

$$\mathrm{Res}[f(z),z=\infty] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right].$$

Observamos que

$$\lim_{w\to 0} -\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) = -1$$

Con lo que $w=0$ es un punto regular de la función $-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right)$, con lo que

$$\mathrm{Res}[f(z),z=\infty] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right] = 0$$

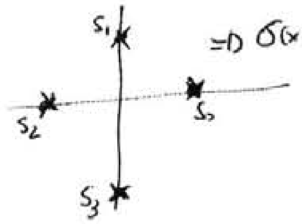
y por tanto,

$$\int_{C'\uparrow} f(z)\,dz = \int_{C'\uparrow}\frac{1}{z}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{z-1}\,dz = 0.$$

· Encontrar la transformada inversa de Laplace* de la función $X(s)=\dfrac{1}{s^4-1}$ mediante el Teorema de los Residuos. Determine la abscisa de convergencia $\sigma(x)$ de $x(t)$.

HMT1-FEB05-5/6

$$x(t)=\sum \text{residuos de } \frac{e^{st}}{s^4-1} = \sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left\{\frac{e^{st}}{s^4-1},\ s=e^{j\frac{2\pi}{4}k}\right\}$$



$\Rightarrow \sigma(x)=1$

$$k=0 \quad \text{Res}\left\{\frac{e^{st}}{s^4-1},\ s=1\right\} = \frac{e^{t}}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}e^{t}$$

$$k=1 \quad \text{Res}\left\{\frac{e^{st}}{s^4-1},\ s=e^{j\pi/2} = j\right\} = \frac{e^{jt}}{(j-1)(j+1)(2j)} = \frac{e^{jt}}{-4j}$$

$[s^4-1=(s-1)(s+1)(s^2+1)]$

$$k=2 \quad \text{Res}\left\{\frac{e^{st}}{s^4-1},\ s=-1\right\} = \frac{e^{-t}}{(-2)(2)} = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$k=3 \quad \text{Res}\left\{\frac{e^{st}}{s^4-1},\ s=e^{j3\pi/2} = -j\right\} = \frac{e^{-jt}}{(-j-1)(-j+1)(-2j)} = \frac{e^{-jt}}{+4j}$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}je^{jt}-\frac{1}{4}je^{-jt}=\frac{1}{4}(e^{t}-e^{-t})+\cancel{\frac{1}{4}j\cos t}+\frac{1}{4}j^2\,\text{sen}\,t-\cancel{\frac{1}{4}j\cos t}+\frac{1}{4}j^2\,\text{sen}\,t=\frac{1}{4}(e^{t}-e^{-t})-\frac{1}{2}\text{sen}\,t=\frac{1}{2}\text{sh}\,t-\frac{1}{2}\text{sen}\,t$$

$(t \geq 0)$

La abscisa de convergencia σ_x de $x(t)$ es $\sigma_x=1$, ya que $X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ converge para $\text{Re}\{s\}>1$

0.7 puntos//
a) Determinar $A = \{z \in \mathbb{C} : (\cos z + j \operatorname{sen} z) \in \mathbb{R}\}$

MMT1 - FEB05 - 6/6

$$g(z) = \cos z + j \operatorname{sen} z = e^{jz} = e^{j(x+jy)} = e^{-y} e^{jx}$$

$e^{-y} \in \mathbb{R}$ por lo que $g(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{jx} \in \mathbb{R}$

Los valores reales de e^{jx} se corresponden con $+1$ y -1 que resultan de $x = 2k\pi$ y de $x = (2k+1)\pi$ respectivamente

En consecuencia $g(z) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Luego $\boxed{A = \{(x+jy) \in \mathbb{C} : x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

0.3 puntos//
b) Obtener los valores de z que hacen $g(z) = -1$

$g(z) = e^{-y} e^{jx}$ $\qquad$ $g(z) = -1$ corresponde a los valores $|g(z)| = 1$ $\quad \arg(g(z)) = (2k+1)\pi$

que se corresponden con $|e^{-y}| = 1$, $x = (2k+1)\pi$

Por tanto $g(z) = -1$ cuando $y = 0$, $x = (2k+1)\pi$

$$\boxed{g(z) = -1 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

Nota: Asumir que $\cos(z) + j\operatorname{sen}(z) \in \mathbb{R}$ equivale a $\operatorname{sen}(z) = 0$ es un <u>error</u> muy grave, ya que significa considerar que $\cos(z) \in \mathbb{R}$, es decir, que el coseno de variable compleja es una función real

NMT1 - SEP06 - 1/6

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria extraordinaria, 7 de septiembre de 2006)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *Sólo se atenderán aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en los enunciados.*

Problema 1.

a) Determinar la forma más general de una función armónica no constante que depende sólo de x.

b) Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones holomorfas en un dominio D y $Re[f(z)] = Re[g(z)]$ en D, determinar la forma más general de la relación existente entre estas funciones en D.

c) Clasificar las singularidades de la función $f(z) = \text{th}(z)$ en el plano complejo ampliado, indicando su naturaleza y si son o no aisladas.

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1,5 ptos (Máximo 2 hojas)

Problema 2.
Encontrar los posibles desarrollos de Laurent en torno a $z = 0$, de la función:

$$f(z) = \frac{6}{z(z-1)(z+2)},$$

indicando sus regiones de convergencia.

3,5 puntos (Máximo 1 hoja)

Problema 3.
Utilizando la Transformada de Laplace, resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' &= -y + E(t) \\ y' &= x + E(t), \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0,$$

siendo $E(t)$ la función cuadrada periódica, de periodo 2,

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Sugerencia. Considérese, en algún punto de la resolución del problema, que la función $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ puede desarrollarse mediante una serie geométrica compleja.

3 ptos. (Máximo 1 hoja)

a) Determinar la forma más general de una func. armónica no cte que dependa sólo de x

b) Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones holomorfas en un dominio D y $Re[f(z)] = Re\{g(z)\}$ en D, determinar la forma más general de la relación existente entre estas funcs en D

c) Clasificar las singularidades de la func. $f(z) = th(z)$ en el plano complejo ampliado, indicando su tipo y si son ó no aisladas

a) func. arm. : $\varphi(x)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi'(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi''(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta \varphi = \varphi''(x) = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\varphi(x) = ax+b}}$$

b) $f(z) - g(z)$: holomorfa $\forall z \in D$ /

$Re\{f(z) - g(z)\} = 0$

$$f(z)-g(z) := \alpha(z) = \cancelto{0}{u(x,y)} + j\,v(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\} \Rightarrow v = cte \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(z)-g(z) = j\,cte \rightarrow \underline{\underline{f(z) = g(z) + j\,cte}}$$

c) $$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$

$$e^{2z}+1 = 0 \longrightarrow 2z = L(-1) = \cancelto{0}{L1} + j(\pi + 2k\pi)$$

$$\underline{\underline{z_k = j\pi\left(\tfrac{1}{2}+k\right)}} \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

$\lim\limits_{z\to z_k} \operatorname{th} z = \infty$: polos (sings aislados)

orden?

$$\lim_{z\to z_k} (z-z_k)\operatorname{th} z = \lim_{z\to z_k} \frac{(z-z_k)(e^{2z}-1)}{e^{2z}+1} \underset{\text{L-H}}{=}$$

$$= \lim_{z\to z_k} \frac{e^{2z}-1+2e^{2z}(z-z_k)}{2e^{2z}} = 1 \quad \text{polos simples}$$

$\nexists \lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{th} z$: $z=\infty$ pto sing esencial no aislado (pto acumulac de polos)

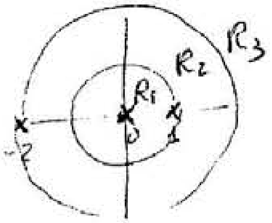
Encontrar los posibles desarrollos en serie de Laurent, en torno a $z=0$, de

$$f(z) = \frac{6}{z(z-1)(z+2)}$$

indicando sus regiones de convergencia.

$f(z) = \dfrac{6}{z(z-1)(z+2)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, salvo en $z=0$, $z=1$ y $z=-2$

por tanto será desarrollable en serie de Laurent en las regiones



$R_1 = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \}$

$R_2 = \{ z \mid 1 < |z| < 2 \}$

$R_3 = \{ z \mid 2 < |z| \}$

$f(z)$ puede escribirse $\dfrac{6}{z(z-1)(z+2)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z-1} + \dfrac{C}{z-2} = -\dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{z-1} + \dfrac{1}{z+2}$ (*)

$$6 = A(z-1)(z-2) + Bz(z-2) + Cz(z-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} z=0 \Rightarrow -2A = 6 \Rightarrow A=-3 \\ z=1 \Rightarrow 3B = 6 \Rightarrow B = 2 \\ z=-2 \quad 6C = 6 \Rightarrow C = 1 \end{array} \right.$$

En R_1: $f(z) = -\dfrac{3}{z} - \dfrac{2}{1-z} + \dfrac{1/2}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = -\dfrac{3}{z} - 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 2\right)$

$(|z|<1) \qquad (|z|<2)$

$$= \boxed{\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 2\right) z^n \quad z \in R_1}$$

En R_2: $f(z) = -\dfrac{3}{z} + \dfrac{2/z}{1-\frac{1}{z}} + \dfrac{1/2}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = -\dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{3}{z} + \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{z^{n+1}} +$

$(|z|>1) \qquad (|z|<2)$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} z^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{z^n} \quad z \in R_2}$$

En R_3: $f(z) = -\dfrac{3}{z} + \dfrac{2/z}{1-\frac{1}{z}} + \dfrac{1/z}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} = -\dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = -\frac{3}{z} + \frac{2}{z} + \frac{1}{z}$

$(|z|>1) \qquad (|z|>2)$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-2)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2+(-2)^{n-1}}{z^n} = \boxed{\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2+(-2)^{n-1}}{z^n} \quad z \in R_3}$$

$$\left[n=2 \Rightarrow \frac{2+(-2)^1}{z^2} = 0 \right]$$

[* También puede hacerse escribiendo $f(z) = \dfrac{2}{z(z-1)} - \dfrac{2}{z(z+2)}$]

Exercici: Resoldre el sistema de equacions diferencials

$$\begin{cases} x' = -y + E(t) \\ y' = x + E(t) \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

sent $E(t)$ la funció quadrada: $\quad E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$

Solució:

Calculem en primer lloc la transformada de $E(t)$:

$$\mathcal{L}(E(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t)\, dt = \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Apliquem la transformada de Laplace al sistema y resulta:

$$\begin{cases} sX(s) - \cancel{x(0)}^{\,0} = -Y(s) + \dfrac{1}{s(1+e^{-s})} \\[2ex] sY(s) - \cancel{y(0)}^{\,0} = X(s) + \dfrac{1}{s(1+e^{-s})} \end{cases}$$

Multipliquem la 2ª per s y sumamos la primera, con lo que nos queda:

$$(s^2+1)\, Y(s) = (s+1) \frac{1}{s(1+e^{-s})} \Rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+1)(1+e^{-s})}$$

De forma similar obtenim:

$$X(s) = \frac{s-1}{s(s^2+1)(1+e^{-s})}$$

Calculem ara les funcions $y(t)$ y $x(t)$ a partir d'esta expressió:

- $$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+1)(1+e^{-s})} = \frac{s}{s(s^2+1)(1+e^{-s})} + \frac{1}{s(s^2+1)(1+e^{-s})} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{1+e^{-s}} + \frac{1}{s(s^2+1)}\frac{1}{(1+

Sabemos que:

$$\frac{1}{s^2+1}\,\frac{1}{1+e^{-s}} = \frac{1}{s^2+1}\left[1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\dots\right] =$$

$|e^{-s}|<1 \to \operatorname{Re} s>0$

$$= \mathcal{L}\left(\operatorname{sen} t\, u(t) - \operatorname{sen}(t-1)\, u(t-1) + \dots\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}(t-n)\, u(t-n)\right]$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\left((1-\cos t)\, u(t)\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}} = \left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\left[1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\dots\right]$$

$$= \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(u(t-n) - \cos(t-n)\, u(t-n)\right)\right).$$

y por tanto:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\operatorname{sen}(t-n)+1-\cos(t-n)\right)u(t-n)\right]$$

Observamos que la expresión de $X(s)$ es idéntica a la de $Y(s)$ salvo el signo en el numerador, lo que conllevará sólo un cambio de signo en la segunda fracción, luego:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\operatorname{sen}(t-n)-1+\cos(t-n)\right)u(t-n)\right]$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen extraordinario (4 de Septiembre de 2008)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Problema 1.

a) Utilizando las propiedades de las funciones holomorfas, demostrar que si $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ es una función holomorfa en un dominio D, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones armónicas en D.

b) Determinar la función holomorfa $f(z)$ que cumple:

$$\mathrm{Im}[f'(z)] = 6x(2y-1), \quad f(0) = 3-2j, \ f(1) = 6-5j;$$

e indicar su dominio de holomorfía.

c) Obtener el valor máximo del módulo de la función $f(z) = z^2 + 2z - 1$ en $|z| \leq 1$ indicando los puntos en que se alcanza. Justifique la respuesta.

a) 0,5 ptos. b) 1 pto. c) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Problema 2.

a) Sea la función

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right), \ 0 \neq z \neq -1,$$

donde $\mathrm{Ln} z = \mathrm{Ln}|z| + j\mathrm{Arg}\, z$, con $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$. Calcular la integral:

$$\int_C f(z)dz$$

siendo C una circunferencia de centro -1 y radio $r > 1$.

b) Calcular el desarrollo en serie de Laurent centrado en $z = j$, en la corona intermedia de convergencia, de la función

$$f(z) = \frac{5z+2j}{z(z+j)}.$$

¿Cuánto vale dicho desarrollo en el punto $z = 1$?

a) 1,5 ptos. b) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Problema 3.
Encontrar una función $f(z)$ que cumpla:

$$f^{(n}(-j) = (-j)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y que sea holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

2,5 ptos. (Máximo 1 hoja)

Problema 4.
Resolver mediante la transformada de Laplace el problema diferencial

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 6e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + 4e^{-t}\cos(t) \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2,5 ptos. (Máximo 2 hojas)

Fecha de publicación de notas provisionales: 15 de Septiembre.
Fin de plazo de solicitud de revisión: 18 de Septiembre.
Fecha de revisión: se publicará junto con las notas provisionales (previsiblemente el 19 de Septiembre).
Fecha de publicación del Acta: 22 de Septiembre.

DMAT

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen extraordinario (4 de Septiembre de 2008)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Problema 1.

a) Utilizando las propiedades de las funciones holomorfas, demostrar que si $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ es una función holomorfa en un dominio D, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones armónicas en D.

b) Determinar la función holomorfa $f(z)$ que cumple:

$$\operatorname{Im}[f'(z)] = 6x(2y-1), \quad f(0) = 3-2j,\ f(1) = 6-5j;$$

e indicar su dominio de holomorfía.

c) Obtener el valor máximo del módulo de la función $f(z) = z^2 + 2z - 1$ en $|z| \leq 1$ indicando los puntos en que se alcanza. Justifique la respuesta.

a) 0,5 ptos. b) 1 pto. c) 1 pto. (Máximo 2 hojas)

Soluc.:

a) $f(z) = u + jv$ holomorfa en $D \Rightarrow$ es infinitamente derivable en $D \Rightarrow \underline{u, v \in C^2(D)}$

$\Downarrow$

cumple las conds de C-R en D:

$u_x = v_y$ derivando resp de x : $u_{xx} = v_{yx}$

$u_y = -v_x$ " " " y : $u_{yy} = -v_{xy}$

por ser $v \in C^2(D) \Rightarrow v_{xy} = v_{yx} \rightarrow \underline{\Delta u = 0}$

Analogamente:

$u_x = v_y$ derivando resp. de y : $u_{xy} = v_{yy}$

$u_y = -v_x$ " " x : $u_{yx} = -v_{xx}$

por ser $u \in C^2(D) \Rightarrow u_{xy} = u_{yx} \rightarrow \underline{\Delta v = 0}$

b) $f(z)$ holomorfa en $D \Rightarrow \exists\, f'(z) = \alpha(x,y) + j\beta(x,y)$ holomorfa en D

$\beta(x,y) = 12xy - 6x$

Apl. a $f'(z)$ el met. de Euler:

$\alpha_x = \beta_y \rightarrow \alpha_x = 12x \rightarrow \alpha(x,y) = 6x^2 + c(y)$

$\alpha_y = -\beta_x \rightarrow \alpha_y = -12y + 6$

$\Rightarrow -12y + 6 = c'(y) \rightarrow c(y) = -6y^2 + 6y + a$
$a \in \mathbb{R}$

Sustituyendo:

$f'(z) = 6x^2 - 6y^2 + 6y + a + j(12xy - 6x) =$

$= 6(x^2 - y^2 + j2xy) - 6j(x + jy) + a =$

$= 6z^2 - j6z + a, \quad a \in \mathbb{R}$

$f(z) = 2z^3 - j3z^2 + az + b, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C}$

$f(z=0) = 3 - 2j \rightarrow b = 3 - 2j$

$f(z=1) = 6 - 5j \rightarrow a = 1$

$f(z) = 2z^3 - 3jz^2 + z + 3 - 2j$: func. entera

$\Downarrow$

holomorfa en el plano complejo finito

c) Aplicando el principio del módulo máximo, el máximo valor del modulo de $f(z)$ se alcanza en $|z| = 1$

$$f(z)\Big|_{z=e^{j\theta}} = e^{2j\theta} + 2e^{j\theta} - 1$$

$$|f(z)|^2\Big|_{z=e^{j\theta}} = f(z)\overline{f(z)}\Big|_{z=e^{j\theta}} = (e^{2j\theta} + 2e^{j\theta} - 1)(e^{-2j\theta} + 2e^{-j\theta} - 1) =$$

$$= 6 - (e^{2j\theta} + e^{-2j\theta}) = 6 - 2\cos 2\theta$$

$$\max|f(z)| = \underline{\underline{\sqrt{8}}}$$

y se alcanza para $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ en los ptos $\underline{\underline{z = \pm j}}$

Problema 2

a) $f(z)$ será holomorfa excepto en aquellos puntos en los que

$$\frac{z}{1+z} = a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

Es decir, en los puntos de la forma

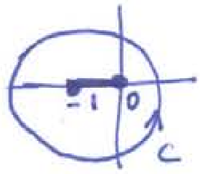
$$z = \frac{a}{1-a} = -1 + \frac{1}{1-a} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

Como los puntos $z=0$ y $z=1$ están explícitamente excluidos del dominio, la región donde $f(z)$ es holomorfa es

$$\mathbb{C} - \{ z = x + 0j,\ x \in [-1, 0] \}$$

Calculamos

$$\int_C f(z)\, dz \qquad \text{con } C: z(t) = -1 + re^{jt},\ r>1,\ t \in [-\pi, \pi]$$



$$\int \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) dz \underset{\substack{u = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) \\ dv = dz}}{=} z\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) - \int z \frac{1}{z(1+z)}\, dz = \underline{\underline{z\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) - \mathrm{Ln}(1+z)}} \equiv F(z)$$

Una primitiva de $f(z)$ es, entonces, $F(z)$ que es holomorfa en $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}^- \cup \{0\}\}$

Con lo que:

$$\int_C \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{1+z}\right) dz = \lim_{t \to \pi} F(z(t)) - \lim_{t \to -\pi} F(z(t)) = -j\pi - (+j\pi) = \underline{\underline{-2\pi j}}$$

Otra forma:

$$\int_C f(z)\,dz = -2\pi j \ \mathrm{Res}\,[f(z), z=\infty]$$

Calculamos $\mathrm{Res}\,[f(z), z=\infty] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right] = \underline{\underline{1}}$

$w=0$ es polo simple de $-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ $\leftarrow$

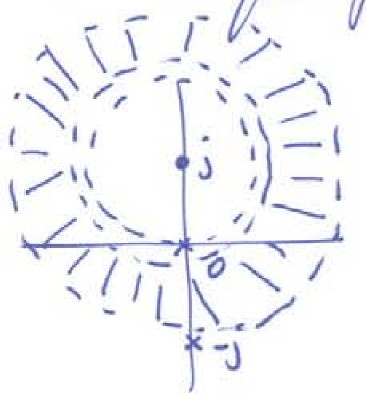
$$\lim_{w \to 0} \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{w+1}\right) = \infty$$

$$\lim_{w \to 0} w \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{w+1}\right) = \underline{\underline{1}}$$

Luego:

$$\underline{\underline{\int_C f(z)\,dz = -2\pi j \ \mathrm{Res}\,[f(z), z=\infty] = -2\pi j}}$$

b) La func. $f(z) = \dfrac{5z+2j}{z(z+j)}$ es hol. en $\mathbb{C} - \{z=0,\ z=-j\}$



Luego $f(z)$ es hol. en:

1) $|z-j|<1 \to \exists!$ s. de Taylor

2) $1<|z-j|<2 \to \exists!$ serie de Laurent

3 $2<|z-j|<\infty \to \exists!$ serie de Laurent

Desarrollamos por tanto en la corona: $1<|z-j|<2$

$$\frac{5z+2j}{z(z+j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+j} \Rightarrow 5z+2j = A(z+j)+Bz$$
$$A=2,\ B=3$$

Luego:
$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z+j}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{(z-j)+j} = \frac{2}{z-j}\,\frac{1}{1+\frac{j}{z-j}} = \frac{2}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{j}{z-j}\right)^n, \quad \left|\frac{j}{z-j}\right|<1$$
$\hookrightarrow 1<|z-j|$

$$\frac{3}{z+j} = \frac{3}{(z-j)+2j} = \frac{3}{2j}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-j}{2j}\right)} = \frac{3}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-j}{2j}\right)^n(-1)^n \quad \left|\frac{z-j}{2j}\right|<1$$
$\hookrightarrow |z-j|<2$

Luego:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2j}\right)^n\frac{3}{2j}\right)(z-j)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-j)^n\right)\frac{1}{(z-j)^{n+1}},$$
$1<|z-j|<2$

$f(1) = \dfrac{5+2j}{1+j}$ puesto que $z=1$ pertenece a la corona de convergencia.

3 - Encuentre una función $f(z)$ que cumple $f^{(n}(-j) = (-j)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que sea holomorfa en todo el plano $\mathbb{C}$

Si ha de ser holomorfa en todo el plano $\mathbb{C}$, por ser $\mathbb{C}$ abierto y conexo f es analítica en $\mathbb{C}$ y así se puede expresar en desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z=-j$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+j)^n$$ donde

$$a_n = \frac{f^{(n}(-j)}{n!}$$, de donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+j)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n}{n!} (z+j)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-j(z+j))^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-zj+1)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-zj)^n}{n!}$$ si consideramos $w = 1-zj$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = e^w = e^{1-zj} = f(z)$$

Ejercicio 3:

Resolver mediante la transformada de Laplace el problema diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 6e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + 4e^{-t}\cos(t),$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

Solución:

Sea $F(p) = \mathcal{L}[y](p)$. Dadas la condiciones iniciales, tenemos en este caso: $\mathcal{L}[y'] = pF(p) - 2$, $\mathcal{L}[y''] = p^2F(p) - 2p - 1$. Por su parte,

$$\mathcal{L}[e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)](p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}, \quad \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)] = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}.$$

Con esto la transformada de la ecuación es

$$p^2F - 2p - 1 - 3pF + 6 - 4F = \frac{6+4p+4}{(p+1)^2+1} \Longrightarrow (p^2-3p-4)F = 2p - 5 + \frac{10+4p}{(p+1)^2+1}$$

y dado que $p^2 - 3p - 4 = (p+1)(p-4)$, tenemos

$$F = \frac{2p-5}{(p+1)(p-4)} + \frac{10+4p}{(p+1)(p-4)\left[(p+1)^2+1\right]}.$$

Descomponemos las fracciones:

$$\frac{2p-5}{(p+1)(p-4)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p-4} \Longrightarrow a(p-4) + b(p+1) = 2p+5.$$

Particularizando, por ejemplo,

$$p = 4: \quad 5b = 3 \Longrightarrow b = \frac{3}{5}; \quad p = -1 : -5a = -7 \Longrightarrow a = \frac{7}{5}.$$

Por su parte,

$$\frac{10+4p}{(p+1)(p-4)\left[(p+1)^2+1\right]} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p-4} + \frac{cp+d}{(p+1)^2+1}$$

$$\Longrightarrow a\left[(p+1)^2+1\right](p-a) + b\left[(p+1)^2+1\right](p+1) + (cp+d)(p+1)(p-4) = 10+4p$$

y particularizando:

$$p = 4: \quad 5\cdot 26b = 10 + 16 \Longrightarrow b = \frac{1}{5}; \quad p = -1 : -5a = 10 - 4 = 6 \Longrightarrow a = -\frac{6}{5};$$

$$p = 0: \quad -8a + 2b - 4d = 10 \Longrightarrow 4d = 8\frac{6}{5} + 2\frac{1}{5} - 10 \Longrightarrow d = 0;$$

$$p = 1: \quad -15a + 10b - 6c = 14 \Longrightarrow 6c = 15\frac{6}{5} + 10\frac{1}{5} - 14 \Longrightarrow c = 1.$$

Con todo esto

$$F(p) = \frac{7}{5}\frac{1}{p+1} + \frac{3}{5}\frac{1}{p-4} - \frac{6}{5}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{p-4} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{4}{5}e^{4t} + e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\,\mathrm{sen}(t).$$

DMAT

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria ordinaria, 29 de Enero de 2009)

Tiempo: 3 horas

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes y se entregarán por separado al final del examen.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *No se corregirá ningún examen de aquellos alumnos que no estén ubicados en el aula que les corresponda.*
- *Sólo se atenderán aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en los enunciados.*

Problema 1.

a) Demostrar que la función multiforme (o multivaluada) $\operatorname{arc\,tg} z$ puede expresarse en la forma

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2j} \ln\left(\frac{1+jz}{1-jz}\right),$$

siendo ln la función logaritmo multiforme (o multivaluada).

b) Considerando la rama de la función $\operatorname{arc\,tg} z$ definida como

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2j} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+jz}{1-jz}\right), \qquad \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + j\theta, \quad -\pi < \theta < \pi$$

b1) Determinar el dominio de holomorfía de la función $\operatorname{Arctg} z$.

b2) Obtener un desarrollo en serie de potencias que permita indicar la naturaleza del origen para la función $\operatorname{Arctg} z$, indicando su campo de convergencia.

b3) Calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Arctg} z}{z^2-1}\, dz,$$

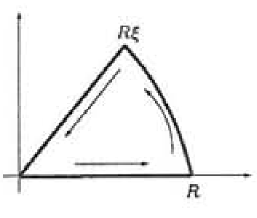
siendo $\gamma : \{z = (x,y) \in \mathbb{C} \,/\, x^2 + 16y^2 = 4\}$ recorrida en sentido antihorario.

a) 0,5 ptos. b) 3 ptos. (b1) 1 pto., b2) 1 pto., b3) 1 pto.)

Problema 2.

a) Halla las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^5}$ y clasifícalas.

b) Calcula la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ donde γ es el contorno, orientado positivamente, formado por los segmentos $[0, R] \subset \mathbb{R}$, $\{z = t\xi : t \in [0, R]\}$ ($\xi = e^{2\pi j/5}$) y el arco circular de radio R ($R > 1$) que los une (ver figura).



c) Comprueba razonadamente que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{5\operatorname{sen}(\frac{\pi}{5})}$$

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1,5 ptos.

Problema 3.

a) Deducir la expresión de la transformada de Laplace de una función periódica de periodo T, con $T > 0$.

b) Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t - [t], \qquad t \geq 0,$$

donde $[t]$ denota la parte entera de t.

c) Dadas las siguientes transformadas de Laplace

$$G(s) = \mathrm{Ln}\left(\frac{s+a}{s+b}\right), \quad a > b > 0; \quad \text{siendo } \mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}\,|z| + j\psi, \; -\pi < \psi < \pi.$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}}.$$

Nota: Considérese que la función $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ *puede desarrollarse mediante una serie geométrica compleja y que se verifica*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(s)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left(F_n(s)\right).$$

Se pide:

c1) Determinar sus respectivos semiplanos de convergencia.

c2) Utilizando exclusivamente las propiedades y la tabla de la tansformada de Laplace, hallar

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(H(s)).$$

a) 1 pto.; b) 1 pto.; c) 1 pto. (c1) 0,5 ptos., c2) 0,5 ptos.).

Fecha de publicación de notas provisionales: 19 de Febrero.
Fin de plazo de solicitud de revisión: 23 de Febrero.
Fecha de revisión: se publicará junto con las notas provisionales (previsiblemente el 24 ó 25 de Febrero).
Fecha de publicación del Acta: 26 de Febrero.

1er ejercicio

a)
$$W = \operatorname{arctg} z \longrightarrow z = \operatorname{tg} W$$

$$z = \frac{e^{jW} - e^{-jW}}{j(e^{jW} + e^{-jW})} = \frac{e^{2jW} - 1}{j(e^{2jW} + 1)} \longrightarrow e^{2jW} = \frac{1+jz}{1-jz}$$

$$2jW = \ln \frac{1+jz}{1-jz} \longrightarrow W = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2j} \ln \frac{1+jz}{1-jz}$$

c.q.d.

b) b1)
$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2j} \operatorname{Ln} \frac{1+jz}{1-jz} \quad , \quad \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + j\theta$$
$$-\pi < \theta < \pi$$

$\Rightarrow$ Ptos de no holomorfía de Arctgz :

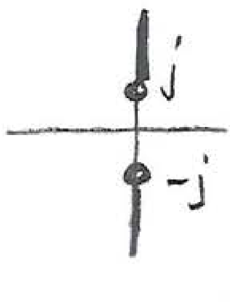
- $z = -j$
- $W = \dfrac{1+jz}{1-jz}$: $W = 0 \wedge W \in \mathbb{R}^-$

$$W = 0 \rightarrow z = j$$

$$W \in \mathbb{R}^- \Longleftrightarrow x = 0 \wedge |y| > 1$$

Por tanto, Arctgz es una función holomorfa en todo el plano complejo excepto en:

$$\{ z = jy \ / \ |y| \geq 1 \}$$



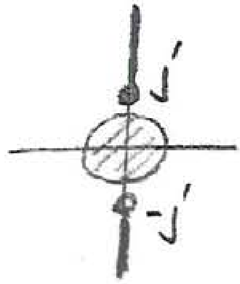
b2) $(\mathrm{Arc\,tg}z)' = \dfrac{1}{1+z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad |z|<1$

integrando:

$$\mathrm{Arctg}z = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \text{cte}$$

¿cte? $\quad \text{cte} = \mathrm{Arctg}\,0 = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctg}z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z|<1$$



b3) $\gamma: x^2+16y^2=4 \longrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1/4}=1$ elipse $(a=2,\ b=\tfrac{1}{2})$

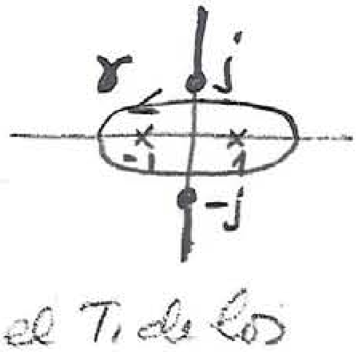
$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{-1/2}{z+1} + \frac{1/2}{z-1}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\oint_\gamma -\frac{\mathrm{Arctg}z}{z+1}dz + \oint_\gamma \frac{\mathrm{Arctg}z}{z-1}dz\right] =$$

apl. la F. de la I. de C.

$$= \frac{2\pi j}{2}\left[-\mathrm{Arctg}(-1) + \mathrm{Arctg}(1)\right] =$$

$$= j\frac{\pi^2}{2}$$

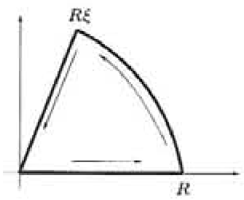


<u>Nota</u> Tambien puede hacerse aplicando el T. de los Residuos: $I = 2\pi j\left(\mathrm{Res}_{z=1} + \mathrm{Res}_{z=-1}\right) = j\dfrac{\pi^2}{2}$

MMT1. Ejercicio 2, Febrero 2009

1. Halla las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^5}$ y clasifícalas.

2. Calcula la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ donde γ es el contorno, orientado positivamente, formado por los segmentos $[0,R] \subset \mathbb{R}$, $\{z = t\xi : t \in [0,R]\}$ ($\xi = e^{2\pi j/5}$) y el arco circular de radio R ($R > 1$) que los une (ver figura).



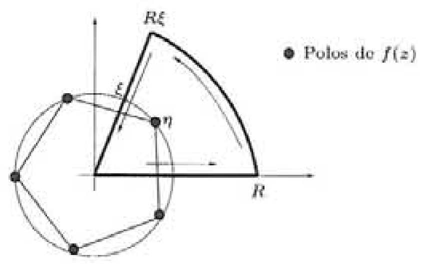
3. Comprueba razonadamente que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{5})}$$

Solución:

1. La función f es holomorfa en todo el plano complejo excepto en los ceros del polinomio z^5+1. Los ceros de este polinomio son $\{e^{\frac{(2k+1)\pi}{5}j} : k = 0,1,\ldots,4\}$. Puesto que estos ceros son simples, las singularidades de f son polos simples situados en $\{e^{\frac{(2k+1)\pi}{5}j} : k = 0,1,\ldots,4\}$.

2. Cuando $R > 1$ el único polo situado en el interior del contorno γ es $\eta = e^{\frac{\pi}{5}j}$ (ver figura).



Por el Teorema de los Residuos tenemos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi j\,\mathrm{Res}[f,\eta]$$

El residuo de f en η es igual a

$$\mathrm{Res}[f,\eta] = \frac{1}{5\eta^4} = \frac{1}{5}e^{-\frac{4\pi}{5}j} = \frac{1}{5}e^{-\pi j}e^{\frac{\pi j}{5}} = -\frac{1}{5}\eta$$

3. Por el apartado anterior tenemos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^5}\,dx - \xi\int_0^R \frac{1}{1+(\xi x)^5}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{1+z^5}\,dz = -2\pi j\frac{1}{5}\eta \quad (1)$$

donde C_R es el arco de circunferencia de radio R orientado positivamente. Cuando R tiende a infinito tenemos que $\int_{C_R} f(z)dz \to 0$. En efecto, teniendo en cuenta que cuando $z \in C_R$ y $R > 1$, $|z^5+1| \geq ||z|^5 - 1| = R^5 - 1$, se sigue:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leqslant \max_{z\in C_R}\left|\frac{1}{1+z^5}\right| \cdot \frac{2\pi}{5}R \leqslant \frac{2\pi}{5}\frac{R}{R^5-1} \to 0$$

cuando $R \to \infty$. Así pues, tomando límites en (1) obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^5}dx - \xi\int_0^\infty \frac{1}{1+(\xi x)^5}dx = -\frac{2\pi j}{5}\eta$$

Si tenemos en cuenta que $\xi^5 = 1$ concluimos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^5}dx = -\frac{2\pi j}{5}\frac{\eta}{1-\xi}$$

Para obtener la igualdad pedida basta con observar que

$$\frac{\eta}{1-\xi} = \frac{e^{\frac{\pi j}{5}}}{1-e^{\frac{2\pi j}{5}}} = \frac{1}{e^{-\frac{\pi j}{5}} - e^{\frac{\pi j}{5}}} = -\frac{1}{2j}\frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{5})}$$

Problema 3.

a) Deducir la expresión de la transformada de Laplace de una función periódica de periodo T, con $T > 0$.

b) Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t - [t], \qquad t \geq 0,$$

donde $[t]$ denota la parte entera de t.

c) Dadas las siguientes transformadas de Laplace

$$G(s) = \text{Ln}\left(\frac{s+a}{s+b}\right), \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b; \quad \text{siendo } \text{Ln}\, z = \text{Ln}\,|z| + j\psi,\ -\pi < \psi < \pi.$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}}.$$

Nota: Considérese que la función $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ *puede desarrollarse mediante una serie geométrica compleja.*

Se pide:

c1) Determinar sus respectivos semiplanos de convergencia.

c2) Utilizando exclusivamente las propiedades y la tabla de la tansformada de Laplace, hallar

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(H(s)).$$

a) 1 pto.; b) 1 pto.; c) 1 pto. (c1) 0.5 ptos., c2) 0,5 ptos.).

Solución:

a) Sea la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, periódica de periodo $T > 0$ (por lo que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t > 0$). Entonces, la transfomada de Laplace de $f(t)$ será

$$F(s) \;=\; \mathcal{L}[f(t)] \;=\; \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \;=\; \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt.$$

Sea $I_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt$. Si consideramos $t = \tau + nT$, tendremos que

$$I_n = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT)d\tau = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau.$$

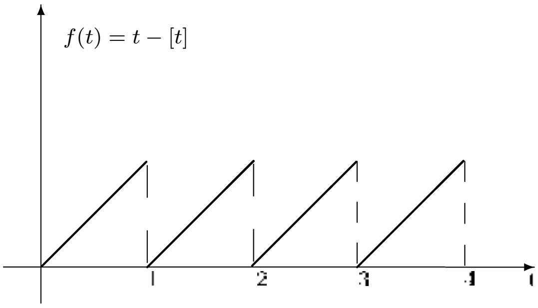
Por tanto, la transformada $F(s)$ nos quedará como

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau.$$

El sumatorio de la última expresión es una serie geométrica de razón e^{-sT}, y como tal será convergente si y solo si $|e^{-sT}| < 1$. Esta condición es equivalente a decir que $|e^{-(\text{Re}\, s)T}||e^{-j(\text{Im}\, s)T}| = |e^{-(\text{Re}\, s)T}| < 1$, lo cual es cierto sólo si $\text{Re}\, s > 0$. Supuesto que este sumatorio converge, tendremos que su suma es $\frac{1}{1-e^{-sT}}$. Con lo que, finalmente llegamos a que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt, \text{ siempre que } \text{Re}\, s > 0.$$

b) La función $f(t)$, como puede verse en la gráfica, es una función periódica de periodo $T = 1$.



Este problema puede resolverse mediante cualquier de los métodos que se explican a continuación.

Primer método

Podemos ver que la función $[t]$ puede expresarse de la forma

$$[t] = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u(t-n).$$

Así,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t - [t]) = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u(t-n)\right) = \tfrac{1}{s^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(u(t-n)) =$$

$$= \frac{1}{s^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} - 1\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \text{ si } |e^{-s}| < 1.$$

Luego, la transformada de la función pedida es

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Segundo método

Vemos que la función $f(t) = t - [t]$ es periódica de periodo $T = 1$ y con valor

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 1).$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 te^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(-t\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \text{ si } \operatorname{Re} s > 0$$

c) i) Hallamos los semiplanos de convergencia de ambas funciones.

Vemos que la función $G(s)$ está definida en $\mathbb{C} - \{-a, -b\}$. Y, puesto que la composición de funciones holomorfas es una función holomorfa, la función $G(s)$ será holomorfa en

$$\mathbb{C} - \{s \in C \ : \ \frac{s+a}{s+b} = t \in (-\infty, 0]\} = \mathbb{C} - [-a, -b].$$

Por lo que, el semiplano de convergencia de la transformada $H(s)$ es

$$D_{G(s)} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \text{máx}\{-a, -b\} = -b.$$

Consideramos ahora la función $H(s)$. Observamos que sus puntos singulares son

$$s = 0, \quad s = \pm j, \quad \text{y además el conjunto } \{s \in \mathbb{C} : e^{-s} = -1\}$$

es decir, los puntos

$$s = 0, \quad s = \pm j, \quad s = -\ln(-1) = -j(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo que el semiplano de convergencia de $H(s)$ es

$$D_{H(s)} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 0\}.$$

ii) Calculamos las respectivas transformadas de Laplace inversas.

Calculamos en primer lugar $\mathcal{L}^{-1}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right)$. Para ello, si consideramos la derivada

$$G'(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

Y sabiendo que

$$G'(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)g(t)dt = \mathcal{L}(-tg(t)) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = -tg(t).$$

Por lo que, obtenemos

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right) = -\frac{1}{t}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+b}\right)\right] = \frac{1}{t}(e^{-bt} - e^{-at}), \;\; t > 0.$$

Calculamos finalmente $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}}\right)$. Así, tenemos

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots \qquad |e^{-s}| < 1$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}} = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-s} + \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-2s} - \dots \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Por tanto, la transformada de Laplace inversa pedida es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\,\frac{1}{1+e^{-s}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos(t-n)\right] u(t-n), \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen extraordinario (3 de Septiembre de 2009)

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Problema 1.

a) Sea $f(z)$ una función holomorfa en un anillo $A \subset \mathbb{C}$ centrado en el origen que contiene la circunferencia unidad $C: z = e^{j\phi}, \ -\pi \leq \phi \leq \pi$. Comprobar que $\forall z \in A$ se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{j\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{j\phi}}{z}\right)^n\right]d\phi.$$

Considerando $u(\theta) = \mathrm{Re}[f(e^{j\theta})]$, obtener a partir del resultado anterior la expresión de $u(\theta)$.

b) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq b$, sea

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z-a}{z-b}\right),$$

donde $\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}\,|z| + j\psi, \ -\pi < \psi \leq \pi$. Se pide:

b-1) Hallar el mayor abierto conexo D en el que la función $f(z)$ es holomorfa.

b-2) Encontrar, si existe, el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z = \infty$, determinando el dominio en el que es válido el desarrollo.

b-3) Calcular

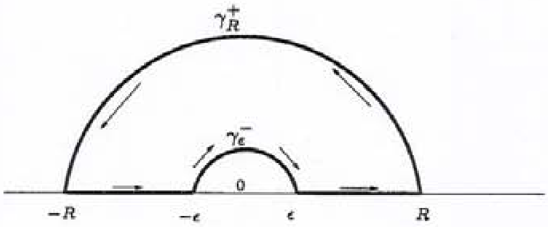
$$I = \int_{C\uparrow} \mathrm{Ln}\left(\frac{z-j}{z+j}\right)dz, \quad \text{siendo} \quad C: |z| = 2.$$

a) 1,5 ptos.; b-1) 0,5 ptos.; b-2) 1 pto.; b-3) 0,5 ptos.

Problema 2.

Se considera la función $f(z) = \dfrac{1-e^{jz}}{z^2}$.

a) Calcula la integral de f sobre el contorno de la figura



donde γ_ϵ^- es la semicircunferencia de radio ϵ orientada negativamente y γ_R^+ es la semicircunferencia de radio R orientada positivamente.

b) Calcula $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz$ sin utilizar los lemas de Jordan.

c) Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de e^{jz} en $z_0 = 0$, prueba que $f(z)$ se puede escribir como $f(z) = \frac{-j}{z} + E(z)$ con $E(z)$ acotada en un entorno de $z_0 = 0$.

d) Calcula $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\,dz$ sin utilizar los lemas de Jordan.

e) Calcula $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

a) 0,5 ptos.; b) 1 pto.; c) 0,5 ptos.; d) 1 pto.; e) 0,5 ptos.

Problema 3.

a) Calcular la transformada de Laplace de la función:

$$I_a(t-t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \le t < t_0 + a \\ 0, & t < t_0 - a \text{ o } t \ge t_0 + a \end{cases}$$

b) Sabiendo que $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \lim_{a\to 0} \mathcal{L}[I_a(t-t_0)]$ y teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior; calcular, razonadamente, la transformada de Laplace de $\delta(t-t_0)$.

c) Resolver el PVI:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t} + 3\delta(t-1)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

a) 0,5 ptos.; b) 0,5 ptos.; c) 2 ptos.

Fecha de publicación de notas provisionales: 21 de Septiembre.
Fin de plazo de solicitud de revisión: 24 de Septiembre a las 12 h.
Fecha de revisión: se publicará junto con las notas provisionales (previsiblemente el 24 Septiembre).
Fecha de publicación de notas definitivas: 25 de Septiembre.

Ejercicio

a) Sea $f(z)$ una función holomorfa en un anillo $A \subset \mathbb{C}$ centrado en el origen que contiene la circunferencia unidad $C: z = e^{j\phi}$, $-\pi \le \phi \le \pi$. Demostrar que $\forall z \in A$ se verifica:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi})\,d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{j\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{j\phi}}{z}\right)^n\right] d\phi.$$

Considerando $u(\theta) = \mathrm{Re}\left[f(e^{j\theta})\right]$, obtener a partir del resultado anterior la expresión de $u(\theta)$.

b) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \ne b$, sea

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

donde $\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}|z| + j\varphi$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Se pide:

b-1) Hallar el mayor abierto conexo D en el que $f(z)$ es holomorfa

b-2) Encontrar, si existe, el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z = \infty$, determinando el dominio en el que es válido el desarrollo.

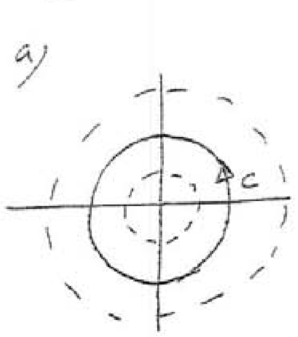
b-3) Calcular:
$$I = \int_{C^+} \mathrm{Ln}\left(\frac{z-j}{z+j}\right) dz$$

siendo C^+ la circunferencia de radio 2 centrada en el origen recorrida en sentido positivo.

a) 1,5 ptos; b) 2 ptos.

Soluc

a)



Sabemos que si $f(z)$ es hol. en A

$\Downarrow$ T. de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in A$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Calculemos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{j\phi})}{\cancel{e^{j\phi}}} \cancel{j e^{j\phi}} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi}) d\phi$$

$$\underset{n=1,2,\ldots}{a_n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{j\phi})}{\cancel{e^{j\phi}} e^{jn\phi}} \cancel{j e^{j\phi}} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{j\phi})}{e^{jn\phi}} d\phi$$

$$\underset{n=1,2,\ldots}{a_{-n}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{j\phi}) \cancel{j e^{j\phi}}}{\cancel{e^{j\phi}} e^{-jn\phi}} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{j\phi})}{e^{-jn\phi}} d\phi$$

Luego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\phi}) \left[\frac{z^n}{e^{jn\phi}} + \frac{e^{jn\phi}}{z^n} \right] d\phi, \quad \forall z \in A$$

Si $u(\theta) = Re[f(e^{j\theta})]$, tenemos que:

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) \, Re \Big[\underbrace{\underbrace{e^{j\theta n - jn\phi} + e^{jn\phi - n\theta}}_{e^{jn(\theta-\phi)} + e^{-jn(\theta-\phi)}}}_{\hookrightarrow = 2\cos n(\theta-\phi)} \Big] d\phi$$

luego:

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) \cos n(\theta - \phi) d\phi$$

b) Sea:
$$f(z) = \ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \qquad a, b \in \mathbb{C}, \ a \neq b$$

b-1) $f(z)$ está definida en $\mathbb{C} - \{a, b\}$.
Puesto que la composición de funciones holomorfas es holomorfa, entonces $f(z)$ es holomorfa excepto en aquellos puntos en los que:
$$\frac{z-a}{z-b} = t \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$
Es decir en aquellos puntos de la forma:
$$z = a\frac{1}{1-t} - \frac{t}{1-t}b, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$
Observamos que, para $t=0 \rightarrow z=a$ y cuando $t \rightarrow -\infty$, $z=b$; con lo que $f(z)$ es holomorfa en $D - \{z : z \in [a, b]\}$

b-2) Obtenemos $f'(z) = \dfrac{a-b}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1}{z-a} - \dfrac{1}{z-b}$

Sabemos que:
$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad |a| < |z|$$
$$-\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}, \quad |b| < |z|$$
Luego: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n - b^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n-b^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > \text{máx}\{|a|, |b|\} = R$

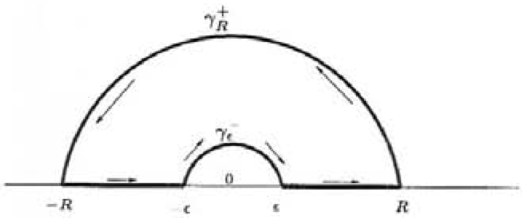
Puesto que el anillo $R < |z|$ es conexo, podemos extraer:
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)\int\frac{1}{z^{n+1}}dz + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n - a^n}{n}\frac{1}{z^n} + C$$
Vemos que: $\lim_{z\to\infty} f(z) = \ln 1 = 0$, luego $C = 0$, por lo que finalmente:
$$\ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n - a^n}{n}\frac{1}{z^n}, \quad |z| > \text{máx}\{|a|, |b|\}$$

b-3)
$$I = -2\pi j \underbrace{\operatorname{Rs}\left[\ln\left(\frac{z-j}{z+j}\right), z=\infty\right]}_{\text{en b-2) } a=j,\ b=-j} = -2\pi j \underbrace{(+2j)}_{-a_{-1}} = 4\pi$$

MMT 1. septiembre 2009

Se considera la función $f(z) = \dfrac{1 - e^{jz}}{z^2}$.

1. Calcula la integral de f sobre el contorno de la figura



   donde γ_ϵ^- es la semicircunferencia de radio ϵ orientada negativamente y γ_R^+ es la semicircunferencia de radio R orientada positivamente.

2. Calcula $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz$ sin utilizar los lemas de Jordan

3. Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de e^{jz} en $z_0 = 0$, prueba que $f(z)$ se puede escribir como $f(z) = \frac{-j}{z} + E(z)$ con $E(z)$ acotada en un entorno de $z_0 = 0$.

4. Calcula $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\,dz$ sin utilizar los lemas de Jordan

5. Calcula $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}\,dx$

a) 0,5; b) 1; c) 0,5; d) 1; e) 0,5

Solución:

1. La función f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por lo tanto, la integral de f sobre el contorno de la figura propuesta es cero al estar el contorno y su interior contenidos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $R > \epsilon > 0$.

2. $\left| \int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz \right| \leqslant \max_{z\in\gamma_R^+} |f(z)| \cdot \operatorname{long}(\gamma_R^+) = \pi R \max_{z\in\gamma_R^+} |f(z)|$. Ahora bien

$$\max_{z\in\gamma_R^+} |f(z)| \leqslant \max_{z\in\gamma_R^+} \frac{1 + |e^{jz}|}{|z|^2} = \max_{z\in\gamma_R^+} \frac{1 + e^{-\operatorname{Im} z}}{|z|^2} \leqslant \frac{2}{R^2}$$

   Por lo que $\left| \int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz \right| \leqslant \frac{2\pi}{R}$. Así pues,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz = 0$$

3. El desarrollo es serie de potencias de e^{jz} alrededor de $z_0 = 0$ es

$$e^{jz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jz)^n}{n!} = 1 + jz - \frac{z^2}{2} - \frac{jz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Por lo tanto

$$\frac{1 - e^{jz}}{z^2} = -\frac{j}{z} + \left(\frac{1}{2} + \frac{jz}{3!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots\right) = -\frac{j}{z} + E(z)$$

La función $E(z)$ es holomorfa en $z_0 = 0$ ya que tiene un desarrollo de potencias (positivas) alrededor de $z_0 = 0$. De esto se deduce que E tiene que estar acotada en un entorno de z_0.

4. Por el partado anterior tenemos

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{j}{z\,dz} + \int_{\gamma_\epsilon^-} E(z)\,dz$$

Sea $\epsilon > 0$. La función E está acotada en el disco cerrado de centro cero y radio ϵ, es decir, existe $M \geqslant 0$ tal que $|E(z)| \leqslant M$ si $|z| \leqslant \epsilon$. Entonces

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon^-} E(z)\,dz\right| \leqslant \epsilon\pi \max_{z \in \gamma_\epsilon^-} |E(z)| \leqslant \epsilon\pi M$$

Por lo que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^-} E(z)\,dz = 0$$

Por otra parte,

$$-\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{j}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{j}{\epsilon e^{jt}} \epsilon j e^{jt}\,dt = \int_0^\pi j^2\,dt = -\pi$$

Así pues,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\,dz = -\pi$$

5. Por el primer apartado se tiene

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1 - e^{jz}}{z^2}\,dz + \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{1 - e^{jz}}{z^2}\,dz + \int_\epsilon^R \frac{1 - e^{jz}}{z^2}\,dz + \int_{\gamma_R^+} \frac{1 - e^{jz}}{z^2}\,dz = 0$$

Tomando el límite $R \to \infty$ obtenemos (ver el segundo apartado)

$$\int_{|x| > \epsilon} \frac{1 - e^{jx}}{x^2}\,dx = -\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{1 - e^{jz}}{z^2}\,dz$$

Si ahora hacemos tender ϵ a cero obtenemos (ver apartado 4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx + j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx = \pi$$

Por lo que, igualandos partes reales e imaginarias, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx = \pi$$

Sep. 09

a) $J_a(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t < t_0 - a,\ t \geq t_0 + a \end{cases}$

siendo $t_0, a > 0 \ / \ t_0 > a$

$$\mathcal{L}[J_a(t-t_0)] = \frac{1}{2a}\mathcal{L}[u(t-(t_0-a)) - u(t-(t_0+a))] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{-(t_0-a)s}}{s} - \frac{e^{-(t_0+a)s}}{s}\right) = \underline{\underline{\frac{e^{-t_0 s}\, sh\, as}{as}}}$$

b) $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{-t_0 s}\, sh\, as}{as}\right] =$

$$= \frac{e^{-t_0 s}}{s}\lim_{a\to 0}\frac{sh\, as}{a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{apl. L-H}}}{=} \frac{e^{-t_0 s}}{s}\lim_{a\to 0}\frac{s\, ch\, as}{1} = \underline{\underline{e^{-t_0 s}}}$$

c) PVI $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3\delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

tomando transfs. de Laplace y teniendo en cuenta las conds. iniciales, resulta:

$$(s^2 + 2s + 1)\, Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3e^{-s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}$$

apl. la prop.- $F^{(n}(s) = \mathcal{L}\left[(-1)^n t^n f(t)\right]$

$$\frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[(-1)^2 t^2 e^{-t}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right] = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

$$\frac{1}{(s+1)^2} = -\mathcal{L}\left[-t e^{-t}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = t e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = 3u(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)}$$

Sustituyendo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + 3u(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + 3(t-1)e^{-(t-1)}, \quad \forall t > 1$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289
Correo-E: info@mat.upm.es

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria ordinaria, 21 de Enero de 2010)

Tiempo: 2.30 horas

Instrucciones:

- *Cada ejercicio se realizará en hojas diferentes y se entregarán por separado al final del examen.*
- *No está permitido salir del aula durante la realización del examen.*
- *Será obligatoria la presentación del DNI al entregar el examen.*
- *No se corregirá ningún examen de aquellos alumnos que no estén ubicados en el aula que les corresponda.*
- *Sólo se atenderán aquellas preguntas que estén relacionadas con imprecisiones o ambigüedades en los enunciados.*

Problema 1.

a) Sea $u = u(h(x,y)) \neq$ cte, siendo $h(x,y) = x^2 + ay^2$. Se pide:

a_1) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función $u(x,y)$ es la parte real de una función holomorfa.

a_2) Para el mayor de los valores de a calculados anteriormente hallar, si existe, la función holomorfa correspondiente, $f(z)$, que además verifique $f(1) = j$ y $f'(\frac{j}{2}) = 2j$.

b) Sea la función de variable compleja

$$G(s) = \left(\frac{s^3}{s^4+4}\right)\frac{1}{1+e^{-s}}.$$

la transformada de Laplace de cierta función $g(t)$. Se pide:

b_1) Determinar su semiplano de convergencia.

b_2) Utilizando exclusivamente la teoría de residuos y las propiedades de la transformada de Laplace, hallar

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

Nota: Considérese que la función $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ *puede desarrollarse mediante una serie geométrica compleja y que se verifica*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(s)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left(F_n(s)\right).$$

a) 2 ptos. (a_1) 1 pto. a_2) 1 pto.) **b) 1,5 ptos.** (b_1) 0,5 ptos. b_2) 1 pto.)

Problema 2.

a) Desarrollar en serie de potencias la función $\operatorname{sen} z$ en $z = \pi$.

b) Se define la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} + 1 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi\} \\ 0 & \text{si } z = \pi \end{cases}$$

b_1) $z = \pi$ es una singularidad de $h(z) = 1/f(z)$. Clasificar esta singularidad.

b_2) Calcular el residuo de $h(z)$ en $z = \pi$ mediante el estudio de la serie de Laurent de $h(z)$ en $z = \pi$.

a) 0,5 ptos. b) 2,5 ptos. (b_1) 1 pto. b_2) 1,5 ptos.)

Problema 1

a) $u = u(h(x,y)) + cte$, siendo $h(x,y) = x^2 + ay^2$

a_1) La función u ha de ser armónica, es decir ha de verificar $\nabla^2 u = 0$

Calculamos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dh}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{du}{dh}(2x) \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2u}{dh^2}(4x^2) + \frac{du}{dh}(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dh}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{du}{dh}(2ay) \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2u}{dh^2}(4a^2y^2) + \frac{du}{dh}(2a)$$

Luego, se ha de verificar:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2u}{dh^2}\left[4x^2 + 4a^2y^2\right] + \frac{du}{dh}\left[2 + 2a\right]$$

Es decir,

$$\frac{d^2u}{dh^2}\left[4(x^2+a^2y^2)\right] + \frac{du}{dh}\left[2(1+a)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{d^2u}{dh^2}}{\frac{du}{dh}} = \frac{-2(1+a)}{4(x^2+a^2y^2)} = \frac{-(1+a)}{2(x^2+a^2y^2)} \qquad (1)$$

Para que esta expresión sea integrable se ha de verificar:

$$\frac{-(1+a)}{2(x^2+a^2y^2)} = \phi(x^2+ay^2) \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow \underline{\underline{a = 0, 1}}$$

Esta expresión (1) también puede ~~ponerse~~ para $a = 1$, ya que en este caso

$$\frac{d^2u}{dh^2} = 0 \rightarrow \frac{du}{dh} = cte \Rightarrow u = C_1(x^2+y^2) + C_2 .$$

Luego, los valores de a para los que la función $u(x,y)$ puede ser la parte real de una función holomorfa son: $\underline{\underline{a = 0, \pm 1}}$

a_2) $\boxed{a=1}$ $\quad h(x,y) = x^2 + y^2$

Sustituyendo en la expresión (1) tenemos:

$$\frac{\frac{d^2u}{dh^2}}{\frac{du}{dh}} = \frac{-1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{h}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial:

$$\ln\left(\frac{du}{dh}\right) = -\ln h + \ln C_1 \Rightarrow \frac{du}{dh} = \frac{C_1}{h} \Rightarrow u = C_1 \ln h + C_2$$

Luego:

$$u(x,y) = C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

f. armónica en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Calculemos la función $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{z=0\}$

Para ello, calculamos $v(x,y) \to$ armónica conjugada de u en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} C_1 \frac{2x}{x^2+y^2} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ -C_1 \frac{2y}{x^2+y^2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right|$$

Integramos respecto a y la 1ª ecuación:

$$v(x,y) = 2C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \phi(x)$$

$$\downarrow \partial/\partial x$$

$$-C_1 \cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2C_1 \cancel{\frac{-y}{x^2+y^2}} + \phi'(x) \Rightarrow \phi'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\phi(x) = C \in \mathbb{R}}$$

Luego:

$$v(x,y) = 2C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C, \quad C = \text{cte} \in \mathbb{R}$$

Por tanto:

$$f(z) = 2C_1 \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C_2 + j\left(2C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C\right) = 2C_1 \ln z + K,$$

$\underline{\underline{K \in \mathbb{C}}}$

Aplicando las condiciones dadas

$$j = f(1) \underset{\uparrow}{=} 0 + K \Rightarrow \underline{\underline{K = j}}$$

aplicado en particular a la rama $\operatorname{Ln} z$, ya que se ha de verificar $\forall$ rama.

$$f'(z) = 2C_1 \frac{1}{z} \Rightarrow 2j = f'\left(\frac{j}{2}\right) = 2C_1 \frac{2}{j} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

Luego, $\underline{f(z) = -\ln z + j}$, holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$

b) $$G(s) = \left(\frac{s^3}{s^4+4}\right)\frac{1}{1+e^{-s}}$$

b₁) Veamos que:

$$\frac{s^3}{s^4+4} \text{ es analítica en } \mathbb{C} - \{s : s^4 = -4\} = \mathbb{C} - \left\{\begin{array}{l} s_1 = 1+j \\ s_2 = -1+j \\ s_3 = -1-j \\ s_4 = 1-j \end{array}\right\}$$

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(s_i)\} = 1$$

$$\frac{1}{1+e^{-s}} \text{ es analítica en } \mathbb{C} - \{s : e^{-s} = -1\} = \mathbb{C} - \{s = -\ln(-1) = -j(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(s_i)\} = 0$$

Luego, la abscisa de convergencia de $G(s)$ es $\sigma = 1$

Por tanto, el semiplano de convergencia de $G(s)$ es:

$$D_{G(s)} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$$

b₂) Hallemos $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{s^4+4}\right) = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{Res}\left[\frac{s^3 e^{st}}{s^4+4},\ s = s_i\right]$$

Los ptos singulares s_i $i = 1,2,3,4$ son polos simples de $\frac{s^3 e^{st}}{s^4+4}$, luego:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{s^3 e^{st}}{s^4+4},\ s = s_i\right] = \frac{\cancel{s_i^3}\, e^{s_i t}}{4\cancel{s_i^3}} = \frac{e^{s_i t}}{4}$$

Luego:
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{s^4+4}\right) = \frac{1}{4}\left[e^{(1+j)t} + e^{(-1+j)t} + e^{(-1-j)t} + e^{(1-j)t}\right] =$$

$$= 2\,\frac{e^{t}+e^{-t}}{4} \cdot 2\,\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{4} = \operatorname{ch} t \cdot \cos t$$

Por otra parte:
$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

Luego:
$$G(s) = \frac{s^3}{s^4+4}\, 1 - \frac{s^3}{s^4+4} e^{-s} + \frac{s^3}{s^4+4} e^{-2s} - \frac{s^3}{s^4+4} e^{-3s} + \cdots$$

Y por tanto:
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ch}(t-n) \cos(t-n)\, u(t-n)$$

Ejercicio 2. Enero 2010

22 de enero de 2010

1. Desarrolla en serie de potencias la funcíon $\operatorname{sen} z$ en $z = \pi$

2. Se define la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z-\pi} + 1 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi\} \\ 0 & \text{si } z = \pi \end{cases}$$

   a) $z = \pi$ es una singularidad de $h(z) = 1/f(z)$. Clasifica esta singularidad.

   b) Calcula el residuo de h en $z = \pi$ mediante el estudio de la serie de Laurent de h en $z = \pi$.

Solución:

1. Se tiene:

$$\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(z-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. La función h tiene un polo de orden 2 en $z = \pi$ ya que f tiene un cero de orden 2 en $z = \pi$. En efecto

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z-\pi} + 1 = \frac{1}{3!}(z-\pi)^2 - \frac{1}{5!}(z-\pi)^4 + \frac{1}{7!}(z-\pi)^6 - \cdots =$$
$$= (z-\pi)^2 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}(z-\pi)^2 + \frac{1}{7!}(z-\pi)^2 - \cdots\right) \quad (1)$$

3. Para calcular el residuo de $h(z)$ en $z = \pi$ calcularemos los primeros términos de su serie de Laurent en $z = \pi$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi\}$ se verifica $f(z)h(z) = 1$, como $h(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = \pi$ su serie de Laurent en $z = \pi$ será de la forma

$$h(z) = \frac{b_{-2}}{(z-\pi)^2} + \frac{b_{-1}}{z-\pi} + b_0 + b_1(z-\pi) + b_2(z-\pi)^2 + \cdots$$

Teniendo en cuenta (1) se tiene que

$$b_{-2}\frac{1}{3!} = 1 \Rightarrow b_{-2} = 6,$$
$$b_{-1}\frac{1}{3!} = 0 \Rightarrow b_{-1} = 0$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Res}[h, \pi] = 0$$

Ejercicio 3º

a) **1pto** $f(z) = \operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividiendo}}}{=} \frac{1}{z} + \frac{1}{6} z + \frac{7}{360} z^3 + \cdots$$

$0 < |z| < \pi$

b) **1pto**

$g(z) = \operatorname{cosec} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = 0 \rightarrow \frac{1}{z} = k\pi \rightarrow z_k = \frac{1}{k\pi} \ , \ k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

polos simples

$$z_k = \frac{1}{k\pi} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow z = 0 : \text{pto singular esencial}$$
$$\left(\nexists \lim_{z \to 0} \operatorname{cosec} \frac{1}{z}\right)$$

$$z = \infty ? \rightarrow z = \frac{1}{w} : g\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} w} \ , \ w = 0 ?$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} w} = \infty \ \wedge \ \lim_{w \to 0} w \frac{1}{\operatorname{sen} w} \underset{\substack{\uparrow \\ L-H}}{=} \lim_{w \to 0} \frac{1}{\cos w} = 1$$

$\Rightarrow z = \infty$: polo simple

c) **0'5ptos**

$$\operatorname{Res}\left\{ g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}} \ , \ z = \infty \right\} = \operatorname{Res}\left\{ -\frac{1}{w^2} g\left(\frac{1}{w}\right), \ w = 0 \right\}$$

$$-\frac{1}{w^2} g\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} \frac{1}{\operatorname{sen} w} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{apartado a)}}}{=} -\frac{1}{w^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{w} - \frac{7}{360} w - \cdots$$

$0 < |w| < \pi$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left\{\operatorname{cosec}\frac{1}{z}\,,\ z=\infty\right\} = -\frac{1}{6}$$

d) <u>1 pto</u>

$$\oint_{|z|=\frac{1}{5}} \operatorname{cosec}\frac{1}{z}\,dz = -2\pi j\left\{\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{\pi}} + \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{\pi}} + \operatorname{Res}_{z=\infty}\right\}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\pm\frac{1}{\pi}} = \lim_{z\to\pm\frac{1}{\pi}} \left(z\mp\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}} \underset{\substack{\uparrow \\ L-H}}{=} \frac{1}{\pi^2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=\frac{1}{5}} \operatorname{cosec}\frac{1}{z}\,dz = -2\pi j\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\right) = -j\,\frac{12-\pi^2}{3\pi}$$

$|z+\sqrt{3}|+|z-\sqrt{3}|=4$: elipse de semiejes $a=2 \wedge b=1$

$$\Rightarrow \oint_{|z+\sqrt{3}|+|z-\sqrt{3}|=4} \operatorname{cosec}\frac{1}{z}\,dz = -2\pi j\operatorname{Res}_{z=\infty} = -2\pi j\left(-\frac{1}{6}\right) = j\frac{\pi}{3}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
A LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION
Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Ciudad Universitaria s/n. 28040 MADRID
http://www.mat.upm.es

Tel: +34 913.367.288
Fax: +34 913.367.289

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TELECOMUNICACIÓN I

Examen (convocatoria extraordinaria, 6 de septiembre de 2010)

Tiempo: 2.30 horas

Problema 1.

a) Resolver los siguientes apartados:

a1) Encontrar, especificando su dominio de holomorfía, una función holomorfa $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ cuya parte real es $u = u(\varphi(x,y))$ siendo

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x},$$

sabiendo que se cumple que $f(1) = 1 + j$ y $f'(1) = 5$.

a2) Indicar la naturaleza del punto $z = \infty$ para la función $f(z)$ obtenida en el apartado anterior y determinar el valor del residuo de $f(z)$ en $z = \infty$.

b) Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \operatorname{Ln}\left(\frac{s+3}{s-1}\right)$$

siendo $\operatorname{Ln} s = \operatorname{Ln}|s| + j\theta, \ -\pi < \theta < \pi$ y determinar el semiplano de convergencia.

a) 2 ptos. ($a1$) 1,5 ptos. $a2$) 0,5 ptos.); **b) 1,5 ptos.**

Problema 2.

a) Calcular la integral

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z^m(z^2-5z+6)}\,dz, \quad \text{con } m \in \mathbb{N}, \quad \text{siendo } \gamma : |z| = R \uparrow,$$

para cada R no entero.

b) Hallar una cota superior, si existe, del valor absoluto de la integral

$$\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}}\,dz,$$

donde γ es el arco de circunferencia $\gamma(t) = e^{jt}$, $\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$ que unen los puntos $(-1,0)$ y $(0,-1)$ del plano complejo recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

a) 2 ptos. b) 1,5 ptos.

Problema 3.

Dada la función

$$f(z) = \frac{z^n}{z+1}e^{\frac{1}{z}}, \quad n = 0,1,2,...$$

a) Analizar y clasificar las singularidades de la función $f(z)$ en el plano complejo ampliado $\hat{\mathbb{C}}$.

b) Hallar el residuo de la función $f(z)$ en el punto $z = 0$.

c) Calcular la integral

$$I = \int_C f(z)\,dz,$$

donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 2 orientada positivamente.

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1 pto.

Fecha de publicación de notas provisionales: 20 de Septiembre.
Fin de plazo de solicitud de revisión: 23 de Septiembre.
Fecha de revisión: se publicará junto con las notas provisionales (previsiblemente el 24 de Septiembre).
Fecha de publicación del Acta: 27 de Septiembre.

1^{er} Problema

a1) (1'5 pto) $\frac{x^2+y^2}{x} = t$

$$u_x = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{x^2} \frac{du}{dt}$$

$$u_y = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{2y}{x} \frac{du}{dt}$$

$$u_{xx} = \frac{2y^2}{x^3} \frac{du}{dt} + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2 \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$u_{yy} = \frac{2}{x} \frac{du}{dt} + \left(\frac{2y}{x}\right)^2 \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\Delta u = 0 \longrightarrow t \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha \; : \; t \frac{d\alpha}{dt} + 2\alpha = 0 \longrightarrow \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{2}{t} dt$$

integrando : $\ln \alpha = -2 \ln t + \ln A \rightarrow \alpha = \frac{A}{t^2}, A>0$

$$\frac{du}{dt} = \frac{A}{t^2} \longrightarrow u = -\frac{A}{t} + B, \; B \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u = -A \frac{x}{x^2+y^2} + B, \; A>0, \; B \in \mathbb{R}$$

$$f'(z) = u_x - j u_y = A\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + j\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x=z \\ y=0}}{=} -A\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{A}{z^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = -\frac{A}{z} + k, \quad k \in \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1+j \\ f'(1) = 5 \end{array}\right\} \longrightarrow A = 5, \quad k = 6+j$$

Sustituyendo: $\underline{\underline{f(z) = -\frac{5}{z} + 6+j}}$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$

a2) (0'5 ptos)

$z = \infty$: pto regular

$\operatorname{Res}\{f(z), z=\infty\} = -a_{-1} = \underline{5}$

b) (1'5 ptos) Ptos de no holomorfía de $F(s)$:

- $s = 1$
- $w = \dfrac{s+3}{s-1}$: $\cancel{w \neq 0}^{\,s=-3} \quad \wedge \quad w \in \mathbb{R}^-$

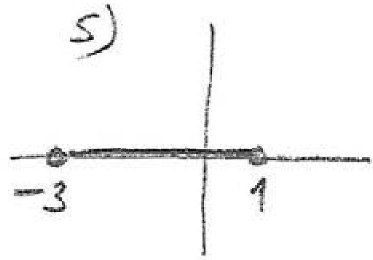
$$W = \frac{s+3}{s-1} \underset{\substack{\uparrow \\ s=x+jy}}{=} \frac{(x+3)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} + j\frac{-4y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$W \in \mathbb{R}^- \iff \begin{cases} \operatorname{Im}(W) = 0 \iff y = 0 \\ \operatorname{Re}(W) < 0 \iff (x+3)(x-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0 \wedge -3 < x < 1$$

$F(s)$ es holomorfa en :

$$\mathbb{C} - \{ s \in \mathbb{C} \ / \ s \in [-3, 1] \}$$



Semiplano de convergencia : $\operatorname{Re} s > 1$

$$F'(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-1} , \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \frac{-1}{t}\left(e^{-3t} - e^{t}\right)$$

Ejercicio 2

a) Calcular la integral

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^m(z^2-5z+6)} \quad , \text{ siendo } \gamma : |z| = R \uparrow \quad m \in \mathbb{N}$$

para cada R no entero.

La función $f(z)$ tiene en $z=0 \rightarrow$ polo de orden m

$z=2$, $z=3$ } $\rightarrow$ polos simples

Es fácil ver que:
$$\text{Res}[f(z), z=2] = \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = -\frac{1}{2^m}$$

$$\text{Res}[f(z), z=3] = \lim (z-3) f(z) = \frac{1}{3^m}$$

Para calcular $\text{Res}[f(z), z=0]$ recurrimos a la serie de Laurent

$$\frac{1}{z^m} \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z^m}\left(\frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\right) = \frac{1}{z^m}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)z + \cdots\right] =$$
$$0 < |z| < 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^m} + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{z^{m-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{3^m}\right)\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{3^{m+1}}\right) + \cdots$$
$$0<|z|<2$$

Y, por tanto, $\text{Res}[f(z), z=0] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m}$

El valor de la integral dada dependerá del valor de R. Así, tenemos 3 casos:

1) $0 < R < 2$, el único polo de $f(z)$ dentro de γ es $z=0$, luego:
$$I = 2\pi j \,\text{Res}[f(z), z=0] = 2\pi j\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m}\right)$$

2) $2 < R < 3$, los únicos polos de $f(z)$ dentro de γ son $z=0$ y $z=2$, luego:
$$I = 2\pi j\left[\text{Res}[f(z), z=0] + \text{Res}[f(z), z=2]\right] = -\frac{2\pi}{3^m} j$$

3) $R>3$, los 3 polos están dentro de γ, luego:

$$I = 2\pi j \sum_{i=1}^{3} \operatorname{Res}\left[f(z),\ z=z_i\right] = \frac{1}{2\pi j}\left[\frac{1}{2^{m}} - \frac{1}{3^{m}} - \frac{1}{2^{m}} + \frac{1}{3^{m}}\right] = 0$$

Nota. También puede verse que; en este caso:

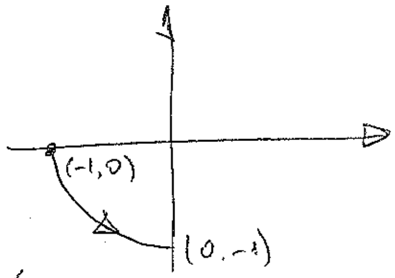
$$I = -\operatorname{Res}\left[f(z),\ z=\infty\right] = 0$$

---

b)

$$\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}}\,dz \qquad \gamma(t) = e^{jt}, \qquad \pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$$

$$\left|\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}}\,dz\right| \le \int_\gamma \left|e^{-\frac{1}{z}}\right| ds$$



Calculamos una cota superior de $|e^{-\frac{1}{z}}|$ en $\gamma(t)$:

$$\left|e^{-\frac{1}{z}}\right| = \left|e^{-\frac{x-jy}{x^2+y^2}}\right| = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}} \underbrace{\left|e^{j\frac{y}{x^2+y^2}}\right|}_{=1} = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}$$

En $\gamma(t)$: $x^2+y^2 = 1$

Luego: $\left|e^{-\frac{1}{z}}\right|_{z\in\gamma(t)} = e^{-x}$

Y sabemos que: $\max\limits_{x\in\gamma(t)} e^{-x}$ se alcanza en $\min\limits_{x\in\gamma(t)} x$, es decir en $x=-1$

Luego: $\max\limits_{z\in\gamma(t)} \left|e^{-\frac{1}{z}}\right| = e$

Por tanto: $$\left|\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}}\,dz\right| \le e \underbrace{\int_\gamma ds}_{\frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} e$$

Ejercicio 3

Dada la función
$$f(z) = \frac{z^n}{z+1}e^{\frac{1}{z}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Analizar y clasificar las singularidades de la función f en el plano complejo ampliado.

b) Hallar el residuo de la función $f(z)$ en el punto $z = 0$.

c) Calcular la integral
$$I = \int_C f(z)dz$$
donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 2, orientada positivamente.

Solución:

a) La función
$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z^{n-1}(1+z)}$$
presenta un polo de orden $n-1$ en el punto $z = 0$ porque
$$\lim_{z\longrightarrow 0} g(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\longrightarrow 0} z^{n-1}g(z) = 1 \in \mathbb{C},$$
luego la función $f(z)$ presenta un polo de orden $n-1$ en $z = \infty$.

La función f presenta un polo simple en el punto $z_1 = -1$ porque
$$\lim_{z\longrightarrow -1} f(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\longrightarrow -1} (z+1)f(z) = (-1)^n e^{-1} \in \mathbb{C}.$$

La función f presenta una singularidad esencial en el punto $z_0 = 0$ porque en el disco reducido $0 < |z| < 1$, el desarrollo de f en serie de Laurent:
$$f(z) = z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell! z^\ell}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$
tiene infinitos términos –que no se anulan– de potencias negativas.

b) El residuo en la singularidad esencial es el coeficiente asociado a z^{-1} del desarrollo de f en serie de Laurent alrededor del punto $z = 0$.

Cuando $|z| < 1$,
$$\frac{1}{1+z} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m$$
y cuando $|z| > 0$,
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell! z^\ell}.$$

En el disco reducido $0 < |z| < 1$, el desarrollo de f en serie de Laurent alrededor del punto $z = 0$ es
$$f(z) = z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell! z^\ell}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$
y el coeficiente asociado a z^{-1} es
$$c_{-1} = \text{Res}[f, z=0] = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s+n+1)!} = (-1)^{n+1} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}.$$

c) Las singularidades aisladas $z = -1$ y $z = 0$ están contenidas en la circunferencia de centro 0 y radio 2, luego

$$I = 2\pi j\big(\operatorname{Res}[f,-1] + \operatorname{Res}[f,0]\big)$$

porque la circunferencia C está orientada positivamente.

En el polo simple, el residuo es

$$\operatorname{Res}[f, z=-1] = \lim_{z\longmapsto -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\longmapsto -1} z^n e^{\frac{1}{z}} = (-1)^n\frac{1}{e}.$$

En la singularidad esencial, el residuo es $\operatorname{Res}[f, z=0] = (-1)^{n+1}\displaystyle\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t!}$.

En definitiva,

$$I = \int_C \frac{z^n}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi j\left((-1)^n\frac{1}{e} + (-1)^{n+1}\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t!}\right) = 2\pi j(-1)^n\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t}{t!}.$$

Esta integral también puede calcularse mediante el residuo de f en el punto del infinito: utilizando que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), z=\infty] &= \operatorname{Res}\left[-\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big), z=0\right] = \operatorname{Res}\left[-\frac{1}{w^{n+1}}\,\frac{1}{1+w}e^w, z=0\right]\\ &= \operatorname{Res}\left[-\frac{1}{w^{n+1}}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{w^\alpha}{\alpha!}\right)\left(\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^\beta w^\beta\right), z=0\right] = -(-1)^n\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t}{t!},\end{aligned}$$

se obtiene el mismo resultado anterior

$$I = \int_C \frac{z^n}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz = -2\pi j\operatorname{Res}[f(z), z=\infty] = 2\pi j(-1)^n\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t}{t!}.$$