

simplyjarod.com

TECM

Carpeta
Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM



Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
en [simplyjarod.com](https://www.simplyjarod.com)

TECM

Teoría

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Tema 1: Introducción a los sistemas de comunicaciones (0,4)

- 1.1 Estructura Básica de un Sistema de Comunicaciones
- 1.2 Compartición del Canal: Multiplexación de la Información
- 1.3 Parámetros de Calidad
- 1.4 Recursos en un Sistema de Comunicaciones

Tema 2: Señales, ruido y distorsión (1,4)

- 2.1 Caracterización de las Señales
- 2.2 Caracterización del Ruido
- 2.3 Señales Paso-Banda
- 2.4 Distorsión

Tema 3: Transmisión analógica (2,0)

- 3.1 Transmisión en Banda Base
- 3.2 Modulaciones Lineales
- 3.3 Modulaciones Angulares
- 3.4 Análisis de los sistemas de transmisión Analógicos en Canales Ruidosos

Tema 4: Introducción a los sistemas digitales de comunicación (0,2)

- 4.1 Características de las comunicaciones Digitales
- 4.2 Estructura de un Sistema de comunicaciones digitales
- 4.3 Definiciones básicas
- 4.4 Sistemas PCM

Tema 5: Transmisión digital en banda base (1 crd.)

- 5.1 Codificación de línea
- 5.2 Interferencia entre símbolos
- 5.3 Canales ruidosos. Probabilidad de error

Tema 6: Transmisión digital modulada (1 crd.)

- 6.1 Análisis de las modulaciones en el plano I-Q
- 6.2 Propiedades del tipo de modulación
- 6.3 Esquemas de modulación digital
- 6.4 Análisis en canales ruidosos. Probabilidad de error
- 6.5 Resumen. Comparación entre sistemas.

TEMA 1: INTR. A LOS SIST. DE COMUNICACIONES.

1.1 ESTRUCTURA DE LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES

Cualquier sistema de comunicaciones se puede asimilar al siguiente esquema:

Los elementos que los constituyen son los siguientes:

1.1.1 Fuente de información

Una fuente de información proporciona la señal que se va a transmitir por el sistema. La señal a transmitir puede ser de dos tipos:

- **Analógica:** señal continua en el tiempo. Lo que interesa hacer llegar al destino en este caso es la forma de la señal.

- **Digital:** señal discontinua en el tiempo. Cada T segundos (periodo de símbolo) la fuente produce una unidad de información (símbolo), que pertenece a un alfabeto finito. El alfabeto más sencillo es el binario (símbolos 0 y 1), pero no es el único.

Veremos más en detalle las características y ventajas de los sistemas de comunicaciones digitales en el tema 4.

1.1.2 Transmisor (Tx)

Se trata del bloque que acondiciona la señal a transmitir en un formato adecuado para poder ser transmitida a través del canal de comunicaciones. Por supuesto, el tipo de información a transmitir (analógica o digital) condiciona fuertemente el transmisor.

El transmisor puede trabajar de los siguientes modos:

- **Transmisión en Banda Base:** la señal se transmite directamente en la banda de frecuencias en la que está originalmente.
 - o Los sistemas de transmisión en banda base analógicos son muy sencillos, aunque con prestaciones limitadas y actualmente su usan muy poco. Por ejemplo: antiguos sistemas de megafonía, algunos sistemas de TV en circuito cerrado etc...
 - o Sistemas de transmisión digital en banda base.

Los sistemas de transmisión analógica en banda los veremos en el tema 3. La transmisión digital en banda base se ve en detalle en el tema 5.

Los sistemas de transmisión analógica modulada se estudian en detalle en el tema 3, mientras que los sistemas de transmisión digital modulada se estudian en el tema 6.

Veremos en detalle la distorsión y el ruido en el tema 2.

En los sistemas de comunicación digital no importa la forma de la señal, sino que el objetivo del sistema es preservar la secuencia de símbolos que generó la fuente.

Veremos los parámetros para medir la calidad de un sistema de comunicaciones más adelante.

- **Transmisión Modulada:** el espectro de la señal se transmite en una banda de frecuencias alrededor de una frecuencia portadora. La modulación no necesariamente respeta la forma del espectro original (aunque sí en algunos casos).
 - o Modulaciones analógicas: Por ejemplo AM, DBL, BLU, FM, PM etc... La AM y la FM se utilizan por ejemplo para la transmisión de señales analógicas de radiodifusión.
 - o Modulaciones digitales: Por ejemplo ASK, PSK, FSK etc... Con múltiples aplicaciones actualmente.

1.1.3 Canal

Es el medio físico por el que viajan las señales generadas por el transmisor. Los canales en la práctica producen perturbaciones sobre la señal transmitida:

- **Atenuación y retardo:** No son muy dañinos porque se conserva la forma de la señal transmitida.
- **Distorsión.** Puede ser lineal si el canal es un sistema lineal, o no lineal.
- **Añade ruido e interferencias**

1.1.4 Receptor (Rx)

Elemento del sistema de comunicaciones que partiendo de la señal recibida del canal, realiza las transformaciones y procesos necesarios para presentar la información en el formato esperado en destino.

Cuando se trata de transmisión analógica en banda base, el receptor habitualmente no hace más que amplificar la señal recibida (**amplificación**).

Si la transmisión es modulada (sea analógica o digital), el receptor tiene que devolver la señal a su banda original (**demodulación**)

Si la transmisión es digital, el receptor tiene el papel de **decisión**. A partir de la señal recibida, el receptor tiene que decidir qué símbolo es el que se transmitió. Por ejemplo:

Los receptores más complejos serán aquellos que tengan que remodular y decidir.

1.1.5 Destino

Elemento del sistema de comunicaciones que recibe la señal recuperada por el receptor. El destino exige una cierta calidad en la señal que recibe para funcionar correctamente.

1.2 COMPARTICIÓN DE LOS CANALES. MULTIPLEXACIÓN

La Multiplexación o acceso múltiple se utiliza para resolver el problema de que los canales de comunicaciones en la práctica son compartidos por muchos usuarios. Gracias a la multiplexación, múltiples usuarios pueden utilizar el mismo canal simultáneamente. Hay varios tipos.

1.2.1 FDMA (Frequency Division Multiple Access)

Acceso múltiple en el dominio de la frecuencia. Es el único que sirve para servicios analógicos. Por ejemplo lo utilizan los sistemas de radio y televisión analógicas.

1.2.2 TDMA (Time Division Multiple Access)

Acceso múltiple en el dominio del tiempo. Los distintos usuarios utilizan el canal por turnos, durante un tiempo en que se les asigna sólo a ellos. Requiere que el sistema sea digital. Se utiliza por ejemplo en las redes de área local (Ethernet).

1.2.3 Otros: CDMA (Code Division Multiple Access) y SDMA (Space Division Multiple Access)

Son sistemas de multiplexación más modernos, que sólo se pueden utilizar en sistemas de comunicaciones digitales. El CDMA se utiliza por ejemplo en los sistemas de telefonía 3G (UMTS) y los de navegación por satélite GPS.

1.3 PARÁMETROS DE CALIDAD DE UN SISTEMA DE COMUN.

1.3.1 Sistemas analógicos

En un sistema analógico, la señal recibida tiene la siguiente forma:

$$y(t) = \underbrace{kx(t-t_0)}_{\text{Parte útil de la señal}} + \underbrace{d(t)}_{\text{distorsión}} + \underbrace{n(t)}_{\text{ruido}} + \underbrace{i(t)}_{\text{interferencia}}$$

La calidad se define como el cociente entre la potencia de la señal “deseada” y la potencia de las señales “indeseadas”. A este parámetro de calidad se le conoce como SINAD:

$$SINAD = \frac{S}{I + N + D}$$

En muchas situaciones prácticas, el factor más limitante es el ruido, y se pueden despreciar las interferencias y la distorsión. Por ello se utiliza mucho otro parámetro conocido como SNR (*Signal to Noise Ratio*).

$$SNR = \frac{S}{N}$$

1.3.2 Sistemas digitales

En los sistemas digitales, la calidad depende del proceso de **decisión** que se realiza en el receptor. Aún cuando la señal recibida tenga ruido, interferencias y distorsión, si la decisión es perfecta, la calidad es perfecta. Pero puede ocurrir que la decisión sea incorrecta en algunos símbolos. Por ejemplo:

Por ello, para caracterizar la calidad en los sistemas digitales, se usa la probabilidad de error:

$$P_e = \frac{\text{Nº de decisiones incorrectas}}{\text{Nº total de símbolos transmitidos}}$$

En el caso de que la fuente sea binaria nos interesa el parámetro denominado **BER** (*bit error rate*).

1.4 RECURSOS DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES.

Para conseguir buenos parámetros de calidad en los sistemas de comunicaciones (SNR o BER), hacen falta recursos: dinero, espacio, peso, tecnología para elaborar transmisores y receptores.

Pero hay dos recursos especialmente importantes: la **potencia transmitida** y el **ancho de banda**. Estos recursos en muchas ocasiones están controlados por ley, y no se pueden sobrepasar unos ciertos límites porque interferirías a otros usuarios de los canales compartidos.

Por ello, la **Teoría de la Comunicación**, tiene por objeto encontrar las técnicas más adecuadas que, con los condicionamientos económicos, tecnológicos, etc. existentes, permitan optimizar el consumo de ancho de banda y potencia para poder transmitir una determinada información.

Hablaremos de esto más en profundidad en los temas 2 y 3.

Hablaremos de esto más en profundidad en los temas 4, 5 y 6.

TEMA 2: SEÑALES, RUIDO Y DISTORSIÓN

2.1 CARACTERIZACIÓN DE SEÑALES

2.1.1 Transformada de Fourier

Sea una señal $x(t)$ una señal continua en el dominio del tiempo. Definimos la transformada de Fourier como

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Antes, en STLN, trabajábamos en ω , ahora, en TECM, trabajaremos en f

O bien, como hacíamos en STLN:

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La diferencia básica entre $\tilde{X}(\omega)$ y $X(f)$ está en que en una definición ponemos ω y en la otra ponemos $2\pi f$:

$$X(f) = \tilde{X}(\omega) \Big|_{\omega=2\pi f}$$

Gráficamente esto se traduce en el eje de abscisas (eje de frecuencias) donde cada punto queda dividido entre 2π .

El eje de ordenadas (eje de amplitudes) no cambia salvo en el caso particular de la delta:

$$\delta(\omega) \Big|_{\omega=2\pi f} = \delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$$

2.1.2 Normalización de Potencia

Sea una señal sinusoidal $x(t) = A \cos \omega t$. Definimos:

$$\text{Potencia instantánea: } p_{ms}(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{A^2}{R} \cos^2 \omega t$$

$$\text{Potencia máxima: } P_{\max} = \max[p_{ms}(t)] = \frac{A^2}{R}$$

$$\text{Potencia media: } P_m = \frac{A^2}{2R}$$

En los sistemas de comunicaciones la impedancia suele estar estandarizada a un valor conocido. Con objeto de simplificar la notación y no arrastrar R se normaliza la potencia media para $R = 1$, es decir:

$$P_m = \frac{A^2}{2}$$

2.1.3 Unidades logarítmicas. Decibelios

¿Qué es un decibelio? Es una medida logarítmica que sirve exclusivamente para hacer medidas relativas de potencia, es decir, comparar dos potencias entre sí.

Para calcular la ganancia de potencia en decibelios de un amplificador hacemos:

$$G_p(dB) = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

Por ejemplo, si $G_p(dB) = 7 dB$ esto quiere decir que P_2 es 7 dB superior a P_1 .

Por ejemplo, si $G_p(dB) = -7 dB$ esto quiere decir que P_2 es 7 dB inferior a P_1 .

Si en lugar de calcular ganancia de potencia queremos ganancia de tensión:

$$G_v = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow G_v(dB) = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{V_2^2 / Z}{V_1^2 / Z} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 10 \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$

$$G_v = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$

Si queremos hacer medidas absolutas de potencia o tensión (es decir, no comparaciones) se mide respecto a una referencia

- dBm : relación, en dB, entre una potencia de señal y $P_{REF} = 1mW$

$$P(dBm) = 10 \log \frac{P}{P_{REF}} = 10 \log \frac{P}{1mW}$$

- dBw : relación, en dB, entre una potencia de señal y $P_{REF} = 1W$

$$P(dBw) = 10 \log \frac{P}{P_{REF}} = 10 \log \frac{P}{1W}$$

$dB\mu$: relación, en dB, entre la tensión de una señal y $V_{REF} = 1\mu V$

$$V(dB\mu) = 20 \log \frac{V}{V_{REF}} = 20 \log \frac{V}{1\mu V}$$

! NO SUMAR POTENCIAS ABSOLUTAS EN UNIDADES LOG

Importante:

- La ganancia se mide en dB y la potencia absoluta en dBm o dBw, es decir medidas relativas en dB y medidas absolutas de potencia en dBm o dBw.
- Las ganancias en dB son muy útiles para calcular la ganancia total de una cadena de amplificadores (o atenuadores), puesto que basta con sumar las ganancias respectivas de cada uno de ellos.
- La potencia de la suma de señales no es la suma de las potencias. Para que sea así debe darse alguna de las siguientes situaciones:
 - Señales incorreladas/independientes.
 - Señales ortogonales (en fase y cuadratura). *seno o coseno de la misma fase*
 - Sus espectros no se solapan.

En el resto de casos, las señales se deberán sumar en tensión y calcular la potencia de la señal resultante.

- Para sumar potencias, los dBm o dBw no son útiles. Para ello, si tenemos potencias en unidades logarítmicas y queremos sumar dichas potencias, hay que pasar a unidades naturales, sumar, y volver a pasar a unidades logarítmicas.

10log se usa con potencias, energías...

3 dB significa el doble de potencia
-3 dB significa la mitad de potencia

Casi siempre supondremos normalización de resistencias

20log se usa con tensiones, corrientes...

De esta manera las ganancias valen lo mismo sean de tensión, corriente, potencia, energía... (Ver ejemplo 1)

$$1\mu W \equiv -30dBm$$

$$1mW \equiv 0dBm$$

$$1W \equiv +30dBm$$

$$1\mu W \equiv -60dBw$$

$$1mW \equiv -30dBw$$

$$1W \equiv 0dBw$$

$$1\mu V \equiv 0dB\mu$$

$$1mV \equiv 60dB\mu$$

$$1V \equiv 120dB\mu$$

Ver ejemplo 2

Por ej. un seno y un coseno de la misma frecuencia son señales ortogonales porque están desfasadas 90° entre sí

2.1.4 Parámetros característicos de las señales

- **Valor medio:** Es la componente continua de la señal.

En un intervalo T :
$$x_{DC} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

En toda la señal:
$$x_{DC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

- **Energía de la señal:**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si la señal es real:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

- **Potencia:** la potencia tiene especial interés en señales de energía infinita

- Potencia media:
$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

- Potencia de continua:
$$P_{DC} = x_{DC}^2$$

- Potencia de alterna:
$$P_{AC} = P_m - P_{DC} \Rightarrow P_m = P_{DC} + P_{AC}$$

- Valor cuadrático medio:
$$x_{rms} = \sqrt{P_m}$$

- Valor eficaz:
$$x_{eff} = \sqrt{P_{AC}}$$

-
$$x_{rms}^2 = x_{DC}^2 + x_{eff}^2$$

-
$$P_{AC} = P_m - P_{DC} = x_{eff}^2 = x_{rms}^2 - x_{DC}^2$$

- **Densidad espectral de energía (DEE)**

Sea $x(t)$ una señal de energía finita y sea $X(f)$ su transformada de Fourier, entonces la densidad espectral de energía se define como:

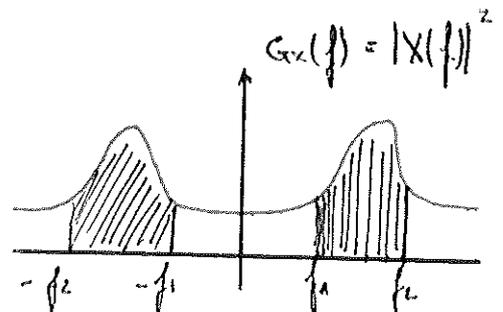
$$G_X(f) = |X(f)|^2$$

Indica cómo se distribuye la energía de la señal en la frecuencia. De esta forma, la energía que tiene la señal en una determinada banda de frecuencias, entre f_1 y f_2 será:

$$E_{f_1, f_2} = 2 \int_{f_1}^{f_2} G_X(f) df$$

Y la energía de toda la señal se calcula como:

$$E_{TOTAL} = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) df$$



Si la señal es periódica el cálculo se puede realizar en un solo período

Las señales acotadas y con duración finita, tienen energía finita y denominan señales de energía finita o simplemente señales de energía. Estas señales tienen potencia media nula, y además siempre tienen TF.

Las señales que tienen energía infinita pero potencia media finita se denominan señales de potencia. Algunas de estas señales no tienen TF.

Si la señal es periódica, el cálculo de la potencia media se puede realizar en un solo período

Se define exclusivamente para señales de energía finita.

Siempre existe la transformada de Fourier de una señal de energía

La DEE de una señal real es siempre una función par.

• **Densidad espectral de potencia (DEP)**

Se utiliza para señales de potencia y establece como se distribuye la potencia por el espectro:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

Donde $X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$

O si se trata de procesos estocásticos:

$$S_x(f) = TF[R_{xx}(\tau)]$$

donde $R_{xx}(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau) d\tau$ (función de autocorrelación)

Obviamente para hallar la potencia que tiene una señal en una cierta banda de frecuencias, entre f_1 y f_2 , basta con integrar la $S_x(f)$:

$$P_{f_1, f_2} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df$$

Y si se desea la potencia total, entre $-\infty$ e ∞ , se obtiene de acuerdo con:

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

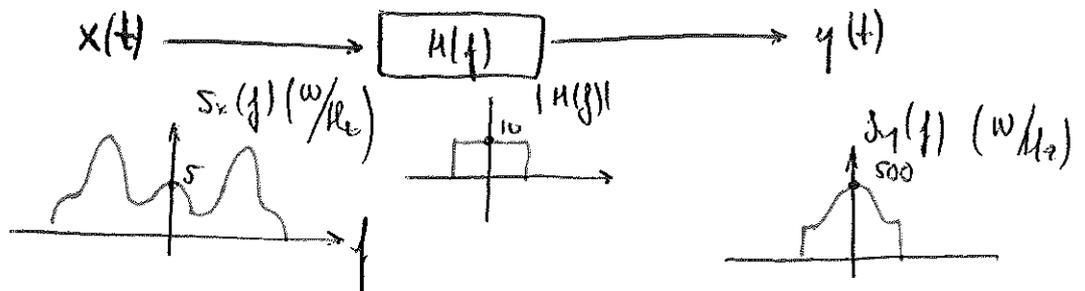
Un caso especialmente importante es el de las señales periódicas, que son señales de potencia, en cuyo caso:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \leftrightarrow S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

siendo a_k los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier y f_0 la inversa del período de la señal.

Propiedad de filtrado: Si se introduce una señal, cuya densidad espectral de potencia es $S_x(f)$ en un sistema lineal cuya función de transferencia sea $H(f)$, se cumple:

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$



Como muchas señales de potencia no tienen TF se utiliza este "truco". Se calcula la TF de un período T de la señal y se hace el límite

Esto lo usaremos para calcular la DEP del ruido (que se puede modelar como un proceso estocástico). Se ve en ISAL

¡Cuidado! En STLN usábamos el par de TF siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega t}$$

↕

$$X(f) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Pero ahora por defecto trabajaremos con DEP para las señales periódicas, aunque algunas tengan TF. De ahí los cambios.

Donde $S_y(f)$ es la densidad espectral de potencia a la salida. Esto se explica en la parte final de ISAL.

2.2 CARACTERIZACIÓN DEL RUIDO

2.2.1 Definición

En el sentido más amplio, el **ruido** es cualquier señal indeseada de carácter aleatorio que aparezca en cualquier elemento de un sistema de comunicaciones.

Como vimos en el tema 1, definimos la relación señal/ruido SNR como:

$$SNR = \frac{S}{N}$$

Donde S es la potencia de señal y N es la potencia de ruido.

También podemos expresar la relación anterior en unidades logarítmicas:

$$SNR (dB) = \frac{S}{N} (dB) = S(dBm) - N(dBm)$$

2.2.2 Caracterización matemática usando procesos estocásticos

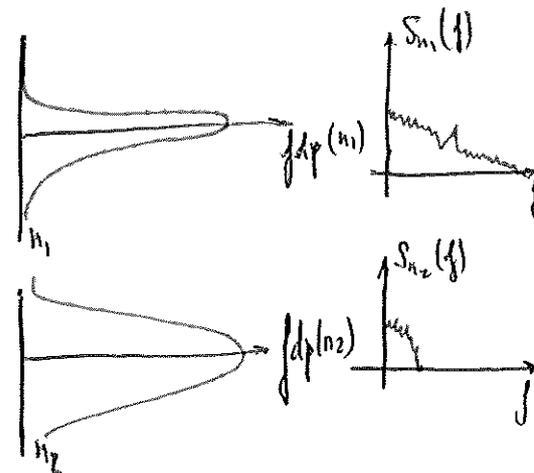
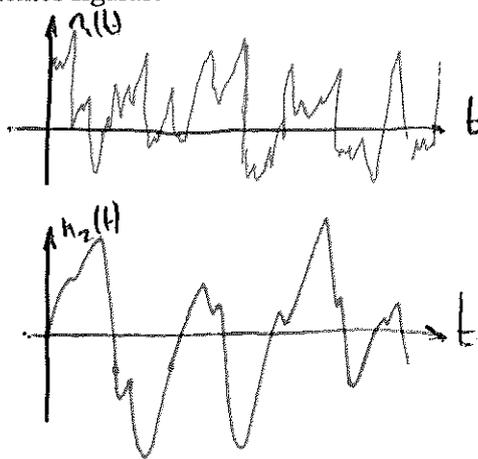
Proceso estacionario: aquel cuyas propiedades estadísticas no varían con el tiempo.

Proceso ergódico: aquel en el que los promedios estadísticos coinciden con los temporales

Desde el punto de vista matemático, en esta asignatura, el ruido $n(t)$ se caracterizará como un **proceso estocástico que se supone estacionario y ergódico**. Cada medida de ruido que podamos realizar y visualizar con un osciloscopio, será una realización de dicho proceso.

En estas condiciones, el proceso queda modelado por su función de densidad de probabilidad en amplitud (fdp) y su densidad espectral de potencia ($S_n(f)$).

La fdp nos dará información sobre qué valores de amplitud del ruido son más o más probables, mientras que la DEP dará información acerca de lo rápidas o lentas que serán las variaciones temporales del ruido (en función de su ancho de banda), como nos muestran intuitivamente las siguientes figuras:



En la fdp está toda la información relativa a la amplitud de la señal y, por tanto, a partir de ella, se pueden obtener los mismos parámetros que para las señales deterministas, teniendo en cuenta que trabajaremos con procesos ergódicos:

En la práctica, en esta asignatura, el valor medio del ruido será casi siempre 0

- **Valor medio:** Es la componente continua del ruido.

$$n_{DC} = E[n] = \langle n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T n(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt$$

- **Energía:** los procesos estacionarios tienen energía infinita

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} |n(t)|^2 dt = \infty$$

- **Potencia:** la potencia tiene especial interés en señales de energía infinita, como son los procesos estacionarios

- Potencia media: $P_N = E[n^2] = \langle n^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n^2(t) dt$

O trabajando con su DEP:

$$P_N = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f) df$$

- Potencia de continua: $P_{DC} = n_{DC}^2$
- Potencia de alterna (varianza del proceso): $\sigma_N^2 = P_{AC} = E[(n - n_{DC})^2] = P_N - P_{DC}$
- Valor cuadrático medio: $n_{rms} = \sqrt{P_N}$
- Valor eficaz (desviación estándar del proceso): $n_{eff} = \sqrt{P_{AC}} = \sqrt{\sigma_N^2} = \sigma_N$

2.2.3 Ruido Gaussiano

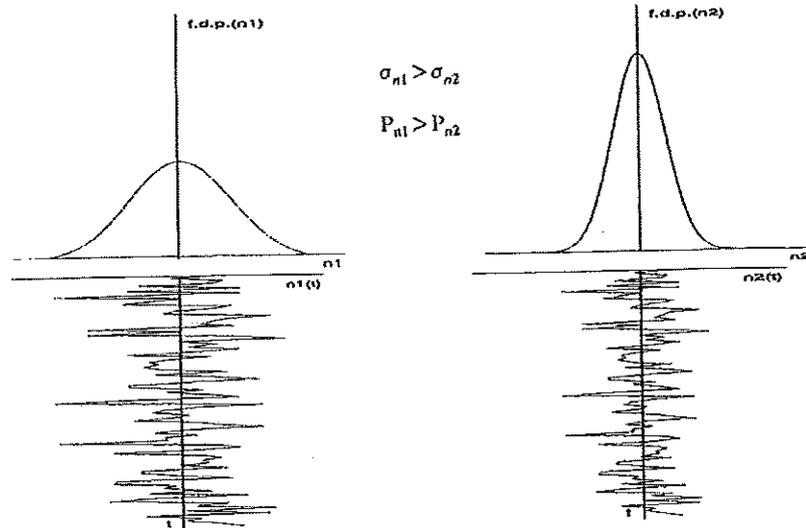
¡OJO! Al decir que un ruido es gaussiano, estamos dando información sobre la distribución de probabilidad de sus amplitudes, pero no decimos nada sobre su variación temporal (rápida o lenta), que estará encerrada en su DEP.

Potencia de ruido gaussiano
 $N = \sigma^2$

Muchos ruidos (señales indeseadas), entre ellos el ruido térmico, de especial relevancia en los sistemas de comunicaciones, son procesos estocásticos con funciones de probabilidad en amplitud de forma gaussiana y de media nula:

$$f_{dp}(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-n^2}{2\sigma^2}\right]$$

Donde σ es la desviación estándar del proceso y nos da una idea de cómo de ancha o estrecha es la campana gaussiana, y σ^2 es la varianza del proceso, que es igual a la potencia media de ruido



2.2.4 Ruido blanco

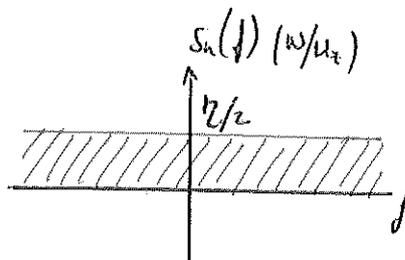
¡OJO! Al decir que un ruido es blanco, estamos dando información sobre la distribución de su potencia en las distintas frecuencias, pero no decimos nada sobre la distribución de probabilidad de sus amplitudes, que estará contenida en su fdp (función densidad de probabilidad)

Un ruido se denomina blanco cuando tiene una función de densidad espectral de potencia constante en todas las frecuencias:

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2}$$

Siendo η la densidad espectral de potencia del ruido en W/Hz , cuando se considera sólo las frecuencias positivas (espectro monolateral). Por tanto la potencia de ruido es:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df$$

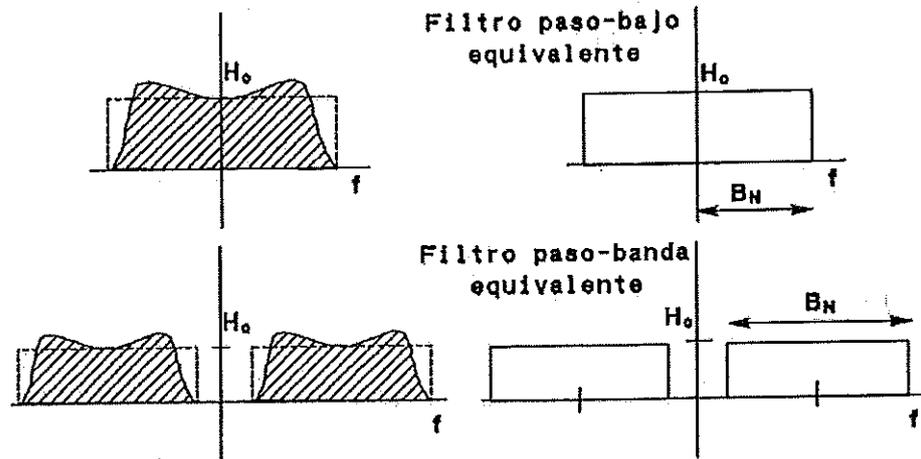


2.2.5 Ancho de banda equivalente de ruido

Es evidente que los filtros tienen la propiedad de reducir la potencia de ruido cuando éste es blanco o de banda muy ancha; de hecho, ésta es una de sus principales aplicaciones en los sistemas de comunicaciones.

En un cierto punto de un sistema, el ruido presente aparecerá siempre filtrado por un filtro cuya forma, en principio, puede ser arbitraria.

Se define como **ancho de banda equivalente de ruido**, al ancho de banda de un filtro ideal (respuesta plana) que a su salida tiene la misma potencia de ruido que el filtro real, cuando ambos son atacados con el mismo ruido blanco.



Teniendo en cuenta que a la salida del filtro real, cuando es excitado con un ruido blanco de densidad espectral de potencia $\eta/2$, la densidad espectral de potencia del ruido viene dada por:

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

La potencia de ruido a su salida será:

$$N_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 df = \int_0^{\infty} \eta |H(f)|^2 df$$

Si el filtro fuese ideal, de ganancia H_0 , y de ancho de banda B_N , se obtendría:

$$N_{out} = \frac{\eta}{2} 2 B_N H_0^2 = \eta B_N H_0^2$$

Igualando estas dos últimas expresiones se puede obtener el ancho de banda equivalente de ruido a la salida del filtro:

$$B_N = \frac{1}{H_0^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

2.2.6 Fuentes de ruido

Las fuentes de ruido que afectan a los sistemas de comunicaciones se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Externas: Son las señales indeseadas originadas por causas externas a los equipos del sistema: ruido industrial, solar, tormentas, etc. Son difíciles de caracterizar y combatir (sobre todo en sistemas radio). Lo mejor es cuidar los emplazamientos realizando medidas del nivel de ruido existente.
- Internas: Son las que se generan dentro de los componentes de los equipos que componen el sistema. En muchos casos es la fuente más significativa, pero es la más fácil de caracterizar; entre ellos, el más importante, en la mayor parte de los sistemas, es el ruido térmico.

Ruido térmico

Es el producido por el movimiento aleatorio de los portadores de carga al estar a temperaturas distintas del cero absoluto (-273°C); por tanto, es una señal indeseada que siempre existe. Mediante estudios termodinámicos puede demostrarse que el ruido térmico se produce en las resistencias y no en los elementos reactivos; asimismo se concluye que es gaussiano y blanco. Se puede demostrar que, en estas condiciones, la potencia de ruido térmico transmitida es:

$$N = KTB \quad (\eta = KT \text{ W / Hz})$$

donde:

T : Temperatura absoluta, en grados Kelvin, a la que está la resistencia (en este caso, el subsistema generador de señal.

K : Constante de Boltzman = $1,38 \cdot 10^{-23}$ Julios/K

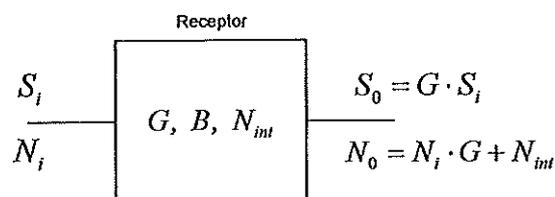
B : Ancho de banda del subsistema excitado, en Hz

A temperatura ambiente, $T_0 = 290\text{ K}$ y $KT_0 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ w/Hz} = -174 \text{ dBm/Hz}$.

2.2.7 Sensibilidad de un receptor

Una forma de cuantificar el ruido y la SNR en un sistema, es definir el concepto de sensibilidad de un receptor, parámetro relacionado con el ruido introducido por el propio receptor, es decir, en ausencia de fuentes de ruido externas.

En estas condiciones, a la salida del receptor se tendrá una potencia de ruido, dada por:



donde:

$$N_i = KTB$$

N_{int} = Ruido generado internamente

G = Ganancia del receptor

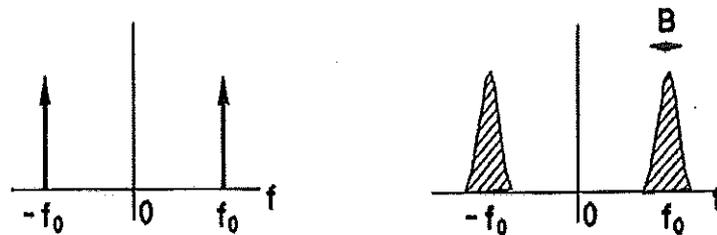
Se define como sensibilidad de un receptor, la mínima potencia de señal que debe haber a la entrada del mismo para que "funcione correctamente el sistema", lo que se suele especificar como que a la salida se tenga un SNR determinada que depende de los requisitos de calidad de cada sistema de comunicaciones:

$$S_{\min} = \frac{S_o N_o}{N_o G} = \frac{SNR_0 \cdot (N_i G + N_{int})}{G}$$

2.3 SEÑALES PASO BANDA

2.3.1 Introducción. Definición y Representación Matemática

Una señal paso-banda es aquella que tiene concentrada su energía (o potencia) en una zona concreta del espectro, en torno a f_0 . Estas señales, especialmente si son de banda muy estrecha ($B \ll f_0$), tienen un espectro muy parecido al de una senoide, tal como muestra la siguiente figura:



f_0 = frecuencia de la portadora
B = ancho de banda de la señal

El interés de estas señales radica en que es habitual encontrarlas en los sistemas de comunicación, al trabajar con modulaciones.

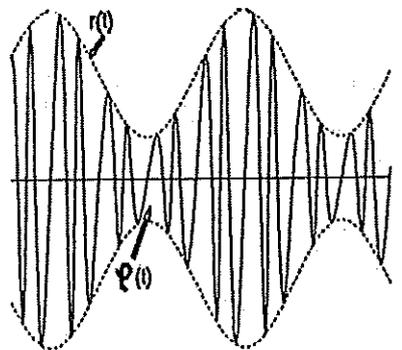
Esta expresión es parecida a la de una senoide:

$$x(t) = A \cos[\omega_0 t + \varphi]$$

En el dominio del tiempo también se parecen, de modo que una señal paso-banda puede escribirse de la forma:

$$x(t) = r(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

siendo $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ la frecuencia central, denominada, en muchas ocasiones, la portadora. La figura siguiente muestra dicho comportamiento:



Si la señal, como ocurre habitualmente, es de banda estrecha, $r(t)$ y $\varphi(t)$ son de variación mucho más lenta que $\cos \omega_0 t$. La señal se comporta como una senoide cuya amplitud y fase varían lentamente con el tiempo.

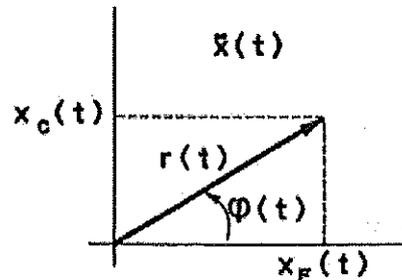
Las magnitudes $r(t)$ y $\varphi(t)$ se denominan envolvente y fase instantáneas de la señal, respectivamente, y son las magnitudes que nos servirán para llevar la información cuando trabajemos con modulaciones.

Es igual que los fasores que utilizábamos en IACR para señales sinusoidales, sólo que ahora la amplitud y fase de la senoide no son constantes

2.3.2 Envoltente Compleja. Componentes en fase y en cuadratura

Al igual que en las sinusoides, se puede emplear un fador para describir la señal. Dicho fador se puede expresar como:

$$\bar{x}(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}$$



La señal $\bar{x}(t)$, denominada envoltente compleja de $x(t)$, se caracteriza por:

- Ser compleja.
- Ser paso bajo (ya que $r(t)$ y $\varphi(t)$ varían lentamente)
- Contener toda la información (en $r(t)$ y $\varphi(t)$) y no así la portadora, una senoide de pulsación ω_0 , que normalmente no interesa arrastrar en los cálculos ni en el sistema.
- Permitir recuperar la señal real, ya que puede escribirse:

$$x(t) = \text{Re}[\bar{x}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}]$$

Componentes en fase y cuadratura

La envoltente compleja, $\bar{x}(t)$, se puede escribir en coordenadas cartesianas como:

$$\bar{x}(t) = r(t)e^{j\varphi(t)} = x_F(t) + jx_C(t)$$

donde $x_F(t)$ y $x_C(t)$, se denominan componentes en fase y en cuadratura con la portadora.

Las relaciones con $r(t)$ y $\varphi(t)$ son:

En inglés: x_1 y x_2

$$x_F(t) = r(t) \cos \varphi(t)$$

$$x_C(t) = r(t) \sin \varphi(t)$$

$$r(t) = \sqrt{x_F^2(t) + x_C^2(t)}$$

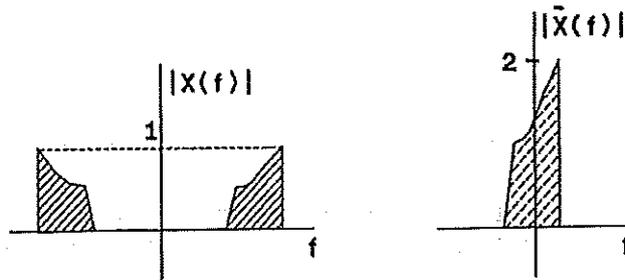
$$\varphi(t) = \arctg \frac{x_C(t)}{x_F(t)}$$

Es inmediato comprobar que la señal paso banda puede expresarse en función de sus componentes en fase y cuadratura mediante la expresión:

$$x(t) = x_F(t) \cos \omega_0 t - x_C(t) \sin \omega_0 t$$

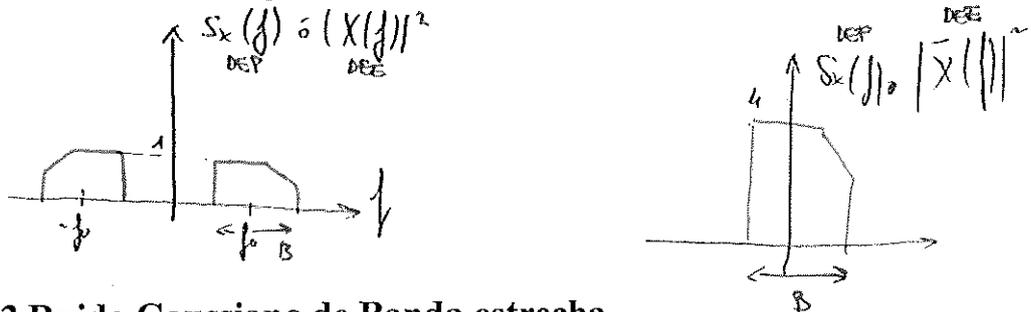
Propiedades espectrales

- Si $x(t)$ es una señal de energía, utilizando las propiedades de la Transformada de Fourier se puede demostrar que $\bar{X}(f)$ es idéntica a $X^+(f)$, pero trasladada a $f = 0$ y escalada por un factor dos.



$\bar{x}(t)$ puede tener un espectro no simétrico pues es una señal compleja.

- Si trabajamos directamente con la DEE (módulo de la TF al cuadrado) o la DEP de la señal, la densidad espectral de energía o de potencia de su envolvente compleja es también idéntica a la de $x(t)$ pero trasladada a $f = 0$ y escalada por un factor cuatro, como se ve en la siguiente figura.



2.3.3 Ruido Gaussiano de Banda estrecha

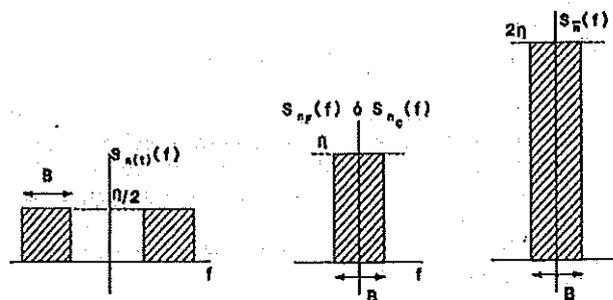
El ruido gaussiano, por ejemplo el ruido térmico, una vez filtrado por un filtro paso-banda estrecho, centrado en f_0 , de anchura de banda equivalente $B \ll f_0$, también es una señal paso-banda de banda estrecha que puede expresarse como:

$$n(t) = r_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)] = n_F(t) \cos \omega_0 t - n_C(t) \sin \omega_0 t$$

donde $n(t)$, $n_F(t)$ y $n_C(t)$ son procesos gaussianos de media cero y varianza

$$P_{NF} = E[n_F^2] = P_{NC} = E[n_C^2] = \sigma^2 = \eta B$$

pero, mientras que la DEP de $n(t)$ es paso-banda, las de $n_F(t)$ y $n_C(t)$ son paso bajo. La figura siguiente muestra las DEP correspondientes.



¡OJO! El ruido en fase, el ruido en cuadratura, y el ruido de banda estrecha, tienen todos la misma potencia media (misma varianza del proceso). Sin embargo, la envolvente compleja tiene el doble.

Es más incómodo trabajar con la amplitud y fase, que con las componentes cartesianas, que son gaussianas

Finalmente, se puede demostrar que las variables aleatorias

$$r_n(t) = \sqrt{n_F^2(t) + n_C^2(t)} \quad \text{y} \quad \varphi(t) = \arctg \frac{n_C(t)}{n_F(t)}$$

son dos procesos estocásticos cuyas funciones densidad de probabilidad son, respectivamente, tipo Rayleigh y tipo uniforme entre 0 y 2π .

2.4 DISTORSIÓN

2.4.1 Definición. Distorsión lineal y no lineal

Además de degradarse por superponérsele un ruido, cuando una señal recorre los distintos elementos de un sistema de comunicaciones se distorsiona. Esto es, se modifica su forma, porque los elementos que la procesan no son transparentes para la misma.

La distorsión se clasifica, en función de su origen, en:

Distorsión Lineal. Es la producida por los elementos lineales (filtros, líneas de transmisión, atenuadores, etc...) y, por tanto, es independiente del nivel de las señales de entrada.

Distorsión No Lineal. Es la asociada a los elementos no lineales de un sistema de comunicaciones, típicamente, amplificadores trabajando en zona no lineal, en los que se producen fenómenos no lineales. Dado que en este caso no se cumple el principio de superposición, esta distorsión depende del nivel de entrada.

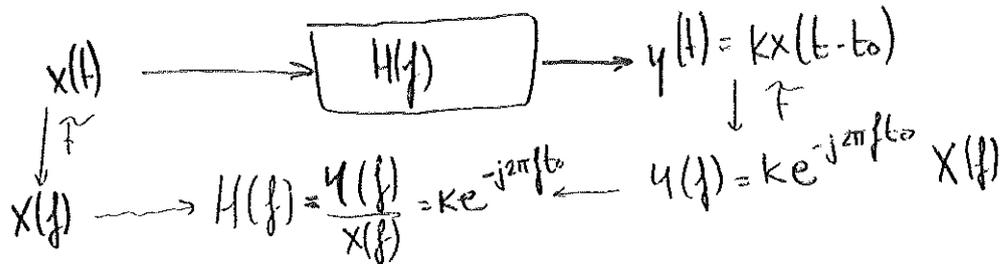
2.4.2 Distorsión lineal. Parámetros característicos

Si se admite que un sistema de comunicaciones es lineal, la relación entre la señal de entrada y la de salida, queda completamente definida por una función de transferencia (respuesta en frecuencia):

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Idealmente nos gustaría que la señal de salida del sistema fuera de la forma: $y(t) = kx(t - t_0)$

En esta situación no hay distorsión. Es decir, la respuesta en frecuencia del canal lineal debe ser de la forma $H(f) = ke^{-j2\pi f t_0}$, como se muestra en la siguiente figura:



Esto significa que para que no haya distorsión, el canal debe cumplir simultáneamente lo siguiente:

- Lineal
- Módulo de la función de transferencia constante: $|H(f)| \equiv cte$
- Fase de la función de transferencia lineal con f : $\phi_H(f) \equiv \text{lineal con } f$

Si esto no se cumple, el canal producirá respectivamente:

- Distorsión no lineal
- Distorsión lineal de amplitud
- Distorsión lineal de fase

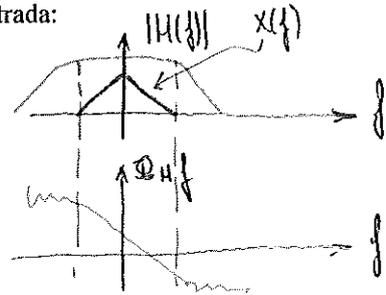
En los canales aún sin haber distorsión, casi inevitablemente se introducen retardos. Veamos cómo cuantificarlos en el caso de los canales paso bajo y paso banda.

En realidad basta con que cumpla estas condiciones en el ancho de banda de la señal de entrada al canal. No es necesario que las cumpla $\forall f$

2.4.2.1 Canal paso-bajo

Suponiendo que no hay distorsión, la respuesta en frecuencia del canal paso bajo tendrá las siguientes características dentro del ancho de banda de la señal de entrada:

- $|H(f)| = k$
- $\phi_H(f) = -mf = -2\pi f t_0$



De donde se deduce que el retardo introducido por el canal paso bajo sin distorsión es:

$$t_0 = \frac{m}{2\pi}$$

2.4.2.2 Canal paso-banda

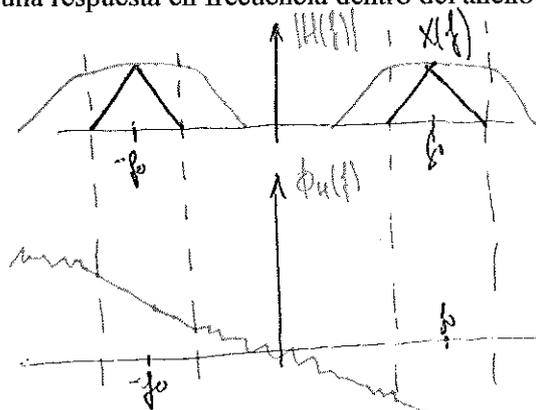
Por este tipo de canal se transmitirán señales paso-banda cuyas componentes espectrales estarán agrupadas en torno a la frecuencia f_0 y, por tanto, representables mediante la expresión (señal paso banda):

$$x(t) = r(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

donde los anchos de banda de $r(t)$ y $\varphi(t)$ son mucho menores que f_0 .

El canal paso banda sin distorsión tendrá una respuesta en frecuencia dentro del ancho de banda de la señal de entrada como la siguiente:

$$H(f) = ke^{j(\phi_0 - m(f - f_0))}$$



Se definen los siguientes retardos:

- **Retardo de portadora:** retardo temporal que sufre la portadora al atravesar el canal.

$$t_p = \left. -\frac{\phi_H(f)}{2\pi f} \right|_{f=f_0} = -\frac{\phi_H(f_0)}{2\pi f_0}$$

- **Retardo de grupo:** retardo temporal que sufren las componentes de información (señal moduladora) al atravesar el canal.

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_H(f)}{df}$$

La señal de salida será (despreciando la distorsión):

$$y(t) = kr(t - t_g) \cos[\omega_0(t - t_p) + \varphi(t - t_g)]$$

Es decir, la amplitud y la fase de la señal paso banda varían muy lentamente en comparación con la portadora

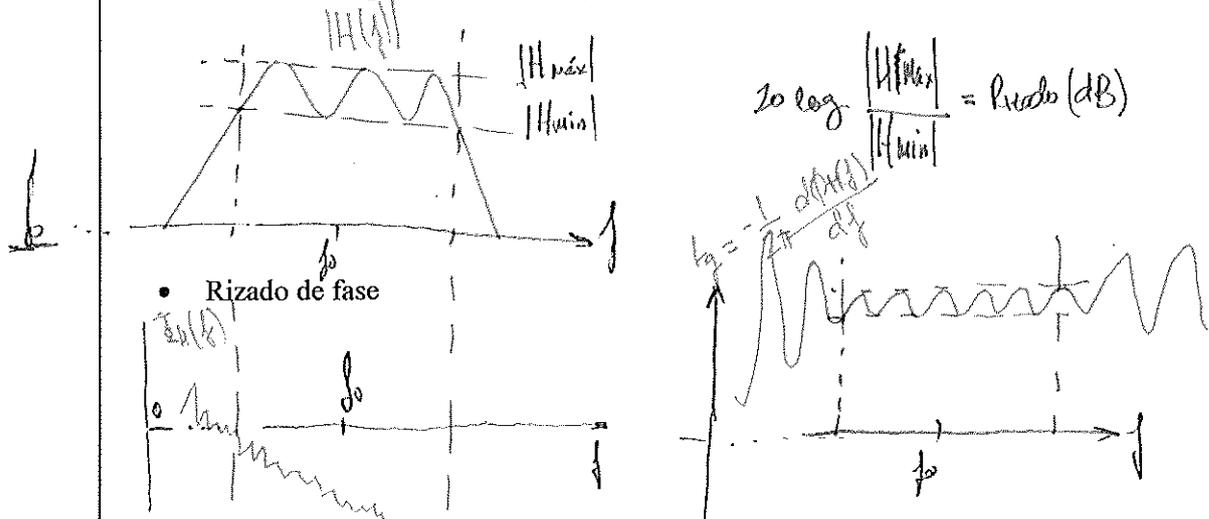
Si no hay distorsión lineal, la fase es lineal con la frecuencia, por lo que el retardo de grupo es constante.

Si el retardo de grupo no es constante, el canal se denomina "dispersivo", porque la información contenida en frecuencias distintas, llega con retardos distintos, distorsionando la señal.

2.4.2.3 Especificación de la distorsión lineal

En la práctica es difícil conseguir que el canal cumpla estrictamente las condiciones de no distorsión, por ello se suelen permitir ciertos "rizados" siempre que la señal de salida cumpla los requisitos de distorsión exigidos por el receptor.

- Rizado de amplitud (se suele especificar en dB):



- Rizado de fase

Si los rizados de amplitud o fase son demasiado grandes, se pueden utilizar filtros ecualizadores (tanto de amplitud como de fase), para compensar la distorsión lineal introducida por el canal.

2.4.3 Distorsión no lineal

Los subsistemas que incluyen dispositivos activos (diodos, transistores, etc...) funcionan de forma cuasi-lineal. Al elevar el nivel de las señales de entrada aparecen fenómenos no lineales. Dado que es a la salida de los transmisores donde los niveles de señal son más elevados, parece razonable que sea en este subsistema donde se produzca la distorsión no lineal.

La distorsión no lineal es muy difícil de analizar. Al objeto de presentar los efectos más importantes que puede producir, se utilizará un modelo elemental.

Supóngase que la relación entrada/salida en cierto subsistema pueda ser representada por un polinomio:

$$v_s(t) = a_1 v_e(t) + a_2 v_e^2(t) + a_3 v_e^3(t) + \dots$$

donde $v_e(t)$ y $v_s(t)$ son la señal de entrada y la de salida, respectivamente.

En lo que sigue se analizará la salida obtenida en dos casos concretos de excitación: señal sinusoidal y señal consistente en dos sinusoides de distinta frecuencia.

Entrada sinusoidal

Si al subsistema anterior se le ataca con una señal sinusoidal, la salida se deforma claramente si aquella tiene suficiente nivel.

En el dominio de la frecuencia la distorsión se manifiesta por la aparición de otras frecuencias, armónicamente relacionadas con la entrada, y un componente en DC.

Por ejemplo para un polinomio de grado 3 se tendría que:

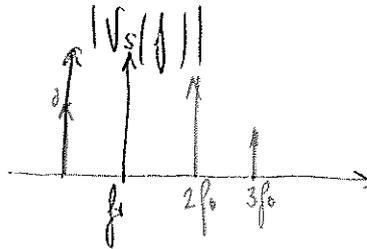
$$v_e(t) = A \cos \omega_0 t$$
$$v_s(t) = a_1 A \cos \omega_0 t + a_2 A^2 \cos^2 \omega_0 t + a_3 A^3 \cos^3 \omega_0 t$$

Esto se verá en mucha mayor profundidad en asignaturas posteriores como STTR o ELCM

Desarrollando $\cos^2 \omega_o t = 1/2(1 + \cos 2\omega_o t)$, etc., se obtiene:

$$v_s(t) = \frac{a_2 A^2}{2} + (a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3) \cos \omega_o t + \frac{a_2 A^2}{2} \cos 2\omega_o t + \frac{a_3 A^3}{4} \cos 3\omega_o t$$

con el espectro que se muestra en la figura siguiente:



Por tanto, *aparecen nuevas componentes de frecuencia* que no existían en la señal de entrada (algo que nunca ocurre en un sistema lineal). Estas "rayas" indeseadas pueden interferir a otros sistemas. Por ejemplo, el segundo armónico de Radio Nacional en AM ($2 \times 585 \text{ KHz} = 1.170 \text{ KHz}$), podría interferir a otra emisora que estuviese en esta posición del "dial".

Los armónicos se pueden eliminar por filtrado. Desgraciadamente el problema es más complejo, pues las señales reales tienen múltiples componentes que se "batan" entre si, produciendo nuevas componentes.

Entrada con dos sinusoides

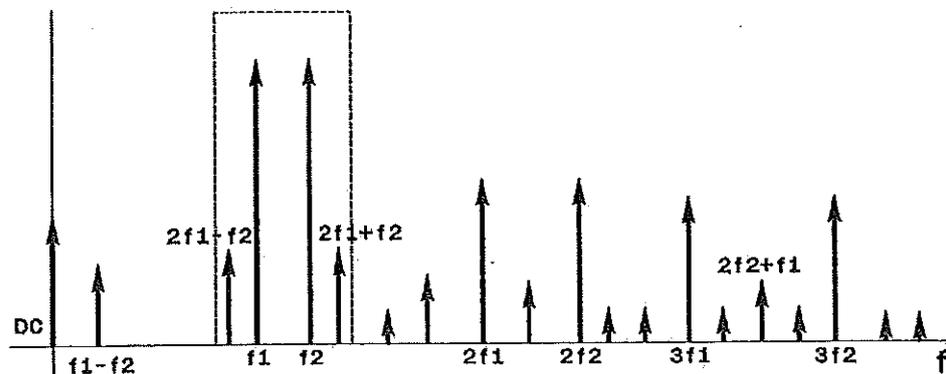
Como se ha dicho, en una señal real existen muchas componentes frecuenciales. Para explicar lo que ocurre cuando esta señal atraviesa un sistema no lineal, considérese una señal compuesta por dos componentes a frecuencias f_1 y f_2 :

$$v_e(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

Se puede comprobar que si esta señal se introduce en un sistema cuya respuesta se pueda describir por un polinomio de tercer grado, a la salida aparecen un número de componentes frecuenciales (denominadas productos de intermodulación), de frecuencia:

$$f_{\text{intermodulación}} = m f_1 \pm n f_2$$

donde $|m| + |n| \leq 3$. La figura siguiente muestra el espectro correspondiente.

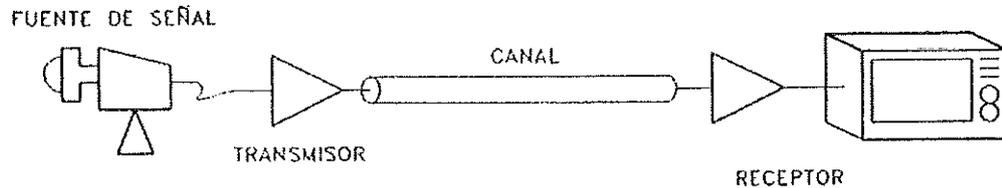


En definitiva, aparecen muchas componentes. Se puede intentar eliminar mediante filtrado las que están alejadas de la banda de trabajo. Sin embargo, las de tercer orden, $2f_1 - f_2$ y $2f_2 - f_1$ son mucho más difíciles de eliminar pues pueden caer en dicha banda de frecuencias. En ese caso sólo se pueden minimizar haciendo el sistema más lineal o reduciendo la potencia de la señal de entrada.

TEMA 3: TRANSMISIÓN ANALÓGICA

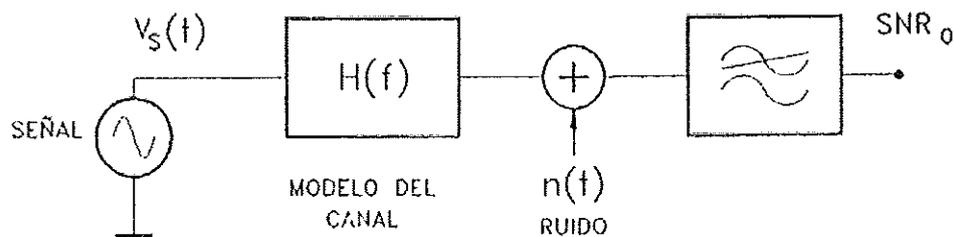
3.1 TRANSMISIÓN EN BANDA BASE

Como su nombre indica, se trata de enviar directamente la señal analógica a una línea de transmisión (par de hilos, cable coaxial, etc.), tras ser amplificada. Su estructura básica es la que recoge la figura siguiente



Es el sistema de comunicaciones más sencillo técnicamente. Se utilizaba para sistemas de megafonía, de vigilancia, porteros automáticos, sistemas de televisión en circuito cerrado...

Los amplificadores llevan asociados filtros que limitan la banda a la de la señal, con objeto de eliminar ruido y otras interferencias. De hecho, las únicas funciones electrónicas implicadas son la amplificación y el filtrado. El modelo que se emplea para su estudio es el de la figura siguiente, donde en $n(t)$ se han incluido las contribuciones de todas las fuentes de ruido.



Para que el sistema funcione correctamente se debe garantizar:

- Que el canal no distorsione la señal más de lo permitido por la calidad requerida por el servicio. Para una línea de transmisión dada y un ancho de banda a transmitir, esta condición limita la máxima longitud de cable.
- Una relación señal/ruido mínima a su salida, lo que se consigue, dados la atenuación de la línea de transmisión y el ruido en el sistema, transmitiendo suficiente potencia de señal.

Al modular y transmitir la señal en frecuencias más altas, su espectro se parecerá más al de una sinusolde, y las sinusoides pasan sin distorsión por los sistemas porque tienen una única frecuencia y no sufren las variaciones de las propiedades del canal con la frecuencia.

De manera simplificada, la longitud de la antena necesaria para emitir una señal de radio es inversamente proporcional a la frecuencia de emisión. Por ello, emitir señales de muy baja frecuencia implicaría el uso de antenas de dimensiones exageradas.

El principal enemigo de la transmisión en banda base es la distorsión. Se puede limitar el daño que la distorsión hace a nuestra señal mediante el uso de modulaciones. Al subir el espectro de frecuencia, la señal pasa a ser de banda estrecha en comparación con la frecuencia a la que estaremos transmitiendo (se parecerá más a una sinusolde), y las variaciones de amplitud y de retardo de grupo con la frecuencia en la banda utilizada serán menos importantes.

Además de la ventaja comentada, modular tiene otras. Enumeramos todas:

- Disminuye el ancho de banda relativo (menos distorsión)
- Permite el acceso múltiple FDMA (el único que se puede utilizar en sistemas analógicos)
- Es estrictamente necesario para la transmisión por radio

3.2 MODULACIONES LINEALES

3.2.1 Definición

Se denomina modulaciones lineales que puede representarse mediante la expresión:

$$y(t) = x_1(t) \cos \omega_c t - x_2(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos transformaciones lineales de la señal mensaje.

Esta es la principal diferencia con las modulaciones angulares o no lineales

Una definición menos rigurosa pero más intuitiva es la siguiente: se denominan modulaciones lineales a aquellas que utilizan la amplitud instantánea de una senoide, (denominada portadora, en inglés "carrier"), como vehículo de información. Además, las modulaciones lineales se caracterizan porque conservan en buena medida la forma del espectro de la señal moduladora (de la señal mensaje).

Las más utilizadas son:

- **DBL:** Doble Banda Lateral (en inglés DSB: Double Side Band).
- **AM:** Modulación de Amplitud.
- **BLU:** Banda Lateral Única (en inglés SSB: Single Side Band).

Y en menor medida:

- **BLV:** Banda Lateral Vestigial.
- **QAM:** Modulación de Amplitud en Cuadratura (Quadrature Amplitude Modulation).

A continuación, se estudian las tres primeras en detalle siguiendo en las explicaciones una estructura común que consta de tres partes:

- A) Definición y generación
- B) Demodulación
- C) Eficiencia espectral y de potencia

3.2.2 Modulación DBL (Doble Banda Lateral)

A) Definición y generación

Si $x(t)$ es la señal moduladora (la información), la señal modulada DBL es :

También puede ser:

$$y(t) = A_c x(t) \cdot \text{sen } \omega_c t$$

$$y(t) = A_c x(t) \cdot \cos \omega_c t$$

Señal modulada.

Señal moduladora

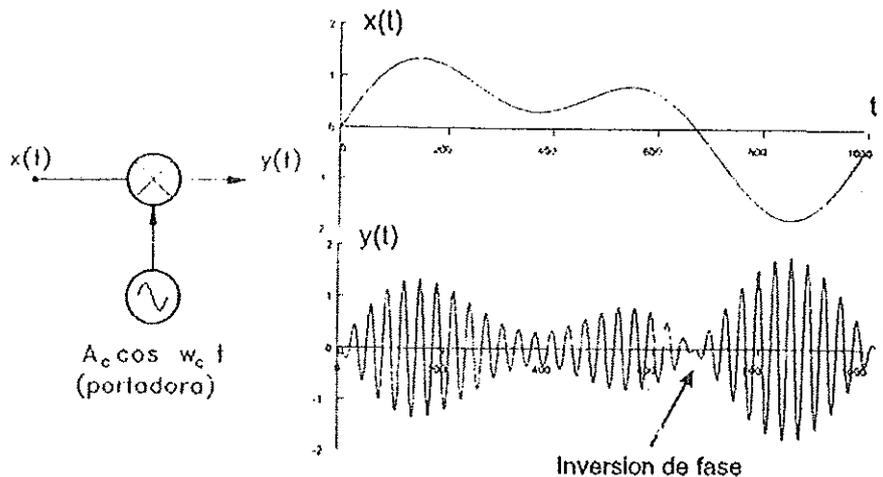
La generación es muy simple: basta con multiplicar la señal moduladora $x(t)$ por la portadora $y(t) = A_c \cos \omega_c t$. El esquema puede verse en la figura siguiente:

Se utiliza un multiplicador analógico. Se estudia en más detalle en ELCM

Cada vez que hay un cruce de $x(t)$ con el eje de tiempos se produce una inversión de fase

Recuerda que la envolvente $r(t)$ es siempre positiva. Por ello:

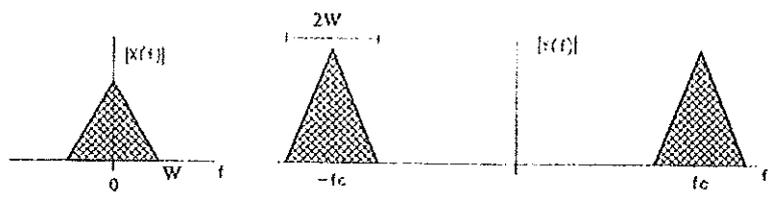
$$r(t) = |x(t)|$$



Utilizando la propiedad de modulación de la Transformada de Fourier, es inmediato determinar el espectro de la señal modulada. Si $X(f)$ es el espectro de $x(t)$, el de la señal modulada, $Y(f)$ resulta ser:

$$Y(f) = \frac{1}{2} A_c [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

tal como muestra en la siguiente figura:

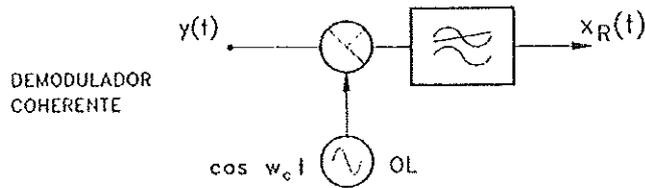


Nótese:

- El espectro conserva su forma.
- El espectro se ha trasladado a los alrededores de f_c .
- La información es redundante, la porción del espectro por encima de f_c se denomina Banda Lateral Superior (BLS, en inglés USB: *Upper Side Band*) y la otra, Banda Lateral Inferior (BLD, en inglés LSB: *Lower Side Band*).

B) Demodulación

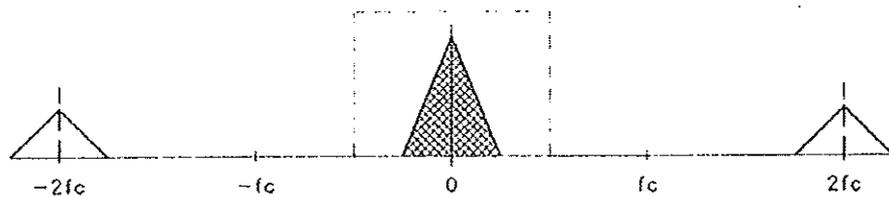
La demodulación es el proceso por el que se extrae la señal moduladora (la información) a partir de la señal modulada. La demodulación DBL se obtiene volviendo a multiplicar por la portadora y sometiendo al producto a un filtrado paso-bajo, de acuerdo con el esquema siguiente:



Obteniéndose:

$$y(t) \cdot \cos \omega_c t = A_c x(t) \cdot \cos^2 \omega_c t = A_c x(t) \frac{(1 + \cos 2\omega_c t)}{2} = \frac{A_c}{2} x(t) + \frac{A_c}{2} x(t) \cos 2\omega_c t$$

Por lo que el espectro de la señal DBL demodulada viene dado por la siguiente figura

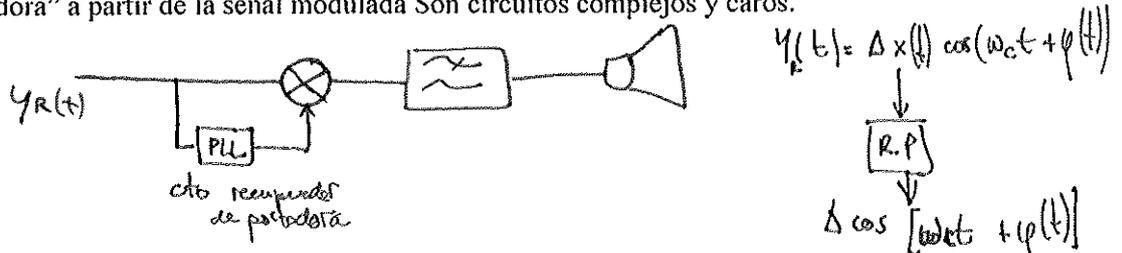


Dado que $f_c \gg W$, filtrando paso-bajo esta señal, se recupera la información:

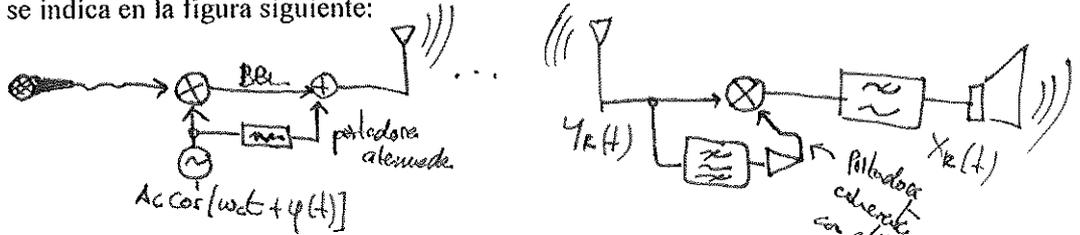
$$x_R(t) = \frac{A_c}{2} x(t)$$

Esta forma de demodular la señal es válida para muchas técnicas de modulación diferentes, con pequeñas variaciones respecto del esquema anterior. Se denomina **demodulación coherente** y tiene muy buenas prestaciones. La cuestión es: ¿cómo conseguir en el receptor un tono coherente con la portadora? Existen dos posibilidades:

a) Utilizar ciertos circuitos, típicamente PLLs (*Phase Lock Loop*), capaces de "recuperar la portadora" a partir de la señal modulada. Son circuitos complejos y caros.



b) Enviar, además de la señal DBL, una porción de la portadora utilizada en la modulación, como se indica en la figura siguiente:



En recepción, la portadora se puede recuperar con un filtro muy estrecho y usarla para demodular o para simplificar los circuitos de recuperación de portadora. Normalmente, cuanto más portadora se envía, más se simplifica la recepción. De hecho, puede llegar un momento (si se envía suficiente portadora) en que pueden utilizarse esquemas de demodulación distintos y más sencillos: es lo que se denomina modulación AM.

Su denominación proviene de que los osciladores utilizados para modular (transmisor) y demodular (receptor) deben ser coherentes, es decir, su frecuencia ha de ser exactamente la misma y, además, han de estar enganchados en fase (o sea, tener la misma fase o una deriva de fase constante). Para demodular DBL puede haber deriva de fase entre los osciladores de Tx y Rx, pero así en BLU, donde la deriva de fase debe ser estrictamente 0.

Se estudian en detalle en ELCM

C) Eficiencia espectral y de potencia

La eficiencia espectral y de potencia son dos parámetros característicos de las diversas técnicas de modulación y establecen el consumo de los dos recursos básicos en sistemas de comunicaciones: ancho de banda y potencia.

Se define eficiencia espectral, como el porcentaje entre el ancho de banda de la señal moduladora respecto al de la modulada. Su interpretación física es evidente: mide la eficiencia de la utilización del espectro requerido, normalizada respecto del de la señal transmitida.

En DBL;

$$E_e = \frac{W}{B_T} \cdot 100 = \frac{W}{2W} \cdot 100 = 50\%$$



Se define la eficiencia de potencia, como el porcentaje entre la potencia contenida en las componentes que llevan información y la potencia total transmitida:

En DBL:

$$E_p = 100\%$$

Si junto con la señal modulada se envía una porción de portadora para facilitar su recuperación, la eficiencia de potencia disminuye, porque parte de la potencia transmitida es exclusivamente portadora.

3.2.3 Modulación de amplitud (AM)

A) Definición y generación

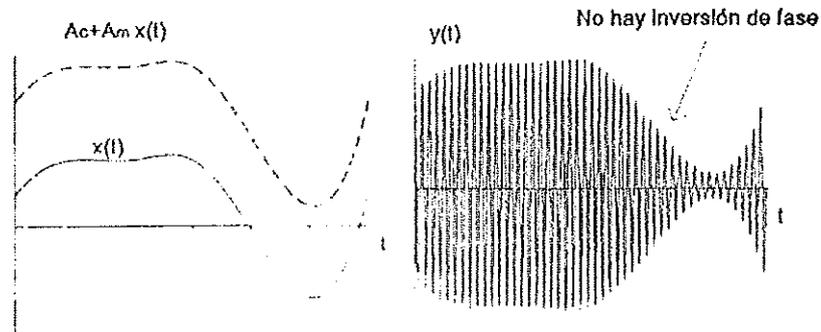
Es el resultado de añadir la portadora $A_c \cos \omega_c t$ a la señal DBL:

$$y(t) = [A_c + A_m x(t)] \cdot \cos \omega_c t = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} + \underbrace{A_m x(t) \cos \omega_c t}_{\text{información}}$$

Si el sistema está correctamente diseñado debe cumplirse:

$$A_c > A_m |x(t)|$$

condición que define cuánta portadora hay que añadir para se trate de AM. Nótese que este requisito garantiza que la magnitud $A_c + A_m x(t) > 0$ (no pasa nunca por cero), y por tanto, esa magnitud es la envolvente de la señal.



El espectro de esta señal será el mismo que el de DBL con una cantidad importante de portadora.

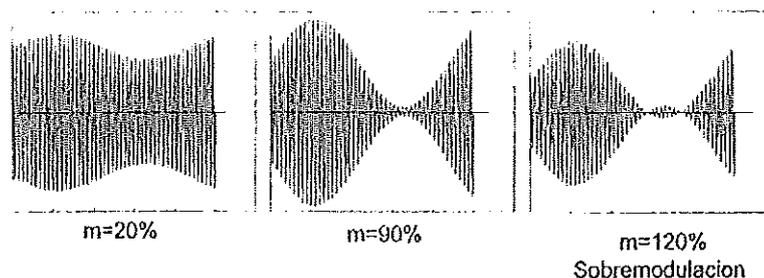
Se denomina índice de modulación, m , a

$$m = \frac{A_m}{A_c} |x|_{\max}$$

Utilizando este parámetro, la señal modulada puede expresarse como:

$$y(t) = A_c [1 + m x_N(t)] \cos \omega_c t \quad \text{donde} \quad x_N(t) = \frac{x(t)}{|x|_{\max}}$$

Si el sistema está bien diseñado $m \leq 1$ ($m < 100\%$), ya que de lo contrario se produce sobremodulación. La figura siguiente muestra tres ejemplos de modulación AM, incluyendo un caso con sobremodulación.



Con esto podemos estudiar fácilmente las variaciones de la envolvente:

$$r_{\max} = A_c (1 + m)$$

$$r_{\min} = A_c (1 - m)$$

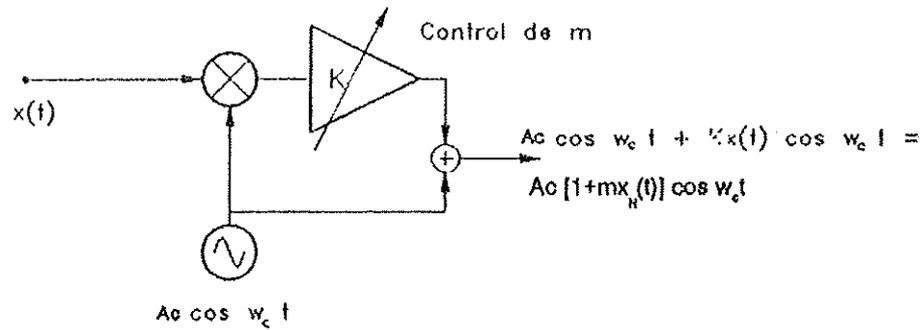
Si $m > 1$ se produce sobremodulación que tiene como consecuencia que vuelvan a aparecer cruces por cero. En este caso sólo recuperaríamos correctamente la señal si utilizamos un demodulador coherente, y en AM no suele ser el caso.

La gran ventaja que tiene la AM es la facilidad de su generación y demodulación. De hecho fue la primera técnica de modulación empleada.

Para su generación se pueden emplear dos técnicas muy diferentes, basadas en el uso de un modulador DBL y de un elemento no lineal, respectivamente.

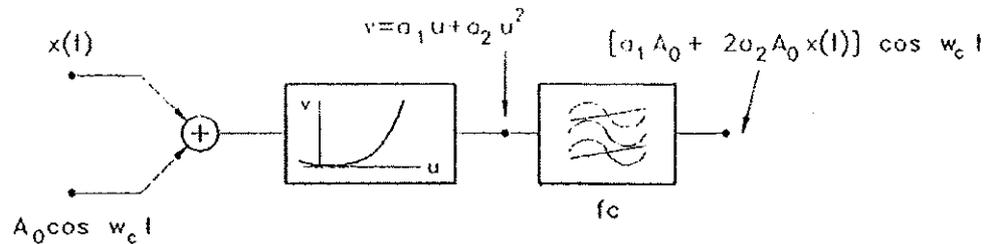
- A partir de un modulador DBL.

Naturalmente, la señal AM se puede generar añadiendo portadora a una señal DBL, tal como muestra el esquema de la figura:



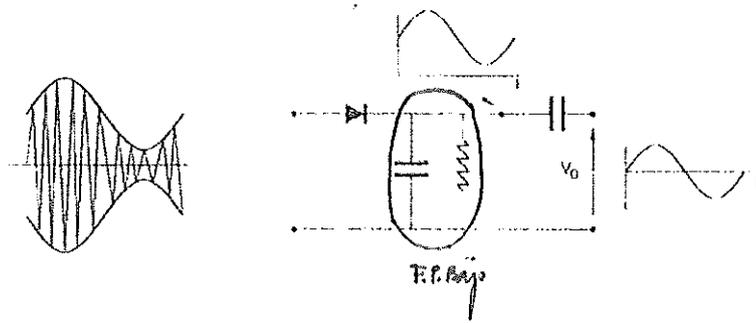
- Utilizando un elemento no lineal.

Este método es mucho más simple, pues evita el uso de un multiplicador. Para ello basta con introducir la moduladora y la portadora en un elemento no lineal (típicamente un diodo) y filtrar paso banda la salida, según se indica en la figura:



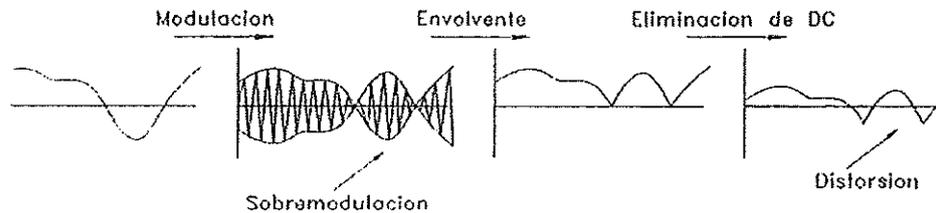
B) Demodulación

La gran ventaja de la AM es que se puede demodular de forma mucho más sencilla que la DBL (por ello se utilizó inicialmente en radiodifusión, y todavía se emplea en aquellos sistemas donde los receptores tienen que ser muy baratos). La AM admite **demodulación no coherente**, es decir, sin necesidad de una referencia de la portadora. La forma de hacerlo más simple es utilizar un detector de envoltente:

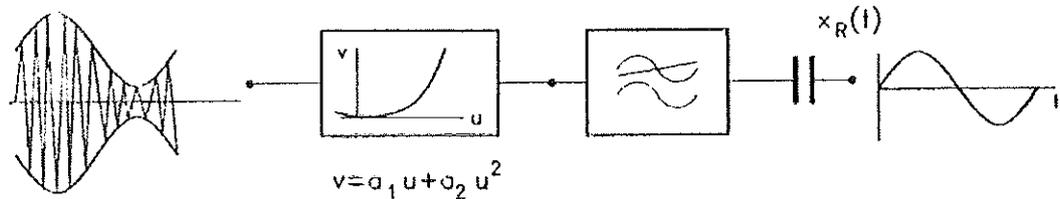


Observaciones:

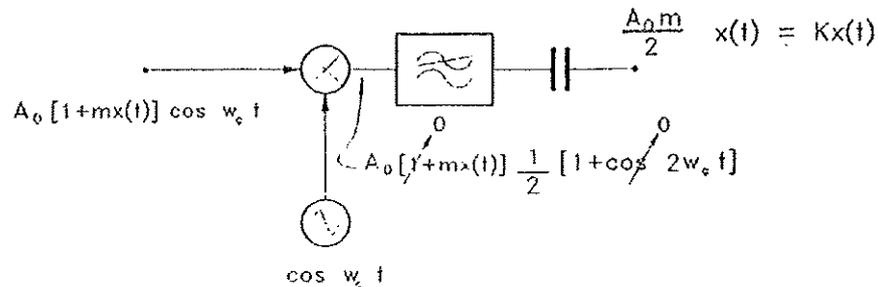
- Si existe sobremodulación ($m |x_N(t)| > 1$) se distorsiona la señal:



- Aunque, la estructura rectificadora es la más intuitiva, en general basta con introducir la señal en un elemento no lineal, filtrar paso bajo y eliminar la DC, siguiendo el esquema de la figura:



Por supuesto, la AM también admite demodulación coherente que tiene mejores prestaciones, aunque es más cara. El demodulador coherente es:



C) Eficiencia espectral y de potencia

La eficiencia espectral de la modulación AM es la misma que la de la DBL:

$$E_e = \frac{W}{B_T} = \frac{W}{2W} = 50\%$$

En cambio su eficiencia de potencia es inferior y depende del índice de modulación. Efectivamente:

$$y(t) = A_c [1 + mx_N(t)] \cos \omega_c t$$

La portadora representa potencia que se envía y que no lleva información, por tanto es potencia que se desperdicia.

La potencia total transmitida es la siguiente:

$$\begin{aligned} P_T &\approx \frac{1}{2} \langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle [A_c(1 + mx_N(t))]^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle A_c^2(1 + m^2 x_N^2(t) + 2mx_N(t)) \rangle = \\ &= \frac{A_c^2}{2} \left(1 + m^2 \underbrace{\langle x_N^2(t) \rangle}_{\text{pot. de la señal norm.}} + 2m \underbrace{\langle x_N(t) \rangle}_0 \right) = \underbrace{\frac{A_c^2}{2}}_{\text{pot. portadora}} + \underbrace{\frac{A_c^2}{2} m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}_{\text{pot. información}} \end{aligned}$$

$\langle x_N^2 \rangle$ es la potencia de la señal mensaje de la señal normalizada

Así que la potencia que lleva la información (potencia de las bandas laterales):

$$P_{2BL} = \frac{A_c^2}{2} m^2 \langle x_N^2 \rangle$$

Y la potencia que lleva la portadora:

$$P_c = \frac{A_c^2}{2}$$

Potencia total:

$$P_T = P_c + P_{2BL}$$

Por tanto, la eficiencia queda:

$$E_p = \frac{\text{Pot. útil}}{\text{Pot. total}} = \frac{P_{2BL}}{P_T} = \frac{P_{2BL}}{P_c + P_{2BL}} = \frac{m^2 \langle x_N^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_N^2 \rangle}$$

Notas:

- En el mejor de los casos, se conseguirá una eficiencia de potencia del 50%. Para ello, sería necesario $m = 1$ y $\langle x_N^2(t) \rangle = 1$, lo cual en la práctica es muy complicado.
- Las eficiencias de potencia típicas con AM son de en torno al 10%, incluso en ocasiones del 1%. Esto significa que hay que "desperdiciar" mucha potencia para que sean posibles receptores sencillos y baratos.
- Las emisoras de radio AM por tanto se ven obligadas a transmitir potencias muy elevadas de en torno a los 100kW o incluso 1 MW

3.2.4 Modulación BLU (banda lateral única)

A) Definición y Generación

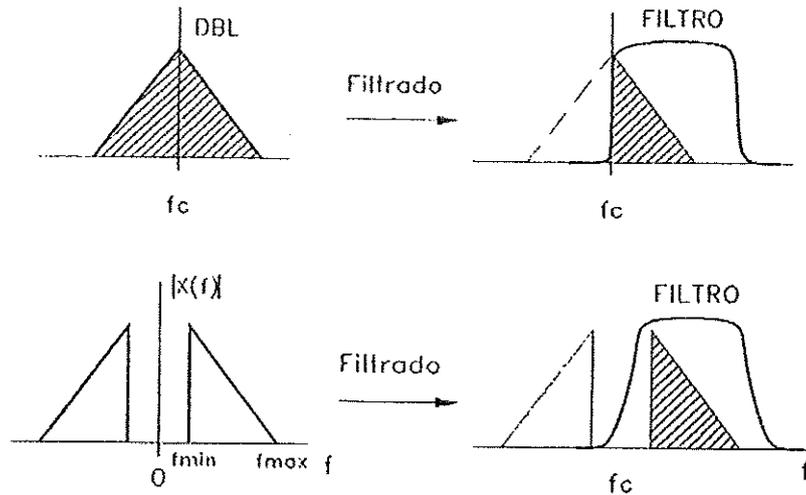
Las dos técnicas de modulación anteriores desperdician espectro al necesitar el doble del ancho de banda de la señal original. Con la modulación BLU, en cualquiera de sus dos versiones: Banda Lateral Superior (BSL) o Banda Lateral Inferior (BLI), transmite estrictamente el mismo ancho de banda que el de la señal moduladora.

- Generación por filtrado

La forma más intuitiva de generar BLU es partir de una señal modulada en DBL y, mediante un filtro, seleccionar la Banda Lateral deseada:

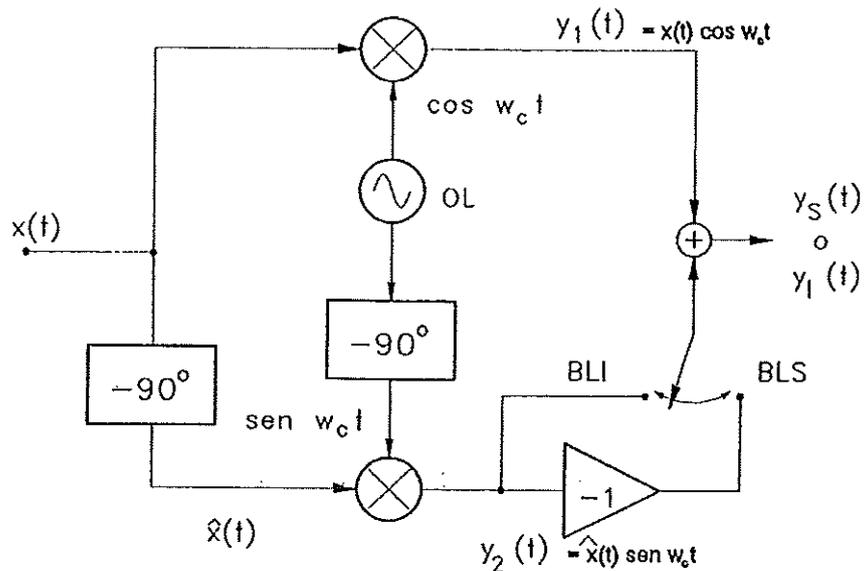
El problema es que el filtro tendrá que ser totalmente abrupto en la frecuencia f_c , lo que es imposible de conseguir.

Esta técnica de generación sólo se puede emplear si la señal moduladora no tiene componentes espectrales hasta una frecuencia mínima. Así existe un mayor margen para la banda de transición del filtro. Esto ocurre, por ejemplo en telefonía, en donde el canal va de 300 Hz a 3,4 KHz.



- Generación por cambio de fase.

En la figura se muestra la estructura de este tipo de modulador:



Para comprender como se genera una señal BLU, considérese inicialmente que la señal moduladora es una senoide:

$$x(t) = A_m \cos \omega_m t$$

Si con ella se modula una portadora en DBL (rama superior):

$$y_1 = x(t) \cdot \cos \omega_c t = A_m \cos \omega_c t \cdot \cos \omega_m t$$

$$y_1 = \frac{A_m}{2} [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t]$$

se obtienen dos bandas laterales centradas en f_c

En la rama de abajo, se realiza otra modulación DBL, pero antes se introducen las señales moduladora y portadora en un desfasador de 90° ; la nueva moduladora es:

$$\hat{x}(t) = A_m \cos(\omega_m t - \frac{\pi}{2}) = A_m \text{sen} \omega_m t$$

y la señal moduladora resulta:

$$y_2(t) = \hat{x}(t) \cdot \text{sen} \omega_c t = A_m \text{sen} \omega_m t \cdot \text{sen} \omega_c t$$

$$y_2(t) = \frac{A_m}{2} [\cos(\omega_m - \omega_c)t - \cos(\omega_m + \omega_c)t]$$

obteniéndose dos bandas laterales invertidas.

Combinando las dos señales moduladas, es inmediato obtener la BLU:

$$y_{BLS}(t) = y_1(t) - y_2(t) \quad (\text{BLS})$$

$$y_{BLI}(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (\text{BLI})$$

Con el signo + obtenemos la BLI y con el signo menos - obtenemos la BLS

(Nótese que, cuando $y(t)$ es una senoide, tanto y_s como y_l son simples senoide de frecuencia $f_c + f_m$ y $f_c - f_m$ respectivamente).

Desfasar 90° una senoide no tiene ninguna dificultad, pero ¿qué ocurre si $x(t)$ no es una senoide?. Para que el esquema funcione se requiere que el desfasador de 90° funcione a todas las componentes de frecuencia de $x(t)$. Aquí es necesario introducir el concepto del **Transformador de Hilbert**.

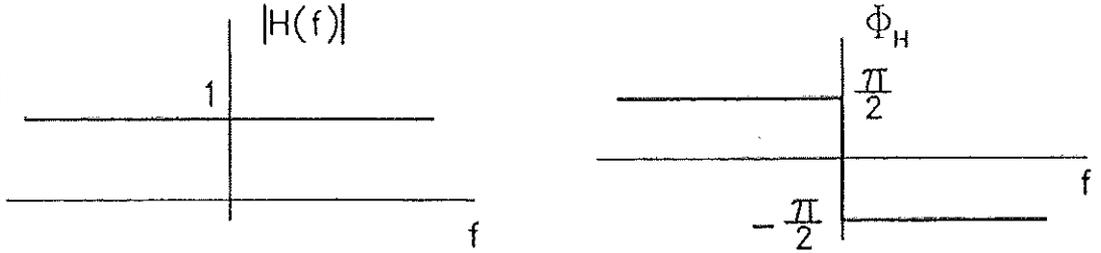
Para establecer la función de transferencia de un desfasador de 90° ideal (que cubra todas las frecuencias) se empleará un método simple e intuitivo.

Es sabido que cuando se trabaja con fasores (Números complejos que contienen la información de amplitud y fase de una señal en las frecuencias positivas de la Transformada de Fourier), desfasar -90° equivale a multiplicar el fador de la señal por $-j$. Por tanto, el desfasador ideal tendrá una función de transferencia $H(f) = -j$ ($f > 0$). Por simetría $H(f) = j$ ($f < 0$).

Es decir:

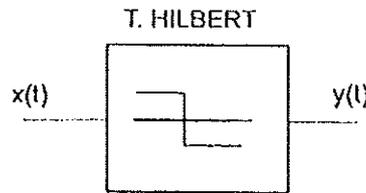
$$H(f) = -j \operatorname{sign}(f) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}} & f < 0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & f > 0 \end{cases}$$

de modo que $|H(f)|$ es par y constante (igual a la unidad) y $\phi_H(f)$, impar, como se aprecia en la figura siguiente.

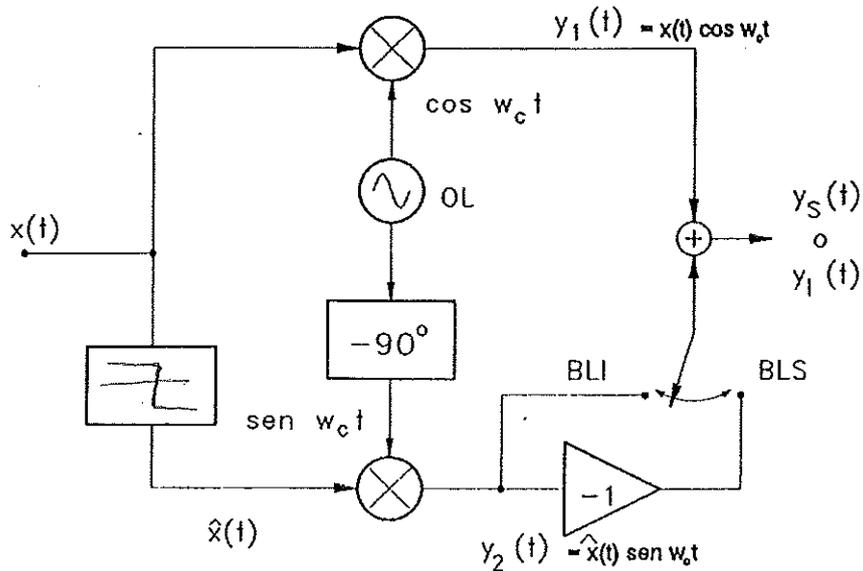


Por tanto, este método de generación finalmente tiene la misma limitación que la generación por filtrado, aunque es más barato e integrable. Por el contrario, tiene unas prestaciones algo inferiores.

Este filtro, con la transición abrupta de fase en $f=0$ no es realizable en la práctica, pero tiene mucho interés en comunicaciones. Recibe el nombre de **Transformador de Hilbert**.



De esta manera el modulador BLU de generación por desfase para una señal arbitraria será:



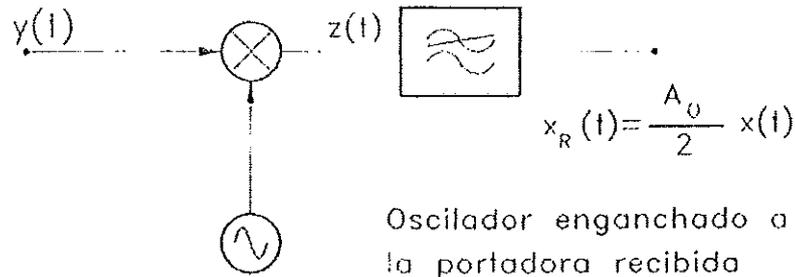
Además, con este método existe una expresión analítica para la señal modulada en BLU:

$$y(t) = y_1(t) \pm y_2(t) = x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

Signo + BLI
Signo - BLS

B) Demodulación

La modulación BLU exige una demodulación coherente:



Si el oscilador de recepción tiene una deriva de fase respecto al de transmisión, $\theta(t)$, lo que se obtendrá es una mezcla de ambas bandas, es decir, para que la señal se reciba sin distorsión se debe cumplir que $\theta(t)=0$. El oscilador debe estar enganchado en frecuencia y en fase sin ningún desfase. Esta es una diferencia importante respecto de la demodulación coherente en DBL y AM, pues complica la realización de los receptores.

Como compensación, la modulación BLU ofrece mejores eficiencias que DBL y AM.

Oscilador enganchado a la portadora recibida

$\cos \omega_c t$
totalmente enganchado en fase con el oscilador del transmisor

Si a la entrada del multiplicador se tiene:

$$y(t) = A_c [x(t) \cos \omega_c t \mp \hat{x}(t) \text{sen} \omega_c t]$$

a la salida se obtiene:

$$z(t) = A_c [x(t) \cos^2 \omega_c t \mp \hat{x}(t) \text{sen} \omega_c t \cos \omega_c t] = A_c \left[x(t) \frac{1 + \cos 2\omega_c t}{2} \mp \hat{x}(t) \frac{1}{2} \text{sen} 2\omega_c t \right]$$

$$z(t) = \frac{A_c}{2} x(t) + \frac{A_c}{2} \cos 2\omega_c t \mp \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \text{sen} 2\omega_c t$$

por lo que, filtrando paso bajo, resulta:

$$x_R(t) = \frac{A_c x(t)}{2}$$

las frecuencias de portadora suelen ser altas por lo que es eliminar el LPF

C) Eficiencia espectral y de potencia

$$E_e = \frac{W}{B_T} \times 100 = \frac{W}{W} \times 100 = 100\%$$

$$E_p = 100\%$$

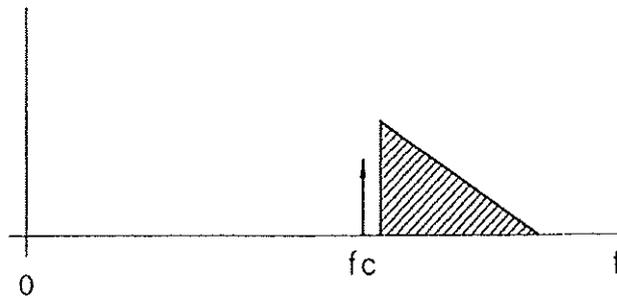
No se transmite portadora, por lo que toda la potencia transmitida es potencia "útil" (información).

por lo que esta técnica puede considerarse como óptima desde el punto de vista de consumo de recursos. Sin embargo, la sofisticación requerida por los equipos y, como se verá, su peor comportamiento frente a las modulaciones angulares respecto al ruido, justifican que no se haya empleado mucho.

Esto es una variación sobre BLU

D) BLU Compatible (BLUC)

La recepción de BLU se simplifica mucho si se inserta la portadora, como se muestra en la figura:



La expresión de la señal modulada en BLUC es:

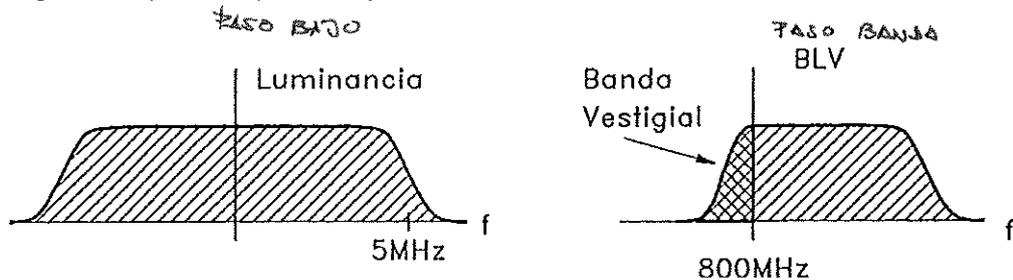
$$y(t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\text{Portadora}} + \underbrace{x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \text{sen} \omega_c t}_{\text{BLU}}$$

E) Banda Lateral Vestigial

Esto es otra variación sobre BLU

Cuando una señal lleva mucha información en las bajas frecuencias (o esa información es muy importante), es prácticamente imposible utilizar BLU, pues requeriría un corte totalmente abrupto. En estos casos se puede enviar una porción controlada de la banda eliminada. En recepción se hará un proceso adecuado para tenerlo en cuenta y recuperar la señal. Obviamente se pierde eficiencia espectral. Este es el esquema utilizado para difundir las imágenes de TV analógica.

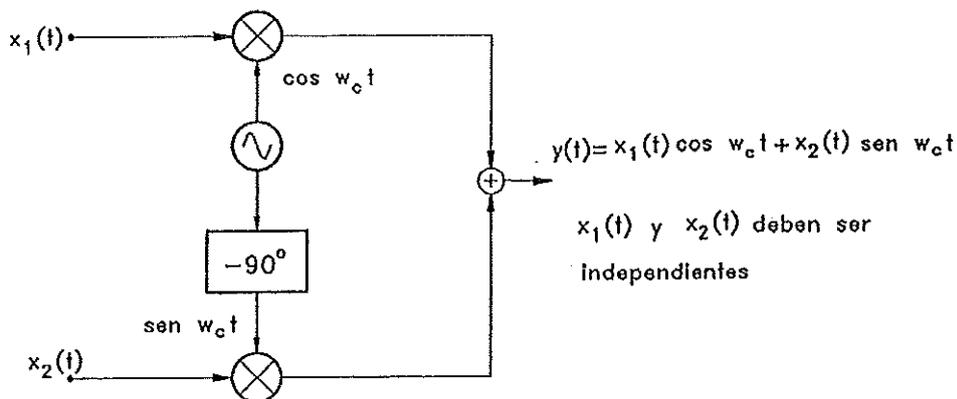
La siguiente figura compara el espectro de una señal en BLU con otra BLV



Así como la BLV se emplea para transmitir la señal de luminancia (imagen en blanco y negro) en la TV analógica, la QAM se utiliza para enviar la información de color.

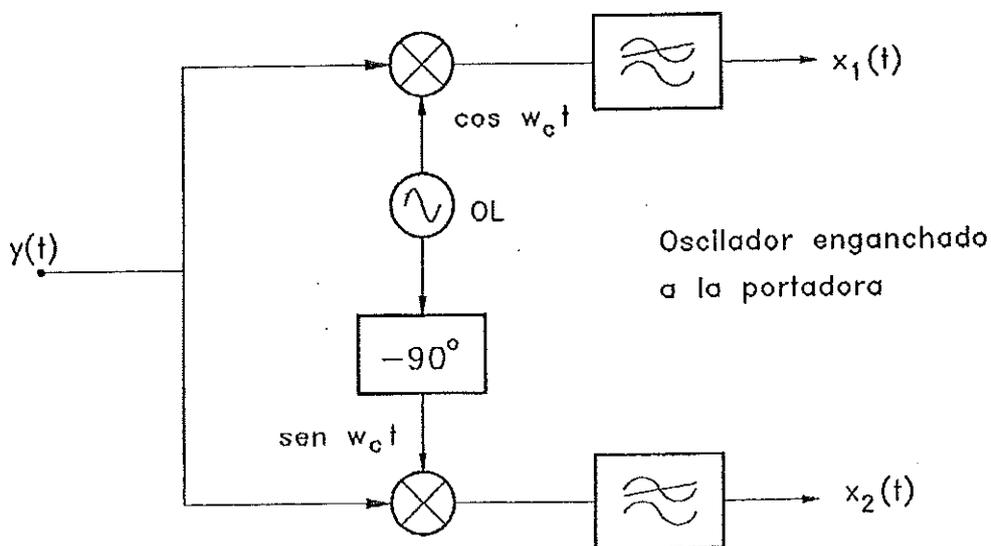
3.2.5 Modulación QAM

La modulación QAM (Modulación de Amplitud en Cuadratura, en inglés Quadrature Amplitude Modulation) es otra modulación en amplitud que, utilizando la componente en fase y en cuadratura de la señal, permite enviar dos mensajes simultáneos. El modulador es el siguiente:



Se puede demostrar que si cada moduladora ocupa un ancho W , la modulada ocupa $2W$.

La demodulación tiene que ser perfectamente coherente como se muestra en la siguiente figura:

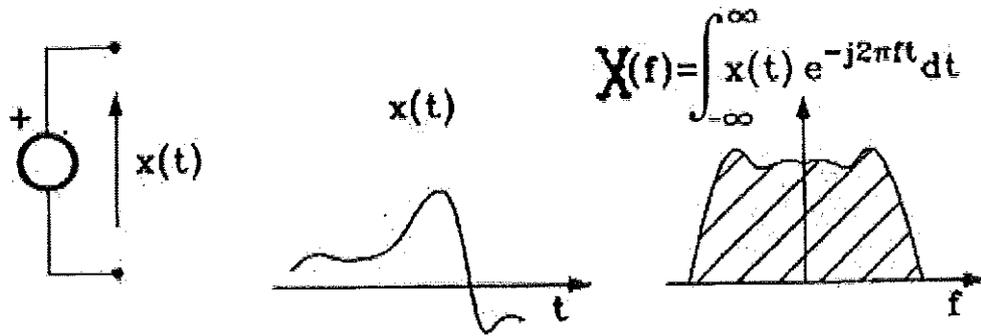


$$E_e = \frac{2W}{W+W} = 1 = 100\%$$

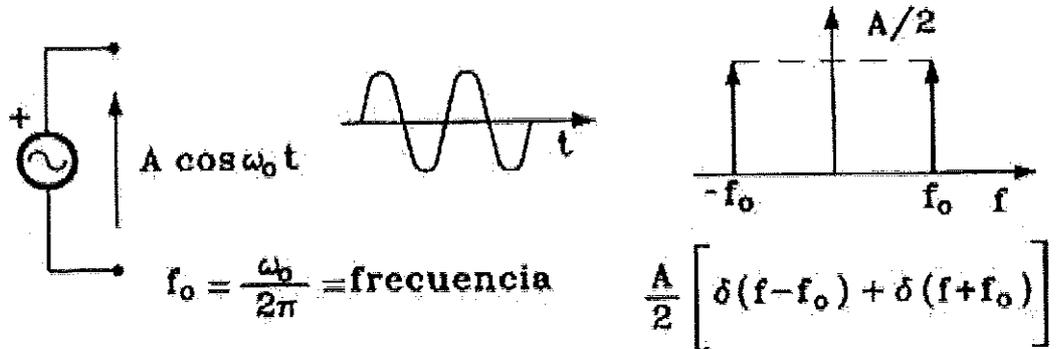
$$E_f = \frac{\text{Pot. util}}{\text{Pot. Total}} = 1 = 100\%$$

APÉNDICE A: FUNCIONES ELECTRÓNICAS BÁSICAS

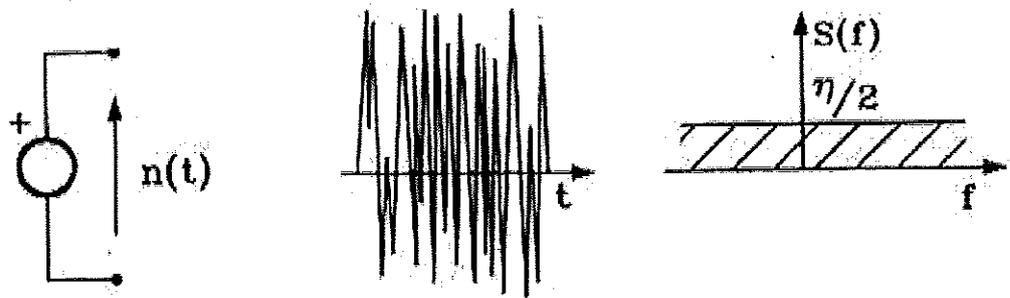
• Generador de señal arbitraria



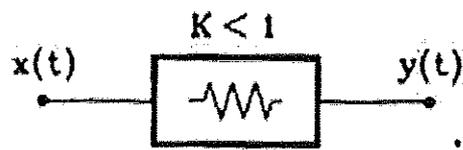
• Generador sinusoidal (oscilador)



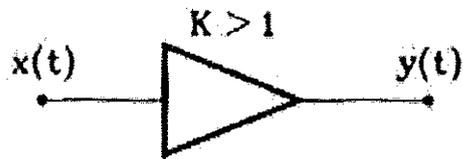
• Generador de ruido gaussiano



• **Atenuación / amplificación**

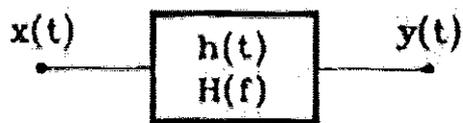


$$y(t) = K \cdot x(t)$$



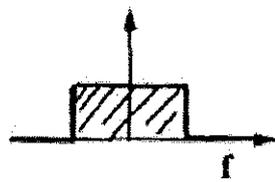
$$Y(f) = K \cdot X(f)$$

• **Filtrado**

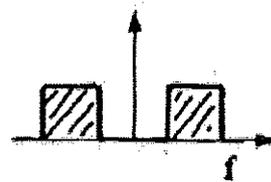


$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

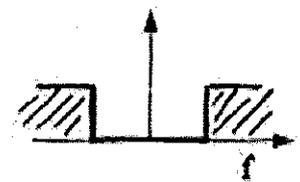
$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$



Filtro PASO-BAJO



Filtro PASO-BANDA



Filtro PASO-ALTO

• **Línea de retardo**

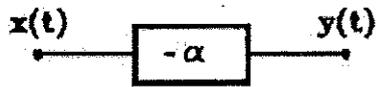


$$y(t) = x(t-t_0)$$

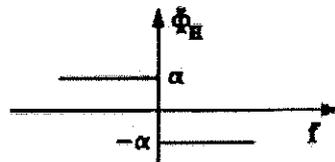
$$Y(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

• **Desfasador**



$$Y(f) = X(f) \cdot e^{-j\alpha \text{sign}(f)}$$

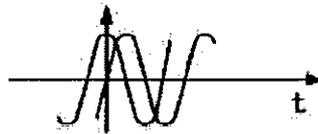


Si la entrada es sinusoidal:

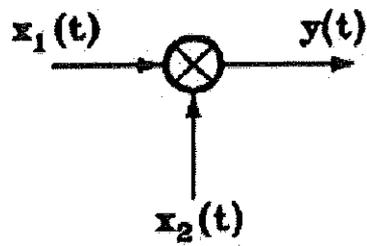
$$y(t) = \cos(\omega_0 t - \alpha)$$

Un caso especialmente significativo: $\alpha = \pi/2$, (90°)

$$y(t) = \text{sen } \omega_0 t$$



Multiplicador

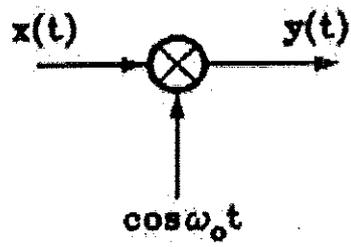


$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$$Y(f) = X_1(f) * X_2(f)$$

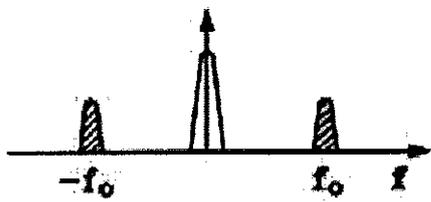
Casos particulares:

- Si una de las dos entradas es sinusoidal



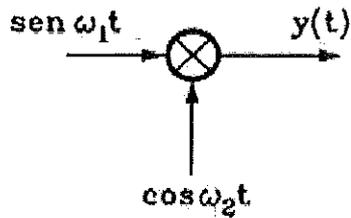
$$y(t) = x(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

$$Y(f) = 1/2 [X(f-f_0) + X(f+f_0)]$$



¡ CONVERSION SUPERIOR !

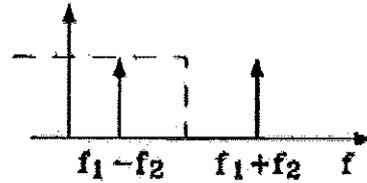
- Si las dos señales son sinusoidales de diferente frecuencia



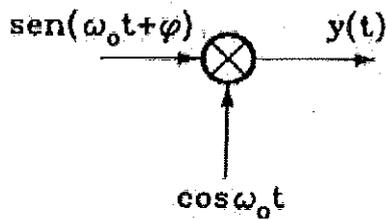
$$y(t) = \text{sen} \omega_1 t \cdot \text{cos} \omega_2 t =$$

$$= 1/2 \left[\text{sen}(\omega_1 + \omega_2)t + \text{sen}(\omega_1 - \omega_2)t \right]$$

+ FPB → ¡ MEZCLADOR !



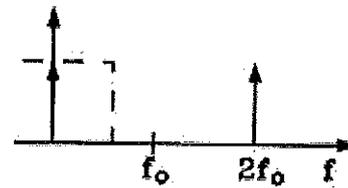
- Si las dos señales son sinusoidales y de la misma frecuencia



$$y(t) = \text{sen}(\omega_0 t + \varphi) \cdot \text{cos} \omega_0 t =$$

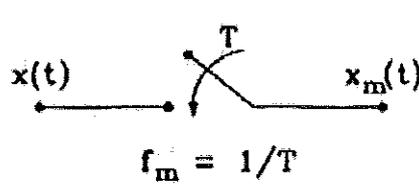
$$= 1/2 \left[\text{sen} \varphi + \text{sen}(2\omega_0 t + \varphi) \right]$$

+ FPB → ¡ DETECTOR DE FASE !



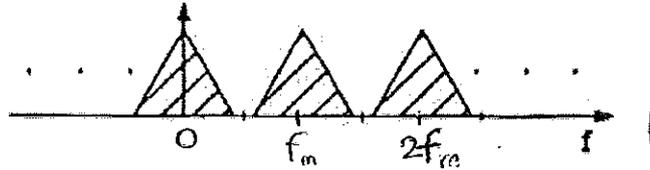
$$y(t) = K \cdot \text{sen} \varphi$$

Muestreador ideal

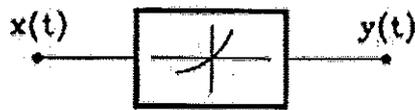


$$x_m(t) = x(t) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(t-lT)$$

$$X_m(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(f-lf_m)$$



Elemento no lineal



$$y = f(x)$$

$$y(t) = f[x(t)]$$

(Elemento sin memoria)

Ejemplos:

$$y(t) = e^{Kx(t)} \quad x > 0$$

$$y(t) = 0 \quad x < 0$$

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \dots$$

3.3 MODULACIONES ANGULARES

3.3.1 Definición y tipos

Una de las ventajas de las modulaciones angulares es que son de envolvente constante

Las modulaciones angulares se denominan así, porque introducen la información (señal moduladora) en la fase de una portadora, manteniendo constante la amplitud. Su representación matemática será:

$$y(t) = A_c \cos[\omega_c t + \varphi(t)] = A_c \cos\theta(t)$$

donde $\varphi(t)$ estará relacionada con $x(t)$ de alguna forma (depende del tipo de modulación).

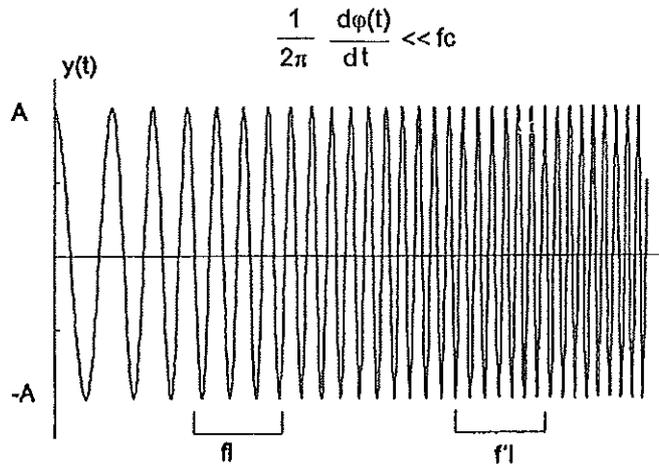
Se define como frecuencia instantánea de la señal:

$f_i(t)$ no es lo mismo que la variable f de la transformada de Fourier

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\omega_c t + \varphi(t))}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_c + f_d(t)$$

donde $f_d(t)$ se denomina desviación instantánea de frecuencia y f_c es la frecuencia de la portadora.

Si $\varphi(t)$ varía lentamente, $y(t)$ puede verse a intervalos cortos como una sinusoide de frecuencia $f_i(t)$.



Básicamente existen dos modulaciones angulares:

- De fase o PM (Phase Modulation)
- De frecuencia o FM (Frequency Modulation)

El hecho de que se trate de modulaciones de envolvente constante tiene ventajas en dos situaciones:

1. Cuando hay distorsión no lineal: el comportamiento de los amplificadores es muy variable con la amplitud de la señal. Al ser señales con amplitud constante se puede trabajar con ellos prácticamente en saturación, lo cual tiene ventajas económicas y de rendimiento.
2. Canales vía radio con atenuación variable. En estos canales la atenuación que afecta a la señal varía en el tiempo, por lo que si se usan modulaciones lineales, estas variaciones pueden interpretarse como variaciones de la señal mensaje, lo cual no ocurre al usar FM o PM.

3.3.2 Modulación de fase (PM) y frecuencia (FM)

Se denomina **modulación de fase** si la función $\varphi(t)$ es proporcional a la señal moduladora

K_p se mide en rad/V

$$\varphi(t) = K_p x(t)$$

Su representación matemática es:

$$PM: y_p(t) = A_c \cos[\omega_c t + K_p x(t)] = A_c \cos[\omega_c t + \beta x_N(t)]$$

donde:

β : índice de modulación o máxima desviación de fase ($\beta = K_p |x(t)|_{\max}$)

$x_N(t)$: señal moduladora normalizada. $= \frac{x(t)}{|x|_{\max}}$

Se denomina **modulación de frecuencia** si la desviación instantánea de frecuencia es proporcional a la señal moduladora.

$$f_d(t) = K_f x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_f x(t) \Leftrightarrow \varphi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$$

integrar desde que empieza

Su representación matemática es:

$$FM: y_p(t) = A_c \cos[\omega_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha] = A_c \cos[\omega_c t + 2\pi f_D \int_{-\infty}^t x_N(\alpha) d\alpha]$$

siendo f_D la máxima desviación de frecuencia ($f_D = \max\{f_d(t)\} = K_f |x(t)|_{\max}$) por lo que:

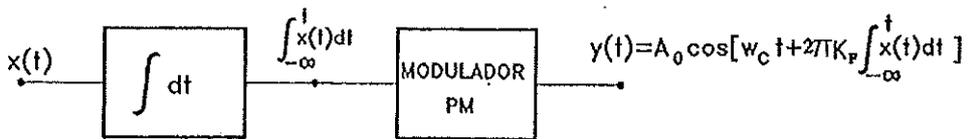
$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_f x(t) \xrightarrow{f_d(t) = K_f x(t) = f_D x_N(t)} \varphi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$$

Se puede comprobar que un modulador PM puede transformarse en un modulador FM o viceversa:

Transformación de un modulador FM en PM



Transformación de un modulador PM en FM



MOD FM

Por ello, simplemente viendo la salida de un modulador FM o PM, no podemos saber realmente si la modulación es FM o PM a no ser que conozcamos la señal mensaje.

3.34

$$x(t) = A_m \begin{cases} \sin \omega_m t & (\text{PM}) \\ \cos \omega_m t & (\text{FM}) \end{cases}$$

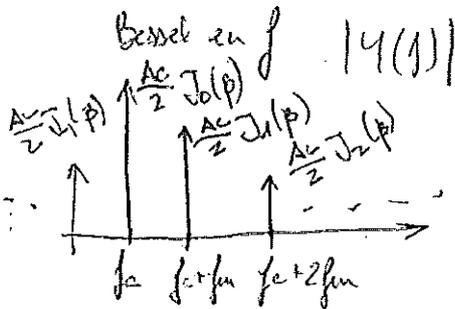
$$y(t) = A_c \cos(\omega_c t + p \sin(\omega_m t))$$

$$\boxed{\text{PM}} \quad p = k_p |x|_{\max} = k_p A_m$$

$$\boxed{\text{FM}} \quad p = \frac{f_D}{f_m}$$

$$y(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(p) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(p) \left[\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \right]$$



$$|J_n(p)| = |J_{-n}(p)|$$

3.3.3 Modulación angular de banda estrecha

Un caso especialmente fácil de analizar es lo que denominaremos modulaciones angulares de banda estrecha, situación que se produce cuando en cualquier instante la fase de la señal modulada, $\varphi(t)$, cumple $\varphi(t) \ll 1$, independientemente de que sea una modulación PM o FM, en las que $\varphi(t)$ se define, respectivamente como:

$$PM: \varphi(t) = \beta x_N(t) \quad \text{o} \quad FM: \varphi(t) = 2\pi f_D \int_{-\infty}^t x_N(\alpha) d\alpha$$

Se puede demostrar que bajo esta hipótesis ($\varphi(t) \ll 1$)

$$y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(t)) \rightarrow \overline{y(t)} = A_c e^{j\varphi(t)} \approx A_c (1 + j\varphi(t)) = A_c + jA_c \varphi(t)$$

Por lo que las componentes en fase y cuadratura serán:

$$y_F(t) = A_c$$

$$y_C(t) = A_c \varphi(t)$$

Y la envolvente y fase instantáneas:

$$r(t) = \sqrt{y_F^2 + y_C^2} = \sqrt{A_c^2 + [A_c \varphi(t)]^2} = \sqrt{A_c^2 (1 + \varphi^2(t))} = A_c$$

$$\varphi(t) = \arctg\left(\frac{y_C}{y_F}\right) = \arctg\left(\frac{A_c \varphi(t)}{A_c}\right) = \arctg(\varphi(t)) \approx \varphi(t)$$

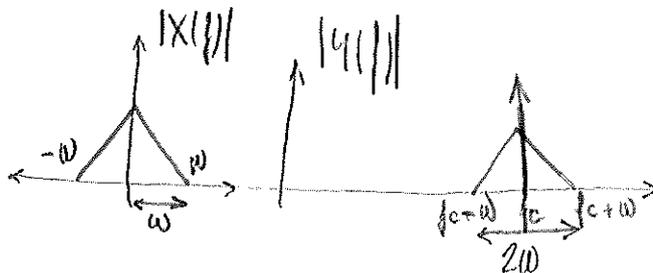
La señal modulada real será:

portadora DBL en cuadratura.

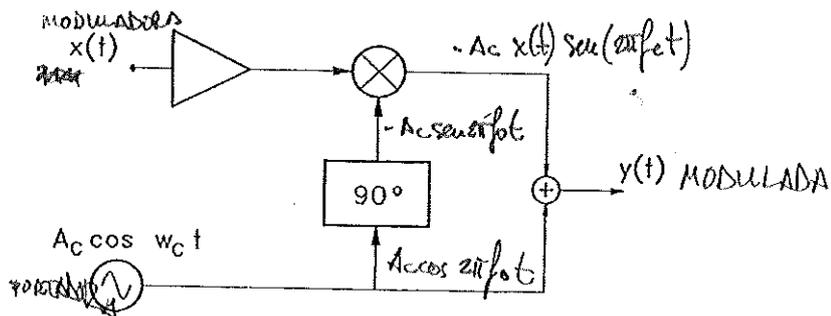
$$y(t) = A_c \cos \omega_c t - A_c \varphi(t) \text{ sen } \omega_c t$$

que no es sino la suma de una portadora y una señal DBL que modula una portadora en cuadratura con la anterior.

A continuación se muestra el espectro de una señal con modulación angular de banda estrecha, comparado con el de la señal en banda base (sin modular):



El esquema de generación de este tipo de modulación se denomina modulador Armstrong y es el siguiente:



IMPORTANTE:
Si la modulación angular no es de banda estrecha no se puede dibujar el espectro de la señal modulada (salvo el caso particular de un tono, ver página siguiente)

Fíjate que la envolvente ya no es exactamente constante, ni la fase exactamente proporcional a la señal mensaje (o su integral si es FM), pero se aproximan mucho.

Nótese que la eficiencia espectral es del 50%, pero su eficiencia de potencia es muy pequeña porque la hipótesis de partida implica que la señal que se transmite es, casi toda ella, portadora

Este espectro se parece mucho al de AM (bandas laterales con poca potencia frente a la potencia de portadora), pero se diferencian en el espectro de fase. En este caso la portadora y las bandas laterales están en cuadratura.

Este tipo de modulación FM o PM es más sencilla que la normal, pero tiene peores prestaciones.

A partir de los resultados para un tono se intentará estimar el caso general

3.3.4 Cálculo del espectro cuando la señal moduladora es un tono

El cálculo del espectro de una señal con modulación angular es difícil en un caso general. Por ello se va a hacer solo para un caso particular sencillo: modulación con un tono.

Si la señal moduladora es un tono, $x(t) = A_m \text{sen} \omega_m t$ para PM o $x(t) = A_m \text{cos} \omega_m t$ para FM, se tiene que la señal modulada angularmente (PM o FM) es:

$$y(t) = A_c \text{cos}(\omega_c t + \beta \text{sen} \omega_m t)$$

Donde β tiene un significado distinto para cada modulación,

Para PM: $\beta = K_p A_m$ índice de modulación (o máxima desviación de fase).

Para FM: $\beta = \frac{f_D}{f_m}$

siendo f_D la máxima desviación de frecuencia y f_m la frecuencia de la señal moduladora.

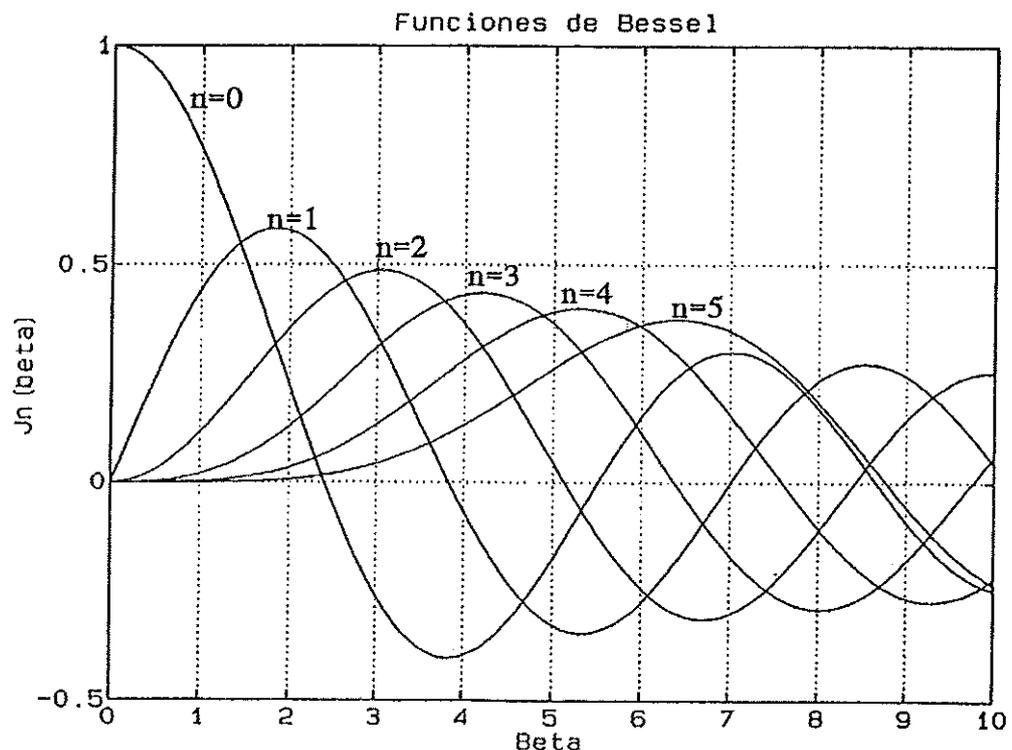
Si obtenemos la envolvente compleja $\bar{y}(t)$ y la desarrollamos en serie de Fourier, se puede demostrar que podemos expresar $y(t)$ de la siguiente forma:

$$y(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \text{cos}(\omega_c + n\omega_m)t$$

Cuyo espectro es:

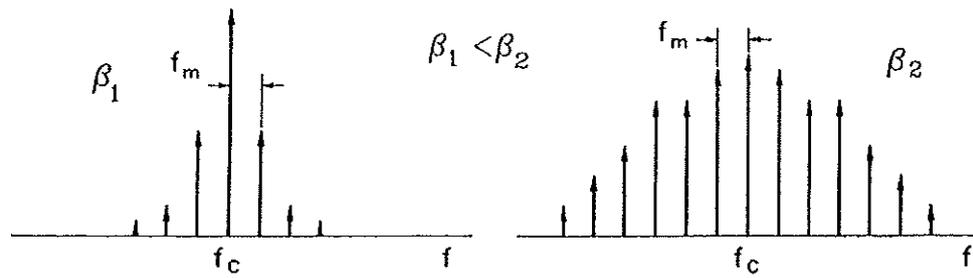
$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)]$$

Donde J_n es la función de Bessel de primera especie y orden n . En la siguiente gráfica se muestran dichas funciones para $n = 0, 1, \dots, 5$ y $0 \leq \beta \leq 10$.



A la vista del espectro $Y(f)$ se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El espectro contiene la frecuencia portadora y un número infinito de deltas (rayas) separadas múltiplos de f_m (ocupa un ancho de banda teóricamente infinito).

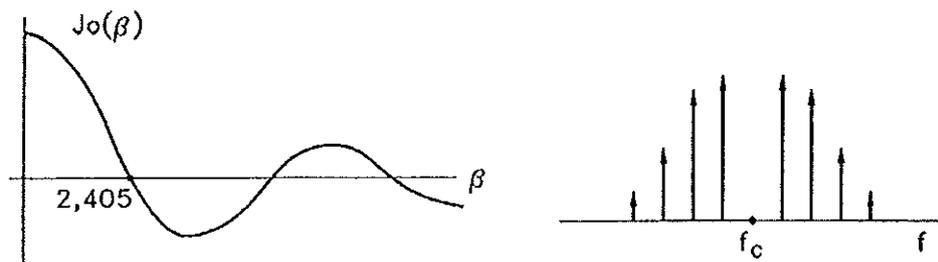


- Como se observa en la figura la amplitud de las rayas va decreciendo, haciendo que el ancho de banda sea finito en la práctica.
- Dada la propiedad $|J_n(\beta)| = |J_{-n}(\beta)|$, el módulo del espectro es par alrededor de f_c .
- Si β es muy pequeño ($\beta \ll 1$), sólo significativa la portadora y la primera raya, comprobándose que es una modulación de banda estrecha (estudiada en el apartado anterior) y que $B = 2W$.
- La anchura de banda crece conforme lo hace β (el número de rayas con valores significativos es mayor). De hecho la **regla de Carson** establece que el 98% de la potencia total se encuentra en un ancho de banda

$$B = 2(\beta + 1)W$$

- Una propiedad interesante es que algunas rayas se anulan para ciertos valores de β . Por ejemplo, la portadora (raya $n = 0$) se anula para $\beta = 2,405$.

Esta propiedad permite calibrar con precisión los moduladores. Se va subiendo β hasta que desaparece la raya de la portadora, y así se sabe que en ese momento $\beta=2,405$



3.3.5 Ancho de banda del espectro de las modulaciones de fase

En este epígrafe vamos a resumir el cálculo del ancho de banda del espectro de una señal modulada angularmente. Dividiremos la exposición en tres casos:

Primer caso: Modulación angular de banda estrecha

El primer caso ya se ha visto en las modulaciones angulares de banda estrecha: cuando la variación de fase es muy pequeña el ancho de banda es el doble que el de la señal moduladora.

$$B \approx 2W$$

Segundo caso: Modulación angular con un tono

El segundo caso también se ha visto en la modulación angular de un tono: el ancho de banda teórico del espectro de rayas resultante es infinito.

Sin embargo a efectos prácticos, vamos a considerar que el ancho de banda del espectro es:

$$B \approx 2(\beta + 1)f_m$$

donde:

f_m es la frecuencia de la señal moduladora

β es el índice de modulación (PM) o bien el cociente f_D / f_m (FM)

Tercer caso: Modulación con una señal arbitraria

Ya hemos comentado que el espectro resultante para una señal cualquiera $x(t)$ es muy difícil de calcular. Lo que sí se puede hacer es una estimación del ancho de banda que ocupará ese espectro.

Para estimar el ancho de banda se utiliza una extrapolación del segundo caso (modulación con un tono). Si se define la relación de desviación D , como:

$$D = \frac{\text{desviación máxima de frecuencia}}{\text{ancho de banda de } x(t)} = \frac{f_D}{W}$$

la regla de Carson establece que el ancho de banda aproximado es:

$$B \approx 2(D + 1)W \quad (FM)$$

$$B \approx 2(\beta + 1)W \quad (PM)$$

Recuerda que dicho ancho de banda incluye el 98% de la potencia total de la señal modulada

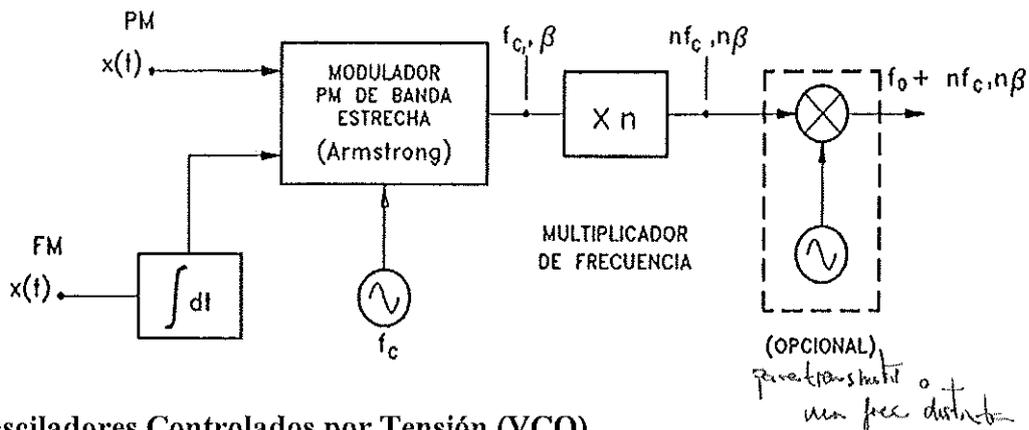
D juega el papel de β y W el de f_m

3.3.6 Generación de las modulaciones angulares (moduladores)

Existen dos filosofías básicas: utilización de moduladores PM de banda estrecha o circuitos especiales (que pueden ser osciladores controlados por tensión o bien PLLs).

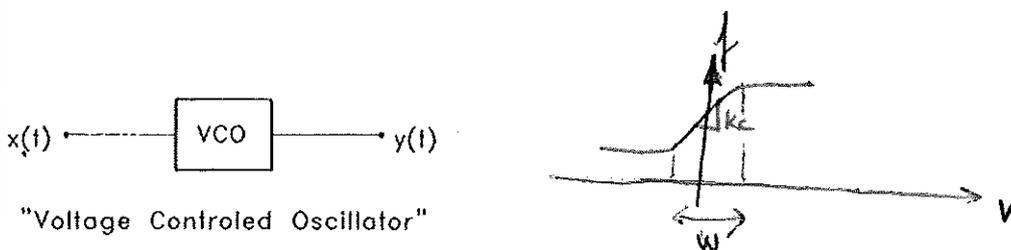
Moduladores PM de banda estrecha y multiplicadores de frecuencia

Se trata de aprovechar un modulador PM de banda estrecha (Armstrong). El problema de esta solución es que se genera una β pequeña, por ello luego se necesita aumentar el ancho de banda para lo cual se emplea un multiplicador de frecuencia para obtener a la salida múltiplos de la frecuencia con que se ataca el circuito. Su estructura se presenta en la figura:



Osciladores Controlados por Tensión (VCO)

Son osciladores que contienen algún elemento cuyas propiedades dependen de la tensión. Al cambiar el valor de tensión en este elemento, cambia la frecuencia del oscilador, obteniéndose una señal FM, ya que a la salida del VCO se obtiene:



PLLs (Phase Lock Loop)

Son circuitos mucho más complejos, que cada día se utilizan más por su buenas prestaciones. Permiten linealizar la relación entre la f y la v .

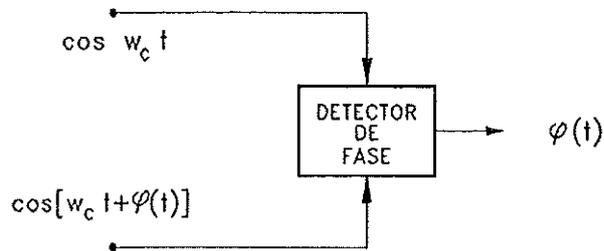
Esto se estudia en más detalle en ELCM de 4º curso

3.3.7 Demoduladores

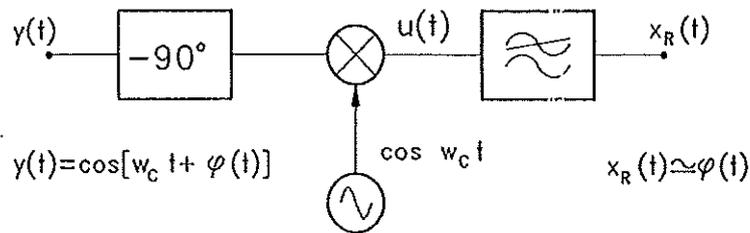
Aquí solo vamos a ver los dos procedimientos más simples.

Demodulación PM mediante detectores de fase (demodulador coherente)

Si la demodulación es coherente (se dispone de la portadora), basta con utilizar un detector de fase: un dispositivo que da una tensión proporcional a la diferencia de fase entre sus dos señales de entrada, como muestra la figura.



Un detector de fase se puede construir a partir de un desfaseador, un multiplicador y un filtro paso bajo como se indica en la siguiente figura,



A la salida del multiplicador se obtiene:

$$u(t) = \sin(\omega_c t + \varphi(t)) \cos \omega_c t = \frac{1}{2} (\sin \varphi(t) + \sin(2\omega_c t + \varphi(t)))$$

y filtrando paso bajo resulta:

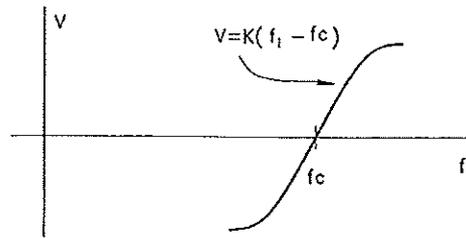
$$x_R(t) = K \sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$$

La expresión final se obtiene aplicando identidades trigonométricas

Trabajando en la zona lineal del seno

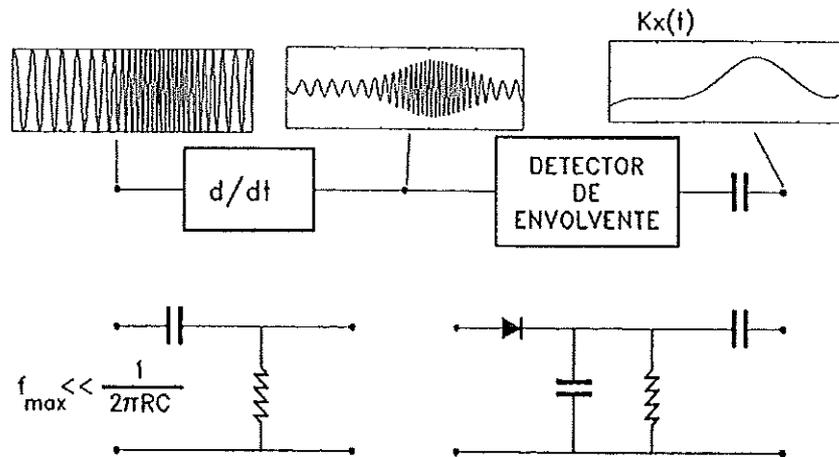
Demodulación FM mediante discriminadores

Un discriminador de frecuencia es un dispositivo que suministra una tensión proporcional a la desviación instantánea de frecuencia f_i de la señal de entrada, de acuerdo con la figura.



A la constante K que aparece en la figura, se la suele llamar K_D , y sus unidades son (V/Hz)

Existen distintos tipos de discriminadores, el más sencillo es el **convertor FM-AM**, que se muestra en la figura:



Nótese que el diferenciador convierte la información en frecuencia en información de amplitud en la portadora, y el detector de envolvente en una tensión, obteniéndose de esta forma un discriminador.

Si la entrada del diferenciador se tiene:

$$y(t) = A_c \text{sen} \left(\omega_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \right)$$

a su salida, se obtendrá

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_c \left(\cos \left(\omega_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \right) \right) (\omega_c + 2\pi K_f x(t))$$

cuya envolvente es:

$$r(t) = A_c [\omega_c + 2\pi K_f x(t)] = A_c \omega_c + 2\pi A_c K_f x(t)$$

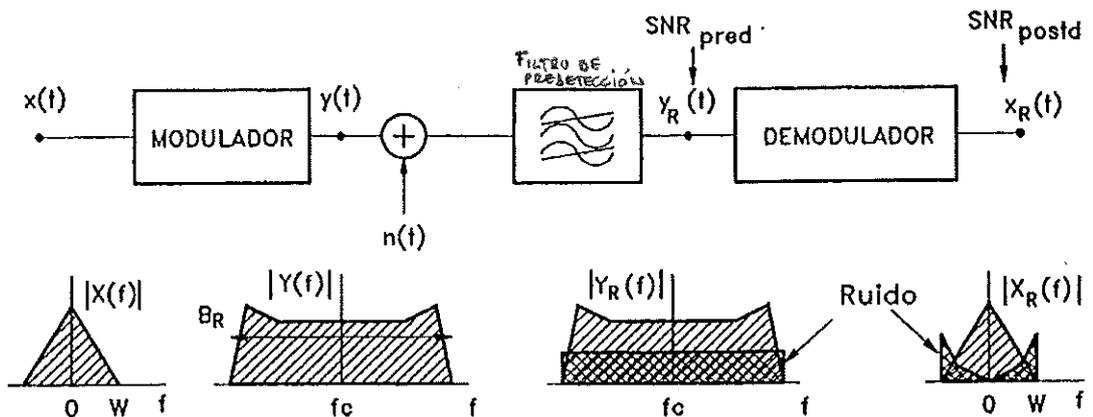
Por lo que utilizando un detector de envolvente y eliminando la DC se recupera una señal $kx(t)$ proporcional a la moduladora.

3.4. ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE TRANSMISIÓN ANALÓGICOS EN CANALES RUIDOSOS

3.4.1 Introducción: Planteamiento del problema

En este apartado se estudiará la calidad final que se obtiene con las distintas técnicas de modulación analógicas cuando la señal transmitida está contaminada por ruido térmico o de otro tipo, siempre que sea gaussiano.

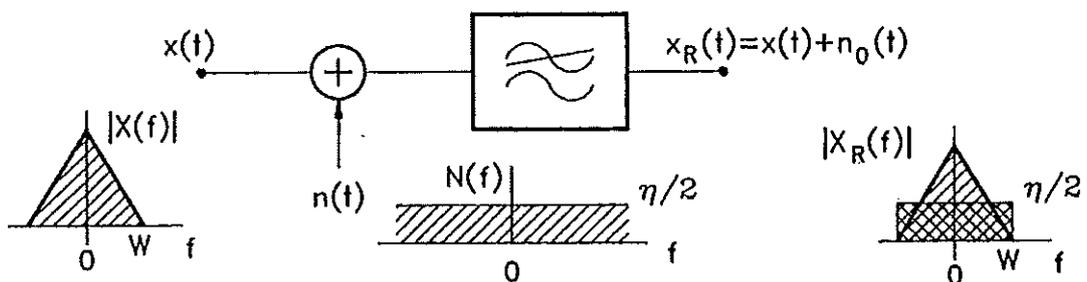
Para estudiar las distintas técnicas de modulación se considerará concentrado todo el ruido en un solo punto. Es decir, se suponen ideales (en términos de ruido) los subsistemas y, su contribución al ruido se acumula en dicho punto. Por lo tanto, el modelado del problema es el indicado en la figura.



El papel del filtro (denominado filtro de predetección) es evidente: dado que el ruido será blanco (o al menos de banda ancha), no tiene sentido que se deje pasar todo al demodulador. El filtro limita el ancho del sistema al requerido por la señal a transmitir.

A la entrada del demodulador habrá una señal de Potencia P_R , acompañada por un ruido de densidad espectral de potencia $\eta/2$. Se trata de determinar la relación señal/ruido antes y después de la demodulación (SNR de predetección y postdetección, respectivamente).

Como elemento de comparación (patrón de calidad) se empleará la calidad que se obtendría si la transmisión se hiciera en banda base (sin modular), con el modelo de la figura.



En este caso el receptor deberá tener un ancho de banda W , de modo que la relación señal/ruido obtenida será:

$$SNR_{pred} = SNR_{postd} = SNR = \frac{P_R}{\eta \cdot W} = z$$

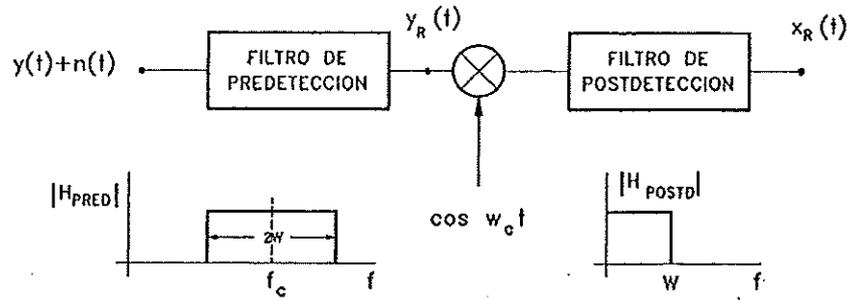
En banda base no hay demodulador, por eso coincide la SNR_{pred} y la SNR_{postd}

Esta sería la calidad del sistema cuando se transmite en banda base. ¿Qué ocurre cuando se modula? Esta cuestión se resuelve en los siguientes epígrafes.

3.4.2 Modulaciones lineales

Modulación DBL

Suponiendo un esquema de detección coherente el modelo a emplear es el de la figura.



$$\text{donde } y_R(t) = \underbrace{A_c x(t) \cos \omega_c t}_{\text{Modulación DBL}} + \underbrace{n_F(t) \cos \omega_c t - n_C(t) \sin \omega_c t}_{\text{Ruido Gaussiano Paso Banda}}$$

En estas condiciones la potencia de señal y de ruido a la salida del filtro de predetección será:

$$P_R = \langle A_c^2 x^2(t) \cos^2 \omega_c t \rangle = \frac{A_c^2}{2} \langle x^2(t) \rangle$$

$$N = 2 \frac{\eta}{2} 2W = \eta 2W$$

y la SNR en este punto es:

$$SNR_{pred} = \frac{P_R}{2\eta W} = \frac{z}{2}$$

Al demodular coherentemente, se obtiene:

$$y_R(t) \cdot \cos \omega_c t = [A_c x(t) \cos \omega_c t + n_F(t) \cos \omega_c t - n_C(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t = \frac{A_c x(t) + n_F(t)}{2} + \frac{A_c x(t) + n_F(t)}{2} \cos 2\omega_c t - \frac{n_C(t)}{2} \sin 2\omega_c t$$

Tras el paso por el filtro paso-bajo de postdetección, resulta:

$$x_R(t) = \frac{A_c}{2} x(t) + \frac{n_F(t)}{2}$$

La SNR en este punto será:

$$SNR_{postd} = \frac{\langle \left[\frac{A_c}{2} x(t) \right]^2 \rangle}{\langle \left[\frac{n_F(t)}{2} \right]^2 \rangle} = \frac{\frac{A_c^2}{4} \langle x^2(t) \rangle}{\frac{\langle n_F^2(t) \rangle}{4}} = \frac{A_c^2 \langle x^2(t) \rangle}{2\eta W} = \frac{2P_R}{2\eta W} = \frac{P_R}{\eta W} = z$$

En definitiva, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Tras detectar, la SNR ha mejorado en 3 dB respecto a la de predetección (se ha multiplicado por 2 en unidades lineales). Este factor se denomina "ganancia de demodulación".
- El factor 3 dB se obtiene por eliminación de la componente de ruido en cuadratura.

• En resumen: $SNR_{pred} = \frac{z}{2} \quad SNR_{postd} = z$

El óptimo ancho de banda del receptor es $B=2W$ pues no distorsiona la señal y deja pasar el mínimo ruido (W = ancho de banda $x(t)$)

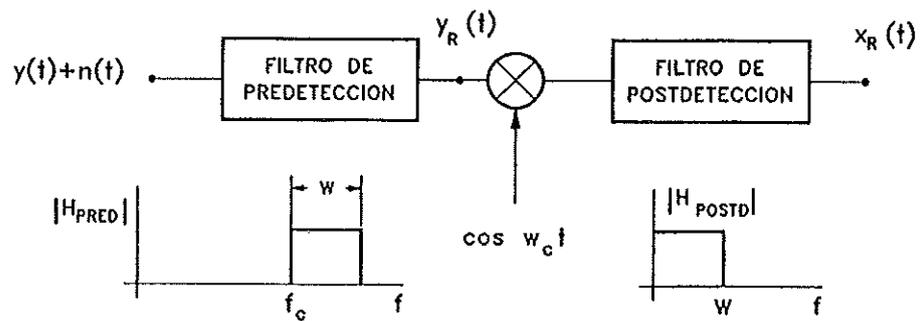
Fíjate que es la mitad que en el caso de transmisión en banda base, pues esta técnica de modulación requiere el doble de ancho de banda y el filtro de predetección deja pasar el doble de ruido.

Nótese que la demodulación coherente con coseno, sólo deja pasar las componentes "en fase" (las que van multiplicadas por coseno), mientras que elimina las componentes en cuadratura (las que van multiplicadas por el seno).

Si la demodulación coherente se hace con seno, ocurre justamente lo contrario.

Modulación BLU

Supóngase que se transmite la banda lateral superior (BLS). El esquema es ahora el de la figura.



A la salida del filtro de predetección se obtiene:

$$y_R(t) = \underbrace{A_c [x(t) \cos \omega_c t - \hat{x}(t) \sin \omega_c t]}_{\text{Modulación BLU}} + \underbrace{n_F(t) \cos \omega_c t - n_C(t) \sin \omega_c t}_{\text{Ruido Paso Banda Gaussiano}}$$

y las potencias de señal y ruido son:

$$P_R = A_c^2 [\langle x^2(t) \cos^2 \omega_c t \rangle + \langle \hat{x}^2(t) \sin^2 \omega_c t \rangle] = \frac{A_c^2}{2} (\langle x^2(t) \rangle + \langle \hat{x}^2(t) \rangle) = \frac{A_c^2}{2} \cdot 2 \cdot \langle x^2(t) \rangle = A_c^2 \langle x^2(t) \rangle$$

y $N = \eta W$

Por tanto:

$$SNR_{pred} = \frac{P_R}{\eta W} = z$$

Con demodulación coherente, siguiendo un procedimiento similar al anterior puede obtenerse:

$$x_R(t) = \frac{A_c}{2} x(t) + \frac{n_F(t)}{2}$$

En definitiva

$$SNR_{postd} = \frac{\frac{A_c^2}{4} \langle x^2(t) \rangle}{\frac{\eta W}{4}} = \frac{A_c^2 \langle x^2(t) \rangle}{\eta W} = z$$

que coincide con la modulación DBL y la transmisión en banda base. En este caso no hay ganancia de demodulación:

$$SNR_{pred} = SNR_{postd} = z$$

$x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son ortogonales: componentes desfasadas 90°

El filtro de predetección debe tener un ancho de banda igual al de la señal transmitida

Igual que en banda base: el filtro de predetección deja pasar la misma potencia de ruido.

La demodulación coherente en este caso elimina el ruido en cuadratura, pero también elimina la señal en cuadratura, por lo que la SNR no cambia.

¡OJO! Hay algún tipo de demodulador BLU que tiene una ganancia de 3 dB

Modulación AM con detección coherente

En esta técnica la relación señal-ruido tras detectar depende del tipo de esquema de demodulación empleado. Si la demodulación es coherente, a la salida del filtro de predetección se tendrá:

$$y_R(t) = \underbrace{A_c [1 + m x_N(t)] \cos \omega_c t}_{\text{Modulación AM}} + \underbrace{n_F(t) \cos \omega_c t - n_C(t) \sin \omega_c t}_{\text{Ruido Gaussiano Paso Banda}}$$

Las potencias de la señal y ruido son:

$$P_R = \frac{A_c^2}{2} \langle (1 + m x_N(t))^2 \rangle = \frac{A_c^2}{2} (1 + m^2 \langle x_N^2(t) \rangle)$$

$$N = 2\eta W$$

luego:

$$SNR_{pred} = \frac{P_R}{2\eta W} = \frac{z}{2}$$

Después de multiplicar por $\cos \omega_c t$, filtrar paso-bajo y eliminar la componente continua, se obtiene:

$$x_R(t) = \frac{A_c}{2} m x_N(t) + \frac{n_F(t)}{2}$$

Por lo que la relación señal-ruido tras detectar será:

$$SNR_{postd} = \frac{\langle [\frac{1}{2} A_c m x_N(t)]^2 \rangle}{\langle [\frac{1}{2} n_F(t)]^2 \rangle} = \frac{\frac{1}{4} A_c^2 m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{\frac{1}{4} 2\eta W} = \frac{A_c^2 m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{2\eta W} = E_p z$$

En este caso la ganancia de detección es:

$$\frac{SNR_{postd}}{SNR_{pred}} = \frac{\frac{A_c^2 m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{2\eta W}}{\frac{A_c^2}{2} (1 + m^2 \langle x_N^2(t) \rangle) / 2\eta W} = 2 \frac{m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{1 + m^2 \langle x_N^2(t) \rangle} = 2E_p$$

siendo E_p la eficiencia de potencia.

Comparando con la transmisión en banda base:

$$SNR_{postd} = E_p \cdot P_R = \eta W = E_p z$$

lo que permite extraer las siguientes conclusiones:

- Si $E_p \rightarrow 100\%$, la ganancia de detección tiende a 3 dB (como en DBL), típica de los sistemas de recepción coherente. Como en la práctica $E_p < 50\%$, la detección AM siempre implica pérdidas (de hecho suele ser de entorno al 10%).
- Estas pérdidas obedecen al hecho de que la potencia en la portadora no se utiliza y E_p representa muy bien el desperdicio de potencia que supone emitirla.
- Como $E_p \ll 50\%$ ($m < 1$), la AM siempre es peor que la banda-base, DBL y BLU.

- En resumen: $SNR_{pred} = \frac{z}{2}$ $SNR_{postd} = E_p z$

Igual que en DBL y la mitad que en banda base: el filtro de predetección deja pasar el doble de ruido que en banda base.

Como en los casos anteriores, también se elimina el ruido en cuadratura, por lo que la potencia de ruido se divide por 2.

Modulación AM con detección de envolvente.

Es, por sencillez, la forma más habitual de demodular en AM. Dado que, a la salida del filtro de predetención, la señal es:

$$y_R(t) = A_c[1 + mx_N(t)]\cos\omega_c t + n_F(t)\cos\omega_c t - n_C(t)\sin\omega_c t$$

donde: $\langle n_F^2(t) \rangle = \langle n_C^2(t) \rangle = 2\eta W$

La envolvente de $y_R(t)$ será:

$$r(t) = \sqrt{[A_c[1 + mx_N(t)] + n_F(t)]^2 + n_C^2(t)}$$

como se deduce de la representación de las envolventes complejas de la figura.

El receptor, además, eliminará el valor medio, de modo que: $x_R(t) = r(t) - \langle r(t) \rangle$

Desgraciadamente, en este caso, señal y ruido no están separados, lo que complica seriamente su análisis. Se van a estudiar dos casos particulares donde si es posible hacerlo.

- 1º Caso: $SNR \gg 1$

En este caso: $|A_c[1 + mx_N(t)] + n_F(t)| > |n_C(t)|$

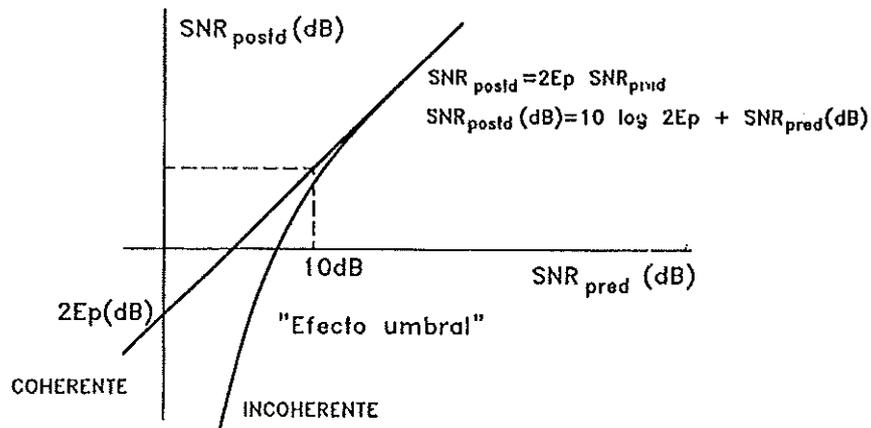
y, por tanto: $r(t) \approx A_c[1 + mx_N(t)] + n_F(t)$

y, por ello: $x_R(t) \approx A_c mx_N(t) + n_F(t)$

Se observa que es totalmente equivalente a la recibida con un demodulador coherente. Por tanto, si la SNR es alta, un sencillo detector de envolvente ofrece las mismas prestaciones que uno coherente, mucho más complejo.

- 2º Caso: $SNR_{pred} \ll 1$. Se puede demostrar que en la señal recibida no existe ninguna componente proporcional a la señal. El ruido pasa de tener un comportamiento aditivo (sumarse a la señal) a tener un comportamiento multiplicativo que degenera completamente la señal recibida.

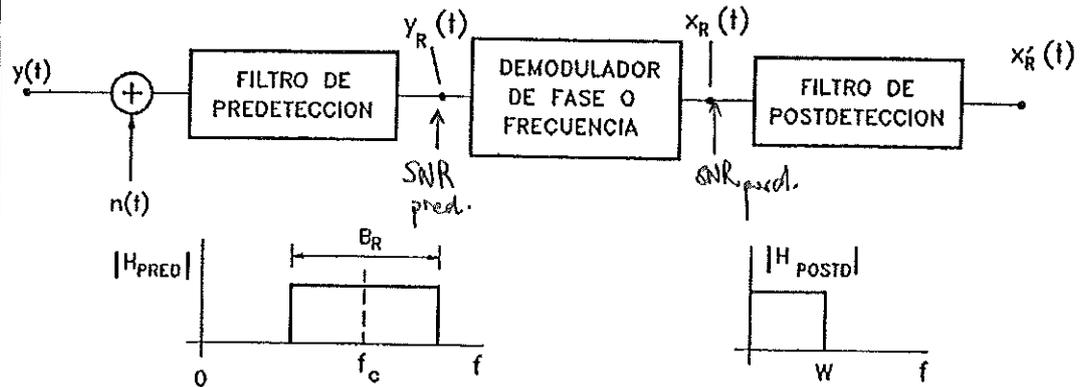
La suposición de SNR alta se puede mantener por encima del a condición $(SNR)_{pred} > 10 \text{ dB}$; por debajo, aparece un "efecto umbral". La figura ilustra los resultados anteriores para modulación AM.



En definitiva, si la SNR es mala, es mejor utilizar un receptor coherente. Si no es así, es indiferente.

3.4.3 Modulaciones angulares

El esquema de demodulación de una señal angular es el siguiente:



La relación señal/ruido en predetección es la misma para PM y para FM:

$$SNR_{pred} = \frac{A_c^2/2}{\eta B_R} = \frac{P_R}{\eta B_R} = \frac{P_R W}{\eta B_R W} = \frac{P_R}{\eta W} \cdot \frac{W}{B_R} = z \frac{W}{B_R}$$

Recuerda que la relación señal-ruido en banda base es:

$$z = \frac{P_R}{\eta W}$$

Sin embargo la SNR de postdetección es distinta para PM y FM. Pasamos a deducirlas en las siguientes hojas.

Modulación PM

Se puede demostrar que la potencia de señal tras la demod. será $S_p = K_D^2 \beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle$

Para calcular la potencia de ruido contenida en $n_{PM}(t)$, se va a suponer que este ruido es gaussiano de banda limitada cuya densidad espectral de potencia es tras la demodulación:

$$S_{n_{PM}}(f) = \begin{cases} \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta & ; |f| < \frac{B_R}{2} \\ 0 & ; |f| > \frac{B_R}{2} \end{cases}$$

La potencia de ruido a la salida será: $N_{PM} = \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta B_R$

Sin embargo, el ancho de banda de la señal, después de demodularla debe ser W ; como $B_R \gg W$, lo que se hace es filtrar paso bajo después del demodulador, de modo que a la salida del filtro de postdetección se obtiene, de acuerdo con la figura.

La relación señal/ruido será $N_{PM} = 2 \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta W$

La relación señal/ruido será:

$$SNR_{postd} = \frac{K_D^2 \beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{2 \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta W} = \frac{A_c^2 \beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{2 \eta W} = \frac{\beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle P_T}{\eta W}$$

Comparando con la transmisión en banda-base se obtiene:

$$(SNR)_{postd.} = \beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle \cdot z = \langle \varphi^2(t) \rangle \cdot z$$

expresión que demuestra que, en un sistema PM, puede obtenerse mejora respecto a la transmisión en banda base.

Modulación FM

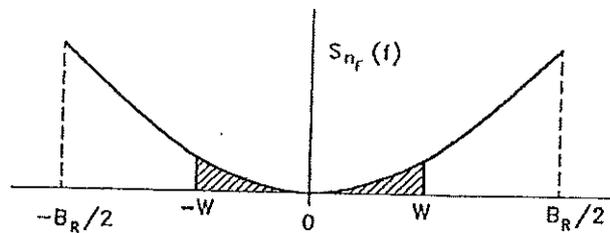
En este caso, a la salida del demodulador y suponiendo $SNR_{pred} \gg 1$, se tiene que la potencia de la señal será:

$$S_{FM} = K_D^2 f_D^2 \langle x_N^2(t) \rangle$$

Para calcular la potencia de ruido contenida en $n_{FM}(t)$, se va a suponer que este ruido es gaussiano de banda limitada cuya densidad espectral de potencia es:

$$S_{n_{FM}}(f) = \begin{cases} \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta f^2 & |f| < \frac{B_R}{2} \\ 0 & |f| > \frac{B_R}{2} \end{cases}$$

La expresión anterior indica que el ruido varía con la frecuencia como se recoge en la figura:



Recuerda que K_D es la constante que refleja el funcionamiento del discriminador (demodulador de FM)

La forma parabólica es típica del ruido FM y se produce por el diferenciador del receptor. Obviamente, las frecuencias más bajas se contaminan por el ruido mucho menos que las altas.

Nuevamente, como en la modulación PM, en general $B_R/2 > W$. Se pone a la salida del demodulador FM un filtro que deje pasar sólo la señal moduladora (filtro de postdetección), por lo que la potencia de ruido resulta:

$$N_{FM} = \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta \int_{-W}^W f^2 df = \frac{2}{3} \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta W^3$$

obteniéndose:

$$SNR_{postd} = \frac{K_D^2 f_D^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{\frac{2}{3} \frac{K_D^2}{A_c^2} \eta W^3} = 3 \left(\frac{f_D}{W} \right)^2 \langle x_N^2(t) \rangle \frac{P_T}{\eta W}$$

Dado que f_D/W es la relación de desviación, D , y $z = P_T / \eta \cdot W$ es la SNR cuando se transmite en banda base:

$$(SNR)_{postd} = 3D^2 \langle x_N^2(t) \rangle z$$

En este caso, D puede tener el valor que se desee, tan grande como sea necesario, obteniendo una SNR tan alta como se desee, mejorando mucho respecto al caso de banda base. Sin embargo, se paga un precio: el ancho de banda ocupado

$$B_R = 2(D+1)W \approx 2DW \quad (D \gg 1)$$

Esto significa que para aumentar 6dB la relación señal-ruido (multiplicar por 4 en unidades lineales) hay que duplicar el ancho de banda. Hay un fenómeno de intercambio ruido-ancho de banda.

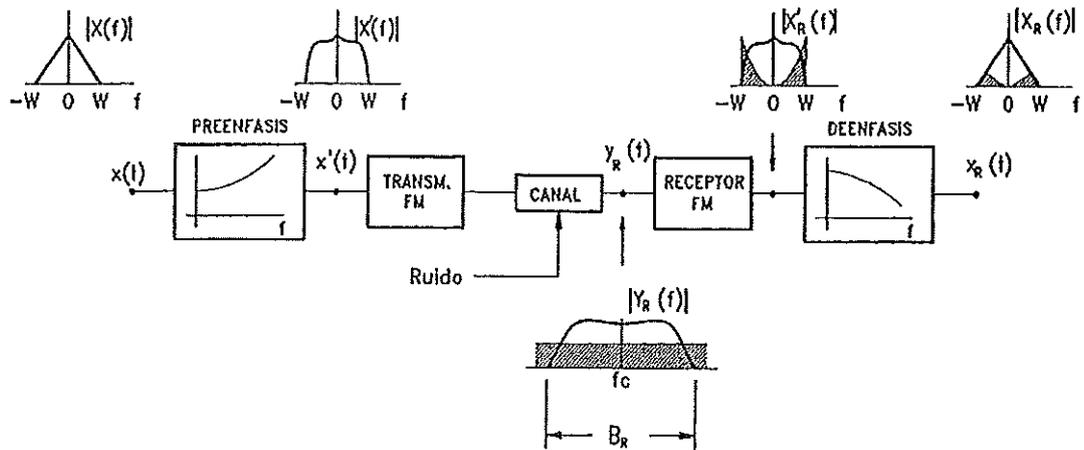
Preénfasis y Deénfasis

Hay ejercicios donde se aplica esta técnica a modulación PM

Recuerda la forma parabólica del ruido por el efecto del discriminador

Con esto se consigue eliminar gran parte del ruido ya que la mayoría se localiza en alta frecuencia.

Estas dos palabras definen una técnica usada en FM para mejorar la relación señal-ruido. La idea es la siguiente: dado que el ruido en la parte alta de la banda de $x(t)$ es más elevado, en el transmisor se "distorsiona" la señal "amplificando" las componentes altas de la misma. Posteriormente, en recepción, se anula la "distorsión", "atenuando" las componentes de alta frecuencia mediante un filtro de respuesta contraria que, además, eliminará ruido en alta frecuencia; el esquema puede verse en la figura.



Lo más habitual es emplear, para el deénfasis, un sencillo filtro RC, lo que produce una respuesta:

$$|H_{DE}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$$

donde $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.

Si el circuito de preénfasis tiene la respuesta inversa, la señal, $x(t)$, no se verá afectada:

$$H_{PE}(f) = \frac{1}{H_{DE}(f)} \Rightarrow H_{PE}(f) \cdot H_{DE}(f) = 1$$

Por ello la potencia de la señal sigue siendo la misma, la que cambia es la potencia del ruido

El ruido a la salida del filtro de deénfasis será:

$$N_{FM} = \int_{-W}^W |H_{DE}(f)|^2 \cdot S_{n_{FM}}(f) df$$

y operando:

$$N_{FM} = 2 \left(\frac{K_D^2}{A_c^2} \right) \eta f_c^2 W$$

la relación señal/ruido resulta:

$$(SNR)_{postd} = \left(\frac{f_D}{f_c} \right)^2 \langle x_N^2 \rangle \cdot Z$$

obteniéndose una ganancia por el empleo de pre/de-énfasis dada por:

$$\text{Mejora} = \frac{1}{3} \left(\frac{W}{f_c} \right)^2 \Rightarrow \text{Mejora (dB)} = 20 \log \left(\frac{W}{f_c} \right) - 5 \text{dB}$$

Los ejercicios con preénfasis-deénfasis se hacen igual que si no hubiera, y al final se calcula el factor de mejora de la SNR_{postd}

Efecto umbral en FM

Todo lo explicado hasta aquí se basa en que $SNR_{pred} \gg 1$. Si la relación señal/ruido en predetección no verifica esto, no solo no se cumplen los desarrollos anteriores, sino que la calidad en postdetección se degrada rápidamente. Asimismo, el aspecto del ruido cambia mucho, convirtiéndose en ruido impulsivo.

Por otra parte, hemos visto que $(SNR)_{post} = 3D^2 \langle x_N^2(t) \rangle > z$ en FM, por lo que aumentando D , se puede aumentar la SNR en postdetección. Sin embargo, el aumentar D , también tiene como efecto un aumento del ancho de banda ocupado $B_R \approx 2(D+1)W$ por la señal modulada, por lo que hay que aumentar el ancho de banda del filtro de predetección.

Esto tiene como consecuencia una disminución de $SNR_{pred} = z \frac{W}{B_R}$.

Es decir, cuanto mayor sea D , somos capaces de obtener más calidad potencialmente, pero más difícil es superar el umbral.

Las conclusiones que se obtienen son:

- El valor de z necesario para operar por encima del umbral aumenta cuanto mayor sea la desviación de frecuencia de la modulación.
- Para estar por encima del "efecto umbral" se debe cumplir que

$$z = \frac{P_R}{\eta W} > z_u = 20 \frac{B_R}{W} \approx 40(D+1)$$

Sólo en este caso podremos dar por válida la expresión obtenida anteriormente para la SNR de postdetección en FM:

$$(SNR)_{post} = 3D^2 \langle x_N^2(t) \rangle > z$$

TEMA 4: INTRODUCCIÓN A LAS COMUNICACIONES DIGITALES

4.1 Ventajas e inconvenientes de los sistemas digitales

Ventajas:

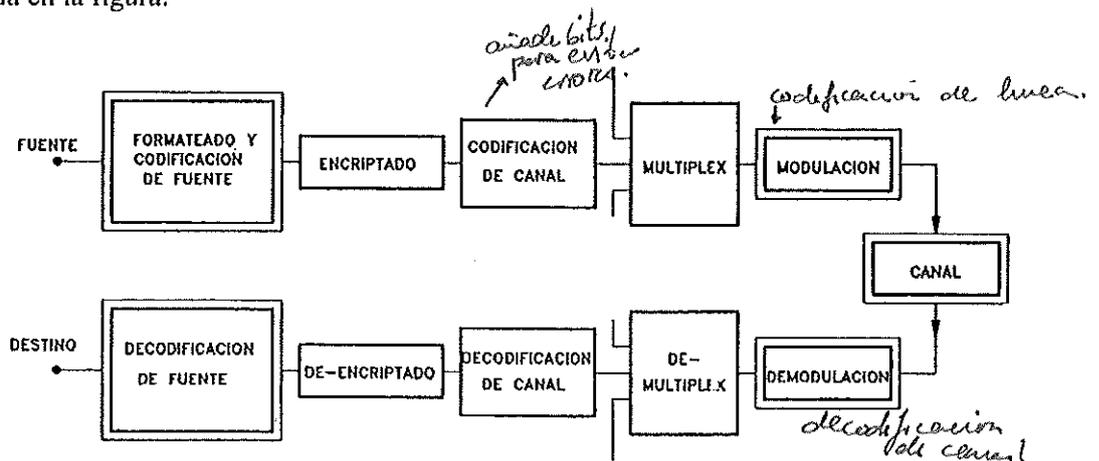
- Posibilidad de regenerar la señal, ya que el símbolo recibido es uno entre un alfabeto finito de símbolos. Esto lo hace mucho más robusto frente al ruido, distorsiones e interferencias.
- Existen técnicas de detección y corrección de errores, de tal manera que aunque el receptor se equivoque en la decisión, pueda detectarlo y/o corregirlo (codificación de canal).
- La circuitería es más fiable, integrable etc...
- Permiten muy fácilmente la manipulación de la información (por ejemplo encriptado) o procesado de la información.
- Permiten el TDMA además del FDMA, así como otros tipos de multiplexación más sofisticados (CDMA)
- Soportan con el mismo formato una gran variedad de señales: audio, vídeo, datos, telefonía, fax, etc. lo que facilita enormemente la integración de servicios y el multimedia.

Inconvenientes:

- Normalmente se requiere un ancho de banda sensiblemente mayor que el utilizado en sistemas analógicos, aunque esto cada vez es menos cierto gracias a las nuevas técnicas de compresión y modulación de alta eficiencia espectral.
- Se requiere una perfecta sincronización en todo el sistema.
- La mayoría de la información se encuentra inicialmente en formato analógico (imagen, sonido, etc), por lo que se hacen necesarios procesos de conversión (A/D y D/A).

4.2 Estructura de un sistema de comunicaciones digitales

Una estructura bastante general de un sistema de comunicaciones digitales es la representada en la figura:



Desde esos bloques, sólo los marcados con doble recuadro van a estar siempre. Los demás son optativos. Se describen a continuación muy brevemente.

4.2.1 Formateado y codificación de fuente

El formateado es el proceso por el cual la información se hace compatible con el sistema digital, en otras palabras, se convierte en un "chorro de bits".

Los casos más típicos son:

-Fuente analógica: el formateado incluye el muestreo y la conversión A/D (cuantificación).

-Fuente textual: si la fuente es texto, el formateo es la conversión de cada letra en un conjunto de bits (código ASCII por ejemplo).

El punto clave es que a la salida del formateador debe haber un chorro de bits.

El término "codificación de fuente" se emplea si, además, se hace un esfuerzo adicional en eliminar toda la redundancia posible de la fuente de forma que se consiga generar la menor cantidad de bits por segundo posible.

4.2.2 Encriptado

Es un conjunto de técnicas para proteger la información de tal forma que no puedan tener acceso los usuarios no autorizados. También es posible hacerlo en los sistemas analógicos (ejemplo: Canal + de TV), pero el encriptado digital es mucho más sencillo de hacer y sobre todo mucho más seguro, si se hace bien.

4.2.3 Codificación de canal

Con la codificación de canal se pretende introducir alguna redundancia en la información con objeto de poder detectar y/o corregir errores en la recepción.

4.2.4 Multiplexación

La forma de multiplexación más típica en comunicaciones digitales es TDMA, formándose "tramas" en el chorro de bits, con la información de distintos usuarios. También puede usarse FDMA y combinaciones de ellas.

4.2.5 Modulación o codificación de línea

En los sistemas digitales se emplea a veces la palabra modulación de forma distinta al caso analógico. A veces, en vez de modulación se emplea el término "codificación de línea".

En cualquier caso, lo que este bloque representa es la asociación de cada bit (o grupo de bits) a una señal física (voltios) que se transmite por la línea, que puede ser paso banda (sentido habitual de la palabra "modulación") o no. Por ejemplo, este bloque sería el que adjudicaría 5 voltios al valor "1" y 0 voltios al valor "0" en circuitos TTL.

El proceso de demodulación es fundamentalmente un proceso de decisión. Observando la señal recibida se debe decidir cuál de las posibles señales que soporta el sistema se ha transmitido.

Aquí se empleará el término "codificación de línea" de forma general y se reservará "modulación" al caso de utilizarse señales paso-banda.

Es lo que se estudia en el último tema de STLN

Esto se estudia en detalle en la primera parte de la asignatura TRDT de 3er curso

Esto se estudia en detalle en la segunda parte de la asignatura TRDT de 3er curso

4.3 Definiciones básicas

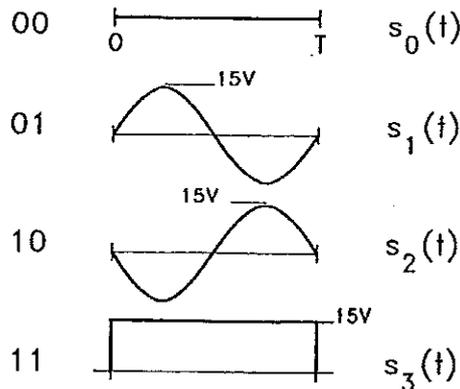
Se define seguidamente la nomenclatura que se emplea habitualmente para designar a la información digital:

- Cuando la información a transmitir es de tipo "textual", cada unidad básica de texto se denomina un **carácter**.
- Esos caracteres (o la información de que se trate), se formatean, dando lugar a la cadena de **bits**. El bit es la unidad básica de información.
- El chorro de bits puede agruparse en bloques de k bits para formar los **símbolos**.
- El conjunto de los $M = 2^k$ símbolos diferentes que pueden formarse se denomina **alfabeto** del sistema.
- Para enviar cada uno de los símbolos, el codificador de línea asocia a cada símbolo una **forma de onda digital**.

Una decisión importante en el sistema es el tamaño del alfabeto M . Si $M = 2$ el sistema es binario y entonces sólo habrá una forma de onda para el símbolo 0 y otra para el símbolo 1.

Ejemplo 1:

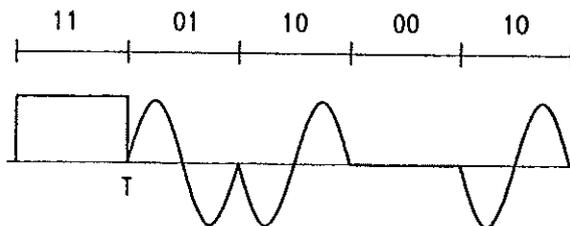
Un sistema de codificación de línea toma los bits de 2 en 2 y les asocia las formas de onda de la figura siguiente. Obsérvese que con cada forma de onda se transmiten 2 bits (se envían $2/T$ bits cada segundo).



Si queremos enviar el siguiente mensaje:

1 1 0 1 1 0 0 0 1 0

La señal transmitida por la línea será la siguiente:



El sistema de codificación de canal 16-QAM se ve en el tema 6

Ejemplo 2:

Se desea emitir el mensaje "HOLA" formateando el texto con ASCII de 7 bits y utilizando un sistema con 16 símbolos ($M = 16$). El sistema de modulación utilizado (16-QAM) genera una forma de onda numerada de $s_0(t)$ a $s_{15}(t)$ para cada grupo de $k = \log_2 16 = 4$ bits.

Distinguir el alfabeto, mensaje, símbolos, bits y formas de onda.

Mensaje:	H	O	L	A		Caracteres		
	10010001	00111110	01100100	1000001		Bits		
	1001	0001	0011	1110	0110	0100	0001	Símbolos
	$s_9(t)$	$s_1(t)$	$s_3(t)$	$s_{14}(t)$	$s_6(t)$	$s_4(t)$	$s_1(t)$	Formas de onda

El alfabeto estará formado por todos los símbolos entre 0000 y 1111

Velocidad de símbolo y velocidad de transmisión

Relativas a la cantidad de información que se envía por unidad de tiempo, se manejan las siguientes definiciones:

- Se denomina **velocidad de símbolo** al inverso del intervalo entre símbolos emitidos por el sistema. Se mide en símbolos por segundo. Tradicionalmente a la unidad "símbolo por segundo" se le ha denominado **baudio**.

$$V_s = \frac{1}{T} \text{ baudios} \rightarrow \frac{\text{símbolos}}{\text{s}}$$

- Se denomina **velocidad de transmisión** del sistema al número de bits por segundo que es capaz de transmitir. Es el parámetro que mide realmente el flujo de información.

En un sistema cualquiera que emita un símbolo (formado por k bits) cada T segundos, se tiene:

$$V_T = \frac{k}{T} \text{ bits/seg.}$$

En un sistema binario ($k = 1$) V_T y V_s coinciden, pero si $M \neq 2$ ya no coinciden.

La relación general entre V_T y V_s es:

$$V_T = V_s \cdot \log_2 M = V_s \cdot k$$

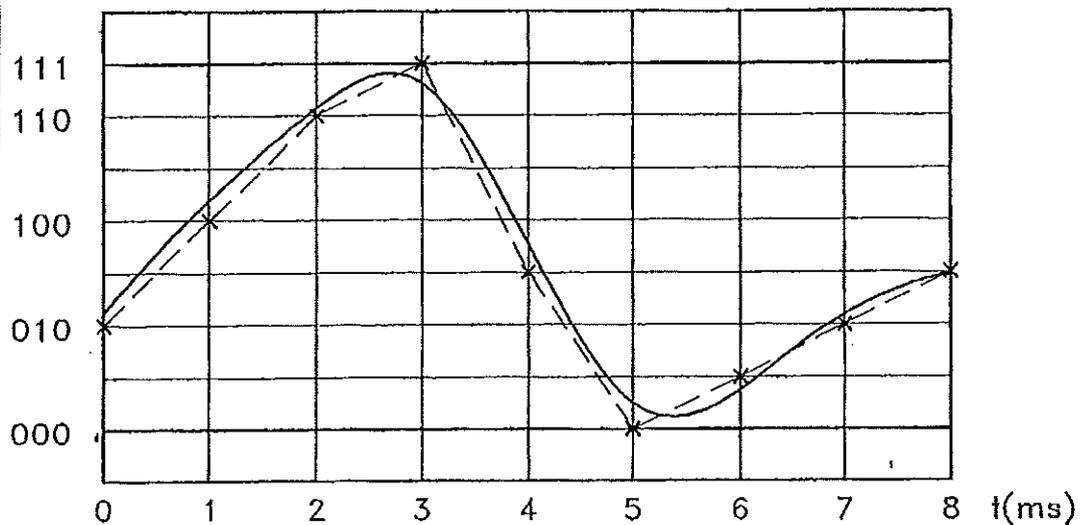
4.4 Modulación por impulsos codificados (MIC o PCM)

Se trata de sistemas que obtienen una señal digital a partir de una analógica por la operación de 3 procesos: muestreo, cuantificación y codificación. El sistema PCM emitirá finalmente las palabras codificadas mediante pulsos.

Esto se ve en el último tema de STLN

- **Muestreo:** Se toman muestras de la señal analógica cada $T_s = 1/f_s$ segundos. El teorema de muestreo nos dice que $f_s \geq 2W$, donde W es el ancho de banda de la señal que se muestrea.
- **Cuantificación:** Las muestras de la señal analógica pueden tomar cualquier valor. Por ello es necesario un proceso de cuantificación que redondea los valores que se envían (o almacenan) a uno de entre un número finito y discreto de niveles de cuantificación. Esto da lugar a lo que se llama "ruido de cuantificación".
- **Codificación:** a cada uno de esos niveles se les asigna una palabra digital, que son los bits que se transmiten utilizando los pulsos. Para codificar L niveles será necesario un número n de bits que vendrá dado por $n = \log_2 L$

El siguiente es un ejemplo para una $f_s = 1$ KHz y $L=8$ niveles. Cada nivel se codificará con $n = \log_2 L = 3$ bits. La figura muestra la señal analógica, su muestreo y cuantificación, y los códigos utilizados para su codificación.



Así, el mensaje enviado (o almacenado) será: 010 100 110 111 011 000 001 010 011

Y la señal en la línea tendría el aspecto mostrado en la figura siguiente.



Como ejemplo de parámetros de sistemas reales, el *Compact Disk* utiliza una $f_s = 44$ KHz y cuantifica cada muestra con $n = 16$ bits, lo que permite tener $L = 2^n = 2^{16}$ niveles de cuantificación.

TEMA 5: TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE

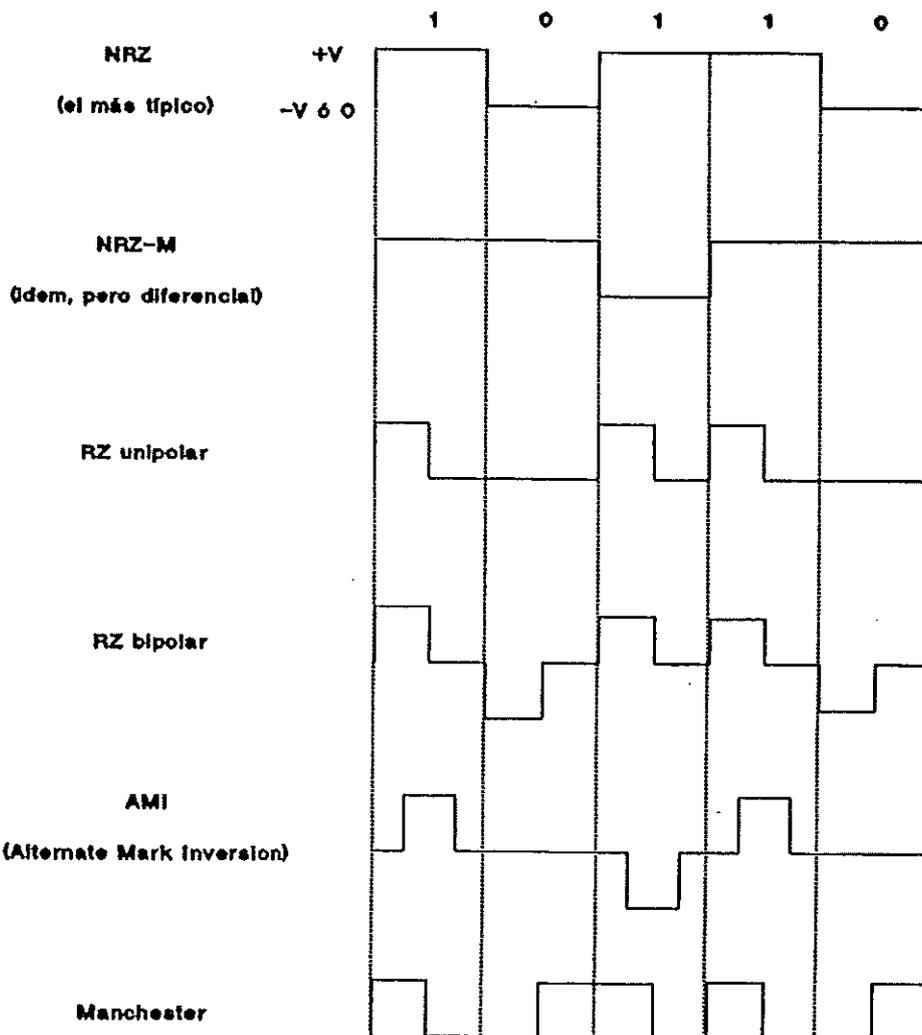
5.1 CODIFICACIÓN DE LÍNEA

5.1.1 Formas de onda típicas

La característica que define que una transmisión digital es en banda base es la codificación de línea empleada: se usan señales "paso bajo" o mejor dicho, señales en las que no hay una portadora que se module. De hecho, las señales que se emplean para definir los símbolos tienen, prácticamente siempre, forma de pulsos.

La figura muestra las formas de onda más típicamente utilizadas.

Se denomina:
NRZ bipolar
cuando "0" es $-V$
NRZ unipolar
cuando "0" es 0



cambia cuando la señal cambia

lead in

Cada 1 cambio de polaridad

Muy bueno para recuperar la señal de reloj

Ofrece cierta protección frente a errores

Muy bueno espectralmente: no DC, no tiene bajas frecuencias, poco ancho de banda...

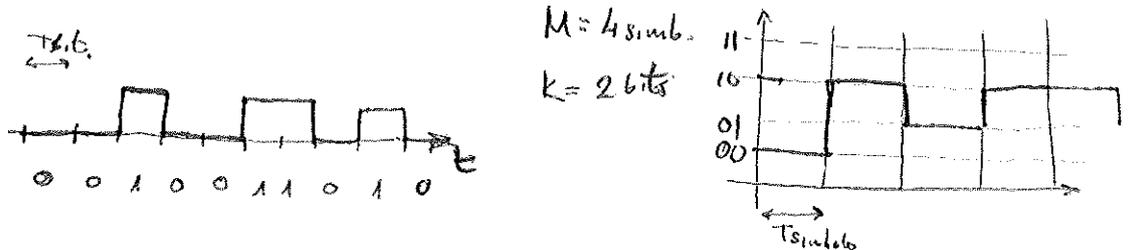
5.1.2 Propiedades

Ahora vamos a discutir qué propiedades son deseables para las señales físicas se emplean para representar la información digital.

1) Binaria versus multinivel

Un sistema binario transmitirá un bit asociado a cada forma de señal, por lo que únicamente existirán dos formas de onda.

Una señal multinivel será más eficiente al enviar varios bits con cada forma de onda (Mayores velocidades de transmisión). Como inconvenientes la circuitería será más compleja, es más difícil el proceso de decisión en el receptor y por ello la BER suele ser más alta.

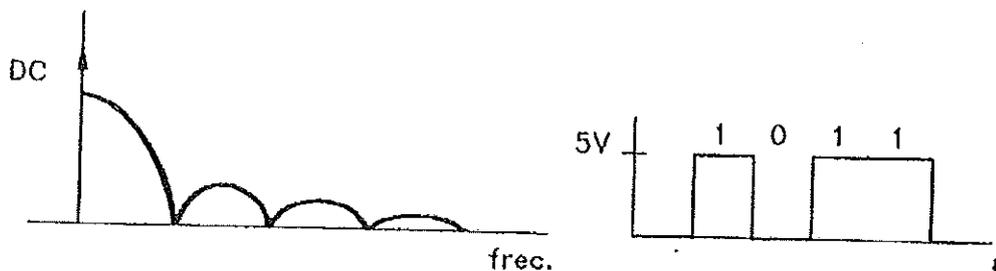


Nosotros vamos a centrarnos sobre todo en los sistemas binarios que son los más usados en banda base.

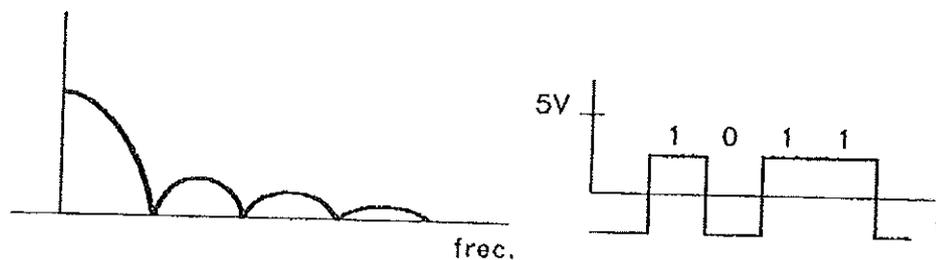
2) Componente continua

Es importante saber si la señal emitida tiene componente de DC. La presencia de DC plantea problemas ya que muchos de los circuitos utilizados (amplificadores, conmutadores, moduladores, etc.) son bastante más complicados si tienen que funcionar a frecuencia cero. Normalmente, si no están acoplados en continua tendrán respuesta pobre en bajas frecuencias por lo que interesa que la señal a transmitir no tenga componentes espectrales importantes en muy bajas frecuencias. Se muestran ejemplos en las siguientes figuras:

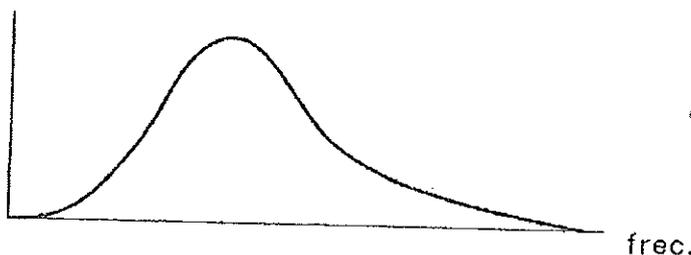
Código con componente continua



Código sin componente continua (delta en $f=0$)



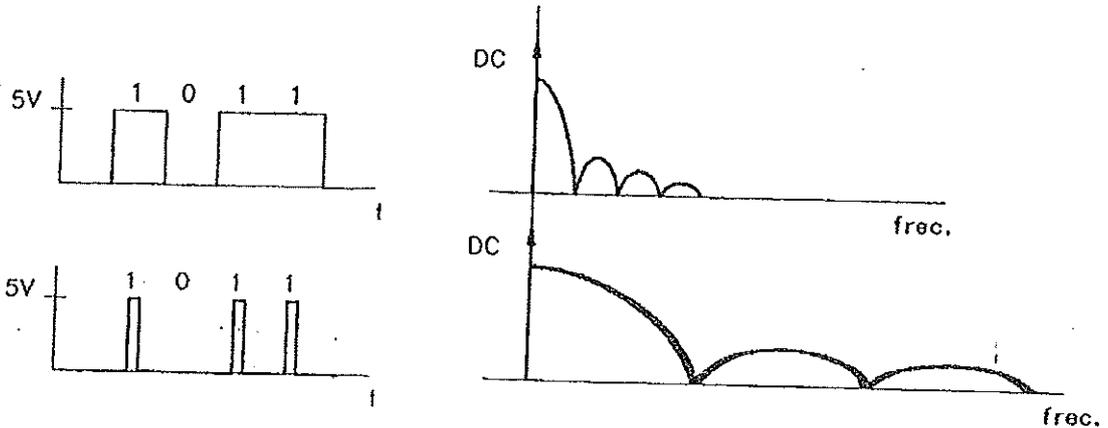
Código sin componentes importantes en bajas frecuencias. Permitirá el uso de circuitos desacoplados en continua.



3) Ancho de banda

Interesa también que el espectro no tenga componentes en frecuencias muy altas ya que eso implica que necesita más ancho de banda para transmitirse: más coste y más ruido. Normalmente se necesita más ancho de banda si se manejan pulsos más estrechos.

Aunque el ancho de banda de estos códigos es infinito en teoría, en la práctica se desprecia a partir de un cierto lóbulo secundario, por lo que se convierte en un ancho de banda finito.



4) Recuperación del reloj

Los códigos con muchas transiciones son más apropiados para recuperar la señal de reloj. Por ejemplo el RZ bipolar.

Como ya se ha dicho, los sistemas de transmisión digital deben estar perfectamente sincronizados. Para ello, el transmisor (TX) y el receptor (RX) deben trabajar con la misma señal de reloj. Eso se consigue enviando el reloj por una línea aparte (poco eficiente) o utilizando circuitos recuperadores de reloj, parecidos a los recuperadores de portadora que se comentaron en el tema 3.

5) Inmunidad al ruido

En el canal se añade ruido que puede hacer confundir un símbolo con otro. Como se verá, la forma de cuantificar la gravedad de este efecto es mediante la medida de la "probabilidad de error" en función de la SNR. Normalmente el comportamiento es mejor a mayor energía por bit.

6) Protección frente a errores

Por ejemplo el código AMI

La forma de algunos códigos utilizados permite detectar si ha ocurrido algún error en la transmisión.

Conceptualmente, es como introducir algo de codificación de canal en la forma de onda.

7) Codificación diferencial

En las codificaciones diferenciales cada símbolo tiene una forma de onda que depende de la forma de onda anterior. Lo más típico es usar pulsos con dos niveles que se asignan de la siguiente forma:

Bit = 0 Se conserva el mismo nivel del intervalo anterior.

Bit = 1 Se cambia el nivel respecto al utilizado en el intervalo anterior.

La ventaja es que la transmisión es inmune a una inversión de la señal, lo que puede ocurrir a veces (por ejemplo: necesidad de incluir un amplificador inversor en algún punto)

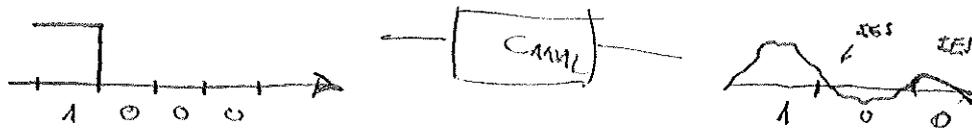
5.2 INTERFERENCIA ENTRE SÍMBOLOS

5.2.1 Descripción del fenómeno

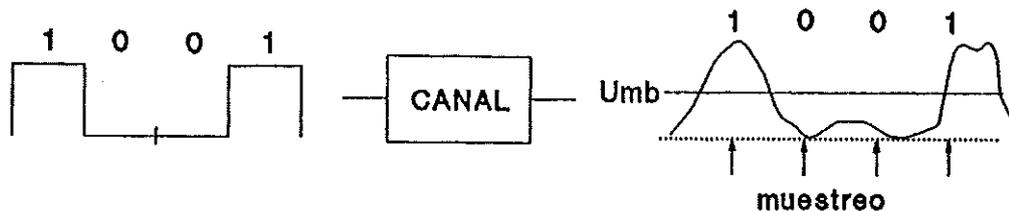
En una transmisión digital se envía un símbolo del alfabeto cada T segundos. Eso implica (normalmente) que las señales que se empleen sean de duración máxima T , para cada símbolo.

Fuera de esos T segundos el pulso debe extinguirse totalmente, ya que ahí se deberá colocar el pulso correspondiente al siguiente símbolo transmitido.

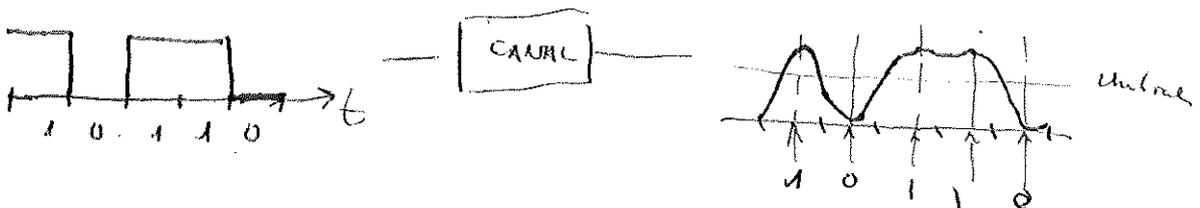
Sin embargo, aparece un importante problema: una señal de duración T finita tiene un ancho de banda infinito. En la práctica el canal tendrá un ancho de banda limitado y como consecuencia la señal se deformará en el tiempo ocupando una duración superior a T , e interfiriendo a los siguientes símbolos. Este fenómeno es el conocido como Interferencia Entre Símbolos (IES). Se muestra en la siguiente figura.



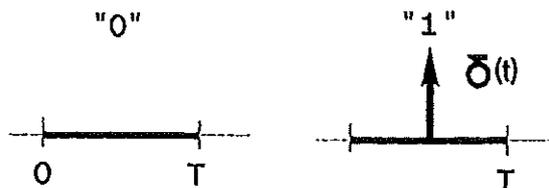
En muchos sistemas de comunicaciones digitales, la decisión sobre el símbolo recibido se realiza muestreando la señal recibida en un cierto instante (por ejemplo en el centro del intervalo de bit) y luego comparando con un umbral, tal como lo indica la figura.



Puesto que al final no se observa la señal en todo su intervalo de duración T sino sólo en un punto, basta con asegurar que en dichos instantes de muestreo no exista IES, aunque exista en otros valores de t .



La forma de conseguir que no exista IES depende del tipo de pulso empleado. En el desarrollo que sigue, supondremos siempre que la codificación de línea empleada es la de la figura:

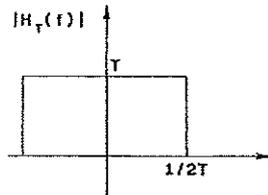


5.2.2 Primer criterio de Nyquist

Las condiciones para que no haya IES son:

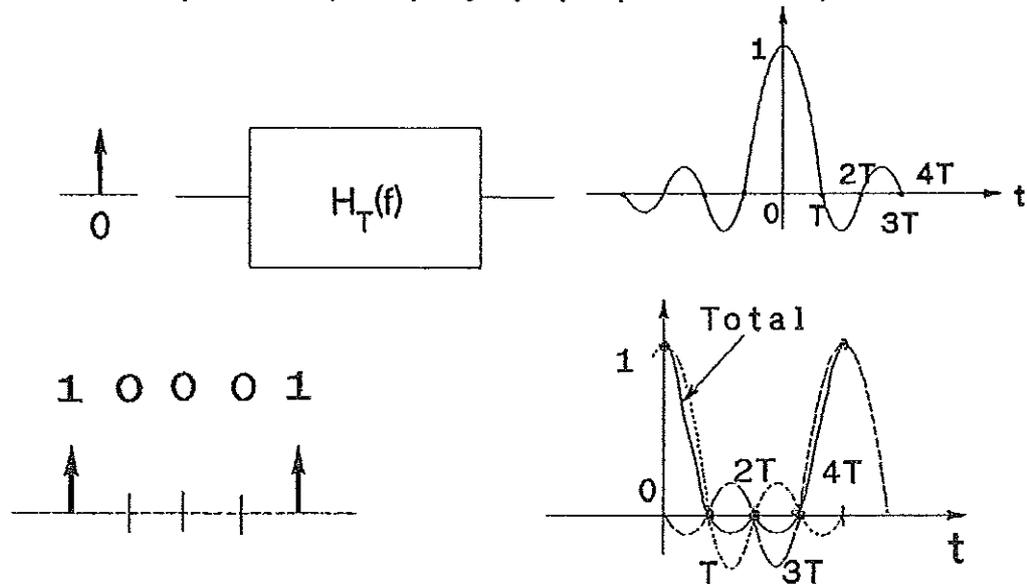
cancel con respecto al impulso que surge en los 0's en los múltiplos del periodo de bits

1. Filtro con respuesta al impulso que cumpla $h(t)|_{t=kT} = 0$ para $k \neq 0$. De todos los filtros que cumplen dicha condición, el de menor ancho de banda es el filtro paso bajo ideal de ancho de banda $1/2T$



2. Codificación de línea con forma de onda $k\delta(t)$ (con la k podemos conseguir más símbolos que sólo el 0 y el 1, por ejemplo para pulsos multinivel)

Veremos cómo estudiar la IES con otras codificaciones de línea que no sean deltas, directamente en los ejercicios, basándonos en los desarrollos aquí expuestos.



3. Normalmente la respuesta en frecuencia de un canal real, $H_T(f)$, no tendrá la forma del filtro paso-bajo ideal. En general, tampoco tiene por qué cumplir la condición general de $h(t)$ para que no exista IES. Si se desea en estos casos eliminar la IES se recurre a la ecualización de la respuesta del canal. La ecualización consiste simplemente en la inclusión de un filtro adicional $H_E(f)$, de tal forma que la respuesta total del sistema $H_T(f) \cdot H_E(f)$ tenga propiedades de IES nula. Llamando $H_{IDEAL}(f)$ a esta respuesta deseada, el filtro ecualizador a introducir será:

$$H_E(f) = \frac{H_{IDEAL}(f)}{H_T(f)}$$

El teorema de Nyquist dice además que el filtro ideal es el que tiene el menor ancho de banda posible de entre todos lo que garantizan IES nula, para un T dado. De esta forma, intrínsecamente se está dando la máxima velocidad de transmisión que puede enviarse por un canal de un cierto ancho de banda B . En realidad el teorema de Nyquist no define el número máximo de bits/seg sino la máxima velocidad de símbolo. Por un canal de B hertzios de ancho de banda se pueden transmitir, a lo sumo $V_{S_{MAX}} = 2B$ baudios. Pero si se emplea un alfabeto de $M = 2^k$ símbolos, pueden enviarse $V_T = k \times 2B$ bits cada segundo.

5.3 CANALES RUIDOSOS. PROBABILIDAD DE ERROR

Ahora supongamos que tenemos suficiente ancho de banda para transmitir sin IES y que el factor que limita es el ruido. Sólo vamos a considerar el caso en el que la señal se contamina con ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN).

5.3.1 Planteamiento del problema

Como se ha dicho el transmisor emitirá cada T segundos una señal para denotar un símbolo.

En el caso binario:

- se emite $s_0(t)$ para enviar un "0"
- se emite $s_1(t)$ para enviar un "1".

El receptor recibirá la señal enviada más un ruido aditivo gaussiano:

$$z = s_i(t) + n(t)$$

Se trata, observando z , de decidir cual de las siguientes hipótesis es la correcta:

H_0 : "se ha enviado la señal $s_0(t)$ "

H_1 : "se ha enviado la señal $s_1(t)$ "

Se denota D_i como el hecho de decidirse por la hipótesis H_i .

Debido al ruido, la decisión no será siempre correcta, apareciendo errores de dos tipos:

- **Falsa alarma:** consiste en decidir D_1 cuando la hipótesis correcta es H_0 . La probabilidad de que esto ocurra se conoce como Probabilidad de Falsa Alarma y es:

$$P_{FA} = P(D_1 / H_0)$$

- **Pérdida:** consiste en decidir D_0 cuando ha ocurrido H_1 . Su probabilidad es:

$$P_M = P(D_0 / H_1)$$

M de missing

A veces, en lugar de P_M se da su complementario, la Probabilidad de Detección:

$$P_D = 1 - P_M = P(D_1 / H_1)$$

En consecuencia, la probabilidad de que ocurra un error en la transmisión de un bit es:

$$P_e = P_{FA} \cdot P(H_0) + P_M \cdot P(H_1)$$

En la mayoría de los sistemas las probabilidades *a priori* de las dos hipótesis son idénticas, por lo que:

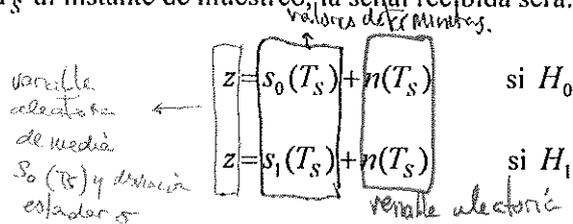
$$P_e = \frac{P_{FA} + P_M}{2} \equiv BER \quad (\text{Bit Error Rate})$$

Esta Probabilidad de Error o BER es el parámetro que mejor define la "calidad" o "fidelidad" del sistema de comunicaciones digital, de forma análoga a como la SNR lo es para el caso analógico.

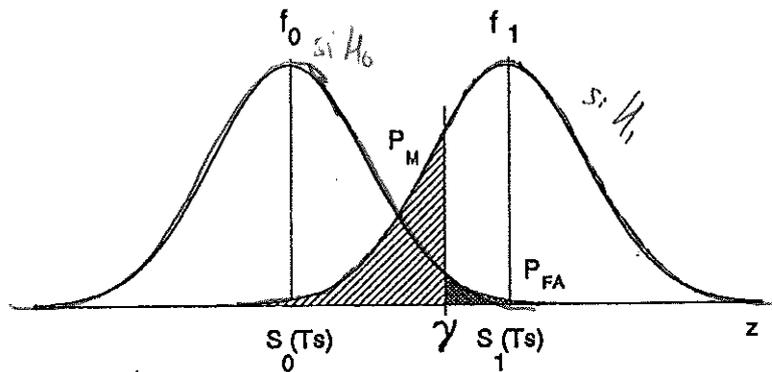
5.3.2 Receptor por muestreo

Como ya se comentó al hablar de la IES, una posible forma de decidir es muestrear la señal y comparar lo recibido con un umbral.

Si llamamos T_s al instante de muestreo, la señal recibida será:



donde $n(T_s)$ es una muestra de un ruido gaussiano, luego será una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza σ^2 . $s_0(T_s)$ y $s_1(T_s)$ son constantes deterministas. Luego z será una variable aleatoria gaussiana de desviación típica σ y media $s_0(T_s)$ ó $s_1(T_s)$ dependiendo de que haya ocurrido H_0 ó H_1 . El umbral de decisión, γ , deberá estar situado entre ambas medias. La figura muestra las f.d.p. y la situación del umbral.



Si se elige γ muy alto la P_{FA} se hace pequeña pero aumenta P_M . γ pequeño significa muy pocas pérdidas pero muchas falsas alarmas. Normalmente se suele buscar γ_{opt} definido como aquel que minimiza la P_e total: $P_e = P_{FA} \cdot P(H_0) + P_M \cdot P(H_1)$

Si $z > \gamma$ se decidirá D_1 y en caso contrario $z < \gamma$ se decidirá D_0 .

La probabilidad de falsa alarma será:

$$P_{FA} = P(D_1 / H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} f_0(z) dz$$

$$P_M = P(D_0 / H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} f_1(z) dz$$

Para el cálculo de probabilidades con funciones gaussianas resulta muy útil la función error, $erf(x)$, y su complementaria $erfc(x) = 1 - erf(x)$ que se definen como:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

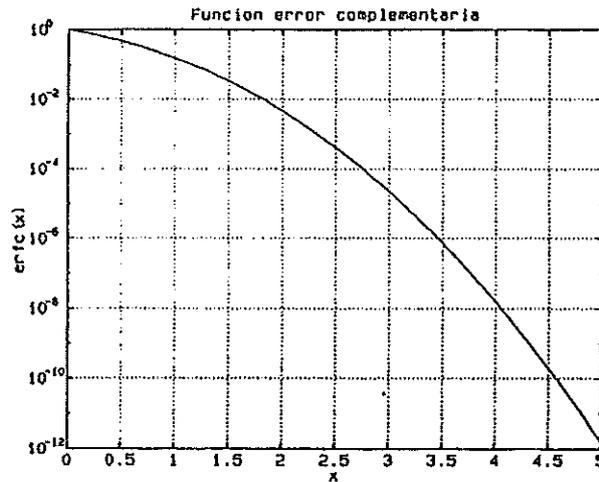
Recuerda que la varianza de un ruido gaussiano es igual a la potencia de ruido

$$\sigma^2 = N$$

En ISAL utilizábamos la tabla de la Normal $N(0,1)$ pero aquí utilizaremos la función de error

Como las integrales que aparecen en $erf(x)$ y $erfc(x)$ no se pueden resolver analíticamente utilizaremos la gráfica de $erfc(x)$ para calcular un valor aproximado cuando sea necesario.

Esta gráfica está en las hojas amarillas que se llevan al examen



A partir de $erf(x)$ y de $erfc(x)$ es inmediato el cálculo de la probabilidad de P_{FA} y P_M :

$$P_{FA} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\gamma - s_0(T_s)}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

umbral (puntoa sobre γ)
valor señal asociado a 0 (puntoa sobre $s_0(T_s)$)
desviación estándar (puntoa sobre σ)

$$P_M = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{s_1(T_s) - \gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

$$P_N = 0$$

Estas fórmulas se obtienen aplicando la definición y las propiedades de la gaussiana

Caso particular importante

El caso más frecuente es que $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$ (datos equiprobables). En tal caso, el valor óptimo de γ está siempre donde se cortan las dos distribuciones. Se tiene, por tanto:

$$P_{FA} = P_M = P_e$$

quedando finalmente:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Fórmula para umbral óptimo y datos equiprobables

donde

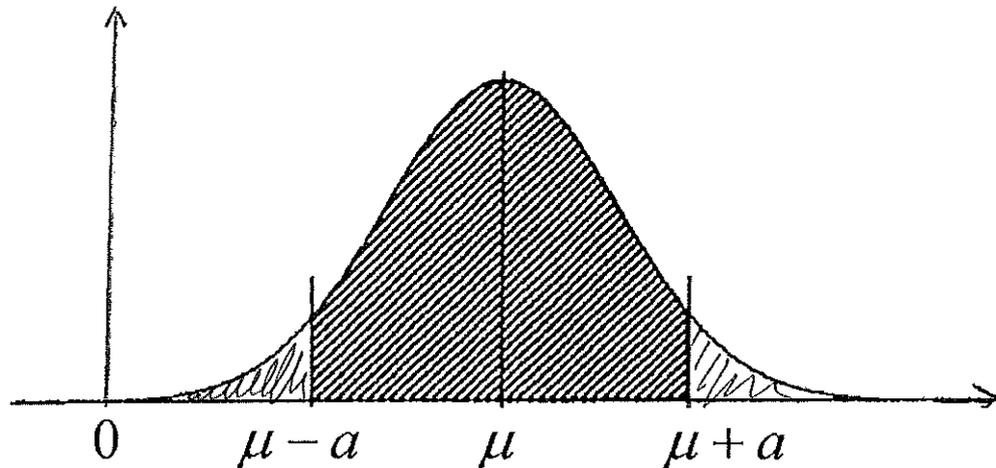
$$\Delta = |s_1(T_s) - s_0(T_s)|$$

Cálculos con la distribución normal

La fdp de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ de media μ y varianza σ^2 es:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Nosotros calcularemos siempre las probabilidades poniéndolas en función de las funciones de error $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$



Las probabilidades más útiles son las siguientes:

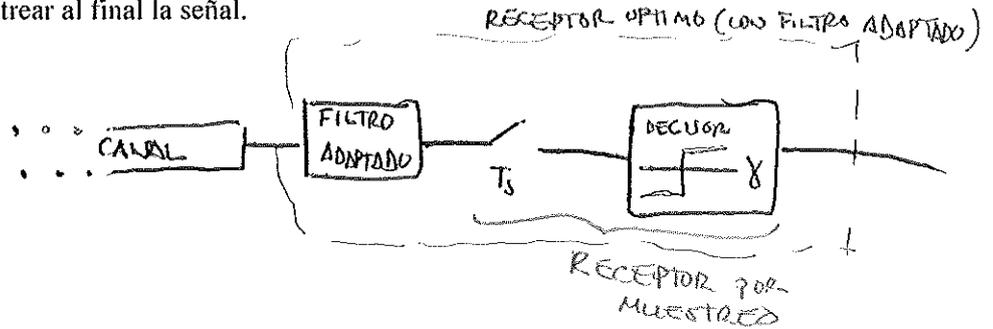
Probabilidad de la zona sombreada: $P(\mu - a < z < \mu + a) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)$

Probabilidad de la zona sin sombrear: $P(|x - \mu| > a) = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)$

5.3.3 Receptor con filtro adaptado

Filtro adaptado

El anterior esquema de recepción (por muestreo) no es el óptimo porque sólo emplea el valor de $s_0(t)$ y $s_1(t)$, en un instante de tiempo. Sería bueno tratar de "integrar" de alguna forma toda la información que se tiene de $s_i(t)$ antes de muestrear. El proceso adecuado para hacerlo es utilizar un filtro con respuesta $h(t)$ apropiada. El proceso final de decisión se tiene que basar en un único número z , que se comparará con un umbral. En consecuencia seguirá siendo necesario muestrear al final la señal.

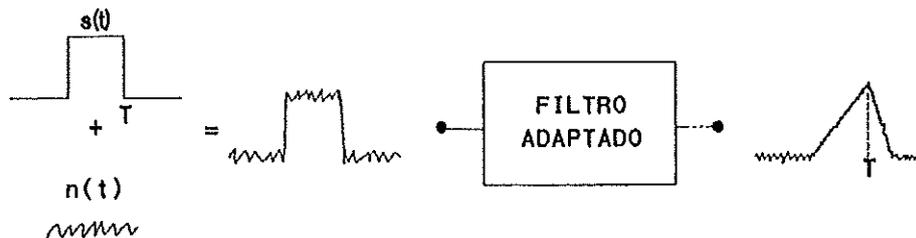


Se muestrea en $t=T=1/V_s$ porque en ese instante ya se ha recogido toda la información de una señal de duración T .

El filtro $h(t)$ debe cumplir una doble misión: integrar toda la información de la señal $s_i(t)$ y eliminar ruido. El problema ahora es determinar cuál es la $h(t)$ óptima.

Dada una determinada forma de onda $s(t)$, existe una $h(t)$ óptima tal que un filtro con dicha respuesta maximiza el cociente S/N de salida en el instante T . Ese filtro recibe el nombre de filtro adaptado a $s(t)$.

En realidad el filtro puede (y suele) distorsionar mucho la forma de $s(t)$. Sin embargo, esto no importa, ya que la única cantidad relevante es $s_{OUT}(t=T)$. El valor de la señal de salida en otros instantes de tiempo carece de importancia. La figura ilustra lo dicho.



IMPORTANTE:
Si el filtro está adaptado a una señal, también lo estará a cualquier otra que sea proporcional a ella.

El filtro adaptado recibe ese nombre porque consigue el máximo de $S/N(t=T)$ si y sólo si a la entrada está presente la señal $s(t)$ para la que ha sido diseñado o una señal proporcional a ella. Es decir está adaptado a esa forma de onda concreta. La SNR de salida ante otras entradas distintas de $s(t)$ no tiene por qué ser alta.

Es posible (aunque complejo) calcular cuál debe ser la función de transferencia $H(f)$, del filtro adaptado. Si $S(f)$ es la transformada de Fourier de $s(t)$, entonces la función de transferencia del filtro adaptado es:

$$H(f) = S^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT} \leftrightarrow h(t) = s(T-t)$$

Además el valor de tensión de la señal a la salida del FA en el instante de muestreo será:

$$s_{OUT}(t)|_{t=T} = s(t) * h(t)|_{t=T} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau |_{t=T}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \underbrace{s(T-\tau)}_{h(\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T-\tau) d\tau = E$$

E es la energía de la señal. ¡OJO! Se trata de una tensión, aunque su valor numérico coincide con la energía

Por lo que la potencia de la señal en ese instante será: $S = [s_{OUT}(T)]^2 = E^2$

Y la de ruido (haciendo uso del ancho de banda equivalente de ruido del filtro):

$$N = \frac{\eta}{2} B_{eq} = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |S^*(f) e^{-j2\pi f T}|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|S(f)|^2}_{E} df = \frac{\eta}{2} E$$

Por lo que la SNR a la salida del filtro en el instante de muestreo será:

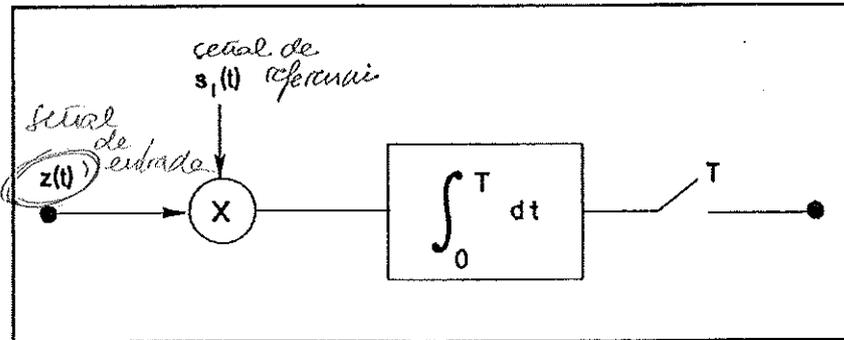
$$\left. \frac{S}{N} \right|_{t=T} = \frac{2E}{\eta}$$

Nota:
Cualquier filtro que tenga una respuesta proporcional a la del filtro adaptado mantiene la misma SNR a la salida

Donde E es la energía de la señal $s(t)$

Correladores

Si la señal $s(t)$ es complicada puede ser difícil (o imposible) diseñar un filtro cuya respuesta se ajuste suficientemente bien a la adaptación. Una forma equivalente de realizar la operación de un filtro adaptado es el uso de un correlador. Un correlador es un dispositivo que calcula la correlación entre la señal de entrada y una señal de referencia $s_R(t)$. El esquema de este dispositivo es el de la figura.



La salida se obtiene cada T segundos repitiendo cada vez la señal de referencia. El valor de la salida será:

$$y(t) = \int_0^T z(t) \cdot s_i(t) dt$$

Si $z(t) = s_i(t)$:

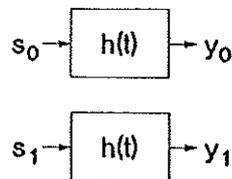
$$y(t) = \int_0^T s_i^2(t) dt = E$$

E es la energía de la señal. ¡OJO! Se trata de una tensión, aunque su valor numérico coincide con la energía

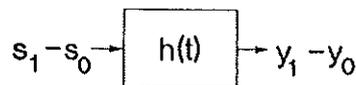
Puede comprobarse que si la señal de referencia sólo está definida entre 0 y T entonces la salida de un correlador y la de un filtro adaptado, en $t = T$, coinciden para cualquier señal de entrada. El correlador debe verse aquí como una forma alternativa de realizar la función del filtro adaptado.

Utilización del filtro adaptado. Probabilidad de error

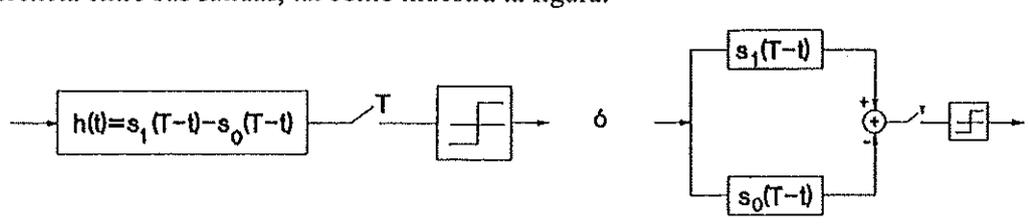
En general $s_0(t)$ y $s_1(t)$ no son proporcionales, por lo que no es posible maximizar la SNR de salida, para ambas entradas, con un único filtro. De hecho, esto no importa ya que el objetivo no es maximizar la SNR de cada salida independientemente, lo que hay que maximizar es el cociente entre "la diferencia entre las dos posibles salidas" y el ruido. Es decir, si se coloca un filtro con respuesta $h(t)$, ante la entrada s_0 se producirá la salida y_0 y ante la entrada s_1 la salida y_1 (véase la figura). Lo que se busca es la $h(t)$ que maximice la diferencia entre ambas salidas frente al ruido:



La diferencia $y_1(t) - y_0(t)$ es precisamente la señal que se obtiene al hacer pasar $s_1(t) - s_0(t)$ por el filtro. Por tanto, lo que se busca es el filtro que maximiza la SNR de salida, en $t = T$, en el esquema de la figura.



Ese problema es conocido. Su solución es que $h(t)$ sea el filtro adaptado a la señal diferencia $s_1(t) - s_0(t)$. El esquema óptimo de decisión incluirá, por tanto, un filtro adaptado a la señal diferencia, o bien, dos filtros independientes, adaptados a s_1 y s_0 , para después tomar la diferencia entre sus salidas, tal como muestra la figura.



Si se denomina Δ a la diferencia entre y_1 e y_0 en $t = T$, la probabilidad de error será:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Delta}{\sigma} \right]$$

donde se ha supuesto que el umbral γ se ha colocado en su valor óptimo. De la teoría del filtro adaptado se sabe que la SNR en el instante de muestreo, en la estructura de la figura es:

$$SNR = \frac{\Delta^2}{\sigma^2} = \frac{2 \cdot E_d}{\eta}$$

Siendo E_d la energía de la señal diferencia $s_1(t) - s_0(t)$. Substituyendo, es inmediato determinar la probabilidad de error para el esquema de recepción óptimo:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right]$$

expresión que determina la probabilidad de error para el receptor óptimo.

Véase la teoría del receptor por muestreo. Fórmula para datos equiprobables y umbral óptimo.

Obsérvese que no importa la forma de las señales, sino únicamente la energía de su diferencia.

Esta fórmula no sólo vale para sistemas en banda base, sino también para modulaciones digitales, ya que en ningún momento hemos exigido que la señal fuera paso bajo. Esta expresión es válida en general siempre que utilicemos receptor óptimo.

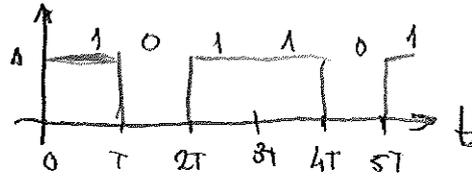
Ejemplo de aplicación

Se van a determinar las probabilidades de error con receptor óptimo, del código NRZ unipolar y bipolar.

• Caso unipolar

$$s_1(t) = A$$

$$s_0(t) = 0$$



Energía media por bit:

$$E_b = E_0 p_0 + E_1 p_1$$

que suponiendo datos equiprobables:

$$E_b = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)$$

Se detecta con un filtro adaptado a la señal: $s_1 - s_0$, un pulso de amplitud A y duración T. Se expresará el resultado en función de la energía media empleada por cada bit, y la densidad espectral de potencia de ruido presente a la entrada del circuito de decisión.

Energía media por bit $E_b = 1/2 A^2 T$ (supuestos equiprobables)

Energía de la señal diferencia $E_d = A^2 T$

Empleando las expresiones deducidas en el apartado anterior, se tiene:

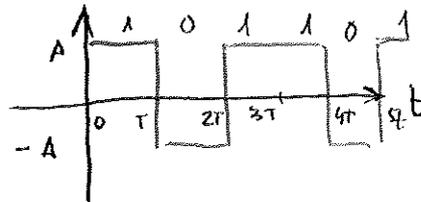
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^2 T}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right)$$

• Caso bipolar

$$s_1(t) = +A$$

$$s_0(t) = -A$$

$$s_1 - s_0 = 2A$$

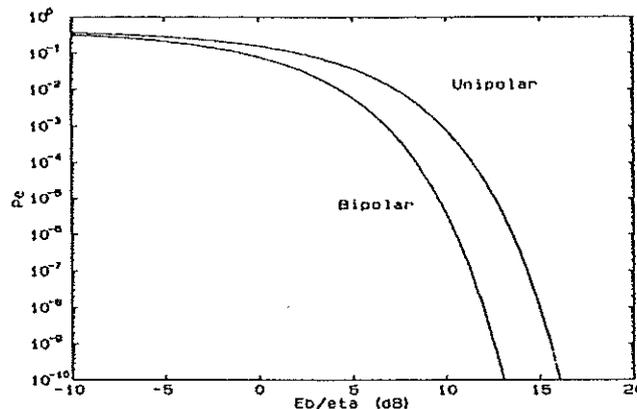


Energía media por bit = $A^2 T$

Energía de la diferencia = $(2A)^2 T = 4A^2 T$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 \cdot A^2 T}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right)$$

La figura muestra ambos resultados. Se observa que para la misma cantidad de ruido presente y para la misma energía media por bit (misma potencia media), el caso bipolar es superior. De hecho, supone un ahorro de 3 dB de potencia para la misma P_e .



Señales ortogonales y antipodales

Se define el coeficiente de correlación entre dos señales s_0 y s_1 como:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_0}} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_1(t) dt$$

Este coeficiente se utiliza para medir el mayor o menor parecido entre señales

A partir del coeficiente de correlación se puede definir la energía de la señal diferencia $s_1(t) - s_0(t)$ como:

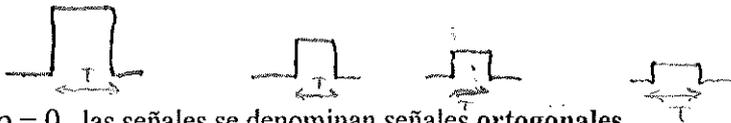
$$E_d = E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_1 E_0}$$

siendo E_0 y E_1 las energías respectivas de las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$.

El coeficiente de correlación ρ sirve para medir el parecido entre la forma de las señales. Se pueden distinguir los siguientes casos particulares:

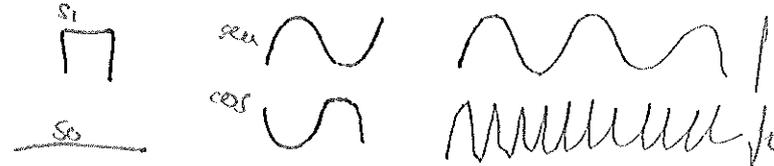
$\rho = 1$, las señales son proporcionales con constante de proporcionalidad positiva.

Por ejemplo los pulsos multinivel



$\rho = 0$, las señales se denominan señales ortogonales.

Por ejemplo un seno y un coseno de la misma frecuencia, o dos sinusoides de distinta frecuencia



$\rho = -1$, las señales se denominan señales antipodales (proporcionales con constante de proporcionalidad negativa).



Con receptor óptimo siempre se necesitan 3 dB menos de SNR para una misma BER si se usan señales antipodales en lugar de ortogonales.

Está claro que para un sistema digital lo que más interesa es $\rho = -1$ (cuanto más distintas sean las señales más fácil será la decisión), aunque también hay sistemas con $\rho = 0$.

Para el caso $E_1 = E_0 = E$, la energía de la señal diferencia queda

$$E_d = 2E(1 - \rho)$$

que vale 0 (si $\rho = 1$), $2E$ (si $\rho = 0$) y $4E$ (si $\rho = -1$).

Pero a veces, sobre todo si hay más de 2 símbolos en el alfabeto, no es posible escoger todas las señales antipodales y también se usan ortogonales.

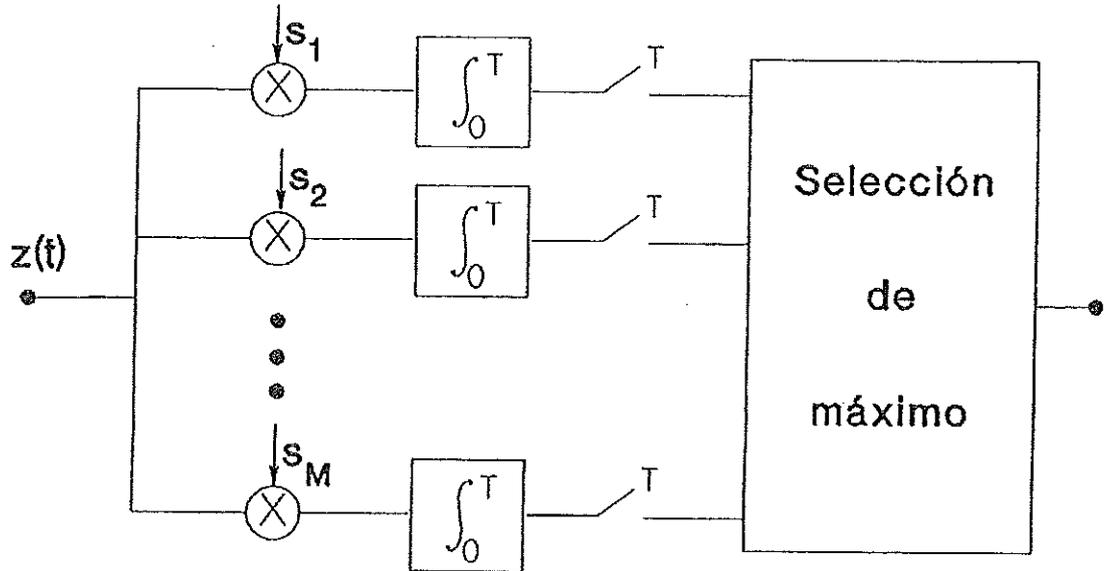
De esta forma se pone de manifiesto como para iguales energías de los símbolos, E_d será tanto mayor (con la correspondiente disminución de la BER) cuanto menor sea ρ , es decir, cuanto más diferentes sean entre sí las señales.

BER = Probabilidad de error

Receptor óptimo para alfabetos con más de dos símbolos

Esto se verá en más detalle en la asignatura de 3er curso CMDG.

En el caso de que el alfabeto sea $M > 2$, el problema se hace más complejo, pero bajo ciertas circunstancias simplificadoras (símbolos equiprobables y energías iguales de todas las señales del alfabeto), se puede demostrar que el receptor óptimo es un banco de M filtros adaptados (o M correladores), cada uno de ellos adaptado a cada una de las posibles señales del alfabeto, más una lógica de decisión que consiste únicamente en decidir la señal a la que corresponda la salida más alta, es decir, la que más correle con la señal recibida. La figura siguiente muestra un ejemplo, en el que los correladores se podrían sustituir si se desea por filtros adaptados a cada una de las señales del alfabeto.



TEMA 6: TRANSMISIÓN DIGITAL MODULADA

En principio, toda la teoría de estos sistemas es idéntica a la del tema anterior. La única diferencia es que ahora las señales empleadas son paso-banda

6.1 ANÁLISIS DE LAS MODULACIONES EN EL PLANO I-Q

6.1.1 Interpretación geométrica. Espacio de señal

El espacio de señal, tal como se va a presentar aquí, sirve únicamente para representar señales sinusoidales, todas ellas de una misma frecuencia conocida f_0 . Es decir, las señales que formarán parte de este espacio son todas las de la forma:

$$x_i(t) = A_i \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot f_0 t + \varphi_i]$$

Donde A_i y φ_i cambiarán de una a otra señal, mientras que f_0 será la misma para todas las señales del espacio. La interpretación geométrica consiste en identificar cada señal con un punto de un espacio. Para ello hay que definir los ejes de ese espacio. En nuestro caso, esos ejes coordenados serán las funciones base:

$$\psi_x = \cos(2\pi \cdot f_0 t) \quad \text{y} \quad \psi_y = -\text{sen}(2\pi \cdot f_0 t)$$

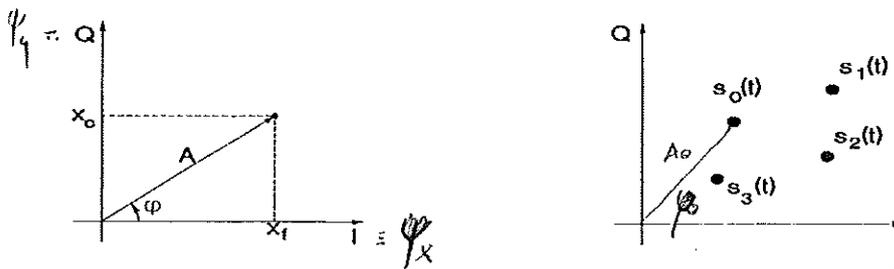
Recordando la envolvente compleja de una señal paso-banda, es inmediato que cualquier señal del espacio se puede escribir como unas coordenadas por las funciones base:

$$x(t) = A \cdot \cos[2\pi f_0 t + \varphi] = X_F \cdot \cos 2\pi f_0 t - X_C \cdot \text{sen} 2\pi f_0 t$$

Las coordenadas de una señal cualquiera del espacio son las constantes X_F y X_C , es decir sus componentes en fase y cuadratura o I - Q. De acuerdo con la figura, son:

$$X_F = A \cdot \cos \varphi \quad X_C = A \cdot \text{sen} \varphi$$

De esta forma cada señal queda representada por un punto en el espacio de señal. En una transmisión digital se usan M señales diferentes para designar los M símbolos del alfabeto. En consecuencia, un sistema determinado tendrá asociado un conjunto de M puntos en el espacio de señal. Ese conjunto de puntos se denomina la constelación de ese esquema de modulación.



En todos los sistemas, en recepción será necesario decidir cual de las posibles señales se ha enviado. Existirá un proceso de toma de decisión y una cierta probabilidad de equivocarse. Esta probabilidad dependerá de lo parecidas o diferentes que sean entre sí las señales posibles. A mayor "parecido", más dificultosa será la decisión y los errores aumentarán. Una primera ventaja de introducir el espacio de señal, es que éste da una medida directa del parecido entre señales: su distancia euclídea en el espacio. A mayor distancia en el plano I - Q, más diferentes son las señales y más fácil el proceso de decisión.

6.2. Recepción en condiciones de ruido. Regiones de decisión

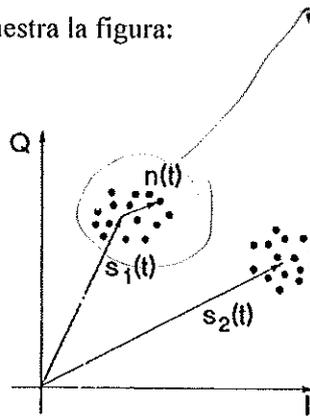
Cuando se transmita una de las señales del sistema, sufrirá normalmente la adición de ruido $n_i(t)$. Aquí aparece un problema si se desea seguir manteniendo el planteamiento de espacio de señal: el ruido es una "señal" que no pertenece al espacio, y por tanto, no se puede representar sobre el plano I-Q.

El problema desaparece inmediatamente en virtud de un teorema (cuya demostración se omite): El ruido total n_i se puede siempre expresar como una componente que sí está dentro del espacio de señal analizado, $n(t)$, más otra componente ortogonal (que ya no contiene componentes del espacio) a la anterior, de acuerdo con: $n_i(t) = n(t) + n_{on}(t)$

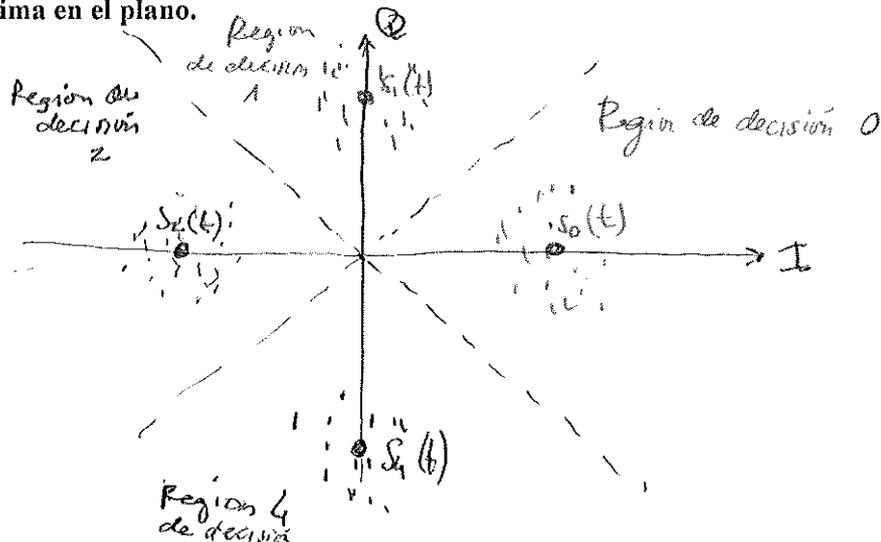
Pues bien, puede demostrarse que, si se utiliza un receptor óptimo, únicamente la componente de ruido que cae dentro del espacio afectará a la detección, siendo la otra suprimida.

Por tanto, basta con quedarse con la idea de que el ruido (al menos, la parte de ruido que interesa) es también un vector del espacio de señal. Eso hará que cada vez que se envíe la señal s_i se reciba la señal más un vector de ruido aleatorio: $z = s_i + n$.

La señal recibida z también será un vector del plano I-Q. Si la potencia de ruido no es muy grande, las señales recibidas, z , se concentrarán alrededor de las señales ideales s_i . El resultado es que lo que se reciben son unos "clusters" alrededor de los puntos de la constelación, tal como muestra la figura:



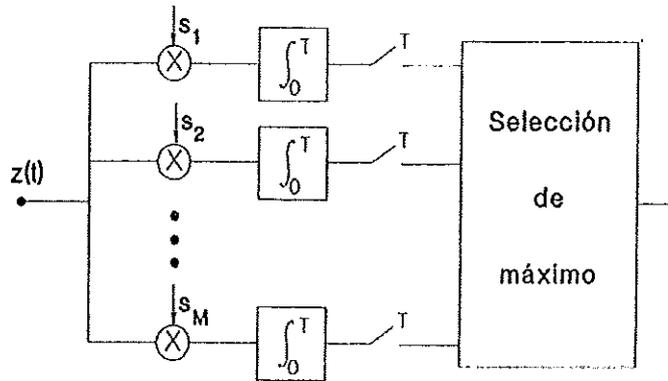
Como siempre el proceso de recepción consiste en, tras recibir z , decidir cual de las posibles señales es la que se ha emitido. El criterio más obvio es buscar la señal de la constelación que tenga "un mayor parecido" con la señal recibida, es decir, la que está más próxima en el plano.



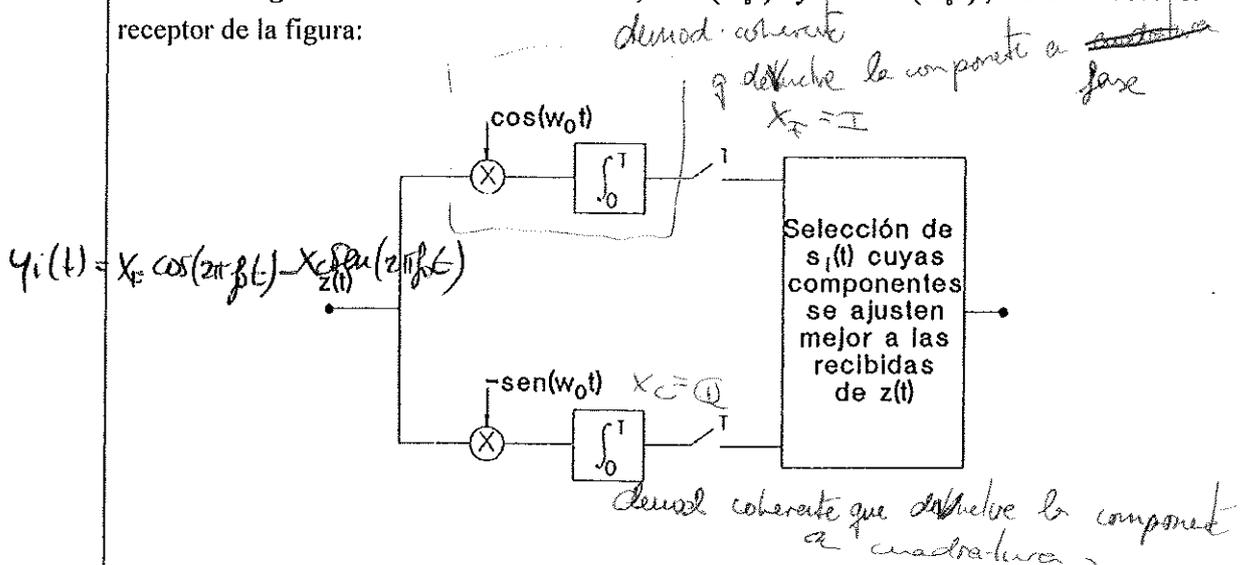
6.3. Esquemas de recepción

El receptor óptimo de este tipo de sistemas puede hacerse como siempre. Para el tipo de señales empleadas sería muy difícil diseñar el filtro adaptado, por lo que se usa un banco de correladores, tal como muestra la figura siguiente (debe recordarse en cualquier caso que dicha estructura sólo es óptima bajo ciertas condiciones).

Este esquema de recepción ya lo vimos en el tema 5



Ahora bien, utilizando el concepto de espacio de señal es posible implementar otra estructura de receptor igualmente óptima, con sólo dos correladores, con señales de referencia iguales a las funciones base, $\cos(\omega_0 t)$ y $-\text{sen}(\omega_0 t)$, obteniéndose el receptor de la figura:



El anterior receptor determina, para la señal de entrada z , sus coordenadas en el espacio de señal z_1 y z_0 . Una circuitería posterior determina a qué región de decisión corresponde ese punto.

La estructura más utilizada es la segunda ya que en sistemas paso-banda es bastante frecuente el caso de que el alfabeto tenga un número elevado de señales (por ejemplo 16 ó 64). Si se emplease la primera estructura en esos casos, haría falta un banco con 16 ó 64 correladores. Sin embargo, se puede obtener el mismo resultado con el segundo esquema y sólo dos correladores.

En la segunda estructura queda patente el hecho de que, del posible ruido presente a la entrada, sólo para el proceso de decisión la parte que correla con las funciones base, quedando su efecto reducido a dos números constantes n_F y n_C (un vector de ruido) que son las salidas de los dos correladores mostrados en el diagrama de bloques, cuando la entrada es el ruido recibido.

Antes de describir las modulaciones concretas que se emplean en la práctica vamos a ver qué propiedades son interesantes.

6.2 PROPIEDADES DEL TIPO DE MODULACIÓN

Protección frente al ruido

El ruido puede provocar errores de decisión. La forma de minimizarlo es hacer que los puntos de la constelación estén lo más alejados posible unos de otros, es decir constelaciones amplias.

Potencia media

El módulo del vector que representa una señal concreta es la amplitud de la sinusoide. Además sabemos que la potencia media de una sinusoide es $A^2/2$. En un sistema de transmisión digital habrá una constelación de M puntos I_i, Q_i , por tanto:

$$P_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{A_i^2}{2} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M (I_i^2 + Q_i^2)$$

Si no son equiprobables:

$$P_m = \sum_{i=1}^M p_i \frac{A_i^2}{2}$$

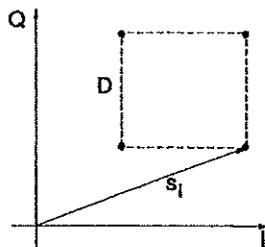
(0, 1)

Estamos suponiendo que todos los símbolos son equiprobables

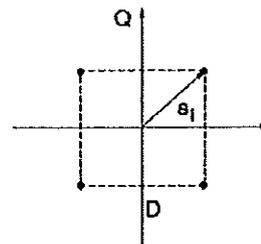
Interesa por tanto I_i y Q_i pequeñas (constelaciones concentradas alrededor del origen). Eso en principio es contrario al efecto de protección contra el ruido. Es lógico: **para mayor robustez frente al ruido se necesita más potencia media. Lo que interesa es buscar un compromiso entre ambos parámetros: potencia media y protección frente al ruido.**

La respuesta es utilizar constelaciones centradas alrededor del origen. Es decir, una constelación que, manteniendo la separación entre puntos necesaria para una buena protección frente al ruido, se distribuya lo más "empaquetadamente" posible alrededor del origen.

En la figura, por ejemplo, se muestran dos constelaciones, con idéntica robustez ante el ruido ya que tienen la misma separación entre símbolos. La segunda, sin embargo, tiene mucha menor potencia media. Dicho de otra forma, si se emplease la misma potencia en ambos esquemas (con distintos valores de D), la probabilidad de error sería mucho menor en el segundo sistema.



Constelación con mucha P_m y protección frente al ruido fijada por D



Constelación con idéntica protección frente al ruido y mucha menor P_m

Esto ya lo vimos en el tema 3 para justificar las ventajas de las modulaciones analógicas de envolvente constante (PM y FM)

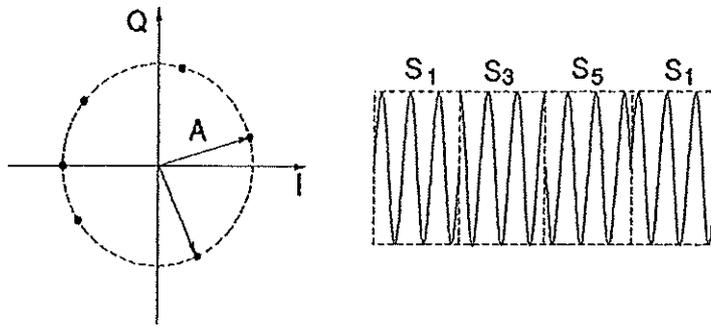
Envolvente constante

Una propiedad deseable en muchos sistemas es que la señal emitida tenga envolvente constante. Esto tiene interés, sobre todo, cuando se produce alguno de los efectos siguientes:

- Canales no lineales:

Muchas veces el transmisor, para que sea eficiente en potencia, trabaja en o cerca de la saturación. En esas condiciones opera en régimen no lineal. Eso implica que sus propiedades (ganancia, fase de inserción, etc.) dependen de la potencia a su entrada. Si las distintas señales del sistema tienen envolventes diferentes, serán afectadas por diferentes ganancias y fase, distorsionando la constelación.

Para que esto no ocurra, sería bueno que a su entrada hubiese siempre (independientemente del símbolo transmitido) una misma potencia fija, es decir, una envolvente constante. Eso se consigue, por ejemplo, si todos los puntos de la constelación tienen la misma amplitud, es decir, están sobre una circunferencia, tal como se ve en la figura.



- Canales de atenuación variable o desconocida

El caso típico es la transmisión por radio, en el que la atenuación del canal tiene muchas fluctuaciones. En esos casos no puede basarse la decisión del receptor en la amplitud de la señal ya que no sería posible distinguir los cambios de amplitud de la señal debidos a información o debidos a fluctuaciones del canal.

Eficiencia espectral

Este parámetro tiene que ver con la cantidad de ancho de banda que se necesita para transmitir un volumen de información dado. Es un parámetro adimensional que se define como:

$$e = \frac{V_T (\text{bit / seg.})}{B_{\text{necesario}} (\text{Hz})}$$

Obviamente, interesa que sea grande, para poder soportar una V_T alta, dado B o bien, para requerir un ancho de banda pequeño, dada V_T .

Una forma de lograr eficiencia espectral es la utilización de alfabetos grandes

6.3 ESQUEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL

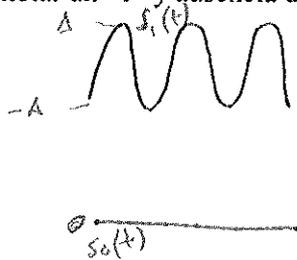
Es equivalente a la AM analógica

6.3.1 ASK: Amplitude Shift Keying

Definición, generación y demodulación

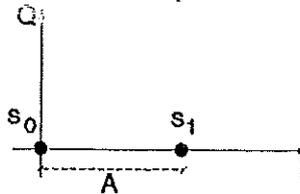
Definición

La versión básica (binaria) de este sistema, consiste en emitir una senoide de amplitud A para denotar un "1" y ausencia de señal para el símbolo "0", tal como muestra la figura.



También existe una versión multinivel, con distintas amplitudes de la senoide para los distintos símbolos. Se denomina MASK

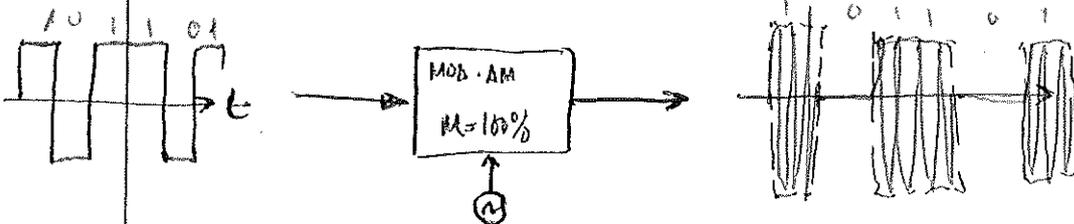
La constelación de este esquema de modulación está formada por dos puntos, uno en el origen, asociado al dato "0" y uno en una senoide de amplitud A asociado al dato "1". La fase de dicha senoide es irrelevante. Por comodidad se asumirá fase nula, resultando la constelación de la figura.



Generación

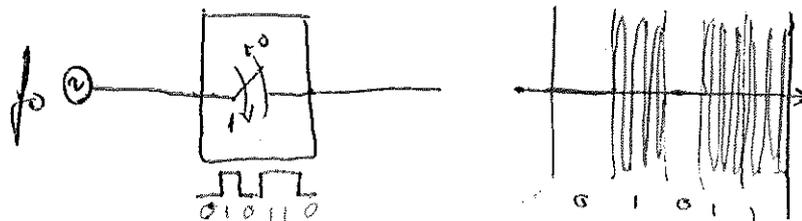
Puede obtenerse modulando en amplitud, al 100 %, una portadora con un código NRZ bipolar (o modulando en DBL un código NRZ unipolar, lo que es equivalente).

NRZ bipolar



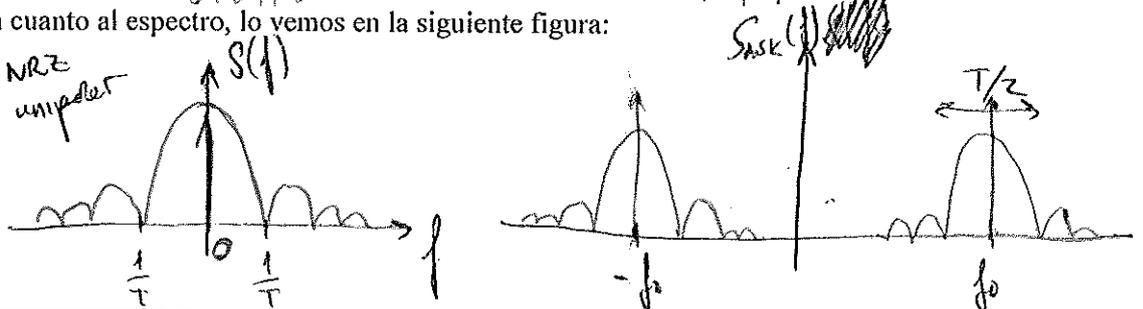
NRZ unipolar se usa MOD DBL

Otra forma de generarla es mediante un interruptor controlado electrónicamente (un switch) que interrumpa o no la transmisión de una portadora, en función de los datos (modulación ON/OFF).



En cuanto al espectro, lo vemos en la siguiente figura:

A mayor $V_b(f)$ mayor ancho banda ocupado

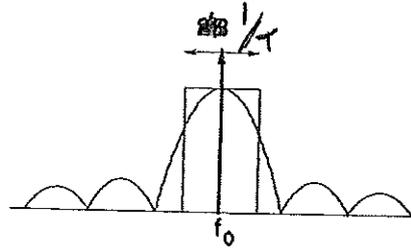


La demodulación de la señal ASK es similar a la de AM. Puede utilizarse un simple detector de envolvente (demodulación incoherente) o demodulador coherente.

Propiedades, Eficiencia espectral

1.- El sistema no va a ser muy bueno en cuanto al ruido. Al estar la constelación descentrada respecto al origen no va a optimizar la $P_e(S/N)$.

2.- Para el cálculo de la eficiencia espectral, es necesario saber cual es el ancho de banda que ocupa en la práctica la modulación (ya que en teoría es infinito). Se puede demostrar que el ancho de banda que se puede utilizar en la práctica evitando IES es de $B=1/T$, como muestra la siguiente figura:



Por ello, la eficiencia espectral es:

$$e = \frac{V_T}{B} = \frac{\frac{1 \text{ bit}}{T \text{ s}}}{\frac{1}{T} \text{ Hz}} = 1 \text{ bit/s/Hz}$$

3.- ASK tampoco es una modulación de envolvente constante.

4.- Su mayor (única) ventaja es la sencillez, tanto en su generación como en la recepción.

En general, para las modulaciones digitales (excepto para FSK) se puede demostrar que el ancho de banda mínimo a transmitir es $B = V_S = \frac{1}{T}$

En ASK binaria:

$$V_S = V_T = \frac{1 \text{ bit}}{T \text{ s}}$$

Esta es la eficiencia espectral teórica. En la práctica será algo peor ya que no es posible construir filtros ideales. Si se quiere mejorar habría que hacer una MASK, con varios estados de amplitud de la moduladora.

6.3.2 FSK: Frequency Shift Keying

Definición, generación y demodulación

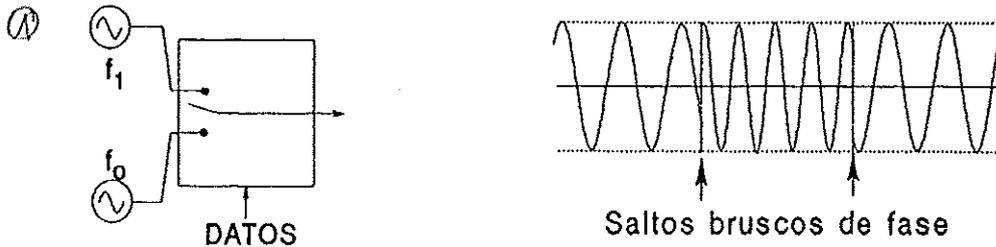
Definición

Al construirse el alfabeto con señales de distintas frecuencias, no admite la representación geométrica del espacio señal.

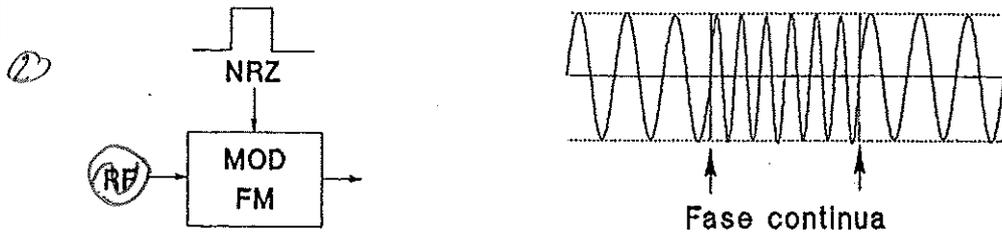
En FSK se envían tonos de distintas frecuencias para designar los distintos símbolos del alfabeto. Para el caso binario se tendrá una frecuencia f_0 para designar el cero lógico y f_1 para el "1". Cuando se trabaja con alfabetos mayores ($M > 2$) se suele denominar a la modulación MFSK. Aquí se va a centrar el estudio en el caso binario.

Generación

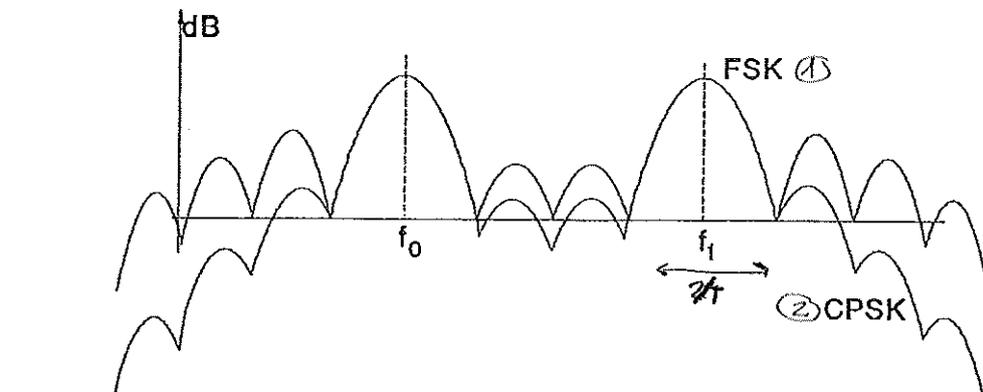
Una forma sencilla de generar la señal FSK es utilizar dos osciladores independientes, y conmutar entre ellos en función del dato a transmitir. Eso genera una señal FSK en la que no hay continuidad de fase. Eso es un efecto nocivo, ya que los saltos bruscos producen un espectro más ancho.



Otra opción de generación, con mejores resultados espectrales, es utilizar un modulador FM atacado por un código NRZ. En este caso se genera una señal FSK con fase continua (CPFSK).

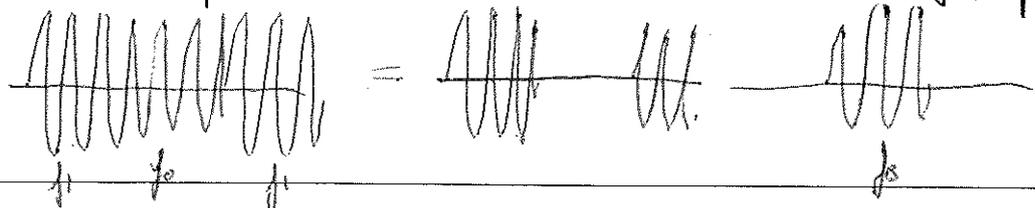


Es espectro será el que sigue:



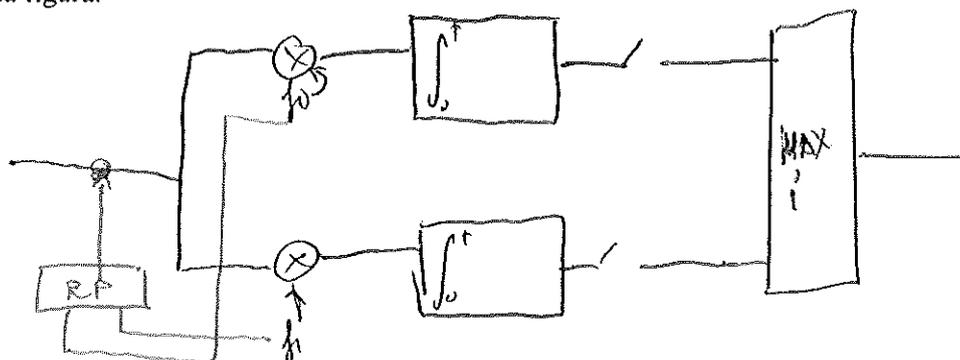
Observa como los lóbulos secundarios caen mucho más rápido en la CPFSK que en la FSK con saltos de fase, lo que hace que en la práctica, la primera tenga un ancho de banda menor.

La FSK se puede entender como la suma de 2ASK de freq. f_0 y f_1



La recepción de FSK puede ser coherente o no coherente. La recepción coherente (óptima) consiste en utilizar un filtro, o bien un correlador, adaptado a la forma de la señal, con el esquema de la figura.

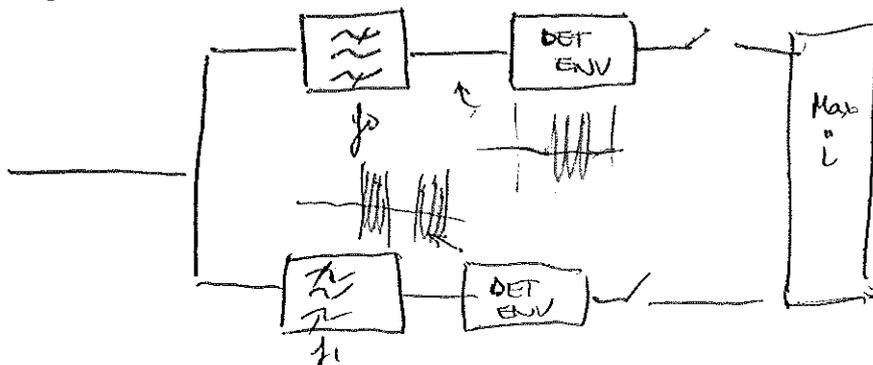
Receptor óptimo



El problema de este esquema es que se obliga a tener una referencia de la fase (como ocurre en todos los esquemas de recepción coherente).

Dado que normalmente no se conoce la fase de las señal que viene, si se quiere evitar la inclusión de recuperadores de portadora, se emplean sistemas que distinguen entre s_1 y s_0 fijándose sólo en la frecuencia. Son los esquemas incoherentes, más baratos y con prestaciones algo peores (tanto ASK como FSK suelen ser sistemas muy baratos por lo que lo habitual es usar el esquema de recepción incoherente). El esquema más típico y sencillo es el de la figura.

De entre los receptores no coherentes para FSK, se puede demostrar que este es el mejor: receptor subóptimo



Otra posibilidad, también incoherente, es utilizar un discriminador de FM. Eliminando la DC de su salida se obtendrá un código NRZ bipolar sobre el que hacer la decisión. Las prestaciones son totalmente equivalentes a las del esquema anterior.

Propiedades. Eficiencia espectral

La mayor ventaja de FSK frente a ASK es la de ser una modulación de envolvente constante. FSK es una modulación muy típica de sistemas de bajo coste, como el fax o modems telefónicos de baja capacidad.

Al construirse el alfabeto con señales de distintas frecuencias, no admite la representación geométrica del espacio señal. Sin embargo, puede comprobarse fácilmente que las señales implicadas son ortogonales entre sí (no antipodales) por lo que el comportamiento de la curva $P_e = f(SNR)$ no será tampoco óptimo.

Valores menores de Δ hacen que $\rho > 0$

En cuanto a la eficiencia espectral, lo que conviene es que la separación entre las dos frecuencias utilizadas $\Delta = f_1 - f_0$, sea lo menor posible. El mínimo valor que garantiza ortogonalidad entre las señales (para no tener problemas de BER) es $\Delta_{min} = \frac{1}{2T}$. Si se

Esta modulación (MSK) es la que se utiliza en telefonía móvil GSM

utiliza dicha separación, la modulación recibe el nombre de MSK (*Minimum Shift Keying*) o FFSK (*Fast FSK*), con la que se consigue una eficiencia espectral de $e = 1,5 \text{ bits/s/Hz}$

6.3.3 QAM: Quadrature Amplitude Modulation

Definición, generación y demodulación

Definición

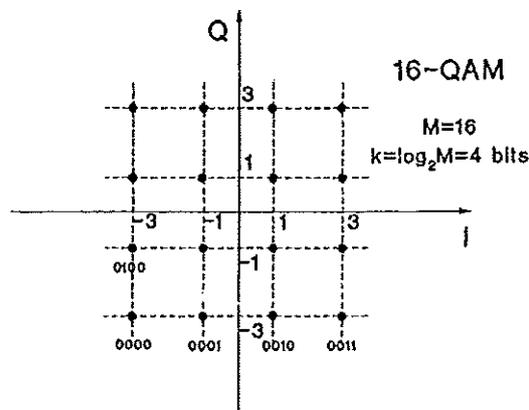
Las modulaciones QAM consisten en una modulación de amplitud multinivel, tanto de la componente en fase como de la componente en cuadratura. Es decir, las señales del sistema tienen la forma:

$$s_i(t) = I_i \cdot \cos \omega_0 t - Q_i \cdot \sin \omega_0 t$$

Con una constante multiplicativa que afecte a toda la señal podemos ajustar su nivel de amplitud real

Donde Q_i e I_i pueden tomar una serie de valores discretos (la cantidad de valores posibles será normalmente una potencia de 2), equiespaciados y simétricamente distribuidos alrededor de 0. Para uniformizar la notación se suelen llamar a esos valores $I_i, Q_i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Por ejemplo, si cada "canal" (I y Q) se modula con 4 niveles, los valores posibles de I serán $\{-3, -1, 1, 3\}$, y los mismos para Q. Por tanto el sistema tendrá un alfabeto formado por $M=16$ combinaciones posibles tomando cada valor de I con cada valor de Q. La constelación del sistema es la siguiente:



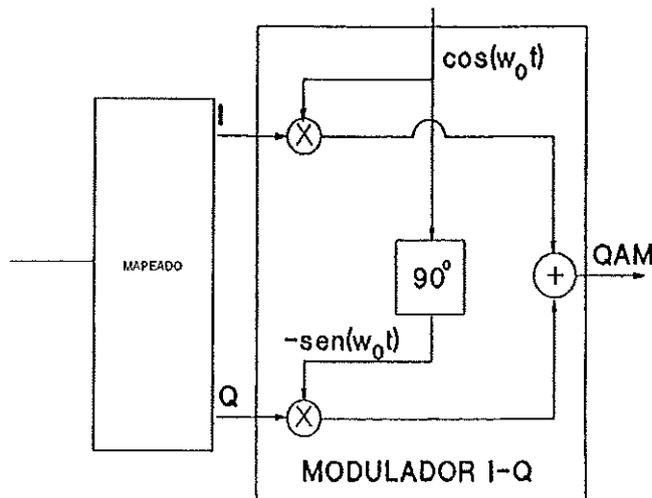
En este caso, al ser $M=16$, cada símbolo transporta:

$$k = \log_2 M = 4 \text{ bits}$$

Generación

Para la generación de la señal QAM se utilizará un modulador I-Q, como refleja la figura.

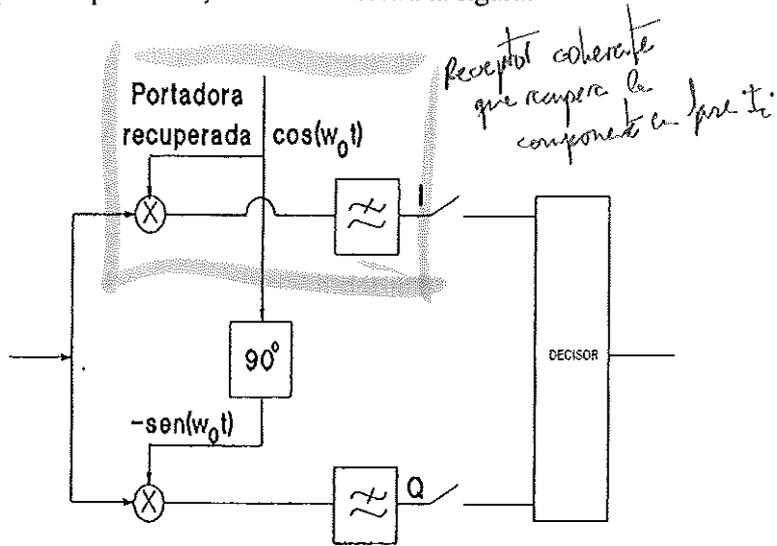
El circuito de mapeado obtiene los valores de las componentes en fase y cuadratura de cada símbolo.



Demodulación

La información va tanto en la amplitud como en la fase de la señal modulada. Consecuencia de esto es que la recepción tiene que ser perfectamente coherente y será necesario recuperar la portadora, tal como muestra la figura.

Los filtros paso bajo son los filtros adaptados. También los podemos sustituir por correladores



Propiedades. Eficiencia espectral

La propiedad más característica de estos sistemas es que son muy eficientes espectralmente. Los sistemas 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM y 256-QAM transmiten, respectivamente 2, 4, 6 y 8 bits con cada símbolo emitido (cada T segundos). El espectro de la señal es una función sinc similar a la de ASK (con nulos separados 2/T) pero sin portadora (al ser una constelación centrada respecto al origen). Si se emplea en la transmisión un filtro de Nyquist (ideal) de $B=1/T$ Hz, se tiene que la eficiencia espectral de estos sistemas es:

$$e = k = \log_2 M \text{ bit / seg / Hz}$$

es decir, $e = 2, 4, 6,$ y 8 respectivamente para los sistemas arriba indicados. Véase que con valores grandes de k se pueden llegar a conseguir sistemas con mucha capacidad en un ancho de banda limitado.

Obsérvese que la modulación no es de envolvente constante por lo que presenta algunos problemas en canales no lineales o con desvanecimiento.

En cuanto al ruido, la constelación está bien centrada respecto al origen por lo que se optimiza bastante bien la P_e .

Hay un compromiso entre la eficiencia espectral ($M \uparrow$) y la robustez ante ruido ($M \downarrow$).

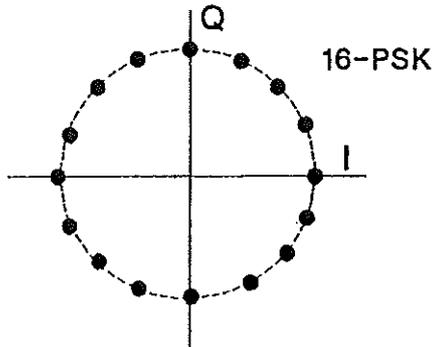
Un buen compromiso se obtiene con $M = 4$, configurando una de las modulaciones digitales más utilizadas.

Esta modulación se la conoce como 4-QAM o QPSK y es ampliamente utilizada. Sirvan como ejemplos la telefonía móvil digital en USA y Japón (AMPS), la telefonía móvil de 3ª generación en Europa (UMTS), y la televisión digital por satélite (P.e. Digital + en España).

6.3.4 PSK: Phase Shift Keying

Definición y propiedades

En PSK se envían señales con la misma frecuencia y amplitud (es de módulo constante) pero con M posibles fases diferentes para designar a los M símbolos. La constelación se compone de puntos desplegados sobre una circunferencia, tal como muestra la figura.



Esta modulación permite mantener el módulo constante con alta eficiencia espectral ($M \uparrow$). Sin embargo, al igual que en QAM, para optimizar la P_e interesan símbolos muy separados ($M \downarrow$). Será necesario también encontrar un compromiso entre ambos efectos.

Al igual que en QAM, la eficiencia espectral es:

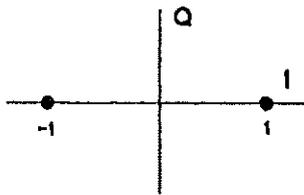
$$e = \log_2 M \quad \text{bit / seg / Hz}$$

Los esquemas más utilizados son con $M = 2$ y con $M = 4$, que pasamos a comentar.

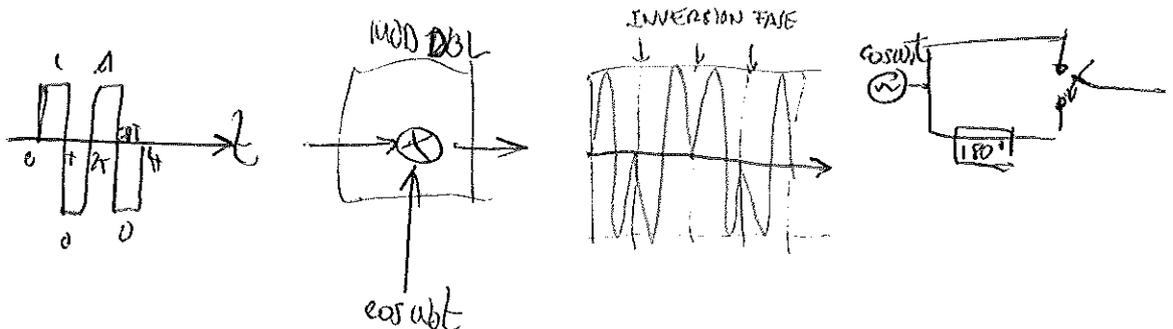
PSK con $M=2$

BPSK

Es el caso de $M = 2$. Únicamente existen dos fases posibles: 0° y 180° . La constelación se muestra en la figura.



Es parecida a una ASK sólo que ahora la modulación de amplitud (o mejor de DBL) es con $\pm A$. Un posible modulador es precisamente un modulador DBL con un mensaje NRZ bipolar. Otra alternativa es conmutar entre dos salidas, una desfasada 180° respecto a la otra.



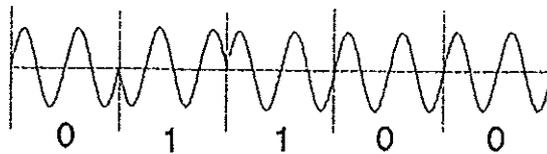
La BPSK tiene el mismo espectro que la ASK pero sin portadora y una eficiencia dada por:

$$e = 1 \text{ bit/seg/Hz}$$

Como se desprende de la constelación, más simétrica respecto al origen, BPSK va a tener un comportamiento frente al ruido superior a ASK (se usan señales antipodales y no ortogonales). Normalmente, los sistemas PSK, al llevar la información en la fase, requieren recepción coherente.

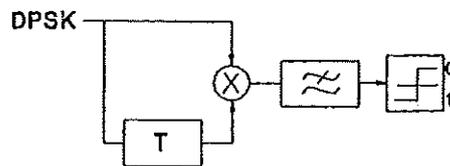
El problema es que la señal BPSK es una senoide con fases alternativas de 0° y 180° . Al no disponerse de un origen de tiempos, el recuperador no tiene forma de saber cual es 0° y cual 180° .

Para solucionar este problema se puede utilizar una codificación diferencial: el dato 1 se codifica con un cambio de fase, el 0 con la no inversión de fase, tal como ilustra la figura.



La modulación DPSK, que es como se conoce a esta técnica tiene además la ventaja de que se puede demodular de forma incoherente, es decir, sin recuperar la portadora. Para ello basta comparar la fase de un intervalo de bit con el siguiente, tal como se muestra en la figura. A costa de esta simplificación, el DPSK tiene unas prestaciones ligeramente inferiores a un BPSK con detección coherente.

Si las fases son iguales (transmisión de un "0") la salida será grande (mayor que el umbral). Si se transmite un "1" habrá inversión de fase y la salida del filtro será una tensión negativa (por debajo del umbral)



Tanto BPSK como DPSK se utilizan mucho; por ejemplo, las transmisiones de los satélites del sistema GPS utilizan BPSK. Algunos radares para control del tráfico aéreo utilizan modulación DPSK para enviar datos a los aviones.

PSK con M=4

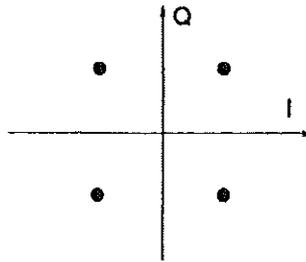
A la vista de su constelación puede comprobarse que es exactamente el mismo esquema de modulación que el 4-QAM

Como ejemplo de aplicación y como ya se ha dicho, la televisión digital vía satélite, utiliza modulación QPSK. Con algunas modificaciones, ha sido también el sistema elegido para la telefonía móvil digital en USA y Japón (sistema AMPS).

Recuerda que si cada símbolo representa un bit entonces la velocidad de símbolo y la velocidad de transmisión coinciden

QPSK

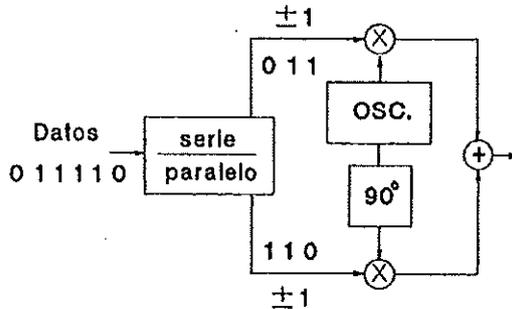
Es la versión de PSK con cuatro estados de fase. Su constelación es la siguiente:



La eficiencia espectral será:

$$e = 2 \text{ bit/s/Hz}$$

Se envían 2 bits con cada símbolo, uno por el canal I y otro por el Q. En la generación es necesario formar parejas de dos bits con un conversor serie/paralelo, tal como muestra la figura.



6.3.5 Relación entre velocidad de símbolo y ancho de banda

Señales digitales en banda base

Ya vimos en el tema 5 que una de las consecuencias del primer teorema de Nyquist es la relación entre ancho de banda y velocidad de símbolo. De hecho, gracias al primer teorema de Nyquist se llega a la conclusión de que:

Para las señales digitales se necesita en banda base un ancho de banda que es la mitad (en Hz) de su velocidad de símbolo (en baudios o símbolos/seg):

$$B = \frac{V_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

Señales moduladas

En este tema la señal digital viaja por el canal modulada (es decir, en forma de señal paso banda) y por eso su ancho de banda es el doble que en banda base:

Para las modulaciones digitales (excepto FSK) se necesita en paso banda un ancho de banda que es igual (en Hz) a su velocidad de símbolo (en baudios o símbolos/seg).

$$B = V_s = \frac{1}{T}$$

6.4 ANÁLISIS EN CANALES RUIDOSOS. PROB. DE ERROR

P_e =BER es la probabilidad de error que ya definimos en el tema 5

Se presenta a continuación, para cada sistema de modulación, su función $P_e = f(E_b/\eta)$ que es lo que mejor define lo robusto que es el sistema ante el ruido. No se va a entrar en la problemática de alfabetos con $M > 2$, restringiéndose el análisis al caso binario. En ese caso, la probabilidad de error de bit (BER) coincide con la probabilidad de error de símbolo.

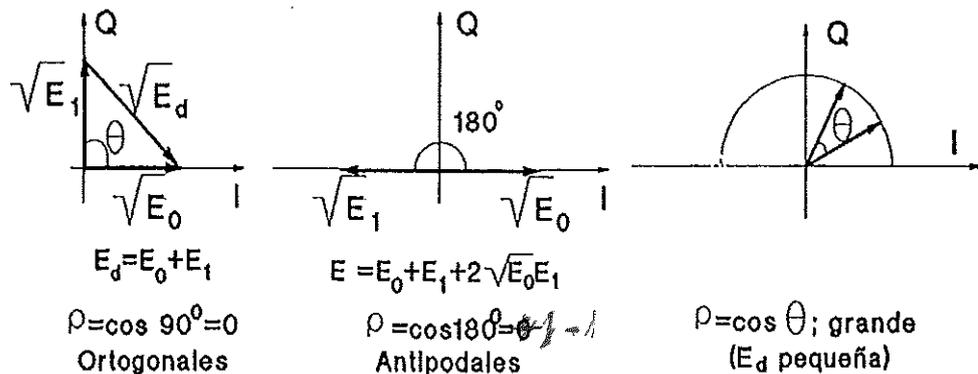
6.4.1 Probabilidad de error binaria en receptores óptimos

Supongamos que tenemos un receptor coherente con filtro adaptado. Ya se vio en el tema 5 que la BER era:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right] \quad E_d = E_0 + E_1 - 2\rho \sqrt{E_0 E_1}$$

Siendo E_d la energía de la señal diferencia $s_1(t) - s_0(t)$.

El espacio de señal da una interpretación inmediata de ρ . Puede demostrarse que $\rho = \cos\theta$ tal como se deduce de la siguiente figura:



Vamos a particularizar a algunos sistemas:

Probabilidad de error en ASK con receptor óptimo

En este caso: $\rho = 0$, $E_1 = 2E_b$, $E_0 = 0$

(Si los símbolos son equiprobables $E_b = (E_0 + E_1)/2$). Por tanto:

$$E_d = E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_1 E_0} = 2E_b$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}} \right]$$

Probabilidad de error en FSK con receptor óptimo

En este caso: $\rho = 0$, $E_1 = E_b$, $E_0 = E_b$, por tanto:

$$E_d = E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_1E_0} = 2E_b$$

obteniéndose la misma expresión que para ASK.

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}} \right]$$

Probabilidad de error en BPSK con receptor óptimo

En este caso: $\rho = -1$, $E_1 = E_b$, $E_0 = E_b$, por tanto:

$$E_d = 2E_b(1 - \rho) = 4E_b$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right]$$

mayor diferencia al ser antipodales

Se observa que los dos sistemas ortogonales tienen la misma P_e , que es 3 dB peor (necesitan $\sqrt{2}$ veces más energía, para la misma P_e) que el BPSK, antipodal. Este es el mismo resultado que se obtuvo para señales NRZ en banda base.

Probabilidad de error en M-QAM con receptor óptimo

En este caso la expresión del error es sólo aproximada:

$$P_e \approx \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot E_b}{2(M-1)\eta}} \right]$$

Esta expresión siempre la dan en los exámenes

donde $k = \log_2 M$.

El caso más habitual es 4-QAM = QPSK donde $M = 4$ y $k = 2$:

$$P_e \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right]$$

6.4.2 Potencia de un amplificador

Para calcular la potencia de un amplificador utilizaremos:

$$\text{Potencia} = E_b \cdot V_T \text{ (W)}$$

donde E_b es la energía media por bit (en Julios/bit) y V_T la velocidad de transmisión (en bits/seg)

6.4.2 Probabilidad de error en sistemas no coherentes

Si la recepción no es coherente ya no se puede aplicar la expresión general utilizada anteriormente que se dedujo en el tema 5. Hay que particularizar el análisis para cada caso concreto.

Probabilidad de error en ASK no coherente

$$P_e \approx \frac{1}{2} e^{-E_b/2\eta}$$

Deben tenerse en cuenta dos limitaciones en el uso de la expresión anterior. En primer lugar, hay que recordar que únicamente es una aproximación para E_b/η grande, lo que no va a ocurrir siempre. Debe también tenerse en cuenta que sólo es válida para $B \equiv 1/T$, lo que no puede considerarse algo totalmente general. La generalización a otros valores de B es, sin embargo, inmediata ya que un filtro con un ancho de banda K veces mayor que el mínimo se traducirá directamente en un factor K multiplicando al ruido:

$$\text{Si } B = K \cdot B_{\text{mín}}; \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/2K\eta}$$

Si la SNR es alta la ASK no coherente tiene casi las mismas prestaciones que la coherente (alrededor de 1dB de diferencia), de forma similar a lo que ocurría en el caso analógico. Los escasos sistemas ASK existentes usan siempre detección de envolvente, ya que si se va a emplear un receptor coherente, es preferible PSK.

Probabilidad de error en FSK no coherente

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/2\eta}$$

Se obtiene la misma expresión que para ASK. Al igual que allí, este resultado es válido sólo para $B = 1/T$ que es el caso óptimo. Sin embargo, ahora la expresión es exacta y no sólo una aproximación para $E_b/\eta \gg 1$.

La diferencia con FSK coherente es, igual que en ASK, del orden de 1 dB. Casi siempre se usa la recepción incoherente.

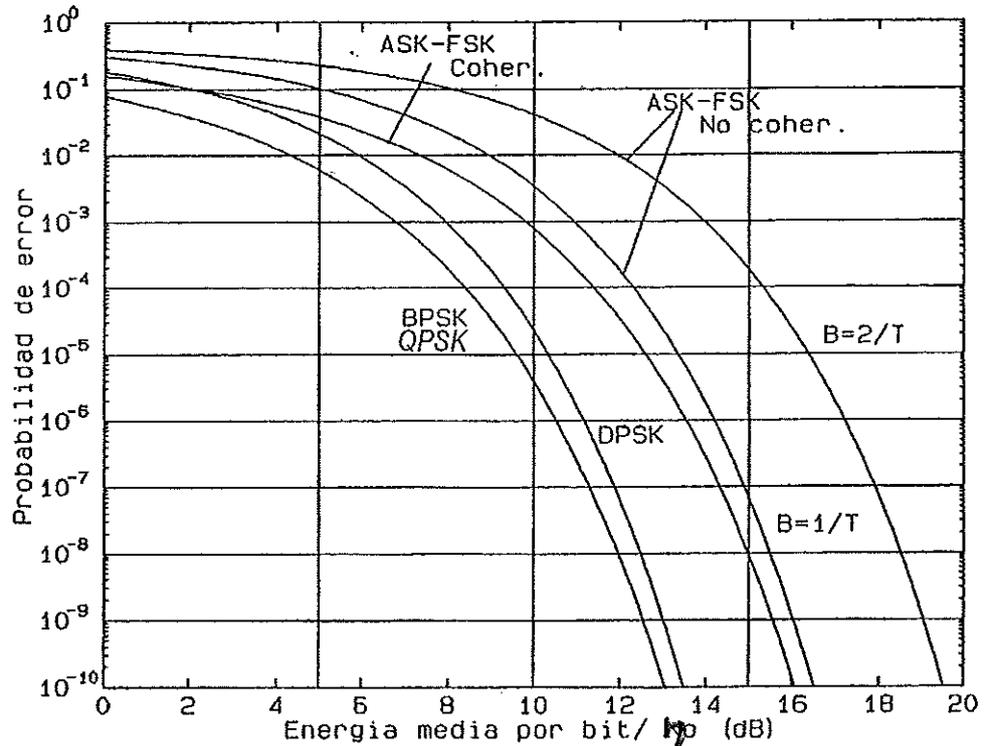
Probabilidad de error en DPSK no coherente

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{E_b}{\eta}\right)}$$

Al igual que en los otros sistemas supone una pérdida de alrededor de 1 dB respecto al caso coherente, y una ganancia de unos 3 dB respecto a los esquemas no coherentes ortogonales.

6.5 RESUMEN Y COMPARACIÓN DE LAS MODULACIONES DIGITALES

En la figura siguiente se muestra la familia completa de curvas BER para todos los sistemas binarios coherentes e incoherentes.



Las siguientes observaciones son de interés:

- En cuanto a ruido, de mejor a peor:
 - BPSK (igualada con QPSK)
 - DPSK incoherente
 - ASK/FSK coherente
 - ASK/FSK incoherente
- Cortemos por donde cortemos en horizontal:
 - La diferencia entre una codificación antipodal y una ortogonal siempre es 3 dB
 - Entre DPSK y ASK/FSK incoherente hay 3 dB.
 - Entre BPSK y ASK/FSK coherentes hay 3 dB
 - En la zona habitual de trabajo, la recepción no coherente supone una pérdida de 1 dB respecto a la coherente correspondiente. Si las SNR son malas, las diferencias entre coherente y no coherente se acentúan.

SISTEMA	Robustez al ruido	Módulo etc	Eficiencia espectral
ASK: Inc/coher FSK: Coh/incoh	7/6 7/6	NO SI	1 0.3 - 1.5 (MSK)
BPSK/DPSK QPSK	10/9 10	SI SI	1 2
M-PSK (M > 4)	8 - 4	SI	3-4
M-QAM (M > 4)	7 - 5	NO	3-10

Comentarios y aplicaciones

ASK. Casi no se usa. Su mayor ventaja es que es muy sencillo. De entre los de poca capacidad es, junto con FSK, el de más error. Siempre utiliza recepción incoherente. Se utiliza en los sistemas de apertura de puertas (automóviles, garajes, etc) vía radio, y cuya característica más relevante es que son muy baratos.

FSK. Similar a ASK pero con módulo constante. Se usa mucho más, en sistemas muy baratos (por ejemplo: FAX, modem telefónicos de baja capacidad, etc.). También se usa en enlaces de microondas. MSK se usa en radiotelefonía y concretamente en el sistema GSM de telefonía móvil (con alguna mejora).

BPSK/DPSK. Es algo más complejo que FSK pero tiene superiores prestaciones. Es típico de sistemas más profesionales como satélites (por ejemplo, el sistema GPS) o enlaces de comunicaciones entre un radar y los aviones que vigila, etc.

QPSK. Mismas prestaciones en cuanto a ruido que BPSK pero doble capacidad. Complejidad y precio ligeramente superiores. Muy utilizado. Como aplicaciones típicas podemos citar, la telefonía móvil digital (sistema AMPS de USA), o la radiodifusión de televisión digital vía satélite.

MPSK. Se usa poco. Sólo en sistemas que requieren bastante capacidad y donde el módulo constante sea un requisito imperativo.

M-QAM. Es el método típico para sistemas de gran capacidad. Como ejemplos, algunos modems de alta velocidad (por ejemplo, la norma X.32) o los futuros sistemas de distribución de centenares de canales de imagen en comunidades de vecinos que compartan las antenas de recepción de las señales de TV digital vía satélite.

TECM

Problemas de

examen

()

()

()

()

Temas 1 y 2

Preguntas cortas Temas 1 y 2

Multiplexación

Junio 2008. Los sistemas de comunicación digitales.

- a) Sólo admiten multiplexación TDMA
- b) Sólo admiten multiplexación FDMA
- c) Admiten las dos anteriores además de la CDMA.

Solución:

C

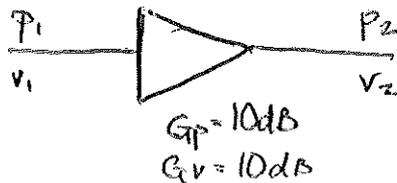
Caracterización de señales.

Septiembre 2004. Si un amplificador tiene una ganancia de 10 dB:

- a) La potencia de salida es 10 veces mayor que la de entrada.
- b) La tensión de salida es 10 veces mayor que la de entrada.
- c) Las dos anteriores son ciertas.

Solución:

a



$$G_P = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \text{ dB} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \rightarrow \log \frac{P_2}{P_1} = 1 \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 10$$

$$G_V = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 10 \rightarrow V_2 = \sqrt{10} V_1$$

Septiembre 2006. Calcule la potencia en dBm del resultado de sumar 4 señales de 10 dBm, medidas sobre 50 ohmios que posean frecuencias y fases idénticas. $P_2 = 10 P_1$

Misma frecuencia \Rightarrow Si se solapan en frecuencia

Misma fase \Rightarrow No están desplazadas 90° \Rightarrow No son ortogonales

No son incoherentes/independientes

la potencia de la suma de señales no es la suma de las potencias

$$P_i \text{ (dBm)} = 10 \text{ dBm} = 10 \log \frac{P_i \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}}$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$10 \log P_i \text{ (mW)} = 10 \rightarrow P_i = 10^{10/10} = 10 \text{ mW} = 10^{-2} \text{ W}$$

$$P_i \text{ (W)} = \frac{A_i^2}{2R} \text{ (V)} \rightarrow A_i \text{ (V)} = \sqrt{2R P_i \text{ (W)}} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ V} \rightarrow A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4 \text{ V}$$

$$P_T \text{ (W)} = \frac{A_T^2}{2R} = \frac{4^2}{2 \cdot 50} = 16 \cdot 10^{-2} = 160 \text{ mW} \quad P_T \text{ (dBm)} = 10 \log \frac{P_T \text{ (W)}}{1 \text{ mW}} = 22 \text{ dBm}$$

Junio 2007. Calcule la potencia en dBm resultante de sumar cuatro señales incoherentes e independientes de 10 dBm cada una. Ⓢ Versión corta reverso.

Al ser independientes, la suma de las potencias es la potencia de la suma.

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log \frac{P_i \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}} \rightarrow P_{\text{Tot}} \text{ (dBm)} = 10 \log \frac{P_{\text{Tot}} \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}} = 10 \log \frac{4 P_i \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}} = 10 \log \frac{P_i \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}} + 10 \log 4 = 16$$

$$P_{\text{Tot}} \text{ (mW)} = 4 P_i \text{ (mW)}$$

10 dBm

Solución:

16 dBm

Junio 2008. Calcule la potencia en dBm del resultado de sumar cuatro señales sinusoidales de 10 dBm, que posean frecuencias diferentes.

Al ser señales que no se solapan en frecuencia, la potencia de la suma es la suma de las potencias

Igual que el anterior

⊗ VERSIÓN CORTA.

$$D_{dBm} = 10 \log \frac{P_i (\mu W)}{1 \mu W} = 10 \log \frac{\frac{A_i^2}{2R}}{1 \mu W}$$

$$P_T (dBm) = 10 \log \frac{P_T (\mu W)}{1 \mu W} = 10 \log \frac{\frac{\Delta_i^2}{2R}}{1 \mu W} = 10 \log \frac{\Delta_i^2}{2R} = 10 \log \frac{4A_i^2}{2R} = 10 \log \frac{A_i^2}{2R} + 10 \log 16 = 22 \text{ dBm}$$

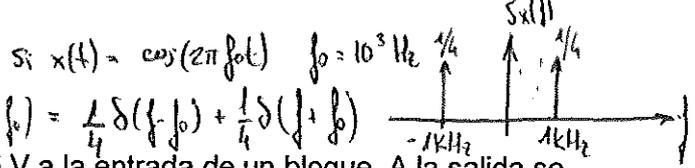
51

Septiembre 2008. Una señal sinusoidal de frecuencia 1 kHz y 1 V de amplitud está aplicada a una resistencia de 1 ohm. La densidad espectral bilateral de potencia de esta señal es:

- a) Una delta de amplitud 1 en 1 kHz
- b) Dos deltas de amplitud 1/2 en +1kHz y -1 kHz
- c) Dos deltas de amplitud 1/4 en +1kHz y -1 kHz

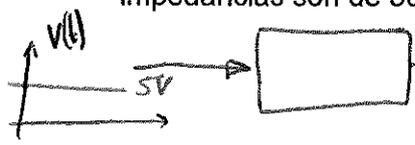
Solución: c

RECUERDA: $x(t) = \sum_k a_k e^{j2\pi k f_0 t}$ \rightarrow $S_x(f) = \sum_k |a_k|^2 \delta(f - k f_0)$



$x(t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \rightarrow S_x(f) = (\frac{1}{2})^2 \delta(f - f_0) + (\frac{1}{2})^2 \delta(f + f_0) = \frac{1}{4} \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} \delta(f + f_0)$

Septiembre 2008. Se introduce tensión constante de 5 V a la entrada de un bloque. A la salida se obtiene una potencia de 20 dBm. Calcule la ganancia en dB del bloque sabiendo que todas las impedancias son de 50 ohm.



$P_y \text{ (dBm)} = 20 \text{ dBm}$
 $P_x \text{ (W)} = V \cdot I = V^2 \frac{1}{R} = \frac{5^2}{50} = 0.5 \text{ W} = 500 \text{ mW}$

$G \text{ (dB)} = P_y \text{ (dBm)} - P_x \text{ (dBm)}$
 $P_x \text{ (dBm)} = 10 \log \frac{P_x \text{ (mW)}}{1 \text{ mW}} = 10 \log 500 = 27 \text{ dBm}$

$= 10 \log 500 = 27 \text{ dBm}$
 Así que $G \text{ (dB)} = 20 \text{ dBm} - 27 \text{ dBm} = -7 \text{ dBm}$

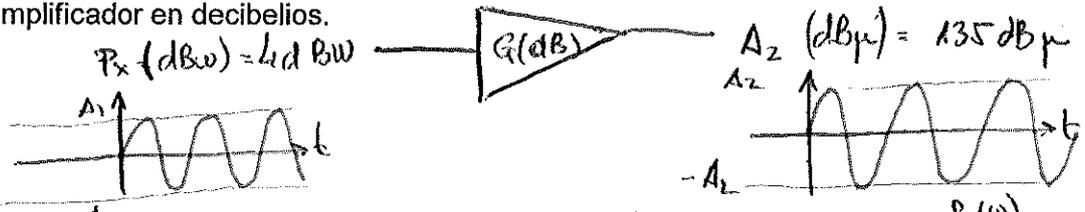
Junio 2009. Determine la potencia media de la señal $x(t) = A \cos \omega_0 t + A \sin \omega_0 t$ medida sobre una resistencia $R=1$ ohmio.

$x(t) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t)}_{x_1(t)} + \underbrace{A \sin(\omega_0 t)}_{x_2(t)}$

$\cos(\omega_0 t)$ } \Rightarrow ORTOGONALES $\Rightarrow P_x = P_{x_1} + P_{x_2}$
 $\sin(\omega_0 t)$

$P_{x_1} = \frac{A^2}{2R} = [R=1] = \frac{A^2}{2}$
 $P_{x_2} = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2}$
 $P_x = \frac{2A^2}{2} = A^2$

Septiembre 2009. Una señal sinusoidal de 4 dBW de potencia entra en un amplificador lineal. A la salida se obtiene una señal con un valor máximo de 135 dBμ (R=1 Ω). Determine la ganancia del amplificador en decibelios.

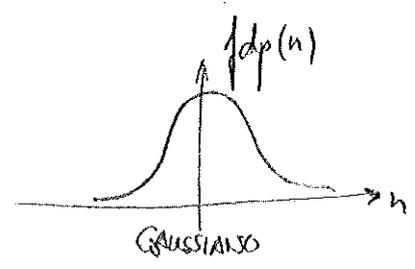
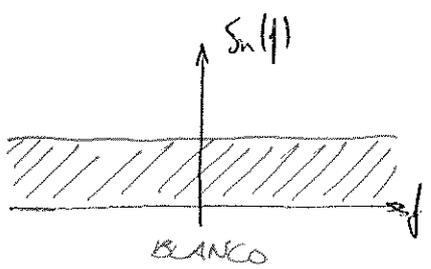


$G \text{ (dB)} = P_2 \text{ (dBW)} - P_1 \text{ (dBW)}$
 $P_2 \text{ (dBW)} = 10 \log \frac{P_2 \text{ (W)}}{1 \text{ W}} = 10 \log \frac{[\frac{A_2 \text{ (V)}}{2}]^2}{1 \text{ W}} = 11.95 \text{ dBW}$

$135 \text{ dB}\mu = 20 \log \frac{A_2 \text{ (}\mu\text{V)}}{1 \mu\text{V}} \rightarrow A_2 = 10^{\frac{135}{20}} \mu\text{V} = 5.6 \text{ V}$
 $G \text{ (dB)} = (11.95 - 4) \text{ dBW} = 7.95 \text{ dB}$

Caracterización del ruido.

Junio 2004. Dibuje la forma de las curvas densidad espectral de potencia y densidad de probabilidad de un ruido blanco gaussiano.



1. 100

2. 100

3. 100

4. 100

5. 100

6. 100

7. 100

8. 100

9. 100

10. 100

11. 100

12. 100

13. 100

14. 100

15. 100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

Junio 2007. El ruido térmico tiene una función densidad de probabilidad:

- a) Rice
- b) Rayleigh
- c) Gaussiana

Solución:
c

Junio 2008. El ruido blanco

- a) Tiene un f.d.p gaussiana
- b) Tiene una S(f) gaussiana
- c) No tiene componente continua

Solución:
c

Señales paso banda y ruido de banda estrecha

Junio 2004. La envolvente compleja de una señal:

- a) Será siempre una señal real
- b) Será siempre una señal compleja
- c) Será por lo general una señal compleja

Solución:
c

Septiembre 2004. Un ruido Gaussiano de Banda Estrecha

- a) Tiene componentes espectrales en todas las frecuencias.
- b) Tiene únicamente componente a una sola frecuencia.
- c) Tiene componentes espectrales en los alrededores de una cierta frecuencia.

Solución:
c

Junio 2007. En un ruido Gaussiano de Banda Estrecha $n(t)$, $n_F(t)$ y $n_C(t)$, son procesos aleatorios Gaussianos de media cero y varianza:

- a) $\sigma^2 = P_N = \eta B$
- b) $\sigma^2 = P_N = 2\eta B$
- c) $\sigma^2 = P_N = (\eta/2)B$

Solución:
a

Pag. 2-12.

$$n(t) = \underbrace{r_n(t)}_{P. Banda} \cos(\omega_0 t + \underbrace{\varphi_n(t)}_{P. Bajo}) = \underbrace{X_F(t)}_{P. Bajo} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{X_C(t)}_{P. Bajo} \sin(\omega_0 t) \quad \text{No se necesita}$$

$$\sigma^2 = P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = B \frac{\eta}{2} + B \frac{\eta}{2} = \eta B = P_{XF} = P_{XC}$$

Septiembre 2008. En un ruido gaussiano de banda estrecha, la f.d.p. de la envolvente del ruido es una distribución:

- a) Uniforme
- b) Gaussiana
- c) Rayleigh

$$n(t) = \underbrace{r_n(t)}_{\substack{\text{GAUSSIANA} \\ \downarrow \\ \text{Rayleigh}}} \cos(\omega_0 t + \underbrace{\varphi_n(t)}_{\substack{\text{Uniforme} \\ \downarrow \\ \text{GAUSSIANA}}}) = \underbrace{X_F(t)}_{\substack{\text{GAUSSIANA} \\ \downarrow \\ \text{Rayleigh}}} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{X_C(t)}_{\substack{\text{GAUSSIANA} \\ \downarrow \\ \text{Rayleigh}}} \sin(\omega_0 t)$$

Solución:
c)

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

Furthermore, it is noted that regular audits are essential to identify any discrepancies or errors early on. This proactive approach helps in maintaining the integrity of the financial statements and prevents any potential issues from escalating.

In addition, the document highlights the need for clear communication between all parties involved. Regular meetings and reports should be conducted to keep everyone informed about the current status and any changes that may occur. This collaborative effort is key to the success of the project.

The second part of the document provides a detailed overview of the budgeting process. It outlines how to allocate resources effectively and track expenses against the budget. This section includes a table summarizing the key budget items and their respective allocations.

The table below shows the breakdown of the total budget into various categories. Each category is further divided into sub-items, providing a granular view of the financial plan.

Category	Sub-Category	Amount
Personnel	Salaries	120,000
	Benefits	30,000
	Travel	15,000
Equipment	Hardware	80,000
	Software	20,000
Operational	Rent	50,000
	Utilities	10,000
Marketing	Advertising	40,000
	Public Relations	10,000
Miscellaneous	Office Supplies	5,000
	Contingency	10,000
Total		310,000

This table provides a clear and concise summary of the budget, allowing for easy comparison and analysis. It is a vital tool for managing the project's financial resources.

Distorsión

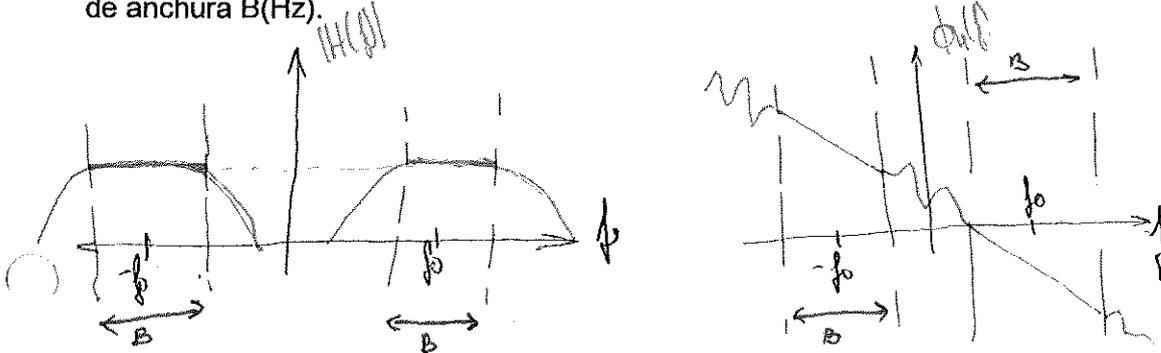
Junio 2004. Un canal sin distorsión de fase tendrá:

- Retardo de grupo lineal de pendiente positiva
- Retardo de grupo constante
- Retardo de grupo lineal de pendiente negativa

Solución:
b

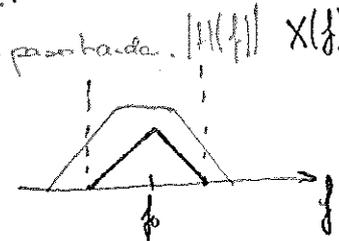
Que no haya distorsión de fase, implica que su derivada es constante, y por tanto el retardo de grupo también.

Septiembre 2004. Dibuje las respuestas de amplitud y fase de un canal paso banda sin distorsión, de anchura B(Hz).



Septiembre 2006. Al pasar una señal modulada por un sistema con un ancho de banda menor del necesario:

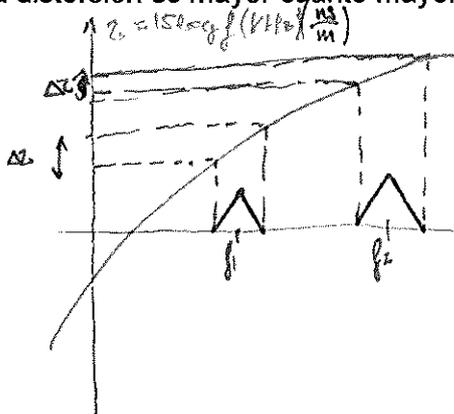
- Sufrirá distorsión.
- Empeorará su relación señal ruido.
- Ambos efectos.



Solución:
a

Septiembre 2008. Un cable introduce un retardo de grupo $\tau = 15 \log f$ (kHz) nanosegundos por cada metro de cable. Si se utiliza para enviar señales moduladas conteste cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA

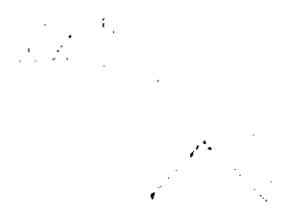
- La distorsión es mayor cuanto mayor sea la frecuencia central de la señal
- La distorsión es mayor cuanto mayor sea el ancho de banda de la señal
- La distorsión es mayor cuanto mayor sea la longitud del cable



Solución:
a

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text in the upper middle section of the page.



Handwritten text or a small diagram below the first triangle.



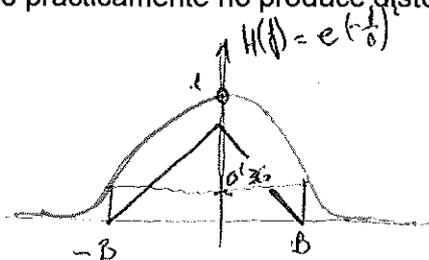
Junio 2009. En un canal dispersivo $\rightarrow t_g$ depende de f porque no es cte, como consecuencia de que la fase no es lineal.

- a) La fase es lineal con la frecuencia
- b) El rizado del módulo en la banda de paso debe estar acotado
- c) Ninguna de las anteriores

Solución:
c

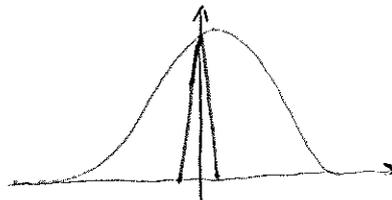
Septiembre 2009. Una señal paso bajo de ancho de banda W entra a un filtro de forma gaussiana cuya respuesta es $H(f) = \exp[-(f/B)^2]$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA

- a) El filtro siempre produce algo de distorsión en la señal
- b) El filtro no produce distorsión en la señal si $W=B$
- c) El filtro prácticamente no produce distorsión apreciable si $W \ll B$



$f=B \rightarrow |H(f)| = e^{-1} \approx 0.36$

\Rightarrow b es falsa ya que la señal de ancho de banda B si sufre distorsión



Solución:
b)

\Rightarrow c verdadera ya que el filtro no provoca mucha distorsión

Septiembre 2009. Una señal de la forma $x(t) = r(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$ pasa por un canal de ganancia unidad y cuya respuesta en fase es $\Phi(f) = \phi_0 - k(f - f_0)$. Escriba la expresión de la señal tras atravesar el canal.

fase lineal con f \Rightarrow no hay distorsión de fase.

$\rightarrow |H(f)| = 1 \Rightarrow$ No hay distorsión de amplitud

$$y(t) = k r(t - t_g) \cos(2\pi f_0 (t - t_g) + \phi(t - t_g))$$

$$t_g = \frac{\Phi(f)}{2\pi f} \Big|_{f=f_0} = -\frac{\phi_0}{2\pi f_0}$$

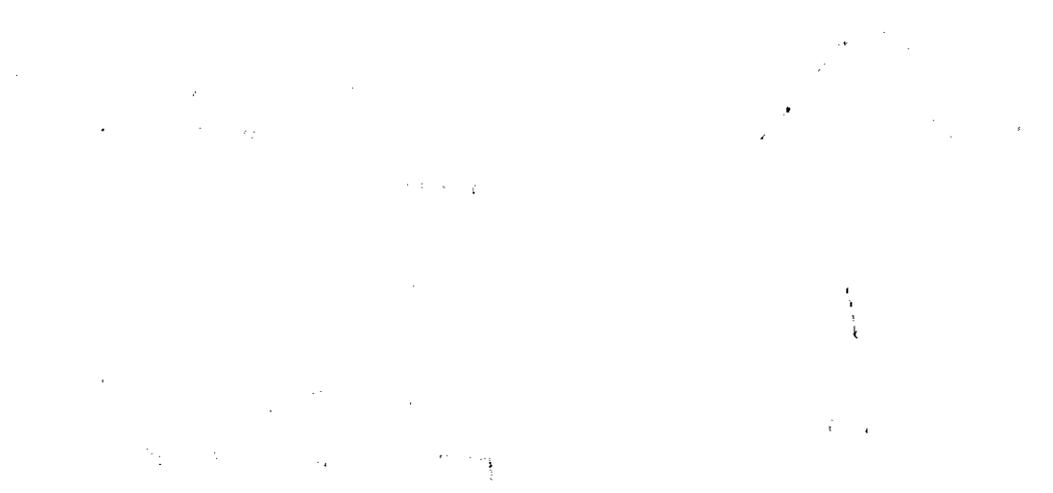
$$t_g = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df} = \frac{k}{2\pi}$$

Solución
Sustituyendo

$$y(t) = r\left(t - \frac{k}{2\pi}\right) \cos\left[2\pi f_0 t + \phi_0 + \phi\left(t - \frac{k}{2\pi}\right)\right]$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

()



()



()

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a footer or a note.

()

1.- La señal transmitida por un sistema de comunicaciones vía radio, capaz de transmitir simultáneamente 900 canales de voz de 3,4 KHz de ancho de banda (componentes espectrales entre 300 y 3700 Hz), es:

$$y(t) = 10 \cdot \cos \left[\pi \cdot \left(10^{10} t + 0,5 \cdot \frac{u(t)}{|u(t)|_{\max}} \right) \right] \quad \text{voltios}$$

Siendo:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{900} \left[0,1 \cdot \cos(8\pi 10^3 i \cdot t) + x_i(t) \cdot \cos(8\pi 10^3 i \cdot t) - \hat{x}_i(t) \cdot \sin(8\pi 10^3 i \cdot t) \right]$$

Se pide:

- a) Potencia de la señal transmitida y frecuencia de la portadora.
- b) Tipos de modulación empleados para obtener las señales $u(t)$ e $y(t)$
- c) Anchura de banda de las señales $u(t)$ e $y(t)$
- d) Esquema de bloques del receptor que es capaz de obtener las señales $x_i(t)$, utilizando los siguientes elementos:
 - Una antena
 - Un oscilador con recuperación de portadora
 - Un detector de fase
 - Multiplicadores
 - Filtros paso banda (tantos como sean necesarios)
 - Filtros paso bajo (tantos como sean necesarios)
- e) Especifique las frecuencias centrales de los filtros paso banda y las anchuras de banda de todos los filtros utilizados

()

()

()

()

JUNO1.P1

$$a) y(t) = 10 \cos \left[\pi \left(10^{10} t + 0,5 \frac{u(t)}{|u(t)|_{\max}} \right) \right] =$$

$$= \underbrace{10}_{A_c} \cos \left[2\pi \cdot \underbrace{0,5 \cdot 10^{10}}_{f_c} t + \underbrace{0,5\pi}_{\beta} u(t) \right]$$

$$\boxed{f_c = 5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 5 \text{ GHz}}$$

Se trata de modulación FM:
 $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta x(t))$

$$\boxed{P_T = \frac{10^2}{2R} = 50 \text{ W}}$$

$R = 1 \Omega$

b) $y(t)$: Modulación FM

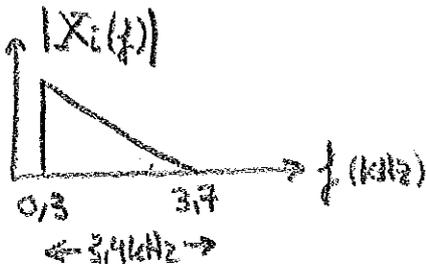
$$\left\{ \begin{array}{l} A_c = 10 \text{ V} \\ f_c = 5 \text{ GHz} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{V}} \\ \text{Señal moduladora: } u(t) \end{array} \right.$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{900} \left[\underbrace{0,1 \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 i t)}_{\text{in fase de portadora } f_i} + \underbrace{x_i(t) \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 i t)}_{\text{BLU superior } f_i} \right]$$

BLUC (compatible)

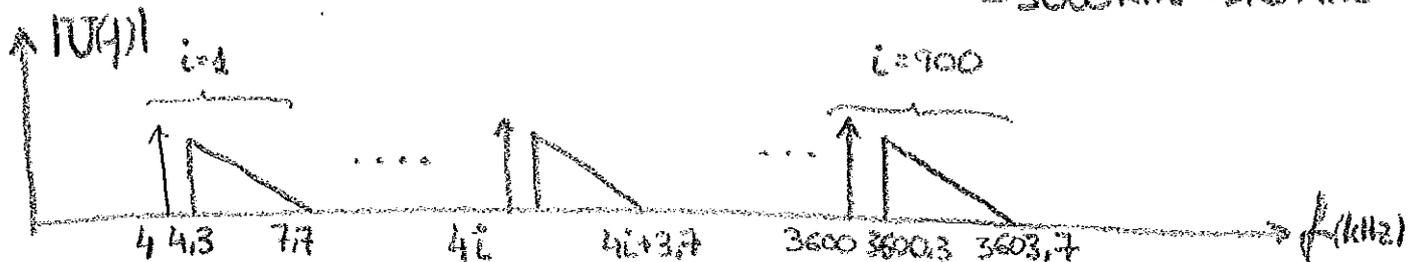
Multiplex FDMA de 900 canales modulados en BLUC

c) $x_i(t)$ señal de voz entre 300 y 3700 Hz



$i=1$ Modulación BLUC con $f_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1 = 4 \text{ kHz}$

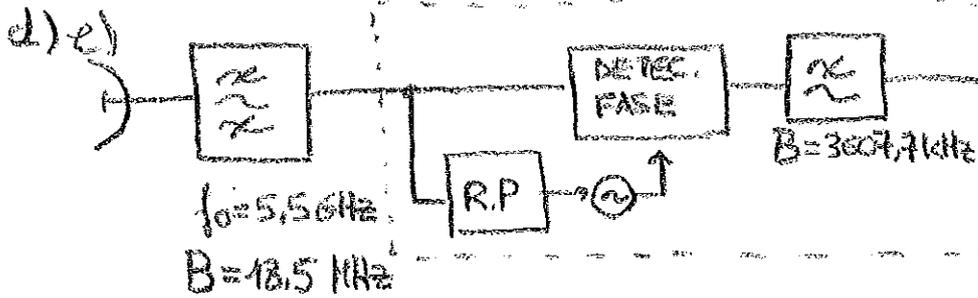
$i=900$ " " " " $f_{900} = 4 \cdot 10^3 \cdot 900 = 3600 \text{ kHz} = 3,6 \text{ MHz}$



Ancho de banda de $u(t)$: $B_u = 3607,7 \text{ kHz}$

De $y(t)$ no sabemos dibujar el espectro. (sólo sabríamos si fuera un modulador de banda estrecha, o si la señal moduladora fuera un tono). Pero podemos estimar su ancho de banda con la regla de Carson:

$B_y = 2(\beta + 1)B_u = 2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) 3607,7 \text{ kHz} = 18549,32 \text{ kHz} \approx 18,5 \text{ MHz}$

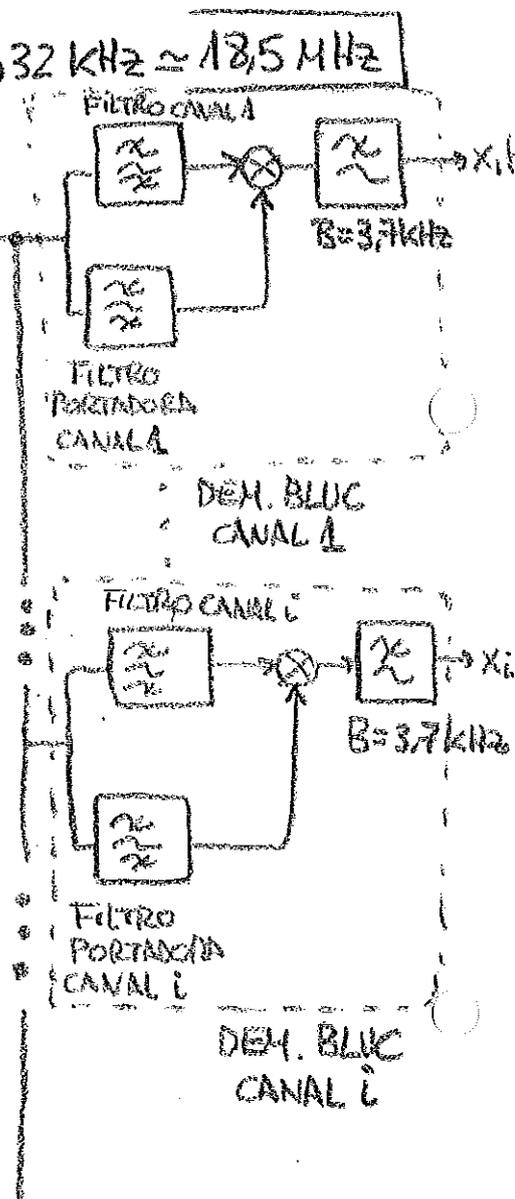


FILTRO CANAL i : $B = 3,4 \text{ kHz}$

$f_{ci} = \frac{4i + (4i + 3,7)}{2} = 4i + 1,85 \text{ kHz}$

FILTRO PORTADORA CANAL i : $B \rightarrow 0$

$f_0 = f_i = 4i \text{ kHz}$



JUN 01. P1

$$2) y(t) = 10 \cos \left[\pi (10^{10} t + 0,5 \frac{u(t)}{|u(t)|_{\max}}) \right] =$$

$$= \underbrace{10}_{A_c} \cos \left[2\pi \cdot \underbrace{0,5 \cdot 10^{10}}_{f_c} t + \underbrace{0,5\pi}_{\beta} u(t) \right]$$

$$f_c = 5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 5 \text{ GHz}$$

Se trata de modulación FM:
 $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta x(t))$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2R} = 50 \text{ W}$$

$R = 1 \Omega$

b) $y(t)$: Modulación FM

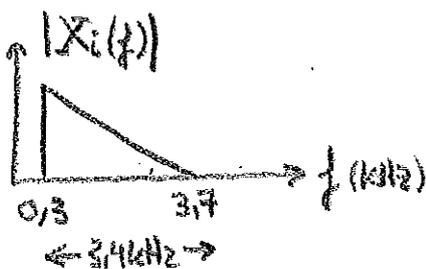
$$\left\{ \begin{array}{l} A_c = 10 \text{ V} \\ f_c = 5 \text{ GHz} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{V}} \\ \text{Señal moduladora: } u(t) \end{array} \right.$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{900} \left[\underbrace{0,1 \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 i t)}_{\text{un poco de portadora}} + \underbrace{x_i(t) \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 i t) \mp \hat{x}_i(t) \sin(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 i t)}_{\text{BLU superior}} \right]$$

BLUC (compatible)

Multiplex FDMA de 900 canales modulados en BLUC

c) $x_i(t)$ señal de voz entre 300 y 3700 Hz

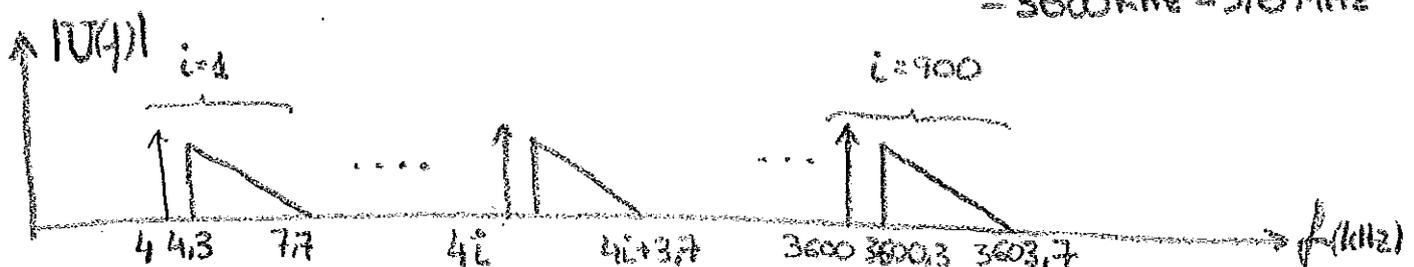


$$i=1$$

Modulación BLUC con $f_d = 4 \cdot 10^3 \cdot 1 = 4 \text{ kHz}$

$$i=900$$

$$f_{900} = 4 \cdot 10^3 \cdot 900 = 3600 \text{ kHz} = 3,6 \text{ MHz}$$

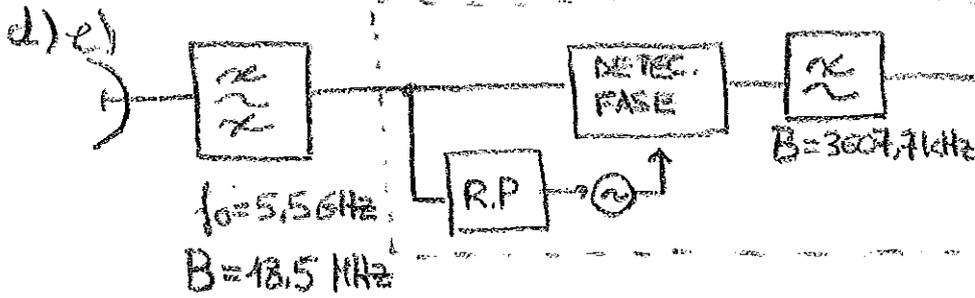


Ancho de banda de $u(t)$: $B_u = 3607,7 \text{ kHz}$

De $y(t)$ no sabemos dibujar el espectro. (sólo sabríamos si fuera un modulador de banda estrecha, o si la señal moduladora fuera un tono). Pero podemos estimar su ancho de banda con la regla de Carson:

$B_y = 2(\beta+1)B_u = 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) 3607,7 \text{ kHz} = 18549,32 \text{ kHz} \approx 18,5 \text{ MHz}$

DEMOD. PM. COHERENTE

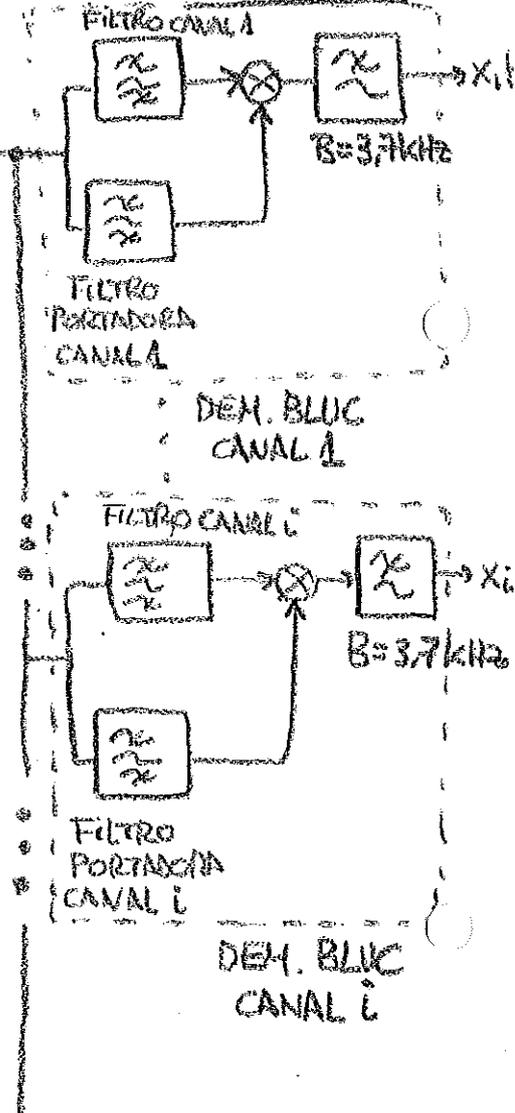


FILTRO CANAL i : $B = 3,4 \text{ kHz}$

$f_{ci} = \frac{4i + (4i + 3,7)}{2} = 4i + 1,85 \text{ kHz}$

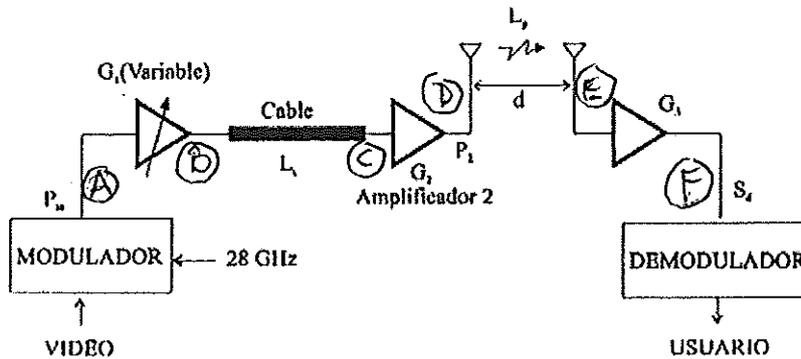
FILTRO PORTADORA CANAL i : $B \rightarrow 0$

$f_0 = f_i = 4i \text{ kHz}$



I.-Teoría: Deduzca y comente las condiciones que deben cumplirse en un canal de comunicaciones que transporta una señal analógica para que no exista distorsión.

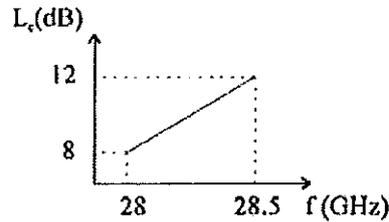
Problema: Mediante el sistema representado en la figura se pretende transmitir distintas señales de vídeo analógicas y digitales en la banda de 28 a 28.5 GHz para difusión:



a) Enumere las distintas alternativas para que las señales compartan el canal en los casos siguientes: 1) se envían señales analógicas y digitales; 2) se envían únicamente señales digitales.

Suponiendo que se desea enviar una única portadora, que se situará en la mitad de la banda y para los siguientes parámetros:

- Pot. de salida del modulador: $P_m = -20$ dBm
- Pérdidas del cable: $L_c =$ ver figura
- Ganancia del amplificador 2: $G_2 = 30$ dB
- Pérdidas de propagación: L_p (dB) = $49 + 20 \log d$ (m)
- Ganancia del amplificador del receptor: $G_3 = 40$ dB



b) Calcular cuál debe ser el valor de G_1 para garantizar que la potencia de salida del amplificador 2 es $P_2 = 27$ dBm. Para el valor de G_1 anterior, calcular el alcance máximo si se desea disponer de un margen extra de 10 dB para compensar aumentos esporádicos de atenuación debidos a la lluvia, sabiendo que el demodulador requiere una potencia mínima a la entrada de $S_d = -60$ dBm.

c) Calcular el número máximo de canales de vídeo digital de 1 Mbps que se pueden transmitir si se emplea un multiplex FDMA con una portadora modulada en QPSK por cada canal de vídeo. Suponga que no hay ninguna separación entre las distintas señales multiplexadas. Repita el cálculo para 64-QAM.

d) Si los canales de vídeo analógicos se modulan en FM y soportan una distorsión máxima de amplitud de 0.5 dB, determine el máximo valor de la relación de desviación D si la anchura de cada señal en banda base es $W = 5$ MHz.

JUN 99. EJ 1

a) Señales analógicas y digitales: FDMA

Señales digitales: FDMA, TDMA, CDMA.

b) Se va a enviar una sinusoidal de 28,25 GHz (portadora en la mitad de la banda).

(A) $P_m = -20 \text{ dBm}$

(B) $P_B = -20 \text{ dBm} + G_1 \text{ dB} = -20 + G_1 \text{ dBm}$

(C) $P_c = P_B - L_c(28,25 \text{ GHz}) = -20 + G_1 - 10 = -30 + G_1 \text{ dBm}$ $G_1 = 27 \text{ dB}$

(D) $P_D = P_c + G_2 = -30 + G_1 + G_2 = -30 + G_1 + 30 = G_1 \text{ dBm} = 27 \text{ dBm}$

(E) $P_E = P_D - L_p - (M) = 27 - [49 - 20 \log d(\text{km})] - 10 = -32 - 20 \log d(\text{km}) \text{ dBm}$

Margen de desvanecimiento = 10 dB

Se resta pq. hay q. hacer los cálculos para el caso peor (que haya una atenuación adicional de 10 dB)

En el caso peor la potencia debe ser de -60 dBm. Si fuera < el receptor no funciona

(F) $P_F = P_E + G_3 = -32 - 20 \log d + 40 = 8 - 20 \log d(\text{km}) = -60 \text{ dBm}$

(G) $20 \log d(\text{km}) = 68 \rightarrow d_{\text{máx}} = 10^{\frac{68}{20}} \text{ km} = 2511,9 \text{ m} \approx 2,5 \text{ km}$

EXAMEN DE TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN
 Departamento de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones

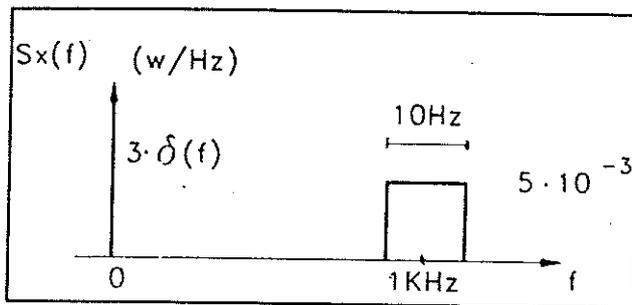
Tiempo: 3 horas.

12-Septiembre-1997

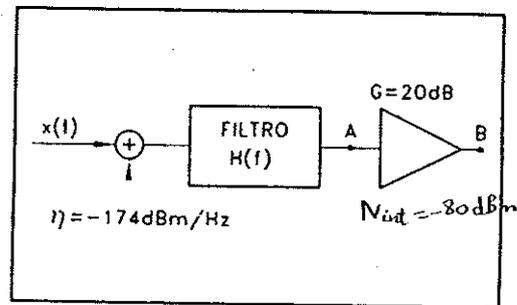
17- Una señal $x(t)$ tiene la densidad espectral de potencia representada en la figura 1 (sólo se ha dibujado la parte correspondiente a $f \geq 0$). Se transmite por el sistema mostrado en la figura 2 donde el valor de η (unilateral) corresponde al ruido térmico. El amplificador introduce un ruido interno añadido total de -80dBm . La función de transferencia del filtro para $f > 0$ puede aproximarse por:

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{100}{100 + (f - 10^3)^2}} \quad \text{Fase}[H(f)] = \text{arctg}\left(\frac{100}{f - 10^3}\right)$$

(Tome $|H(f)| = 0$ para $f = 0$)



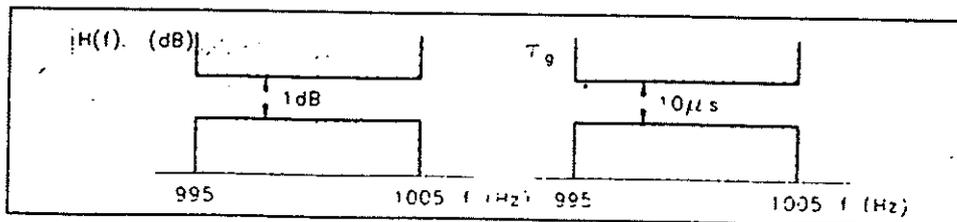
-figura 1-



-figura 2-

Se pide:

- Potencia media, valor medio y valor eficaz de la señal $x(t)$, así como la potencia de señal en los puntos A y B. Exprese dichas potencias en unidades logarítmicas.
- Potencia de ruido y relación señal/ruido en el punto B.
- Admitiendo que la señal $x(t)$ es de banda estrecha y que admite la expresión $x(t) = r(t) \cdot \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$. Determine el retardo aproximado que sufren las componentes moduladoras al atravesar el filtro.
- Para el correcto funcionamiento del sistema existen unos límites para la máxima distorsión lineal permitida. El máximo rizado de la respuesta de amplitud deberá ser de 1dB y el máximo rizado del retardo de grupo es de $10\mu\text{s}$, tal como indican las máscaras de la figura 3. Comprobar si el sistema descrito cumple los requerimientos anteriores.



-figura 3-

NOTA: Si lo considera necesario puede hacer uso de la siguiente expresión:

$$\int \frac{A \cdot dx}{A + (x - x_0)^2} = \sqrt{A} \cdot \text{arctg} \frac{x - x_0}{\sqrt{A}}$$

SEPT 97. EU 1

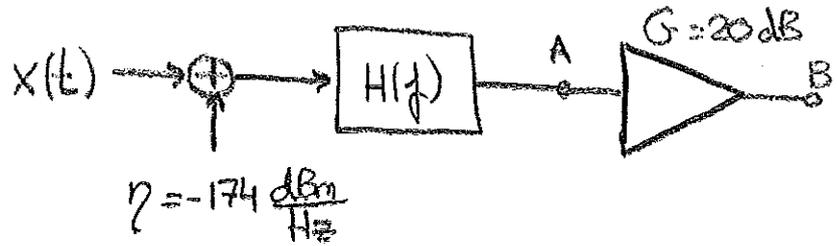
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

$$a) \boxed{P_m} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta(f) df + 2 \cdot 10 \text{ (Hz)} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{W}{\text{Hz}}\right) =$$

$$= 3 + 10^{-1} \quad \boxed{W = 3,1 \text{ W}}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{DC} &= 3 \text{ W} \\ P_{DC} &= X_{DC}^2 \end{aligned} \right\} \boxed{X_{DC} = \sqrt{P_m} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ V}}$$

$$P_{AC} = P_m - P_{DC} = 3,1 - 3 = 0,1 \text{ W} \quad \left. \begin{aligned} X_{eff} &= \sqrt{P_{AC}} \\ X_{eff} &= \sqrt{0,1} = 0,32 \text{ V} \end{aligned} \right\} \boxed{X_{eff} = \sqrt{0,1} = 0,32 \text{ V}}$$



$$\textcircled{A} \quad S_A(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} S_x(f) \cdot \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2}, & \text{si } f \neq 0 \\ 0, & \text{si } f = 0 \quad (\text{Dissipazione la comp. cont.}) \end{cases}$$

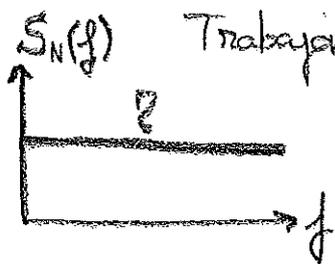
$$\boxed{P_A} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_A(f) df$$

$$\int_{995}^{1005} 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2} df = 10^{-2} \int_{995}^{1005} \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2} df \stackrel{\text{DATO}}{=} \int_{995}^{1005} \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2} df$$

$$\textcircled{B} \quad = 10^{-2} \cdot \sqrt{100} \operatorname{arctg} \frac{f - 10^3}{\sqrt{100}} \Big|_{995}^{1005} = \dots = 92,5 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 92,5 \text{ mW} \equiv 10 \log 92,5 =$$

$$\boxed{P_B} = P_A + G = 19,7 \text{ dBm} + 20 \text{ dB} = \boxed{39,7 \text{ dBm}} \quad \boxed{= 19,7 \text{ dBm}}$$

b) $S_N(f)$ Trabajamos de manera unilateral
A la salida del filtro:



$$S_{NA}(f) = S_N(f) |H(f)|^2 = \begin{cases} \eta \cdot \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2} & f > 0 \\ 0, & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

$$N_A = 2 \int_0^{\infty} S_{NA}(f) df = 2 \cdot \eta \int_0^{\infty} \frac{100}{100 + (f - 10^3)^2} df = 2 \cdot \eta \sqrt{100} \arctan\left(\frac{f - 10^3}{\sqrt{100}}\right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \dots = 6,2 \cdot 10^{-20} \text{ W}$$

↑
DATO

$$\eta = -174 \frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} = 10 \log \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) \rightarrow \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) = 10^{-17,4} = 4 \cdot 10^{-18} \frac{\text{mW}}{\text{Hz}} = 4 \cdot 10^{-21} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

sumamos las potencias de ruido pq son incoherentes.

$$N_B(\text{mW}) = G \cdot N_A(\text{W}) + N_{\text{int}}(\text{W}) = (6,2 \cdot 10^{-20} \cdot 100) + 10^{-8} \cdot 10^{-3} \approx 10^{-11} \text{ W} = 10^{-8} \text{ mW}$$

$$G = 10 \log g_P \rightarrow g_P = 10^{\frac{20}{10}} = 10^2 = 100 \text{ Es despreciable frente al interno}$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{int}}(\text{dBm}) &= 10 \log N_{\text{int}}(\text{mW}) \\ N_{\text{int}}(\text{dBm}) &= -80 \text{ dBm} \end{aligned} \right\} N_{\text{int}}(\text{mW}) = 10^{-\frac{80}{10}} = 10^{-8} \text{ mW}$$

$$\boxed{\text{SNR}_B = \frac{P_B}{N_B} = P_B(\text{dBm}) - N_B(\text{dBm}) = 39,7 \text{ dBm} - (-80 \text{ dBm}) = 119,7 \text{ dB}}$$

c) El retardo de los comp. moduladoras es el retardo de grupo:

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_H(f)}{df} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \left[\arctan \frac{100}{f - 1000} \right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{\frac{-1 \cdot 100}{(f - 1000)^2}}{1 + \frac{10^4}{(f - 1000)^2}} = \frac{d}{dx} \left\{ \arctan \left[\frac{q(x)}{1 + q(x)^2} \right] \right\} = \frac{q'(x)}{1 + q(x)^2}$$

$$= \frac{50/\pi}{(f - 1000)^2 + 10^4}$$

Depende de $f \Leftrightarrow$ canal dispersivo. Cada frecuencia tiene un retardo diferente.

Como me piden el retardo aprox. lo calculo en el centro de la banda ($f = 1000 \text{ Hz}$)

$$t_g(1 \text{ kHz}) = \frac{50/\pi}{(f-1000)^2 + 10^4} \Big|_{f=1000} = \frac{50}{\pi} \cdot 10^{-4} \text{ s} = 15,915 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 1,5915 \text{ ms}$$

d) $|H(f)| \neq \text{cte}$ en $f \in [995, 1005] \Rightarrow$ Dist. lineal de amp.

$t_g \neq \text{cte}$ en $f \in [995, 1005] \Rightarrow$ Dist. lineal de fase

Dentro de la banda de interés

(canal dispersivo)

$|H(f)|$ es máx en $f = 1000 \text{ Hz}$ y vale $|H(f)| \Big|_{f=1000 \text{ Hz}} = 1$

$|H(f)|$ es mín en $f = 995$ y $f = 1005 \text{ Hz}$ y vale:

$$|H(f)| \Big|_{f=1005 \text{ Hz}} = \sqrt{\frac{100}{100 + (1005 - 1000)^2}} = 0,89$$

$$\text{Rizado amp (dB)} = 20 \log \frac{|H(f)|_{\text{máx}}}{|H(f)|_{\text{mín}}} = 20 \log \frac{1}{0,89} = 0,97 \text{ dB} < 1 \text{ dB}$$

$$t_g(f) = \frac{50/\pi}{(f-1000)^2 + 10^4}$$

Es máx en $f = 1000 \text{ Hz}$

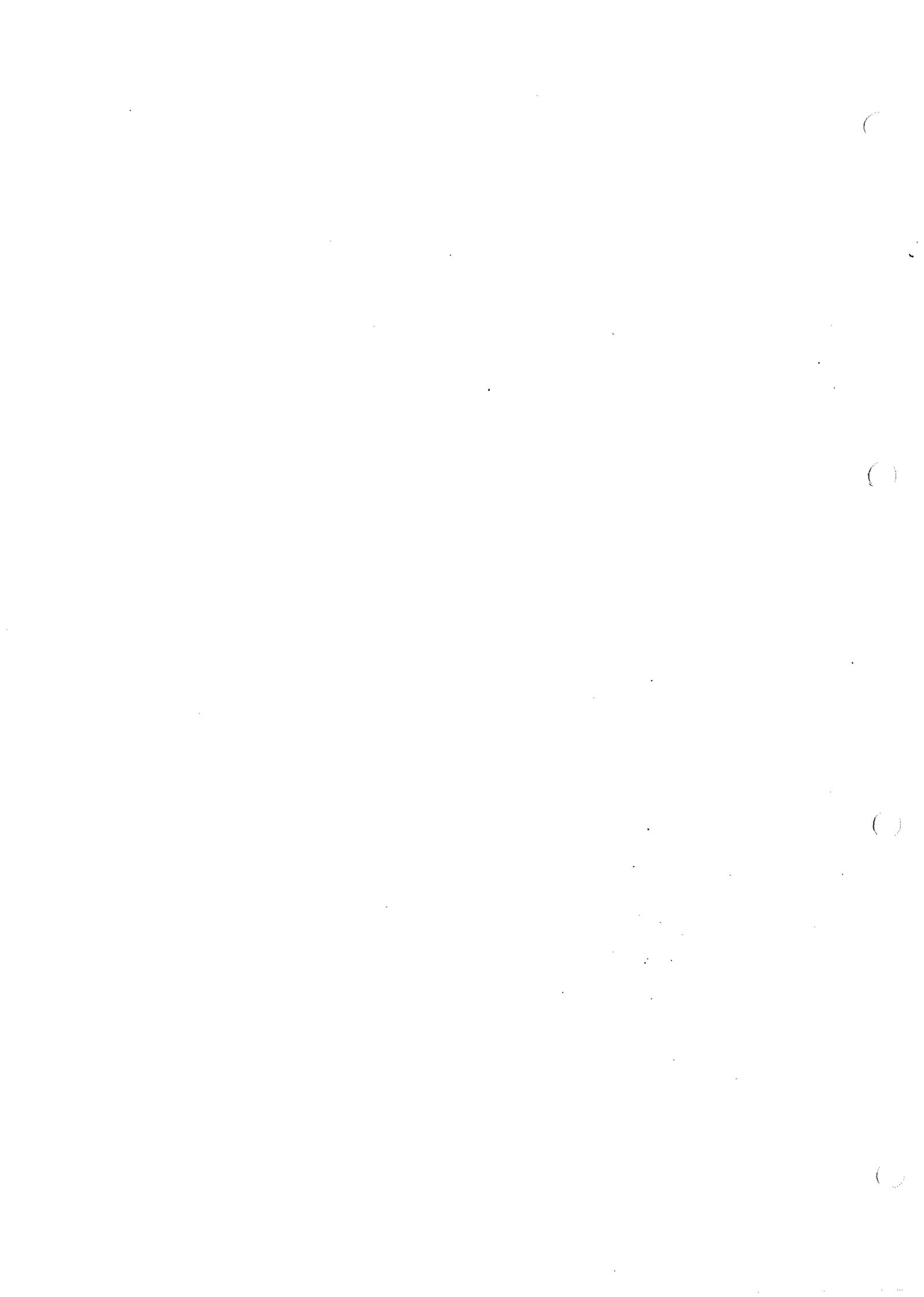
CUMPLE

$$t_g(1000 \text{ Hz}) = 1,5915 \text{ ms} = 1591,5 \mu\text{s}$$

Es mín en $f = 995 \text{ Hz}$ ó $f = 1005 \text{ Hz}$:

$$t_g(995 \text{ Hz}) = \frac{50/\pi}{(995-1000)^2 + 10^4} = 1,58758 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1587,58 \mu\text{s}$$

$$\text{Rizado } t_g (\mu\text{s}) = 1591,5 - 1587,6 = 3,9 \mu\text{s} < 10 \mu\text{s} \quad \text{CUMPLE}$$



3.- Las respuestas de amplitud (atenuación en dB) y fase (en radianes) de una cierta longitud de cable RG-216/U son las que se muestran en las figuras.

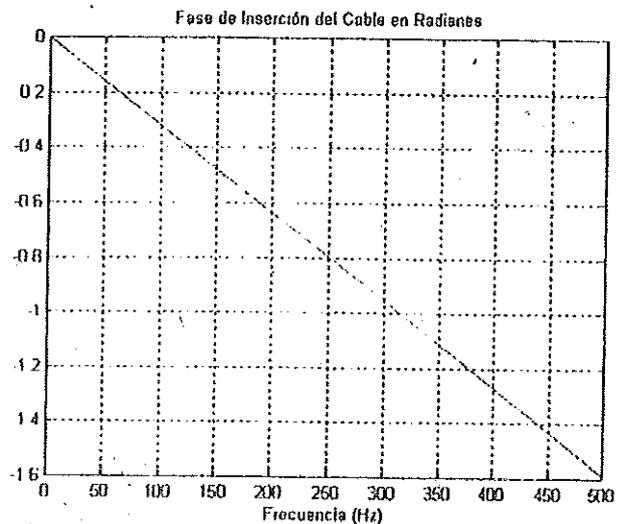
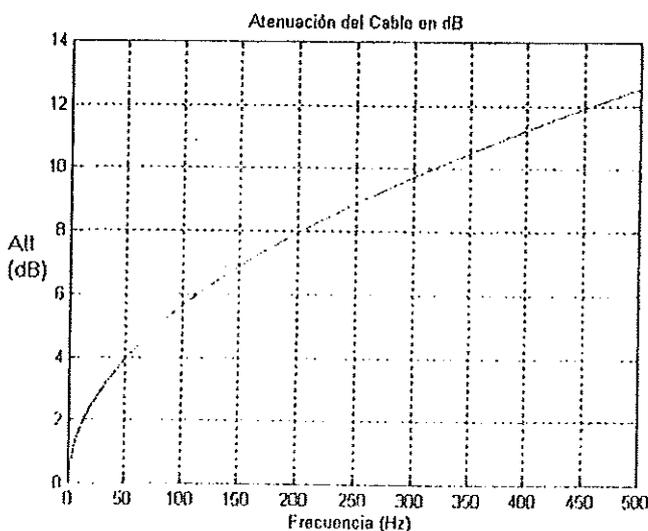
- a) Dibuje la ganancia en función de la frecuencia que deberá tener un ecualizador de amplitud que compense la respuesta del cable para resultar en un canal sin distorsión de amplitud y con 10 dB de ganancia.
- b) Calcule el retardo que introducirá el cable en la señal. Teniendo en cuenta que la velocidad de fase en el cable es de $1,98 \cdot 10^8$ m/s, calcule su longitud.

Una vez ecualizado el cable, se puede modelar como un canal paso bajo ideal con frecuencia de corte de 500 Hz que se usará para enviar una señal analógica paso bajo de ancho de banda 1 KHz. Para ello se va a utilizar un sistema de comunicaciones digitales en banda base con frecuencia de muestreo mínima y con 16 niveles de cuantificación uniformemente espaciados.

- c) Calcule la velocidad de transmisión que soportará el canal.
- d) Calcule el número de símbolos diferentes que se van a necesitar.

Posteriormente, se va a enviar dicha información por un canal radio centrado en 100 MHz. Para ello, se envía la señal binaria original utilizando un modulador ASK y un receptor incoherente.

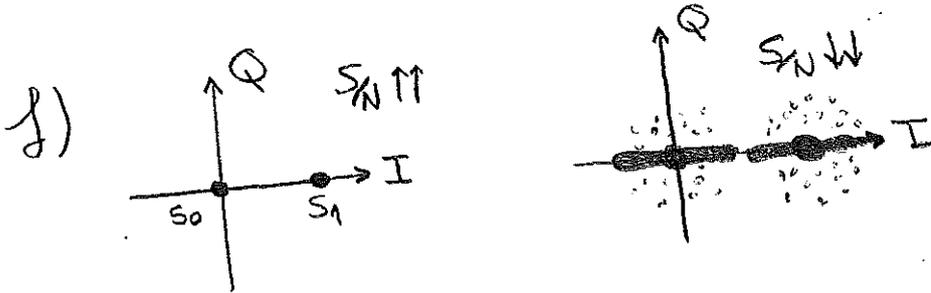
- e) Calcule el ancho de banda mínimo que se necesitará para efectuar la transmisión.
- f) Dibuje las constelaciones para dicha señal cuando la S/N es grande y cuando es pequeña. Clasifíquela (justificándolo) como ortogonal, antipodal o proporcional.
- g) Dibuje la forma de onda transmitida para la secuencia 10110 (simplifique a dos ciclos de portadora por símbolo).
- h) Calcule la amplitud que deberá tener la señal a la salida del transmisor para conseguir una probabilidad de error de 10^{-6} cuando la densidad espectral de ruido a la entrada del receptor es de -134 dBm/Hz y el canal presenta una atenuación de 90 dB.



$$e) V_T = 8 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} = 8000 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \left\{ e = \frac{V_T}{B} \rightarrow B = \frac{V_T}{e} = \frac{8000 \frac{\text{bit}}{\text{s}}}{1 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}} = 8000 \text{ Hz} \right.$$

$$e = 1 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

$$B = 8 \text{ kHz}$$

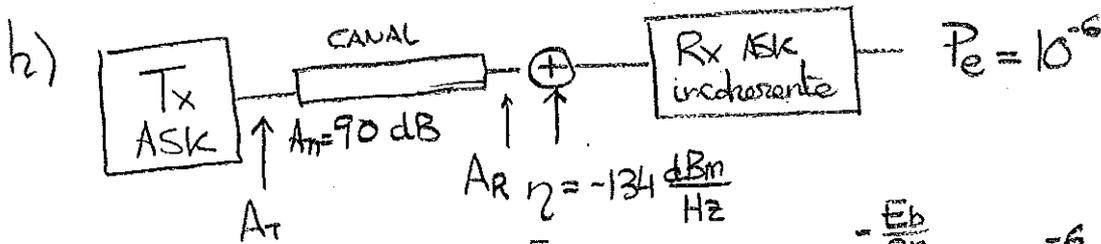
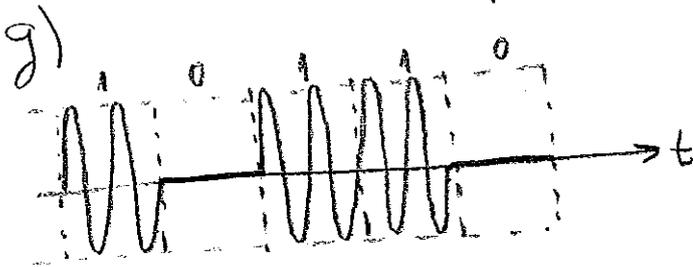


$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cos \omega t$$

$$\left\{ \rho = \frac{1}{\sqrt{E_0 E_1}} \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t) dt = 0 \right\} \text{ORTOGONALES}$$

para normalizar y $\rho \in [-1, 1]$. No tiene sentido cuando $\rho = 0$



$$\text{ASK incoh: } P_e \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2\eta}} = 10^{-6} \rightarrow e^{-\frac{E_b}{2\eta}} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$-\frac{E_b}{2\eta} \ln e = \ln 2 \cdot 10^{-6} \rightarrow E_b = -2\eta \ln 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \right) = 10 \log 2 \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) \rightarrow \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) = 10^{-\frac{134}{10}} \frac{\text{mW}}{\text{Hz}} = 3,98 \cdot 10^{-14} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

$$E_b = 1,045 \cdot 10^{-15} \frac{\text{J}}{\text{bit}}$$

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{A_R^2}{2} T \rightarrow A_R = \sqrt{\frac{4E_b}{T}}$$

$$T = \frac{1}{V_6} = \frac{1}{V_T} = \frac{1}{8000}$$

$$\left. \begin{aligned} A_R &= \sqrt{4E_b \cdot 8000} = \\ &= 5,783 \cdot 10^{-6} \text{ V} \end{aligned} \right\}$$

$$A_{\pi} = 20 \log \frac{A_T}{A_R} \rightarrow \sqrt{A_T} = A_R \cdot 10^{\frac{A_{\pi}}{20}} = 5,783 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{\frac{90}{20}} = 0,185 \text{ V} = 185 \text{ mV}$$

3.- Las respuestas de amplitud (atenuación en dB) y fase (en radianes) de una cierta longitud de cable RG-216/U son las que se muestran en las figuras.

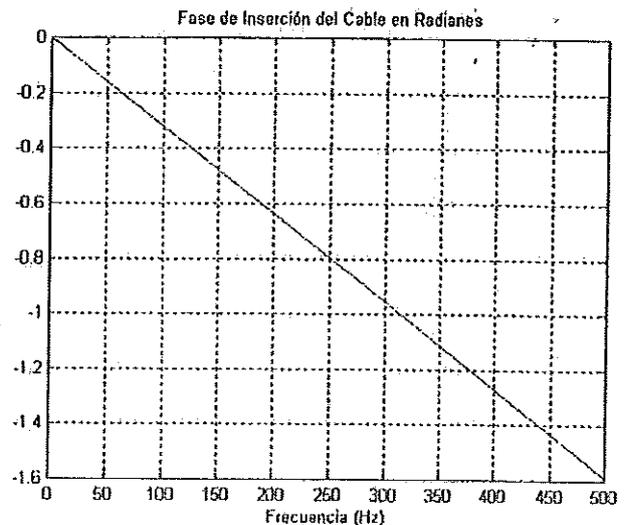
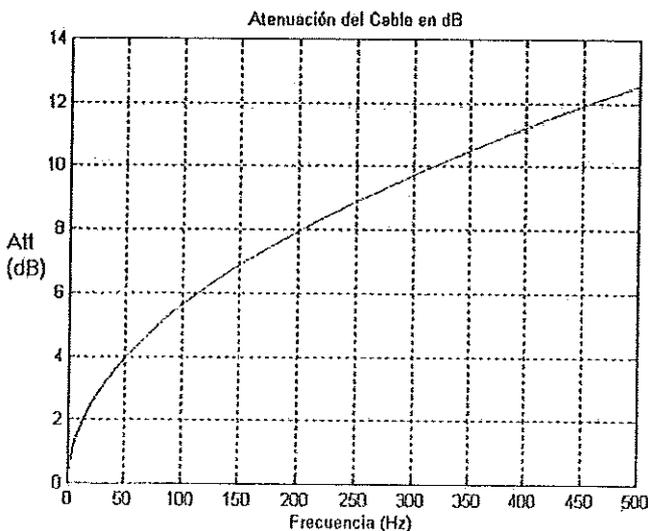
- a) Dibuje la ganancia en función de la frecuencia que deberá tener un ecualizador de amplitud que compense la respuesta del cable para resultar en un canal sin distorsión de amplitud y con 10 dB de ganancia.
- b) Calcule el retardo que introducirá el cable en la señal. Teniendo en cuenta que la velocidad de fase en el cable es de $1,98 \cdot 10^8$ m/s, calcule su longitud.

Una vez ecualizado el cable, se puede modelar como un canal paso bajo ideal con frecuencia de corte de 500 Hz que se usará para enviar una señal analógica paso bajo de ancho de banda 1 KHz. Para ello se va a utilizar un sistema de comunicaciones digitales en banda base con frecuencia de muestreo mínima y con 16 niveles de cuantificación uniformemente espaciados.

- c) Calcule la velocidad de transmisión que soportará el canal.
- d) Calcule el número de símbolos diferentes que se van a necesitar.

Posteriormente, se va a enviar dicha información por un canal radio centrado en 100 MHz. Para ello, se envía la señal binaria original utilizando un modulador ASK y un receptor incoherente.

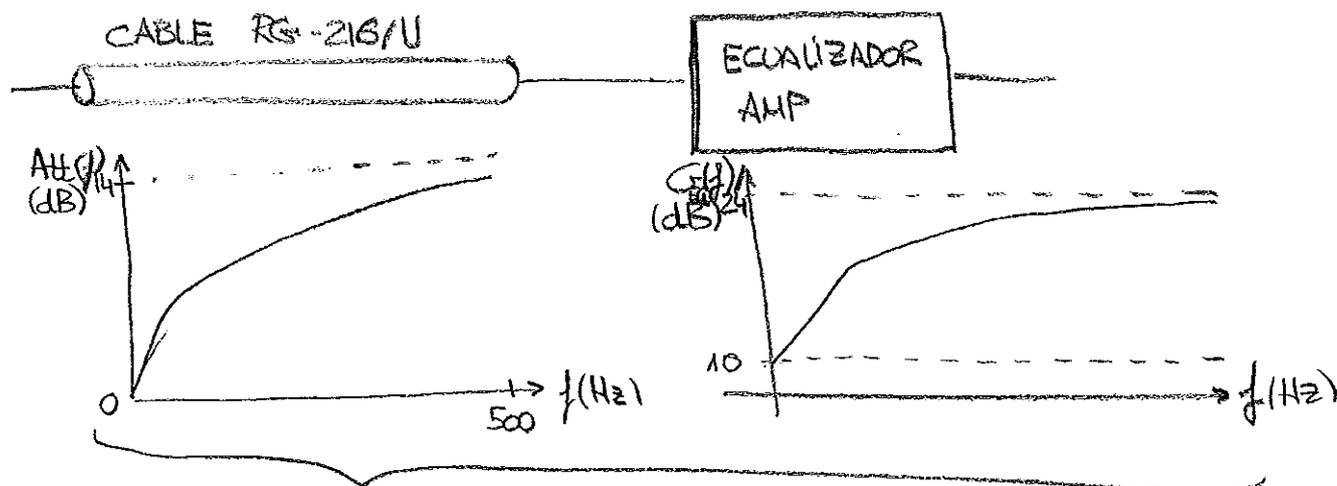
- e) Calcule el ancho de banda mínimo que se necesitará para efectuar la transmisión.
- f) Dibuje las constelaciones para dicha señal cuando la S/N es grande y cuando es pequeña. Clasifíquela (justificándolo) como ortogonal, antipodal o proporcional.
- g) Dibuje la forma de onda transmitida para la secuencia 10110 (simplifique a dos ciclos de portadora por símbolo).
- h) Calcule la amplitud que deberá tener la señal a la salida del transmisor para conseguir una probabilidad de error de 10^{-6} cuando la densidad espectral de ruido a la entrada del receptor es de -134 dBm/Hz y el canal presenta una atenuación de 90 dB.





SEPT 05, EJ 3

a) La curva dada representa la atenuación a cada frecuencia, por lo que otra curva con la misma forma, pero de ganancia en lugar de atenuación conseguiría una respuesta global plana en frecuencia. Como el ecualizador debe aportar 10 dB de ganancia adicionales, se añaden.



$$G_{TOTAL}(f) = G_{EQ}(f) - A(f) = 10 \text{ dB}$$



b) La fase del cable es lineal con $f \iff$ No hay distorsión de fase

Así que $y(t) = kx(t-t_0) \rightarrow Y(f) = kX(f)e^{-j2\pi ft_0} \rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = ke^{-j2\pi ft_0}$

$$\begin{cases} \Phi_H(f) = -2\pi ft_0 \\ \Phi_H(f) = mf \end{cases} \rightarrow -2\pi ft_0 = mf \rightarrow \boxed{t_0 = \frac{-m}{2\pi} = \frac{\Delta\Phi_H}{\Delta f} = \frac{-1.6 - 0}{500 - 0} = 509 \cdot 10^{-6} \text{ s}}$$

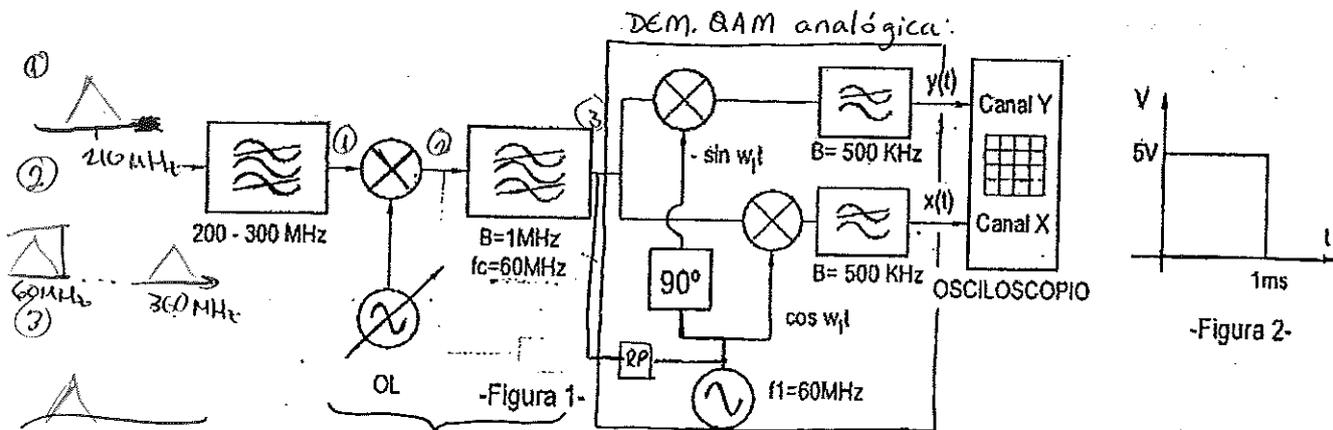
$$v_f = \frac{l}{t_0} \rightarrow \boxed{l = v_f \cdot t_0 = 1.98 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 509 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 100782 \text{ m} \approx 100 \text{ km}}$$

Tema 3

QAM

SEPTIEMBRE 2008

2.- La figura 1 muestra la estructura de un receptor superheterodino capaz de analizar distintos tipos de señales centradas entre 200 y 300 MHz. En este ejercicio se van a conectar distintos tipos de señales, centradas siempre en la frecuencia $f_0=210\text{MHz}$. Se supone que todos los osciladores son coherentes en fase y frecuencia con el del transmisor (en otras palabras, no existen derivas aleatorias de fase en ningún punto).



CONVERSION INFERIOR (Elimina la freq. suma).
 En primer lugar se conecta a la entrada una señal modulada en FM. La señal moduladora $x_m(t)$ se presenta en la figura 2 y tiene una duración total de 1ms y un ancho de banda aproximado de $W=1\text{ KHz}$.

- Indique el máximo valor de la constante K_f de la modulación FM para que la señal se reciba sin distorsión por el sistema
- Indique el valor necesario de la frecuencia de OL
- Calcule la potencia media la señal $x_m(t)$
- Dibuje forma de las señales de salida $x(t)$ e $y(t)$

A continuación se introduce una señal 16-QAM, sin modificar la frecuencia de OL

- Dibuje la forma presentada en la pantalla del osciloscopio cuando se recibe la señal 16-QAM con datos aleatorios
- Sabiendo que la amplitud máxima de la señal 16-QAM es de $63\text{dB}\mu\text{V}$, calcule su potencia media
- Determine la máxima velocidad de transmisión posible de la señal 16-QAM que se recibiría sin distorsión.
- Dibuje la forma obtenida en la pantalla del osciloscopio si se cambia la frecuencia del último oscilador a 61 MHz

b) Recibimos la señal a $f_0=210\text{ MHz}$ y mediante el OL la bajamos a $f_i=60\text{MHz}$. (RECEPTOR SUPERHETERODINO).

El OL deberá ser de $f_0 - f_i = 150\text{MHz} = f_{OL}$.

$$\text{DEMOD: } \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_{OL} t) = \frac{1}{2} \left[\cos(2\pi (f_0 + f_{OL}) t) + \cos(2\pi (f_0 - f_{OL}) t) \right]$$

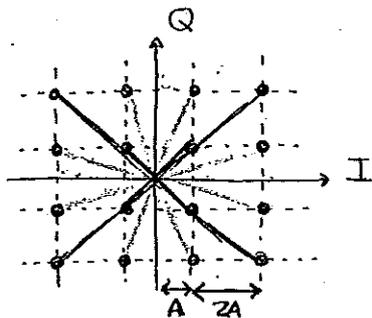
$210 + 150 = 360\text{MHz}$ (eliminada por el filtro pass banda)
 $210 - 150 = 60\text{MHz}$

Nota:

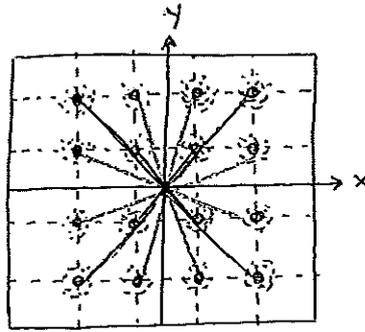
- En los Tx SUPERHETERODINOS se modula con una cierta frecuencia de portadora y después se aumenta la freq de la portadora con un convertidor superior

NOTA: Si en lugar de eliminar la freq. suma, eliminamos la freq. diferencia, se llamaría **CONVERSION SUPERIOR** con $f_c = 380\text{ MHz}$

e) Constelación de la 16-QAM.



prob. del símbolo i .

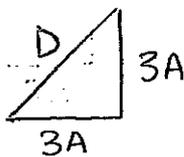


$$f) P_m = \sum_{i=0}^{15} P_i \frac{A_i^2}{2} = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \frac{A_i^2}{2}$$

simb. equiprobables
 $P_i = \frac{1}{16}$

distancia verde D : $D \text{ (dB}\mu\text{V)} = 63 \text{ dB}\mu\text{V} = 20 \log D \text{ (}\mu\text{V)}$

$$D \text{ (}\mu\text{V)} = 10^{\frac{63}{20}} = 1412.5 \mu\text{V}; \quad \boxed{D = 1.4125 \text{ mV}}$$



$$D^2 = (3A)^2 + (3A)^2; \quad D^2 = 18A^2; \quad A = \frac{D}{\sqrt{18}}$$

$$A = \frac{D}{\sqrt{3} \cdot 2}; \quad \boxed{A = 0.333 \text{ mV}}$$

$$D_1^2 = A^2 + A^2; \quad \boxed{D_1 = \sqrt{2} A}$$

$$D_2^2 = A^2 + (3A)^2; \quad \boxed{D_2 = \sqrt{10} A}$$

$$\frac{1}{8} [D_1^2 + D^2 + 2D_2^2]$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \left[\frac{D_1^2}{2} + \frac{D^2}{2} + D_2^2 \right]$$

$$P_m = \frac{1}{16} \left[4 \frac{D_1^2}{2} + 4 \frac{D^2}{2} + 8 \frac{D_2^2}{2} \right] = \frac{4}{32} [D_1^2 + D^2 + 2D_2^2] =$$

$$= \frac{1}{8} [2A^2 + 9 \cdot 2A^2 + 2 \cdot 10A^2] = \frac{40 \cdot A^2}{8} = 5A^2 = 5(0.333 \cdot 10^{-3})^2 =$$

$$= 5.54 \cdot 10^{-7} \text{ W}; \quad \boxed{P_m = 0.554 \mu\text{W}} \equiv 0.554 \cdot 10^{-3} \text{ mW} \equiv$$

$$\equiv -32.6 \text{ dBm.}$$

g) El ancho de banda del filtro paso banda es $B = 1\text{MHz}$.

Sabemos que se puede recibir sin distorsión si:

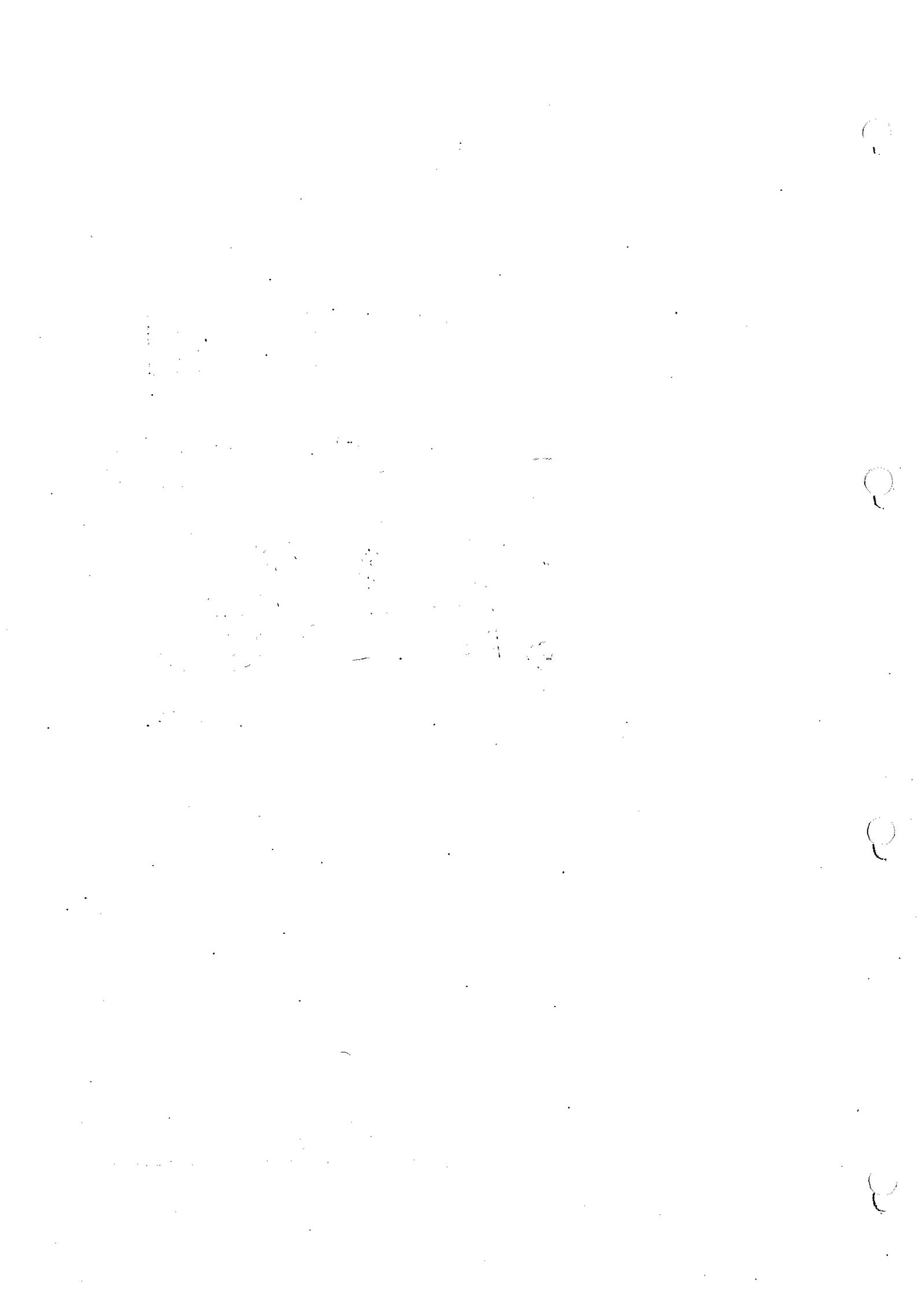
$$B = V_s = \frac{1}{T} \Rightarrow V_s = 1\text{M} \frac{\text{símb}}{\text{s}}$$

$$\left. \begin{aligned} V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) &= k \left(\frac{\text{bits}}{\text{símb}} \right) \cdot V_s \left(\frac{\text{símb}}{\text{s}} \right) \\ k &= \log_2 M = \log_2 16 = 4 \frac{\text{bits}}{\text{símb}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_T &= 4 \cdot 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}}; \\ &\boxed{V_T = 4 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}} \end{aligned}$$

h) La demodulación de QAM debe ser totalmente coherente (misma frecuencia, error de fase 0). Si el oscilador del demodulador tiene $f = 61\text{MHz}$ y la señal a demodular tiene una portadora de 60MHz , a la salida del demodulador sólo habrá RUIDO.

a) $B = 1\text{MHz} = 2(f_D + W)$; $f_D = 499\text{kHz} = k_F \cdot 5\text{V}$; $k_F = 100 \frac{\text{kHz}}{\text{V}}$

c) $X_m(t)$ es de energía finita $\rightarrow P_m = 0\text{W}$



SEPTIEMBRE 1998.

2. Un modulador AM opera con un índice de modulación del 50 %. La expresión temporal de la señal moduladora es:

$$x(t) = 2\cos(2\pi f_m t) + \cos(4\pi f_m t) + 3\cos(10\pi f_m t)$$

siendo $f_m = 1 \text{ KHz}$. La frecuencia de la portadora es 1 MHz y su amplitud $0,2 \text{ V}$.

- Calcule la potencia de la señal moduladora en dBm.
- Indique la expresión temporal de la señal modulada, $y(t)$.
- Dibuje el espectro (módulo de la transformada de Fourier), de la señal de salida del modulador, $Y(f)$.
Indique la amplitud de cada raya.
- Calcule la potencia de la señal modulada y la de la portadora, ambas en dBm.
- Calcule la eficiencia de potencia e indique el ancho de banda de la señal modulada.
- ¿Cuál es el valor máximo de la eficiencia de potencia que se puede obtener si se mantienen constantes los parámetros del modulador excepto el índice de modulación?

$m = 50\% = 0,5$
 $x(t) = \frac{2\cos(2\pi f_m t)}{x_1} + \frac{\cos(4\pi f_m t)}{x_2} + \frac{3\cos(10\pi f_m t)}{x_3}$
 $f_m = 1 \text{ KHz}$ $f_c = 1 \text{ MHz}$ $A_c = 0,2 \text{ V}$

a) Como las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ no se solapan en frecuencia:

$$\langle X^2(f) \rangle = \langle X_1^2(f) \rangle + \langle X_2^2(f) \rangle + \langle X_3^2(f) \rangle = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} = 7 \text{ W}$$

$$7 \text{ W} = 10 \log \left(\frac{7 \cdot 10^3 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} \right) = 38,45 \text{ dBm}$$

b) $y(t) = A_c [1 + m X_m(t)] \cos(2\pi f_c t)$

$$X_m(t) = \frac{x(t)}{|X_m|_{\text{max}}} = \frac{1}{3} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{6} \cos(4\pi f_m t) + \frac{1}{2} \cos(10\pi f_m t)$$

$|X|_{\text{max}} = [t \in \mathbb{R}] = 2 + 1 + 3 = 6 \text{ (V)}$

Así que:

$$y(t) = \frac{0,2}{A_c} \cdot \left[1 + 0,5 \left(\frac{1}{3} \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + \frac{1}{6} \cos(4\pi \cdot 10^3 t) + \frac{1}{2} \cos(10\pi \cdot 10^3 t) \right) \right] \cos(2\pi \cdot 10^6 t) \text{ (V)}$$

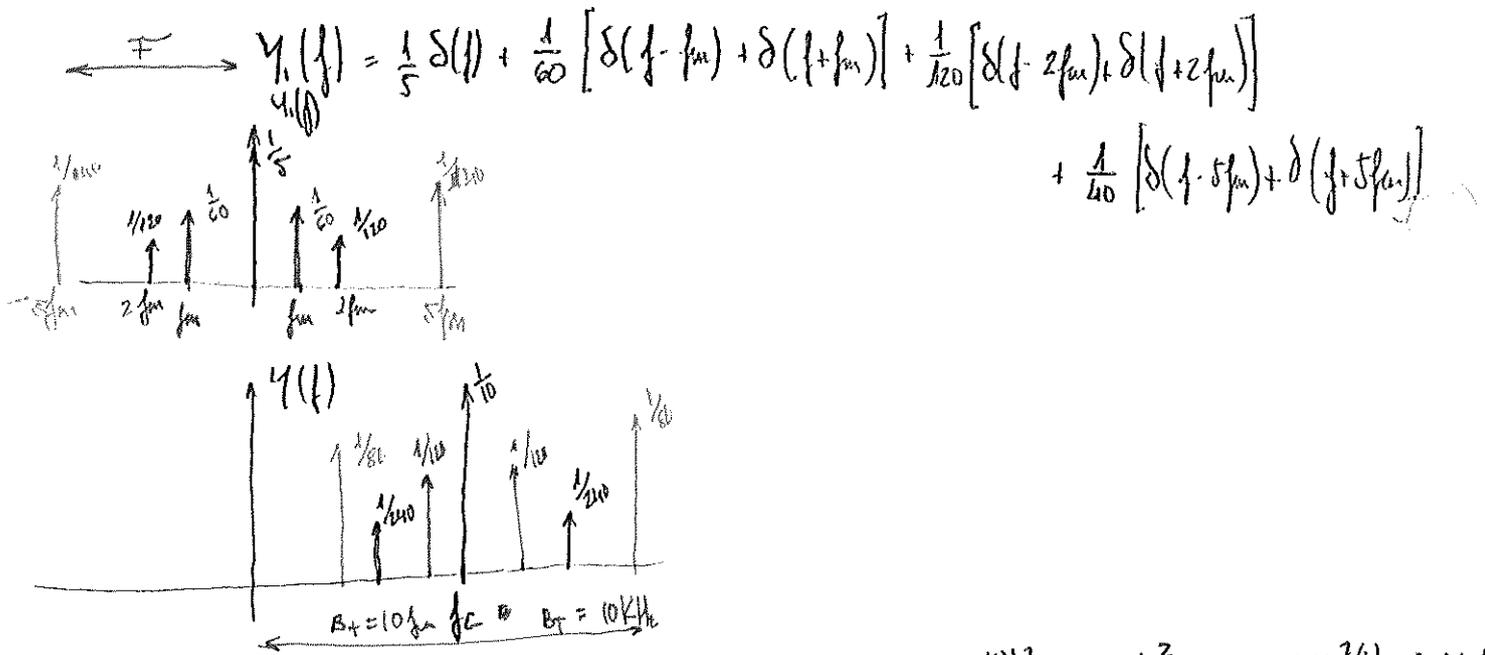
$$y(t) = \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{30} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{60} \cos(4\pi f_m t) + \frac{1}{20} \cos(10\pi f_m t) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

c)

$$y(t) = y_1(t) \cdot y_2(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = Y_1(f) * Y_2(f)$$

$$y_2(t) = \cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} Y_2(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

$$y_1(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{60} \cos(4\pi f_m t) + \frac{1}{20} \cos(10\pi f_m t) \xleftrightarrow{F}$$



$$d) P_T = \langle Y^2(t) \rangle \approx \frac{\langle r^2(t) \rangle}{2} = \frac{1}{2} \langle A_c^2 (1 + m X_N(t))^2 \rangle = \frac{A_c^2}{2} \langle 1 + m^2 X_N^2(t) + 2m X_N(t) \rangle$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \left[\langle 1 \rangle + m^2 \underbrace{\langle X_N^2(t) \rangle}_{\text{Pot. media total nom.}} + 2m \underbrace{\langle X_N(t) \rangle}_0 \right] = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2} m^2 \langle X_N^2(t) \rangle$$

Pc potencia da portadora *Poin (potencia de informac)*

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} = \frac{0.2^2}{2} = 0.02 \text{ W} = 20 \text{ mW} \approx 10 \log \frac{20 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 13.01 \text{ dBm}$$

$$X_N(t) = \frac{1}{3} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{6} \cos(4\pi f_m t) + \frac{1}{2} \cos(8\pi f_m t)$$

$$\langle X_N^2(t) \rangle = \frac{(1/3)^2}{2} + \frac{(1/6)^2}{2} + \frac{(1/2)^2}{2} = 0.194 = 194.6 \text{ } \mu\text{W}$$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2} m^2 \langle X_N^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} (1 + m^2 \langle X_N^2(t) \rangle) = \frac{0.2^2}{2} (1 + 0.5^2 \cdot 0.194) =$$

$$= 0.02097 \text{ W} = 20.97 \text{ mW} = 10 \log \frac{20.97 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 13.21 \text{ dBm}$$

$$e) B_T = 10 f_m = 10 \text{ kHz} \quad E_p = \frac{\text{pot. util}}{\text{pot. total}} = \frac{P_T - P_c}{P_T} = \frac{0.097 \text{ mW}}{20.97 \text{ mW}} = 0.0463 = 4.63\%$$

$$d) \text{ si } m=1 \quad E_p = \frac{m^2 \langle X_N^2(t) \rangle}{1 + m^2 \langle X_N^2(t) \rangle} = 0.1627 = 16.27\%$$

JUNIO 2002.

En un sistema de comunicaciones el transmisor consiste en un modulador AM. La señal moduladora $x(t)$ tiene: valor medio nulo; $x_{\max} = -x_{\min} = 5v$; valor eficaz $x_{ef} = 4v$ y ancho de banda $W = 4KHz$. La portadora es $A_c \cos 2\pi f_c t$, con $f_c = 500KHz$. La tensión de la envolvente de la señal modulada alcanza un valor máximo de 40 v., y un valor mínimo de 20 v., sobre una resistencia de 100 Ω . Hállese:

- El índice de modulación, m.
- La amplitud de la portadora, A_c , en voltios.
- La potencia media de la portadora, en dBm.
- La potencia de la envolvente de pico, PEP, en dBm.
- La potencia de las bandas laterales.
- La potencia transmitida.
- La eficiencia de potencia.

La señal modulada en AM se transmite vía radio, produciéndose propagación multitrayecto por reflexión en un obstáculo. En estas condiciones, el canal radioeléctrico puede modelarse como un filtro de paso banda con respuestas en amplitud y fase, para frecuencias positivas, dadas por:

$$|H(f)| = K_0(1 + \rho \cos 2\pi f \tau_m), \quad |\Phi(f)| = -2\pi f \tau_p - \rho \sin 2\pi f \tau_m$$

donde K_0 (unidades lineales) es la respuesta en amplitud del camino directo. K_0 en dB viene dada por:

$$K_0(dB) = -80 - 20 \log D(Km)$$

siendo D la distancia del enlace. Sabiendo que coeficiente de reflexión, $\rho = 0,05$, que el retardo en el camino directo, $\tau_p = 10 \mu s$, y que el retardo debido al multitrayecto, $\tau_m = 2 \mu s$, se pide:

- Calcular el rizado de la respuesta en amplitud (en dB) y del retardo de grupo en el margen de frecuencias de interés.
- Expresión aproximada de la señal a la salida del canal. Déjela en función de K_0 .

A la salida del canal se suma un ruido blanco gaussiano de densidad espectral de potencia bilateral $\eta = -174$ dBm/Hz. En el receptor el filtro de predetección es ideal con ancho de banda mínimo, va seguido de un detector de envolvente. Se pide:

- Obtener la distancia máxima entre el transmisor y el receptor si se desea que la relación señal ruido de postdetección sea de 25 dB

a) AM

b) $X(t) = \begin{cases} \langle X(t) \rangle = 0 \\ X_{\max} = 5 \end{cases}$

$X_{eff} = 4V \Rightarrow P_{ac} = X_{eff}^2 = 16W$

$P_t = P_{ac} + P_{dc} = 16W = \langle X^2(t) \rangle$

$X_{dc} = \langle X(t) \rangle = 0 = 0W$

$X_w(t) = X(t)/X_{\max}$

$Y(t) = A_c [1 + m X_w(t)] \cos(2\pi f_c t)$

$X_w = 1$

$r_{\max} = A_c(1+m)$

$r_{\min} = A_c(1-m)$

$X_w = -1$

$A_c(1+m) = 40$

$A_c(1-m) = 20$

$m = \frac{1}{3}$

$A_c = 30V$

$$c) P_c = \frac{A_c^2}{2R} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} = 4,5 (W) = 10 \log \frac{4500 mW}{1 mW} = 36,53 dBm$$

$$d) P_{ED} = \frac{r_{max}^2}{2R} = \frac{40^2}{2 \cdot 100} = 8 W = 10 \log \frac{8000 mW}{1 mW} = 39,03 dBm$$

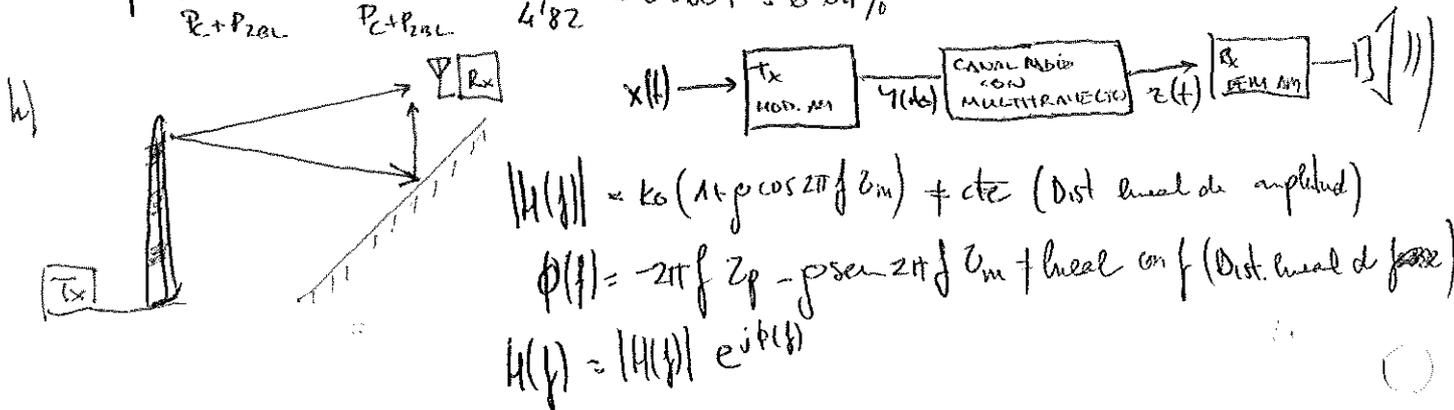
e) f) g)

$$P_T = \langle y^2(t) \rangle \approx \frac{\langle r^2(t) \rangle}{2R} = \frac{1}{2R} \langle A_c^2 [1 + m X_N(t)]^2 \rangle = \frac{A_c^2}{2R} \langle 1 + m^2 X_N^2(t) + 2m X_N(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2R} \left[1 + m^2 \langle X_N^2(t) \rangle + 2m \langle X_N(t) \rangle \right] = \frac{A_c^2}{2R} \left[1 + \frac{m^2}{|X|_{max}} \langle X^2(t) \rangle \right] = \frac{A_c^2}{2R} + \frac{A_c^2 m^2}{2R |X|_{max}} \langle X^2(t) \rangle$$

$$P_{2BL} = \frac{A_c^2 m^2}{2R |X|_{max}} \langle X^2(t) \rangle = \frac{30^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2 \cdot 100 \cdot 5^2} \cdot 16 = 0,32 W = 320 mW = 10 \log \frac{320 mW}{1 mW} = 25,05 dBm$$

$$P_T = P_c + P_{2BL} = 4,5 (W) + 0,32 (W) = 4,82 (W) = 10 \log \frac{4820 mW}{1 mW} = 36,83 dBm$$

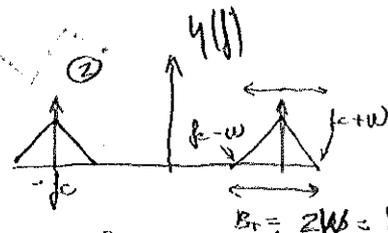
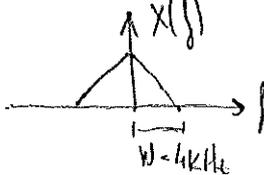
$$E_p = \frac{P_{2BL}}{P_c + P_{2BL}} = \frac{0,32}{4,82} = 0,0664 = 6,64\%$$



$$k_0 (dB) = -80 - 20 \log D (km)$$

DIST. LINEAL AMPLITUD.

①



la banda de interes es $f \in [f_c - W, f_c + W]$

$$f \in [497 kHz, 504 kHz]$$

$$|H(f)| = k_0 (1 + \rho \cos 2\pi f z_m) = k_0 [1 + 0,05 \cos (2\pi f \cdot 2 \cdot 10^6)] = k_0 [1 + 0,05 \cos (4\pi \cdot 10^6 f)]$$

Hay que buscar su max y su min dentro de la banda de interes. El max suele salir en el centro de la banda y el minimo a los extremos!

$$f = f_c = 500 kHz \rightarrow |H(f_c)| = k_0 [1 + 0,05 \cos (2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^3)] = 1,05 k_0 = H_{max}$$

$$f = f_c \pm W = \begin{cases} 496 kHz \\ 504 kHz \end{cases} \rightarrow |H(f_c \pm W)| = k_0 [1 + 0,05 \cos (4\pi \cdot 10^6 \cdot \frac{496}{504} \cdot 10^3)] = 1,0497 k_0 = H_{min}$$

Retardo de amplitud. = $20 \log \frac{|H(f_c)|}{|H(f_c \pm W)|} = 0'0025 \text{ dB}$ (Muy pequeño)

$\phi(f) = -2\pi f z_p - p \sec 2\pi f z_m$ lineal con f
(Dist lineal fase)

Dist. Lineal de fase.

$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = -\frac{1}{2\pi} [-2\pi z_p - p \sec 2\pi f z_m \cos(2\pi f z_m)]$ (+ de \rightarrow Dist lineal)

Hay que calcular el valor máximo y mínimo del retardo de grupo en la banda de interés

$t_g(f) = z_p + p z_m \cos(2\pi f z_m) = 10 \cdot 10^{-6} + 0'05 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-6} f)$ (s)

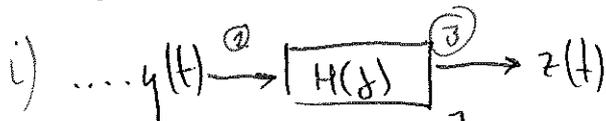
$f = f_c \rightarrow t_g(f_c) = \dots = 10'1 \mu\text{s} = t_{g\text{max}}$
 $f_c = 500 \text{ kHz}$

$f = f_c \pm W \rightarrow t_g(f_c \pm W) = \dots = 10'0994 \mu\text{s} = t_{g\text{min}}$

Retardo $t_g = t_{g\text{max}} - t_{g\text{min}} = 10,1 \mu\text{s} - 10,0994 \mu\text{s} = 0'0006 \mu\text{s} = 6 \text{ ns}$ (Despreciable)

$|H(f)| \approx 1'05 k\Omega$ en toda la banda de interés: $f \in [496, 504] \text{ kHz}$

$t_g(f) \approx 10,1 \mu\text{s}$ en toda la banda de interés $f \in [496, 504] \text{ kHz}$



② $y(t) = \Delta_c [1 + m x_w(t)] \cos(2\pi f_c t)$

③ $z(t) = k_0 \cdot \frac{\text{atenuacion}}{1+p} \Delta_c [1 + m x_n(t - t_g)] \cos(2\pi f_c (t - t_p))$

$t_g = 10'1 \mu\text{s}$ $t_p = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f_c)}{df_c} = \dots = 1 \mu\text{s}$

NOTA: En este ejercicio la distorsión del multitrayecto es despreciable pero no siempre es así.

102

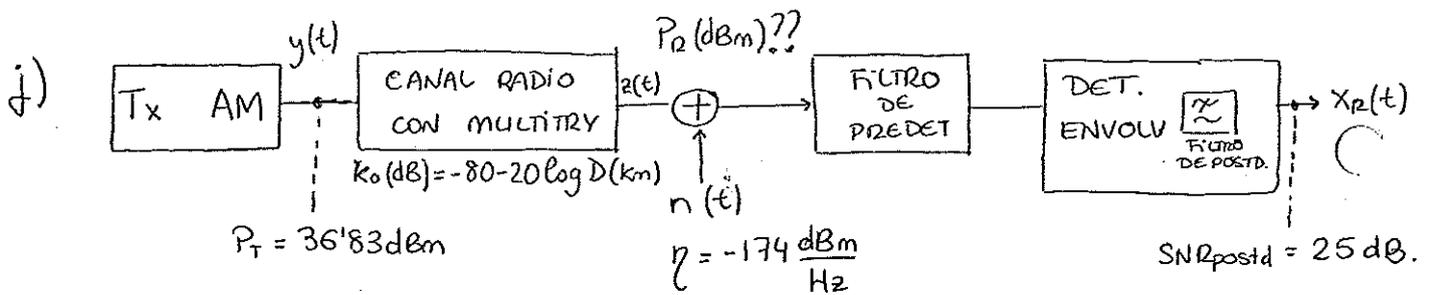
103

104

105

106

107



$$SNR_{postd} = E_p \cdot \frac{P_R}{\eta \cdot W} ; P_R = \frac{\eta W SNR_{postd}}{E_p} \quad \text{unidades logarítm.}$$

$$P_R(\text{dBm}) = 10 \log(\eta W) + SNR_{postd}(\text{dB}) - 10 \log(E_p) =$$

$$= \eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \right) + 10 \log W(\text{Hz}) + SNR_{postd}(\text{dB}) - 10 \log E_p =$$

$$= -174 + 10 \log 4000 + 25 - 10 \log (0.0664) \quad \uparrow \quad 6.64\%$$

$$P_R(\text{dBm}) = -101.2 \text{ dBm}$$

Señal transmitida: $y(t) = A_c [1 + x_N(t)m] \cdot \cos(2\pi f_c t)$

Señal recibida: $z(t) = k_0(1+f) \cdot A_c [1 + m x_N(t-t_g)] \cdot \cos(2\pi f_c (t-t_p))$

Atenuación del canal = $20 \log \frac{A_c \text{ (Ampl. transm.)}}{k_0(1+f) \cdot A_c \text{ (Ampl. recibida)}} = 20 \log [k_0(1+f)]^{-1} =$

$$= -20 \log [k_0(1+f)] = -\boxed{20 \log k_0} - 20 \log(1+f) =$$

$$= -[-80 - 20 \log D(\text{km})] - 20 \log(1+f) =$$

$$= \boxed{80 + 20 \log D(\text{km}) - 20 \log(1+f)}$$

$$P_R(\text{dBm}) = P_T(\text{dBm}) - \boxed{A_T(\text{dB})} ; P_R(\text{dBm}) = P_T(\text{dBm}) - 80 - 20 \log D(\text{km}) + 20 \log(1+f)$$

$$20 \log D(\text{km}) = P_T(\text{dBm}) - P_R(\text{dBm}) - 80 + 20 \log(1+f);$$

$$20 \log D(\text{km}) = 36.83 - (-101.2) - 80 + 20 \log 1.05 = 58.42;$$

$$D(\text{km}) = 10^{\frac{58.42}{20}} ; \boxed{D(\text{km}) = 8336 \text{ km}}$$

○

○

○

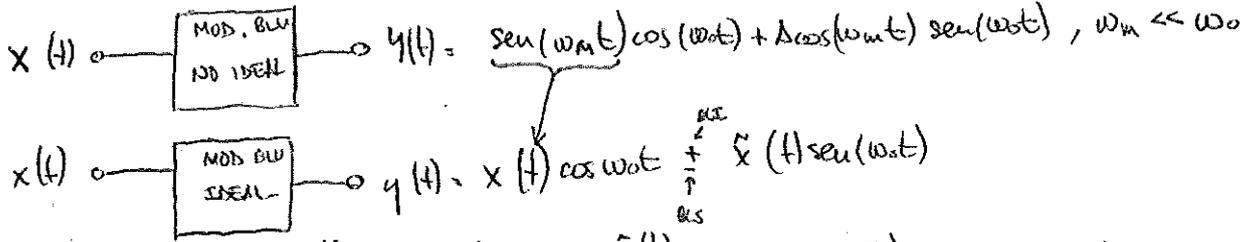
○

1. A la salida de un modulador BLU no ideal se tiene la señal:

$$y(t) = \text{sen}(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_0 t) + A \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \text{sen}(\omega_0 t)$$

siendo $\omega_m \ll \omega_0$

- a) Suponiendo $A=1$ compruebe que la señal $y(t)$ se ajusta a la expresión general de las señales moduladas en BLU. Indique cual es la señal mensaje y si se trata de BLU superior o inferior.
- b) Compruebe que si $A \neq 1$ el espectro de la señal $y(t)$ contiene banda lateral no deseada. Determine el máximo valor de A para que la potencia de la banda no deseada esté al menos 30dB por debajo de la potencia de la banda lateral deseada.
- c) Suponiendo que se utiliza un demodulador convencional de BLU, evaluar la distorsión producida en la señal demodulada $x_R(t)$ cuando A es distinto de la unidad.

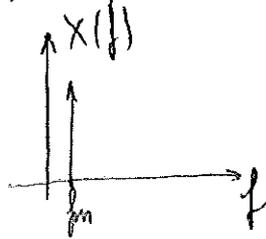


a) Señal mensaje: $x(t) = \text{sen} \omega_m t \rightarrow \hat{x}(t) = \text{sen}(\omega_m t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\omega_m t)$

Suponiendo $A=1$

$$x(t) \rightarrow y(t) = \frac{\text{sen}(\omega_m t)}{x(t)} \cos(\omega_0 t) = \underbrace{[-\cos(\omega_m t)]}_{\hat{x}(t)} \text{sen}(\omega_0 t)$$

b) $x(t) = \text{sen} \omega_m t$

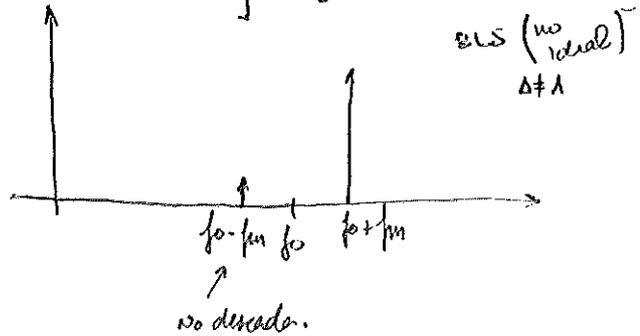


$$y(t) = \text{sen}(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) + A \cos(\omega_m t) \text{sen}(\omega_0 t) =$$

$$= \left[\text{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega_0 + \omega_m)t + \text{sen}(\omega_m - \omega_0)t] + \frac{A}{2} [\text{sen}(\omega_0 + \omega_m)t + \text{sen}(\omega_0 - \omega_m)t]$$

$$= \underbrace{\frac{A+1}{2} \text{sen}(\omega_0 + \omega_m)t}_{\text{deseada}} + \underbrace{\frac{A-1}{2} \text{sen}(\omega_0 - \omega_m)t}_{\text{indeseada}}$$



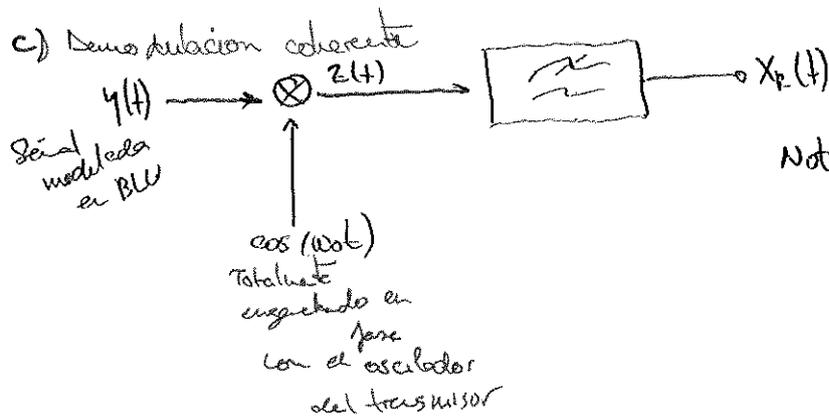
$$P_{\text{Des}} = \frac{(\frac{A+1}{2})^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$$

$$P_{\text{Eli}} = \frac{(\frac{A-1}{2})^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{A-1}{2}\right)^2$$

$$\frac{P_{\text{Des}}}{P_{\text{Eli}}} = 10 \log \frac{P_{\text{Des}}}{P_{\text{Eli}}} = 10 \log \left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 = 20 \log \frac{A+1}{A-1}$$

$$\log \frac{A+1}{A-1} > \frac{30}{20} \rightarrow \frac{A+1}{A-1} > 10^{\frac{30}{20}} = 31.6 \Rightarrow A < 1.065$$

c) Demodulación coherente



Nota: Para q. no haya distorsión

$$x_R(t) = \hat{K} x(t - t_0)$$

$$y(t) = \sin \omega_m t \cos \omega_c t + A \cos \omega_m t \sin \omega_c t$$

$$z(t) = y(t) \cos \omega_c t = \sin \omega_m t \cos^2 \omega_c t + A \cos \omega_m t \sin \omega_c t \cos \omega_c t =$$

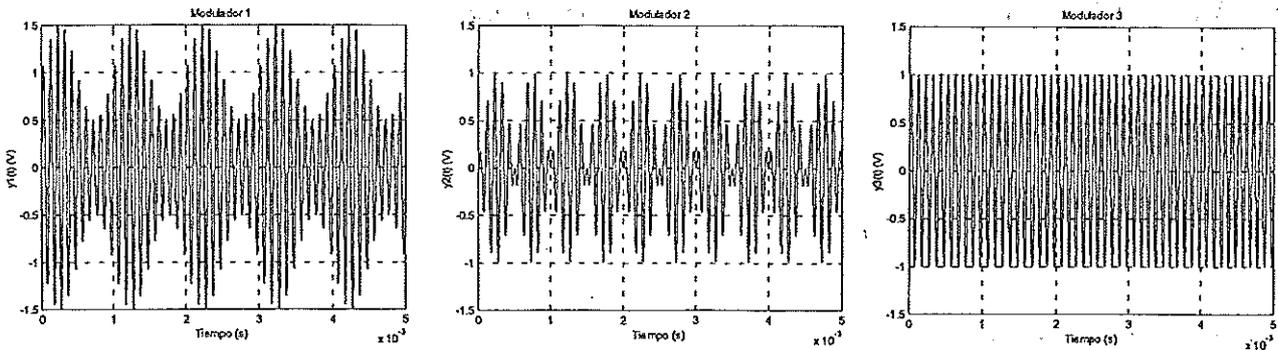
$$= \frac{1}{2} \sin \omega_m t + \frac{1}{2} \sin \omega_m t \cos 2\omega_c t + \frac{A}{2} \cos \omega_m t \sin 2\omega_c t$$

$$x_R(t) = \text{LPF} \left\{ \frac{1}{2} \sin \omega_m t + \frac{1}{2} \sin \omega_m t \cos 2\omega_c t + \frac{A}{2} \cos \omega_m t \sin 2\omega_c t \right\} =$$

$$x_R(t) = \frac{1}{2} \sin \omega_m t = \frac{1}{2} x(t)$$

Aunque incluso una modulación BPS no ideal la señal se demodula correctamente

3.- Se dispone de tres moduladores en principio desconocidos y de dos generadores de señales senoidales, uno de ellos de 1 KHz y otro de 1 MHz, ambos de 1 V de amplitud. Se aplica el generador de 1 MHz a la entrada de portadora y el 1 KHz a la entrada de la señal moduladora, obteniéndose en cada una de las salidas de señal modulada, las señales que se muestran en la figura siguiente:



Nota: La frecuencia de las sinusoides "rápidas" no está dibujada a escala. En los casos 1 y 2 son de 1 MHz y en el 3 ligeramente superior.

- Identifique el tipo de modulador que ha producido cada una de las salidas y dibuje su diagrama de bloques lo más simplificado posible.
- Calcule la eficiencia de potencia y espectral de cada una de ellas y el índice de modulación donde proceda.
- Indique cual es la frecuencia de la senoide a la salida del tercer modulador.

Se desconecta el generador senoidal de 1 KHz y se introduce en su lugar la siguiente señal ($f_0 = 1\text{KHz}$):

$$x(t) = 1\text{sen}(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\text{sen}(2\pi(3f_0)t) + \frac{1}{5}\text{sen}(2\pi(5f_0)t)$$

- Dibuje el espectro en la salida de cada uno de los moduladores.
- Dibuje, para cada una de las modulaciones, el diagrama de bloques de un receptor adecuado. Especifique los valores de los filtros de entrada.
- Calcule la potencia disipada por cada una de las señales, en dBm, sobre una carga de 50Ω .
- ¿Qué parámetro deberá ajustar para formar un sistema FDMA con los tres moduladores?

a) Señal Modulada 1 \rightarrow AM

$r_{max} = 1.5$
 $r_{min} = 0.5$

$y(t) = A_c [1 + m x(t)] \cos(2\pi f_c t)$

índice de modulación
 $m = 0.5$

$r_{max} = A_c(1+m) = 1+m$
 $r_{min} = A_c(1-m) = 1-m$

$1+m = 1.5 \Rightarrow m = 0.5$
 $1-m = 0.5$

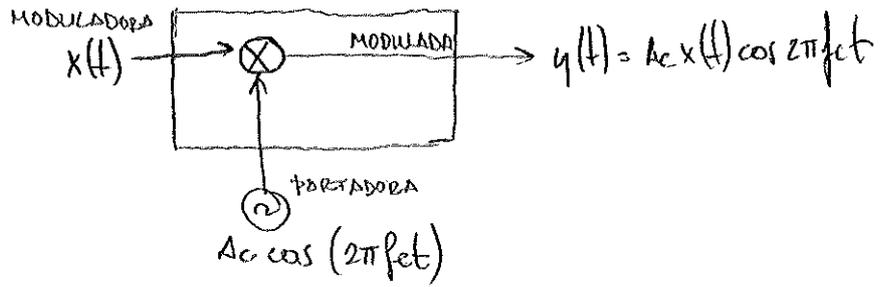
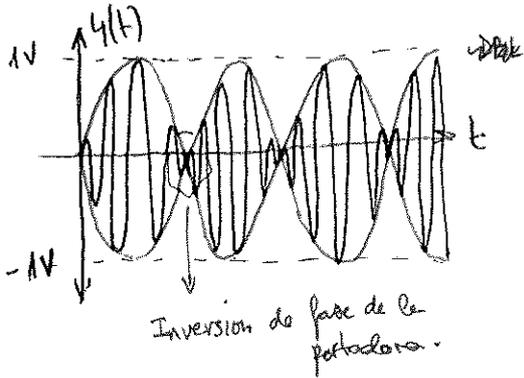
$x(t) \rightarrow$ $A_c x(t) \cos(2\pi f_c t)$

$A_c \cos(2\pi f_c t)$

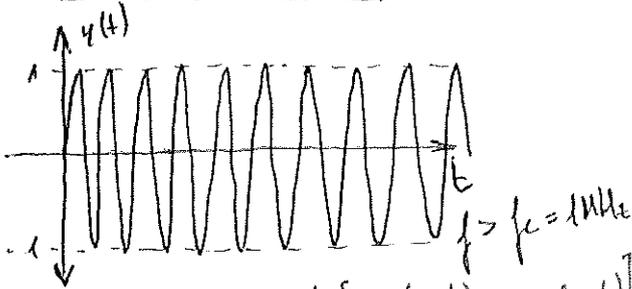
$y(t) = [A_c + A_m x(t)] \cos(2\pi f_c t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_m x(t) \cos(2\pi f_c t)$

$m = \frac{A_m}{A_c} |x|_{max}$

SEÑAL MODULADA 2 → DBL



SEÑAL MODULADA 3 → BLU



Comprobamos que es BLU

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_m t) \rightarrow \hat{x}(t) = -\cos(2\pi f_m t)$$

$$y(t) = \sin\left(\frac{2\pi f_m t}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi f_c t}{b}\right) \mp \cos\left(\frac{2\pi f_m t}{c}\right) \sin\left(\frac{2\pi f_c t}{d}\right)$$

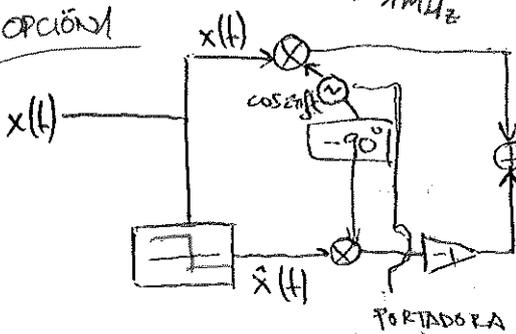
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\sin[2\pi(f_m + f_c)t] + \sin[2\pi(f_m - f_c)t] \right] + \frac{1}{2} \left[\sin[2\pi(f_m + f_c)t] + \sin[2\pi(f_c - f_m)t] \right]$$

$$= \begin{cases} -\sin[2\pi(f_c - f_m)t] & \text{si BLI} < 1 \text{ MHz} \\ \sin[2\pi(f_c + f_m)t] & \text{si BLS} > 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

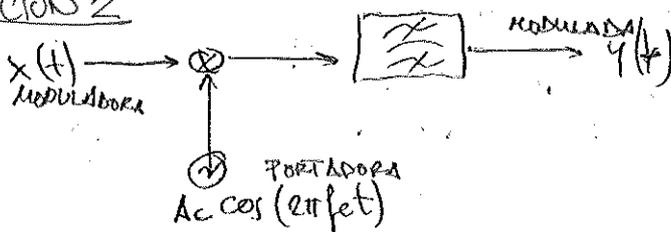
Es un modulador BLS y la frecuencia de la moduladora es 1,001 MHz

OPCIÓN 1



$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

OPCIÓN 2



b) MODULADOR AM:

$$E_e = 50\% \quad E_p = \frac{m^2 \langle X_{\omega}^2(t) \rangle}{1 + m^2 \langle X_{\omega}^2(t) \rangle} = \frac{0.5^2 \cdot 0.5}{1 + 0.5^2 \cdot 0.5} = 0.11 = 11\%$$

$$p_{\text{dc}} X_{\omega}(t) \equiv \langle X_{\omega}^2(t) \rangle = \frac{1}{2R} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ W}$$

$$X_{\omega}(t) = \text{sen}(2\pi f_m t)$$

MODULADOR DBL

$$E_e = 50\%$$

$$E_p = 100\%$$

MODULADOR BLU:

$$E_e = 100\%$$

$$E_p = 100\%$$

c) 1,1001 MHz (antes)

d)

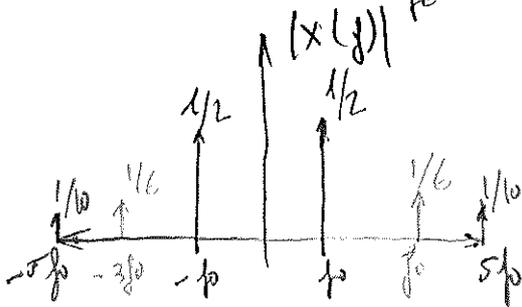
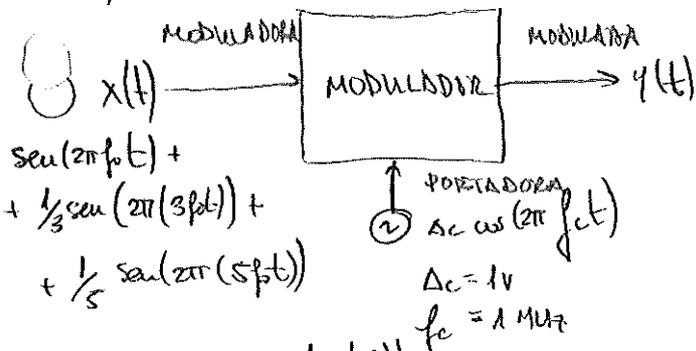


TABLA:

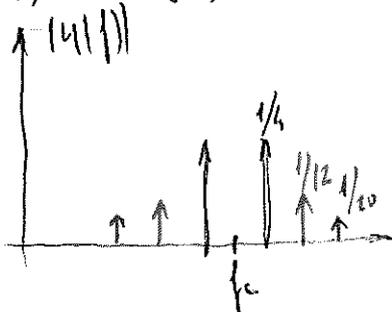
$$\cos(\omega t + \phi) \rightarrow \frac{1}{2} \delta(f - f_c) e^{j\phi} + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) e^{-j\phi}$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

$$\text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c) e^{j\frac{\pi}{2}}] = \frac{j}{2} [\delta(f + f_c) - \delta(f - f_c)]$$

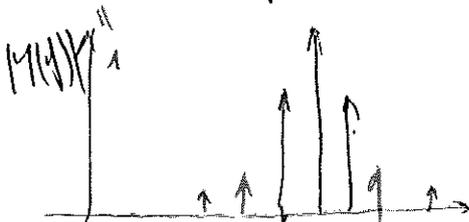
DBL

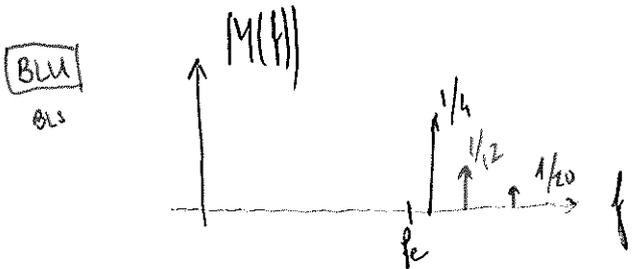
$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \rightarrow Y(f) = X(f) * \frac{1}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] = \frac{1}{2} [X(f + f_c) + X(f - f_c)]$$



AMT

$$y(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \Delta m x(t) \cos(2\pi f_c t)$$





f) **DBL**

$$P_{DBL} = \sum_i \frac{A_i^2}{2R} = \frac{1}{2R} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \right] \cdot R = 50 \mu W$$

la amplitud de una sinusoide en t es el doble que la amplitud de la delta en f.

señal formada por sinusoides de diferentes frecuencias.

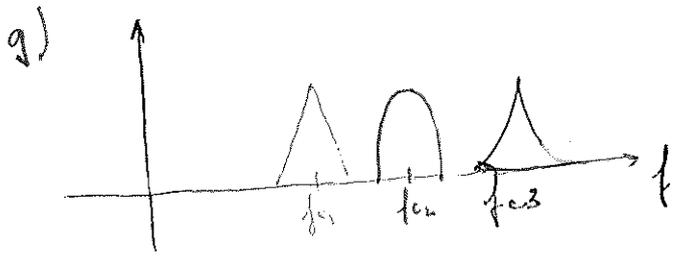
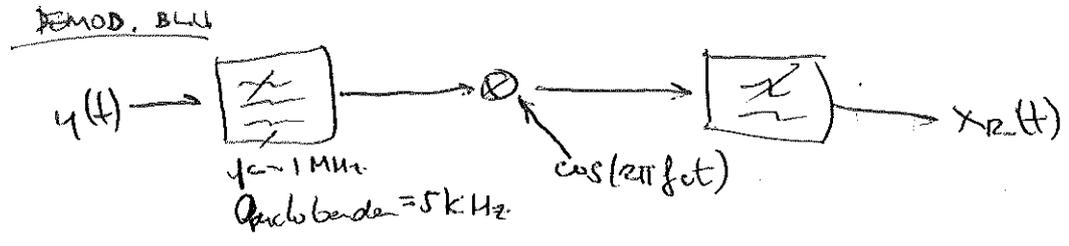
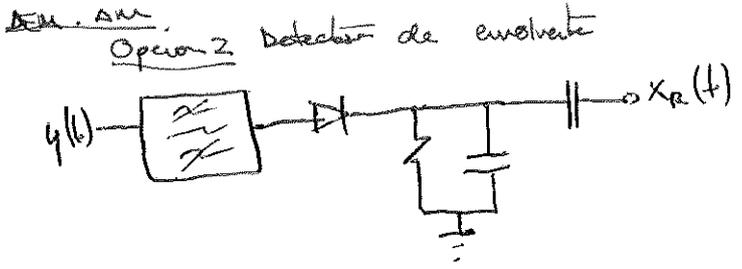
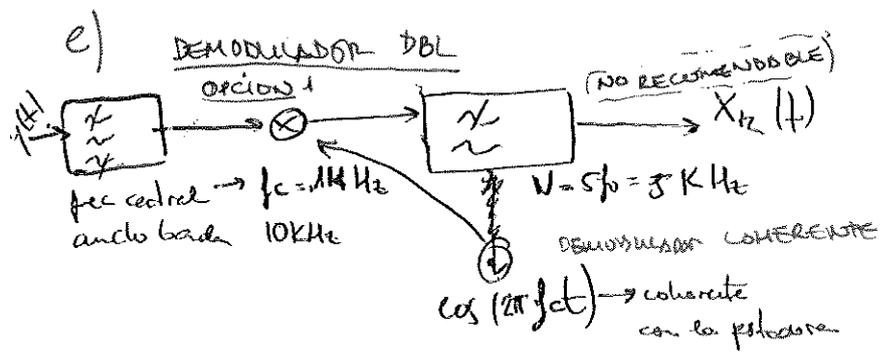
$$= 0'00576 W = 5'76 mW = 7'6 dBm$$

AM

$$P_{AM} = P_{DBL} + P_c = P_{DBL} + \frac{1}{2R} = 0'00576 + \frac{1}{2 \cdot 50} = 15'76 mW \equiv 11'97 dBm$$

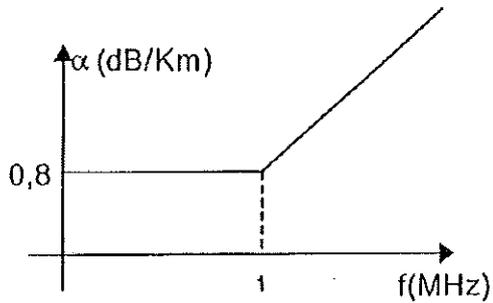
BLU

$$P_{BLU} = \frac{P_{DBL}}{2} = 2'88 mW = 4'58 dBm$$



Habría que ajustar en cada modulador a freq. de portadora para que no se solapen

Ejercicio: Un sistema de modulación QAM analógico utiliza como señales de información $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tonos sinusoidales en cuadratura de frecuencia $f_m = 20$ KHz, y de amplitudes V voltios y $2V$ voltios, respectivamente. La frecuencia de la señal del oscilador local del transmisor es de $f_0 = 2$ MHz, y su amplitud es de 1 voltio. La transmisión se realiza por cable con una atenuación por Km (α) dada por la figura, un retardo de fase, $\tau_p = 150 \mu s$ a f_0 y un retardo de grupo de $\tau_g = 200 \mu s$. La distancia entre el transmisor y el receptor, D , es de 50 Km.



$\alpha(\text{dB} / \text{Km}) = 0,8 \quad ; f(\text{MHz}) \leq 1$ $\alpha(\text{dB} / \text{Km}) = 0,8 + k \cdot (f - 1) \quad ; f(\text{MHz}) > 1$
--

Se pide:

- Potencia de la señal modulada en función de V .
- Dibujar el espectro de la señal modulada, indicando el ancho de banda en función de f_m .
- Valor que ha de tener la constante k de la expresión de α (dB/Km), para que el máximo rizado de amplitud de la señal recibida sea de 1 dB. En estas condiciones puede considerarse que la atenuación total A_T (dB) es constante en todo el ancho de banda de la señal recibida, e igual a la correspondiente a la frecuencia de la portadora. Calcule A_T .
- Expresión de la señal del oscilador local del receptor para que la demodulación sea correcta.
- Expresión de las señales demoduladas en función de f_m , V , A_T , τ_p y τ_g .

6

7

8

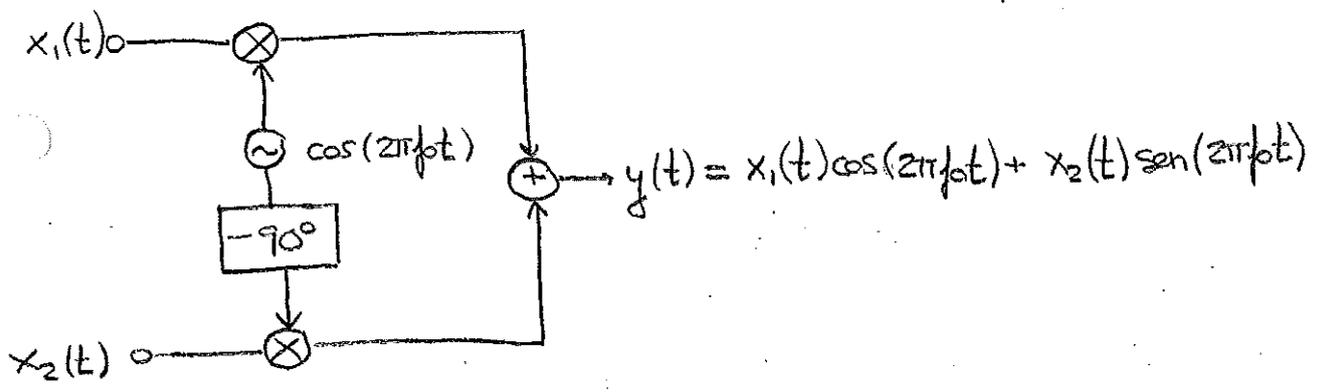
9

SEPTO3.P2

$x_1(t)$ } Tones sinusoidales
 $x_2(t)$ } en cuadratura
 $f_m = 20 \text{ kHz}$
 Amp: V (volts)
 $2V$ (volts)

OL: $f_c = 2 \text{ MHz}$
 Amp: 1 Voltio

$x_1(t) = V \cos(2\pi f_m t) \text{ (V)}$
 $x_2(t) = 2V \sin(2\pi f_m t) \text{ (V)}$



a) $P_y = \langle y^2(t) \rangle = \langle x_1^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) + x_2^2(t) \sin^2(2\pi f_c t) + 2x_1(t)x_2(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \rangle = \frac{1}{2} \langle x_1^2(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x_2^2(t) \rangle =$

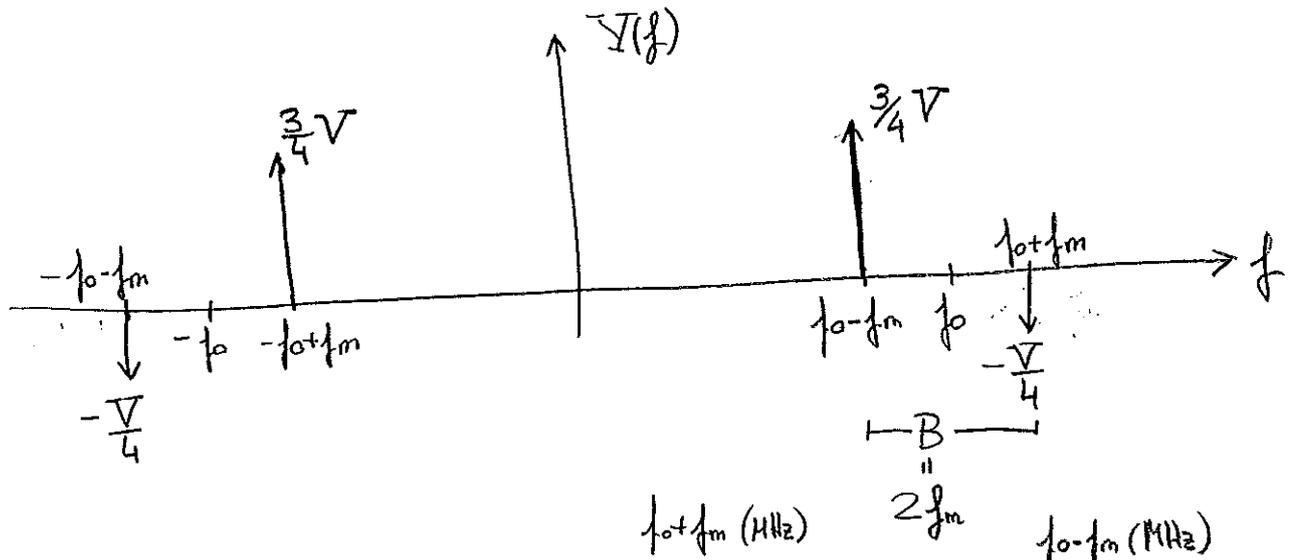
$\frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2V)^2}{2} = \frac{5}{4} V^2 \text{ (W)}$

b) $y(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_c t) + x_2(t) \sin(2\pi f_c t) = V \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_c t) + 2V \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) = \frac{V}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t)] +$

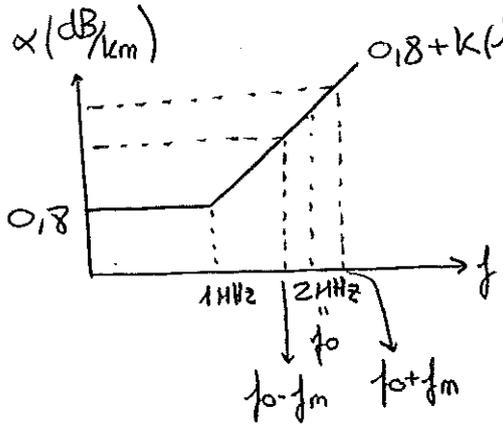
$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$+ \frac{2V}{2} [\cos(2\pi(f_c - f_m)t) - \cos(2\pi(f_c + f_m)t)] = -\frac{V}{2} \cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \frac{3V}{2} \cos(2\pi(f_c - f_m)t)$

$\cos(\omega_c t + \varphi) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) e^{j\varphi} + \delta(f + f_c) e^{-j\varphi}]$



c) Pérdida de amplitud (dB/km) = $\alpha(f_0 + f_m) - \alpha(f_0 - f_m) = k \cdot 0,04 \text{ (dB}/\text{km})$



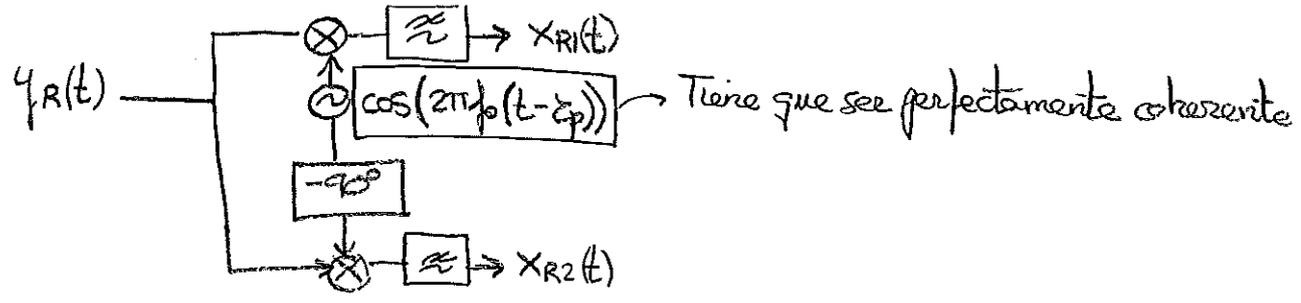
$k \cdot 0,04 \text{ (dB}/\text{km}) D \text{ (km)} = 1 \text{ (dB)}$

$\left[k = \frac{1}{0,04 D} = \frac{1}{0,04 \cdot 50} = 0,5 \right]$

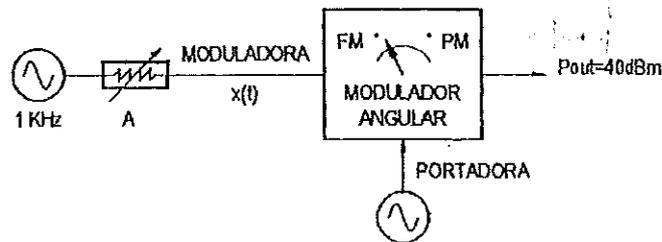
$A_T \text{ (dB)} = [0,8 + k(f_0 - 1)] \text{ (dB}/\text{km}) D \text{ (km)} = 1,13 D = 65 \text{ dB}$

d) $y_R(t) = \frac{H_0}{10^{-\frac{A_T \text{ (dB)}}{20}}} [x_1(t - \tau_p) \cos(2\pi f_0(t - \tau_p)) + x_2(t - \tau_p) \sin(2\pi f_0(t - \tau_p))] =$

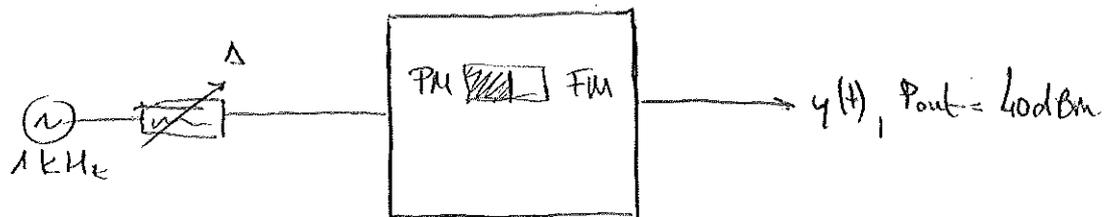
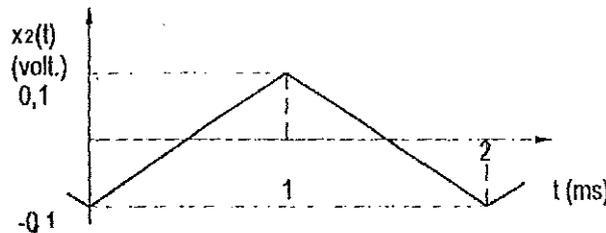
$= H_0 [V \cos(2\pi f_m(t - \tau_p)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_p)) + 2V \sin(2\pi f_m(t - \tau_p)) \sin(2\pi f_0(t - \tau_p))]$



2.- Un modulador angular se ataca con un coseno de 1KHz, cuya amplitud, A, se puede controlar: $x(t) = A \cdot \cos(2000\pi t)$, tal como indica la figura. La señal de salida tiene 40dBm de potencia medida sobre $R=1\Omega$. El modulador puede generar FM o PM según la posición de un conmutador. En los apartados a), b) y c) se considerará que el modulador está siempre en la posición "PM". La portadora es de 100KHz.



- a) Se aumenta la amplitud A hasta que en el espectro de la señal de salida se obtiene la máxima amplitud posible de la raya de 101 KHz, lo cual ocurre para una potencia de $x(t)$ igual a 10dBm (sobre 1Ω). Calcular la K_p del modulador.
- b) Se aumenta ahora la potencia de $x(t)$ en 4dB. Indicar la potencia de salida a la frecuencia de 101KHz.
- c) Se coloca un receptor a una distancia tal que la atenuación del enlace son 90dB. Sabiendo que la d.e.p. de ruido (unilat.) es $\eta = -102\text{dBm/Hz}$, calcular el máximo valor de A para estar por encima del umbral. (Nota: considere $W=1\text{KHz}$).
- d) Se cambia ahora $x(t)$ por una nueva señal moduladora $x_2(t)$ triangular, presentada en la figura siguiente. Dibujar aproximadamente las formas de onda de la señal de salida para la posición del conmutador FM y PM. Se hará cada dibujo sobre un eje de tiempos entre $t=0$ y $t=2$ milisegundos, indicando claramente en qué instantes los ciclos son más rápidos o más lentos, así como el valor de la frecuencia instantánea, al menos, en los alrededores de los instantes $t=0$, $t=1$ y $t=2$ milisegundos. NOTA: el valor de K_f en la posición FM es $K_f=100\text{KHz/V}$



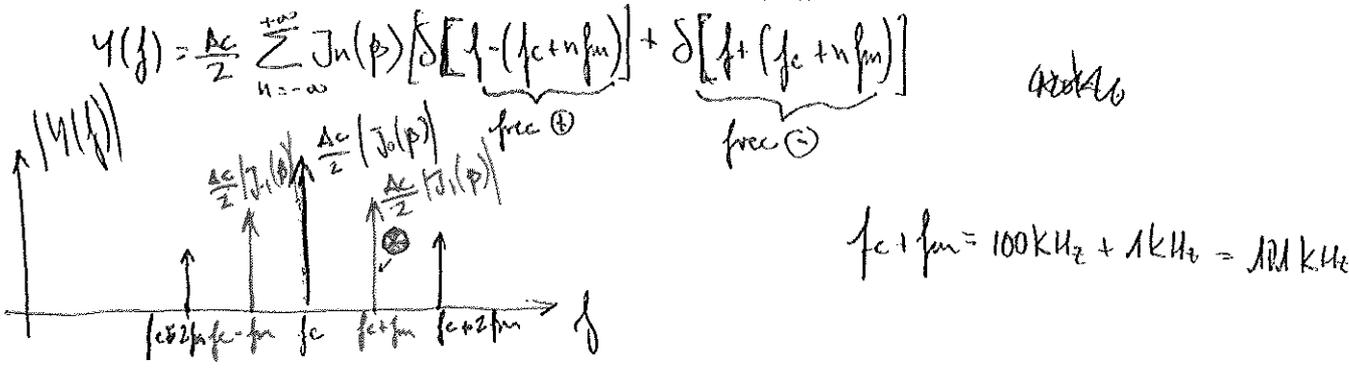
$$x(t) = A \cos(2\pi \cdot 1000 t) \text{ (V)}$$

a)
$$PM: y(t) = A_c \cos(\omega_c t + K_p x(t)) = A_c \cos(\omega_c t + \beta x(t))$$

$$K_p x(t) = \beta x(t) \rightarrow K_p x(t) = \beta \frac{x(t)}{|x|_{max}} \rightarrow \beta = K_p |x|_{max}$$

En este caso $|x|_{max} = A \rightarrow \beta = K_p A$

Sabemos que el espectro es:
$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

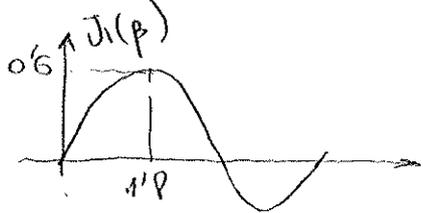


⊗ Esta delta tiene la máxima amplitud esa tal que la potencia de la moduladora es 10dBm

$10 \text{ dBm} = 10 \log P_x (\text{mW}) \rightarrow P_x (\text{mW}) = 10^{\frac{10}{10}} = 10 \text{ mW} = 0.01 \text{ (W)}$

$P_x (\text{W}) = \frac{A^2}{2R} \rightarrow \left[A = \sqrt{2R P_x (\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.01} = 0.14 \text{ (V)} \right]$

Se busca el valor de β que hace que $J_1(\beta)$ sea máx



$k_p = \frac{\beta}{A} = \frac{1.8}{0.14} = 12.86 \frac{\text{rad}}{\text{V}}$

$14 \text{ dBm} = 10 \log P_x (\text{mW}) \rightarrow P_x (\text{mW}) = 10^{\frac{14}{10}} = 25 \text{ mW} = 0.025 \text{ (W)}$

$P_x (\text{W}) = \frac{A^2}{2R} \rightarrow \left[A = \sqrt{2R P_x (\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.025} = 0.22 \text{ (V)} \right]$

$\text{Y ahora } \beta = k_p A = 12.86 \text{ rad} \cdot 0.22 \text{ V} = 2.83 \text{ rad}$

Y buscamos el valor de $J_1(\beta)$ para $\beta = 2.88$

$J_1(2.88) \approx 0.4$

La amplitud de la raya espectral de 101 kHz es: $\frac{A_c}{2} |J_1(\beta)|$

$= \frac{A_c}{2} |J_1(2.88)| = \frac{A_c}{2} (0.4) \Rightarrow$ La potencia de la sinusoidal de 101 kHz es:

$$P_{101 \text{ kHz}} = \frac{\left[\frac{2 A_c}{2} (0.4) \right]^2}{2R} = \frac{A_c^2 \cdot 0.16}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{out}} = 40 \text{ dB} \\ y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(t)) \\ P_{\text{out}} (\text{dBm}) = 40 \text{ dBm} = 10 \log P_{\text{out}} (\text{mW}) \rightarrow P_{\text{out}} = 10 \text{ mW} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{out}} = \frac{A_c^2}{2R} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \frac{A_c^2}{2R} = 10 \text{ W} \rightarrow P_{101 \text{ kHz}} = \left(\frac{A_c^2}{2R} \right) 0.16 = 1.6 \text{ (W)}$

0

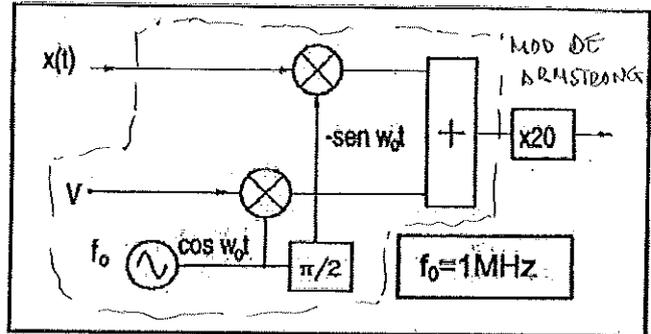
0

0

0

2.- La figura muestra el esquema de bloques de un modulador PM

a) Calcule la expresión exacta de la fase instantánea de la señal de salida. ¿Qué relación debe existir entre V y x(t) para que se comporte aproximadamente como un modulador PM?



Para todos los apartados siguientes considere que x(t) es un tono de f_m=1KHz y una amplitud 20dB inferior a la tensión V.

- b) Valor de β
- c) Variación total en dB de la amplitud de salida (Nota: el multiplicador de frecuencia no introduce cambios en la amplitud)
- d) Dibuje el espectro de salida indicando los niveles relativos entre las distintas componentes.
- e) Indique que modificaciones se necesitan en el esquema de la figura para obtener a la salida una señal modulada en FM con f₀= 10 KHz. Calcule las constantes necesarias.
- f) Se coloca un receptor unido a través de un cable de α=0,05 dB/m. Sabiendo que la amplitud de la señal transmitida es 1V, calcule la máxima longitud del cable para que el receptor opere por encima del umbral. (η=-150dBm/Hz), (Nota: considere W=f_m).

a)

$$y_1 = \underbrace{V \cos(2\pi f_0 t)}_{\text{PORTADORA}} - \underbrace{x(t) \sin(2\pi f_0 t)}_{\text{Modulación DBL en cuadratura.}}$$

TEORIAS:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= r(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \\ y(t) &= y_F(t) \cos(2\pi f_0 t) - y_C(t) \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r(t) &= \sqrt{y_F^2(t) + y_C^2(t)} \\ \varphi(t) &= \arctg \frac{y_C(t)}{y_F(t)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= r_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1(t)) \longrightarrow r_1(t) = \sqrt{y_{F1}^2(t) + y_{C1}^2(t)} = \sqrt{V^2 + x^2(t)} \\ \varphi_1(t) &= \arctg \frac{y_{C1}(t)}{y_{F1}(t)} = \arctg \frac{x(t)}{V} \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_1(t) = \sqrt{V^2 + x^2(t)} \cos\left(2\pi f_0 t + \arctg \frac{x(t)}{V}\right)$$

Al pasar por el multiplicador de x20 de frecuencia: $y(t) = \sqrt{V^2 + x^2(t)} \cos\left[20(2\pi f_0 t + \arctg \frac{x(t)}{V})\right]$

$$y(t) = \underbrace{\sqrt{V^2 + x^2(t)}}_{r(t)} \cos\left[2\pi \cdot 20 f_0 t + \underbrace{20 \arctg \frac{x(t)}{V}}_{\varphi(t)}\right]$$

Para que el sistema se comporte como modulador PM:

$$y(t) = \underbrace{(A_c)}_{cte} \cos(2\pi 20 f_0 t + \beta x(t)) \longrightarrow \varphi(t) = \beta x(t) = \beta \frac{x(t)}{|x|_{max}} = \frac{\beta}{|x|_{max}} x(t)$$

① r(t) = cte

② φ(t) debería ser proporcional a x(t)

$$① r(t) = \sqrt{V^2 + x^2(t)} \approx [si x(t) \ll V] \approx V$$

$$② \varphi(t) = 20 \arctan \frac{x(t)}{V} \approx [si x(t) \ll V] \approx 20 \frac{x(t)}{V} = \frac{20}{V} x(t)$$

bi art $\approx \epsilon$
 $\epsilon \rightarrow 0$

b) $x(t) = \Delta m \cos(2\pi f_m t)$, $f_m = 1 \text{ kHz}$ $\Delta m \ll V$ (Δm 20dB por debajo de V)
 $\hookrightarrow x(t) \ll V$

$x(t) \rightarrow$ MOD PM. $\rightarrow y(t) \approx V \cos(2\pi \cdot 20 f_0 t + \frac{20}{V} x(t))$

PM: $y(t) = V \cos(2\pi \cdot 20 f_0 t + \beta X_m(t))$

$\left. \begin{aligned} \frac{20}{V} x(t) &= \beta \frac{x(t)}{|X|_{max}} \\ \beta &= \frac{20}{V} |X|_{max} \Rightarrow \beta = \frac{20}{V} \Delta m \end{aligned} \right\}$

modo concreto más: $20 \log V = 20 \log \Delta m + 20 \rightarrow$

$20 \log [V - \log \Delta m] = 20$ $20 \log \frac{V}{\Delta m} = 20 \text{ dB}$ $\log \frac{V}{\Delta m} = 1$

$\frac{\Delta m}{V} = 0.1 \Rightarrow \beta = 2 \frac{\text{rad}}{\text{V}}$

Vamos a calcular k_p : $y(t) = \Delta c \cos(2\pi f_c t + \beta X_m(t)) = A_c \cos(2\pi f_c t + k_p X(t))$
(correct del modulator)

$\rightarrow \beta X_m(t) = k_p X(t) \rightarrow \frac{\beta X(t)}{|X|_{max}} = k_p X(t) \rightarrow k_p = \frac{\beta}{|X|_{max}}$

$k_p = \frac{20 \frac{\Delta m}{V}}{\Delta m} = \frac{20}{V}$

c) de a) sabemos que exactamente $r(t) = \sqrt{V^2 + x^2(t)}$

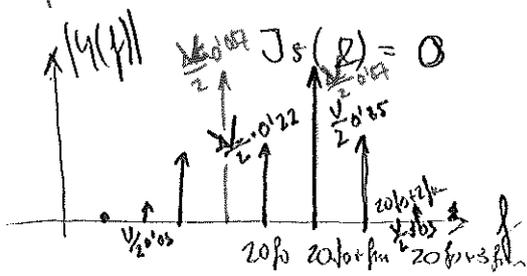
$r_{max} = \sqrt{V^2 + X_{max}^2} = \sqrt{V^2 + \Delta m^2} \stackrel{\text{del ap. b)}}{\approx} \sqrt{V^2 + 0.1^2 V^2} = \sqrt{1.01} V = 1.005 V$

$r_{min} = \sqrt{V^2 + 0^2} = V$

$\Delta r(\text{dB}) = 20 \log r_{max} - 20 \log r_{min} = 20 \log \frac{r_{max}}{r_{min}} = 20 \log 1.005 =$
 $\Delta r(\text{dB}) = 0.0432 \text{ dB}$

d) $y(t) = \frac{A_c}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - 20f_0 - n f_m) + \delta(f + 20f_0 + n f_m)]$

$\beta = 2 \text{ rad}$ $J_0(2) = 0.22$ $J_1(2) = 0.57$ $J_2(2) = 0.35$ $J_3(2) = 0$ $J_4(2) = 0.03$

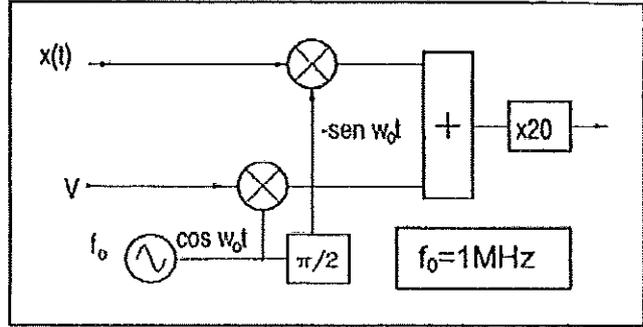


Ancho de Banda:
regla de Carson $B = 2(p+1) f_m$
 $= 2(2+1) 10^3 = 6 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 6 \text{ kHz}$

2.- La figura muestra el esquema de bloques de un modulador PM

a) Calcule la expresión exacta de la fase instantánea de la señal de salida. ¿Qué relación debe existir entre V y x(t) para que se comporte aproximadamente como un modulador PM?

Para todos los apartados siguientes considere que x(t) es un tono de f_m=1KHz y una amplitud 20dB inferior a la tensión V.



total en dB de la amplitud de salida (Nota: el multiplicador de frecuencia no introduce a amplitud)

espectro de salida indicando los niveles relativos entre las distintas componentes.

¿Qué modificaciones se necesitan en el esquema de la figura para obtener a la salida una señal modulada en FM con f₀= 10 KHz. Calcule las constantes necesarias.

f) Se coloca un receptor unido a través de un cable de α=0,05 dB/m. Sabiendo que la amplitud de la señal transmitida es 1V, calcule la máxima longitud del cable para que el receptor opere por encima del umbral. (η=-150dBm/Hz), (Nota: considere W=f_m).

e)

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{Mod. PM}} \rightarrow y(t) \approx V \cos(2\pi \cdot 20 \cdot f_0 \cdot t + \beta X_0(t)) = V \cos(2\pi \cdot 20 \cdot f_0 \cdot t + \beta \int_{-\infty}^t X_0(\alpha) d\alpha)$$

$$\beta X_0(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t X_0(\alpha) d\alpha \quad k_p X_1(t) = 2\pi k_F \int_{-\infty}^t X(\alpha) d\alpha$$

$$2\pi f_0 \int_{-\infty}^t \frac{X(\alpha)}{|X|_{\max}} d\alpha = 2\pi k_F \int_{-\infty}^t X(\alpha) d\alpha \quad \frac{2\pi f_0}{|X|_{\max}} = 2\pi k_F \rightarrow k_F = \frac{f_0}{|X|_{\max}}$$

① $X_1(t) = k \int_{-\infty}^t X(\alpha) d\alpha$

② $y(t) \approx V \cos(2\pi \cdot 20 \cdot f_0 \cdot t + k_p X_1(t)) = \left[\beta = \frac{20}{V} \right] = V \cos(2\pi \cdot 20 \cdot f_0 \cdot t + \underbrace{\frac{k_F}{V} \int_{-\infty}^t X(\alpha) d\alpha}_{\theta(t)})$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = 20 f_0 + \frac{1}{2\pi} k_F X(t)$$

$$f_b = \max \left\{ f_b(t) \right\} = \frac{k_F}{2\pi} |X|_{\max} = \frac{k_F}{2\pi} A_m = \frac{20}{V} \frac{k}{2\pi} A_m = \frac{2k}{2\pi} = \frac{k}{\pi} = 110^4 \rightarrow k = 11 \cdot 10^4$$

Handwritten notes, possibly a list or index, located in the upper left quadrant of the page. The text is faint and difficult to decipher but appears to contain several lines of text.

Handwritten notes or a signature located in the lower right quadrant of the page. The text is very faint and illegible.

○

○

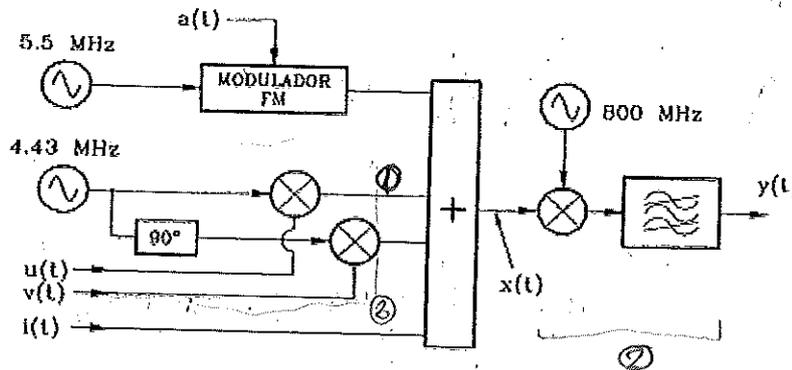
○

○

2. Una transmisión de televisión en color se realiza utilizando modulación BLU superior según el esquema de la figura. En total se transmiten cuatro señales:

- La señal denominada "luminancia", $i(t)$, que lleva la información de la imagen en blanco y negro. Su anchura de banda es de 3.5 MHz.
- La señal de audio, $a(t)$, de 15 KHz de ancho de banda, $a(t)$ modula en frecuencia a una subportadora de 5.5 MHz, siendo la desviación máxima de frecuencia $f_D = 50$ KHz.
- Las señales $u(t)$ y $v(t)$, que transportan, entre las dos, la información del color. Cada una de estas señales tiene un ancho de banda de 350 KHz. Se transmiten modulando en QAM analógica una portadora de 4.43 MHz, tal como se indica en la figura.

Todas estas señales se suman formando la señal $x(t)$ que modula en BLS a una portadora de 800 MHz, según el esquema de la figura.



- Suponiendo que todos los componentes (incluido el filtro) son ideales, escriba la expresión analítica de $y(t)$. Se aconseja hallar en primer lugar la expresión de $x(t)$ y después escribir $y(t)$ en función de $x(t)$. Deje indicadas las constantes que desconozca.
- Especifique la función de transferencia que deberá tener el filtro de la figura para formar la modulación requerida. Comente asimismo los problemas que se plantean a la hora de realizar ese filtro (y que en la práctica no se utilice modulación BLU sino Banda Lateral Vestigial).
- Dibuje aproximadamente el espectro de la señal $y(t)$, sin indicar las amplitudes.
- Utilizando los siguientes elementos:
 - Un recuperador de portadora a 800 MHz y otro a 4.43 MHz.
 - Un demodulador de FM.
 - Un desfasador de 90° .
 - 3 multiplicadores.
 - Diversos filtros paso banda y paso bajo.

Dibuje el diagrama de bloques de un receptor que permita extraer las señales $i(t)$, $a(t)$, $u(t)$ y $v(t)$. Especificar la anchura de banda y frecuencia central de todos los filtros empleados.

$$a_{FM}(t) = A_F \cos\left(2\pi \cdot 5.5 \cdot 10^6 t + 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \int_{-\infty}^t a(\alpha) d\alpha\right) = A_F \cos\left(2\pi \cdot 5.5 \cdot 10^6 t + 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \int_{-\infty}^t a(\alpha) d\alpha\right)$$

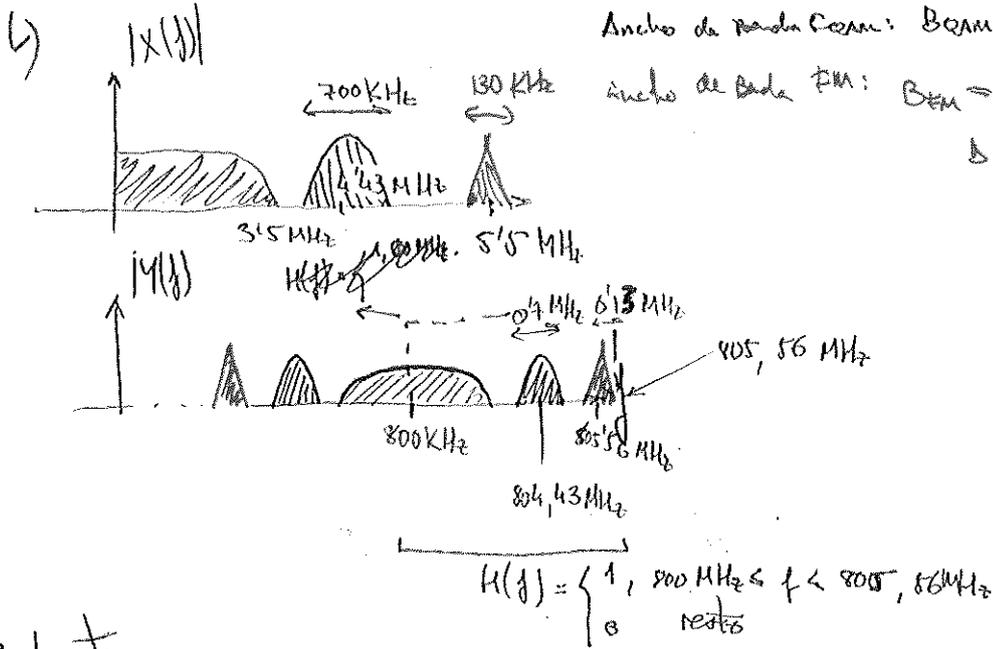
$$y_F(t) = A_C \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t X_W(\alpha) d\alpha\right)$$

~~QAM~~ QAM analógica: $C_{QAM} = u(t) \cos(2\pi \cdot 4.43 \cdot 10^6 t) - v(t) \sin(2\pi \cdot 4.43 \cdot 10^6 t)$

Así que: $x(t) = a_{FM}(t) + C_{QAM}(t) + i(t)$

BLU Sup

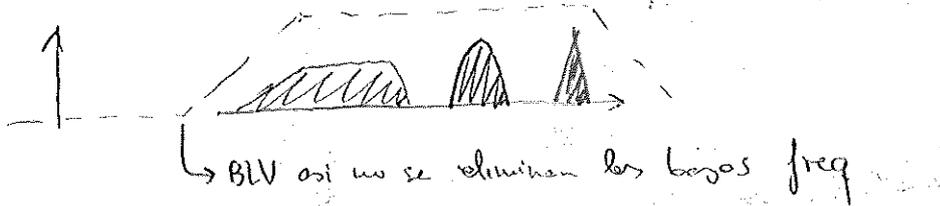
$$y(t) = A_c \left[\underbrace{x(t) \cos(2\pi \cdot 800 \cdot 10^6 t)}_{\text{PORTADORA BLU}} - \underbrace{\hat{x}(t) \sin(2\pi \cdot 800 \cdot 10^6 t)}_{\text{PORTADORA VLS}} \right]$$

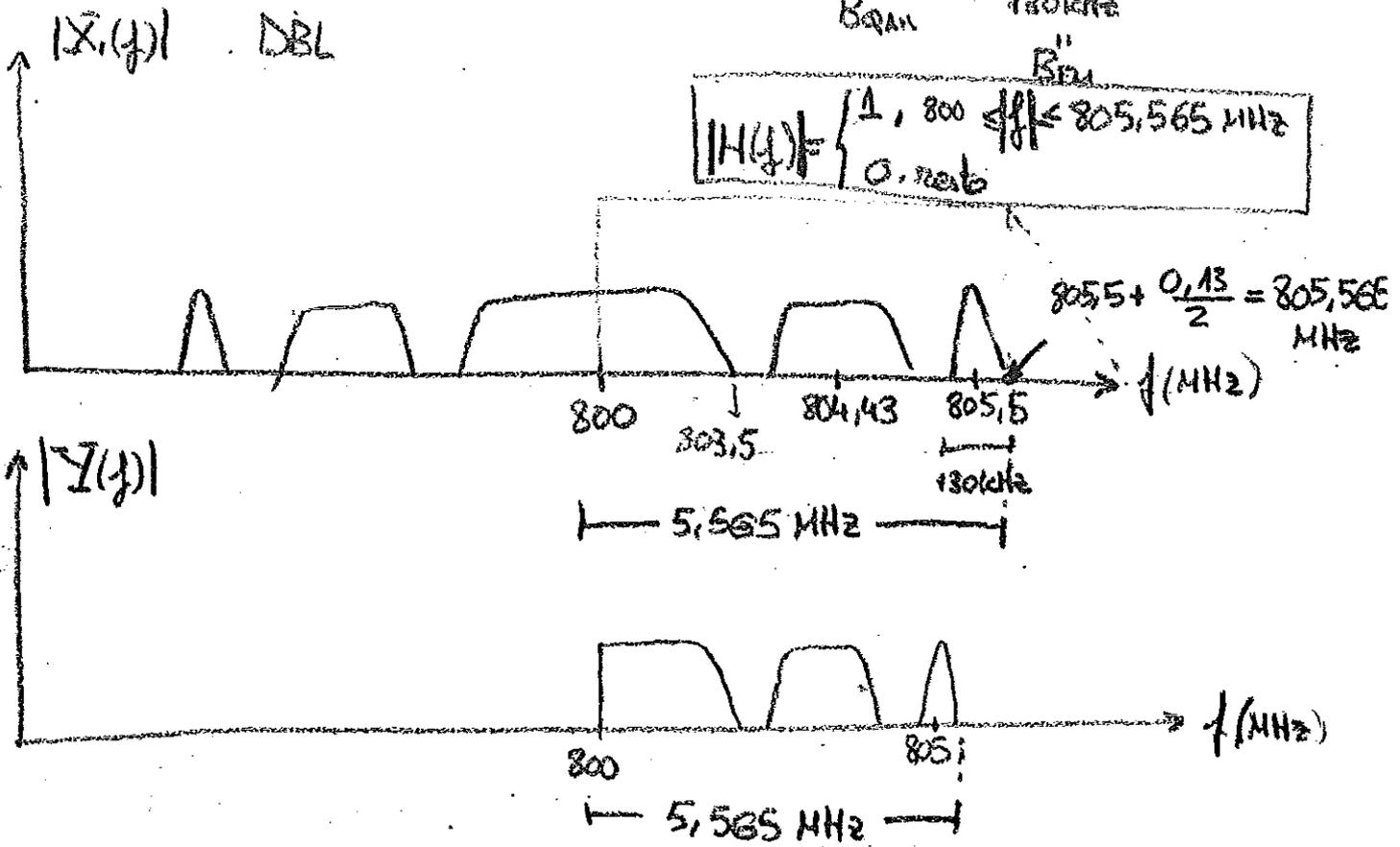


Ancho de banda OQAM: $B_{OQAM} = 2 \cdot \max(350 \text{ kHz}, 35 \text{ kHz}) = 700 \text{ kHz}$

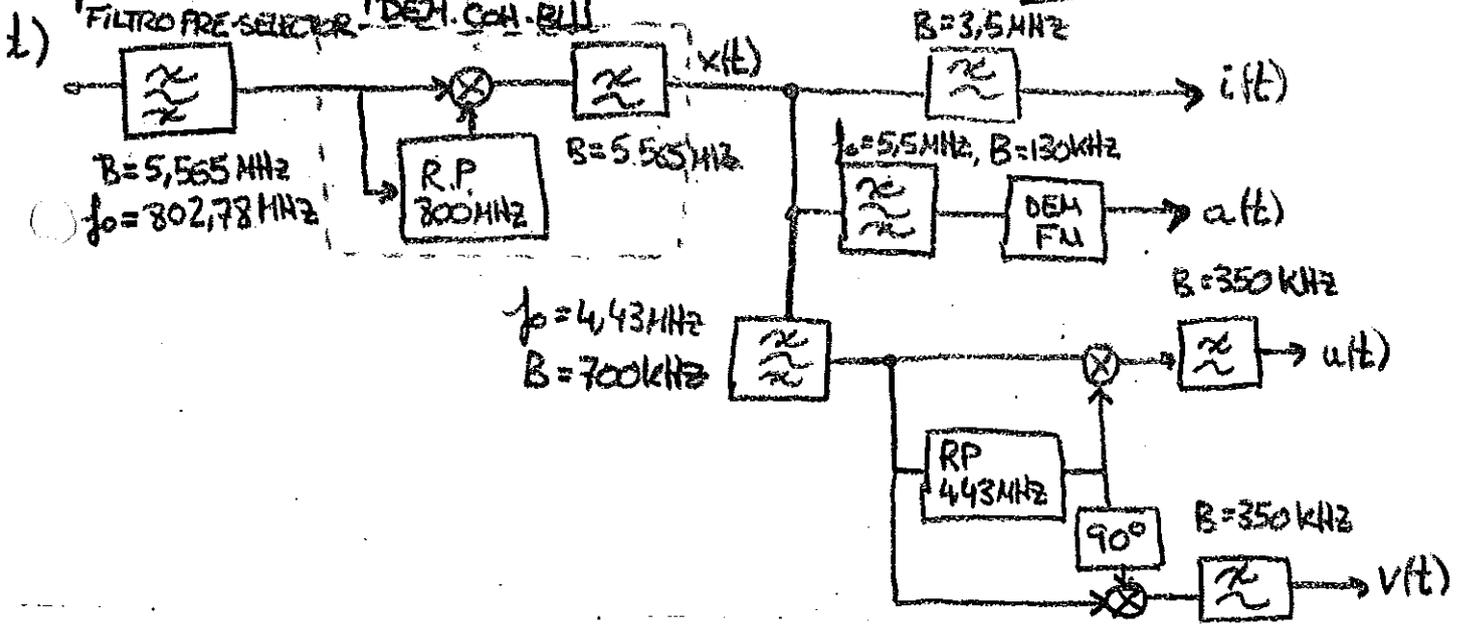
Ancho de banda FM: $B_{FM} = 2(\beta + 1)W$
 $\beta = \frac{f_d}{W}$
 $B_{FM} = 2\left(\frac{f_d}{W} + 1\right)W = 2f_d + 2W = 2 \cdot 15 \cdot 10^3 + 2 \cdot 15 \cdot 10^3 = 130 \text{ kHz} = 0.13 \text{ MHz}$

Realmente

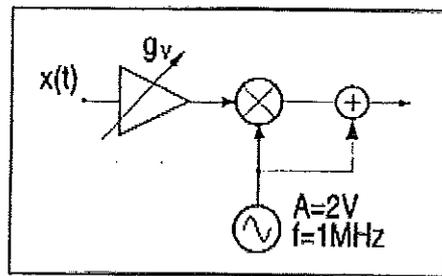




Si $i(t)$ tiene información importante en bajas frecuencias (como es el caso) el filtro debería ser muy abrupto en 800 MHz , lo cual es imposible en la práctica \Rightarrow Por ello se utiliza BLV

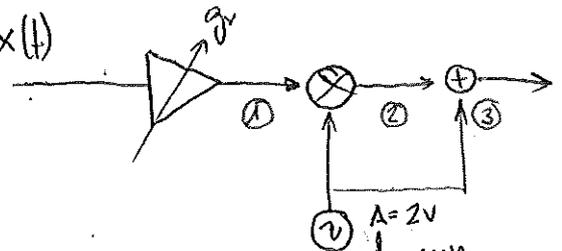
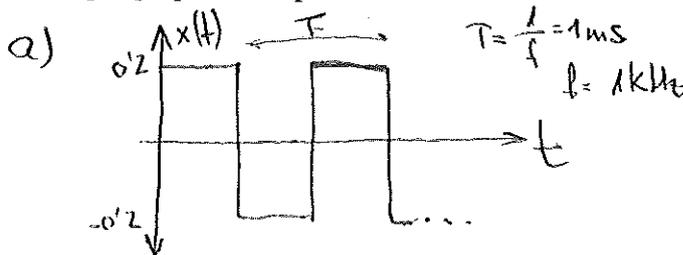


1. La figura muestra el diagrama de bloques de un modulador AM. La señal mensaje $x(t)$ es una señal cuadrada de valor medio nulo, 0,4V pico-pico y frecuencia 1 KHz.



- Determinar el índice de modulación en función de la ganancia en tensión del amplificador variable: g_v . ¿Qué ocurrirá si g_v es demasiado grande?
- Para $g_v = 5$ calcule la potencia de salida y la eficiencia.
- Se envía la señal generada (con $g_v=5$) por un cable de coeficiente de atenuación $\alpha = 3$ dB/Km. Sabiendo que en recepción existe un ruido blanco aditivo con $\eta = -150$ dBm/Hz y que se requiere una SNR de postdetección de 25 dB. ¿Cuál es la máxima longitud del cable?
- Se cambia ahora $x(t)$ que pasa a ser una senoide también de 0,4V pico-pico, sin tocar nada del modulador, y manteniendo el cable y receptor anteriores. ¿Qué SNR de postdetección se obtendrá?

NOTA: Suponga que el receptor tiene sus filtros dimensionados para $W = 2$ KHz



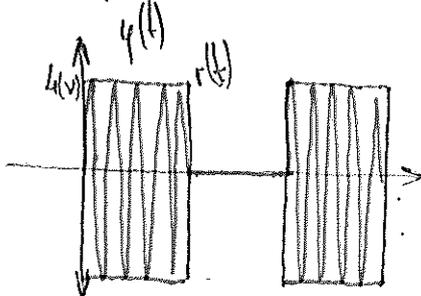
① $g_v x(t)$ ② $g_v x(t) A \cos(2\pi f_c t)$ $\left\{ \begin{array}{l} f_c = 1 \text{ MHz} \\ A = 2 \text{ V} \end{array} \right.$

③ $A [1 + g_v x(t)] \cos(2\pi f_c t) =$
 $= A [1 + g_v |X|_{\max} X_N(t)] \cos(2\pi f_c t)$
 $[m = g_v |X|_{\max} = 0.2 g_v]$

Si $g_v > 5 \Rightarrow m > 1$ (SOPREMODULACIÓN)

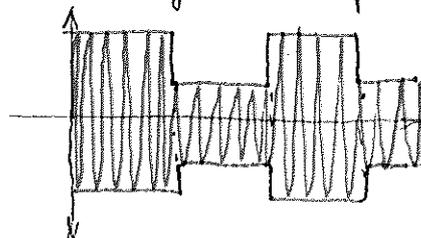
b) Si $g_v = 5 \Rightarrow m = 1$

$y(t) = A [1 + m X_N(t)] \cos(\omega_c t) = 2 [1 + X_N(t)] \cos(2\pi f_c t)$



NOTA:

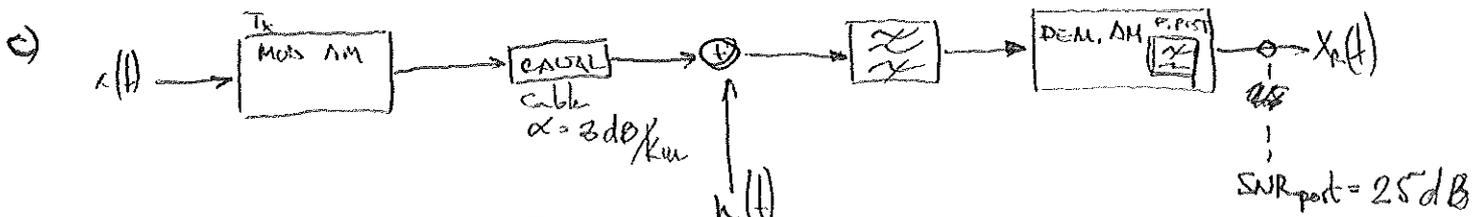
Si $m < 1$ no habría cruces por cero y la señal tendría el siguiente aspecto



$$P_T = \frac{\Delta^2}{2} \left[1 + \mu^2 \langle X_N^2(t) \rangle \right] = \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^2}{2} \langle X_N^2(t) \rangle = \frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{2} \cdot 1 = 4W \equiv 10 \log \frac{4 \cdot 10^3 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 36 \text{ dBm}$$

$\mu = 1$ potencias iguales

$$E_p = \frac{\mu \langle X_N^2(t) \rangle}{1 + \mu^2 \langle X_N^2(t) \rangle} = \frac{1^2 \cdot 1}{1 + 1^2 \cdot 1} = 0.5 = 50\%$$



En AM: $SNR_{post} = E_p \frac{P_R}{\eta W}$ Incógnita: P_R

En unidades logarítmicas: $SNR_{post} \text{ (dB)} = 10 \log \frac{E_p P_R}{\eta W} \rightarrow SNR_{post} \text{ (dB)} = 10 \log E_p + 10 \log P_R - 10 \log \eta - 10 \log W$

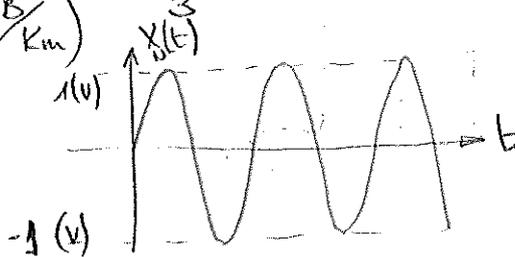
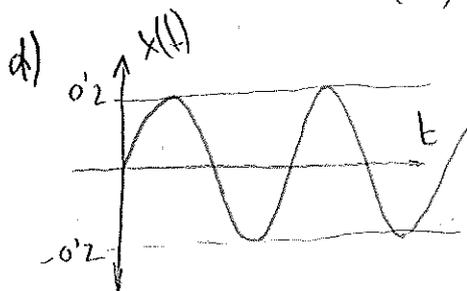
Despejando: $P_R \text{ (dBm)} = SNR_{post} \text{ (dB)} - 10 \log E_p + \eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \right) + 10 \log W \text{ (Hz)} = 25 - 10 \log 0.5 - 150 + 10 \log (2 \cdot 10^3) = -99 \text{ dBm}$

← Porque da en dBm?

Así que la atenuación permitida es $\Delta_T \text{ (dB)} = P_T \text{ (dBm)} - P_R \text{ (dBm)} = 36 \text{ dBm} - (-99 \text{ dBm}) = 125 \text{ dB}$

El cable atenua 3 dBm/km $\Delta_T \text{ (dB)} = \alpha \left(\frac{\text{dBm}}{\text{km}} \right) \cdot L \text{ (km)} \rightarrow$

$$\rightarrow L \text{ (km)} = \frac{\Delta_T \text{ (dB)}}{\alpha \left(\frac{\text{dBm}}{\text{km}} \right)} = \frac{125}{3} = 41.7 \text{ km}$$



$$P_T = \frac{\Delta^2}{2} (1 + \mu^2 \langle X_N^2 \rangle) = \frac{2^2}{2} (1 + 1^2 \cdot 0.5) = 3W \equiv 10 \log \frac{3000 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 34.8 \text{ dB}$$

$$E_p = \frac{\mu \langle X_N^2(t) \rangle}{1 + \mu^2 \langle X_N^2(t) \rangle} = \frac{1 \cdot 0.5}{1 + 1^2 \cdot 0.5} = 0.333 = 33.3\%$$

Como la atenuación del cable es la misma: $\Delta_T = 125 \text{ dB}$

$$P_R \text{ (dBm)} = P_T \text{ (dBm)} - \Delta_T \text{ (dB)} = -90.2 \text{ dBm}$$

Así que: $SNR_{post} \text{ (dB)} = 10 \log E_p + P_R \text{ (dBm)} - \eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \right) - 10 \log W = 10 \log 0.333 - 90.2 + 150 - 10 \log (2 \cdot 10^3) = 22 \text{ dB}$

2.- La figura 1 muestra un modulador BLU superior. La señal mensaje tiene la densidad espectral de potencia unilateral de la figura 2.

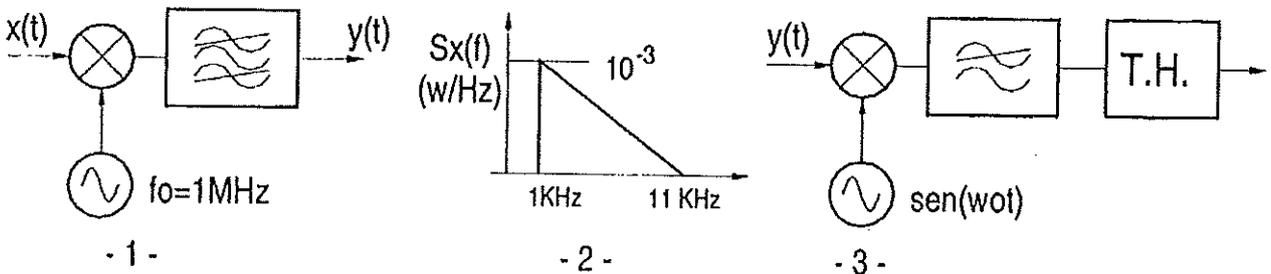
a) Si la potencia de la señal $y(t)$ es de 1W, determine la expresión analítica de $y(t)$.

b) Demuestre que la estructura de la figura 3 permite demodular $y(t)$. El bloque T.H. representa un transformador de Hilbert. Nota: Tenga en cuenta que $TH[TH(z(t))] = -z(t)$

c) El filtro de la figura 1 tiene una $H(f)$ dada por: $H(f) = \exp[-K \cdot (f - f_1)^2]$, siendo $f_1 = 1006$ KHz. Sabiendo que se admite una distorsión máxima de amplitud de 3dB para la señal BLU determine el máximo valor posible de K y el rechazo en decibelios que se consigue a la banda lateral indeseada (Nota: calcule el rechazo a la frecuencia central de la banda indeseada).

d) Se coloca a cierta distancia un receptor de BLU convencional (no el mostrado en la figura 3) y con un ancho de banda óptimo. Sabiendo que la atenuación son 90dB y que $\eta = -130$ dBm/Hz calcule la SNR de postdetección (Nota: tome $W = 11$ KHz). ¿Qué SNR se obtendría si se elimina el filtro paso banda de la figura 1 (sin modificar la potencia generada por el oscilador de 1MHz, ni $x(t)$) y en el receptor se cambia el filtro de entrada por otro adaptado a la nueva situación?

e) Dibuje la forma de onda de la señal $y(t)$ si se substituye $x(t)$ por un tono de 10KHz.



a) $y(t) = A_c [x(t) \cos(\omega_c t) - \hat{x}(t) \sin(\omega_c t)]$

Así que $y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} [x(t) \cos \omega_c t - \hat{x}(t) \sin(\omega_c t)]$

DATOS:

$P_T = 1W$

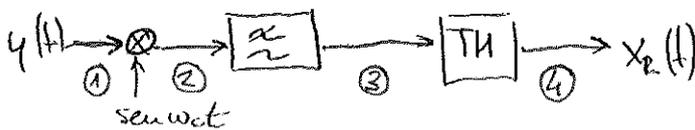
$P_T = A_c^2 \langle x^2(t) \rangle \rightarrow A_c = \sqrt{\frac{P_T}{P_x}}$

$P_x = \int_0^{\omega} S_x df = \text{Area } S_x = \frac{\text{Base} \cdot \text{Alt}}{2}$

$= \frac{10^4 \cdot 10^3}{2} = 5W$

$A_c = \sqrt{\frac{P_T}{P_x}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (V)$

c) Dato: $TH[TH(z(t))] = -z(t)$

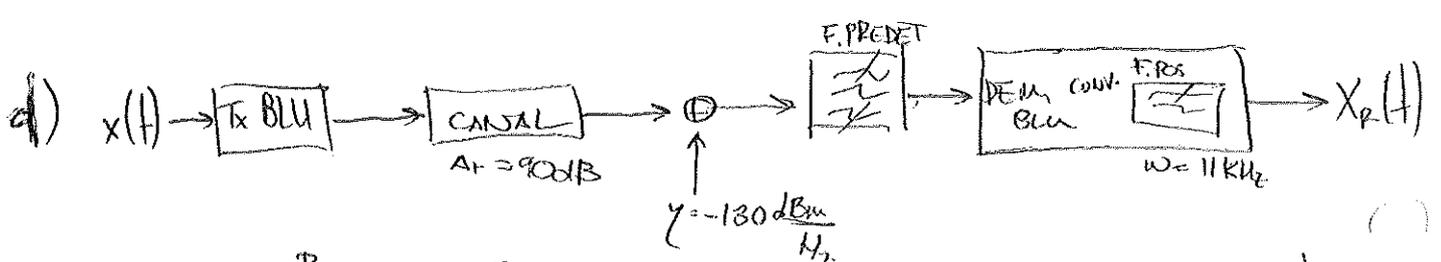


② $y(t) \sin(\omega_c t) = A_c [x(t) \cos \omega_c t - \hat{x}(t) \sin \omega_c t] \sin \omega_c t = A_c \left[x(t) \cos \omega_c t \sin \omega_c t - \hat{x}(t) \sin^2 \omega_c t \right]$

$= \frac{A_c}{2} x(t) \sin 2\omega_c t - \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) + \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \cos 2\omega_c t$

③ LPF $\{y(t) \sin \omega_c t\} = -\frac{A_c}{2} \hat{x}(t)$

④ $x_R(t) = TH \left[-\frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \right] = -\frac{A_c}{2} TH[\hat{x}(t)] = +\frac{A_c}{2} x(t)$ ✓ es proporcional al mensaje



$$SNR_{post} = z = \frac{P_R}{\eta W} = 10 \log P_R - 10 \log \eta - 10 \log W$$

$$P_R(\text{dBm}) = P_T(\text{dBm}) - A_T(\text{dB}) = 10 \log \frac{10^3 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} - 90 \text{ dBm} = -60 \text{ dBm}$$

$$SNR_{post} = -60 + 130 - 10 \log(11 \cdot 10^3) = 29,6 \text{ dBm}$$

CASO 2 al eliminar el filtro del Tx transmitido en DBL

En DBL: $SNR_{post} = z = \frac{P_{R,DBL}}{\eta W}$ solo que $P_{R,DBL} = 2 P_{R,BLU}$

Así que $SNR_{post,DBL} = 2 SNR_{post,BLU} \rightarrow SNR_{post,DBL}(\text{dB}) = SNR_{post}(\text{dB}) + 3 \text{ dB}$

$$SNR_{post,DBL}(\text{dB}) = 32,6 \text{ dB}$$

3.- Se dispone, de un canal de comunicaciones, con comportamiento ideal; que presenta una atenuación de 101 dB. El canal tiene un ancho de banda de 1 MHz centrado a la frecuencia de 100 MHz. Se pretende enviar por dicho canal, una señal analógica cuyo contenido espectral se distribuye entre 20 Hz y 20 KHz y presenta valores de tensión instantánea comprendidos entre ± 1 V, con potencia media igual a 0,1 W. A la entrada del receptor habrá Ruido Blanco Gaussiano con $\eta=4 \cdot 10^{-21}$ W/Hz

- a) ¿Qué técnica de modulación analógica emplearía para obtener el mejor aprovechamiento posible del canal?. Justifique la respuesta.
- b) ¿Qué constante (K_F) deberá tener el modulador para aprovechar todo el ancho de banda de canal disponible?
- c) ¿Cuál será la potencia mínima del transmisor para que el sistema funcione?
- d) Calcule la mejora que se puede obtener con la técnica de modulación empleada, respecto a realizar la transmisión en banda base.
- e) Dibuje la densidad espectral de potencia de ruido en función de la frecuencia que se obtendría a la salida de un demodulador que restituyese los valores de tensión de la señal moduladora de la forma más exacta posible.
- f) ¿Qué técnica de mejora emplearía para obtener una mejora adicional en el sistema de comunicaciones?. Calcule el valor de mejora para una red RC de frecuencia de corte 2,0 KHz.
- g) Dibuje el diagrama de bloques del transmisor, utilizando un modulador Armstrong como base.

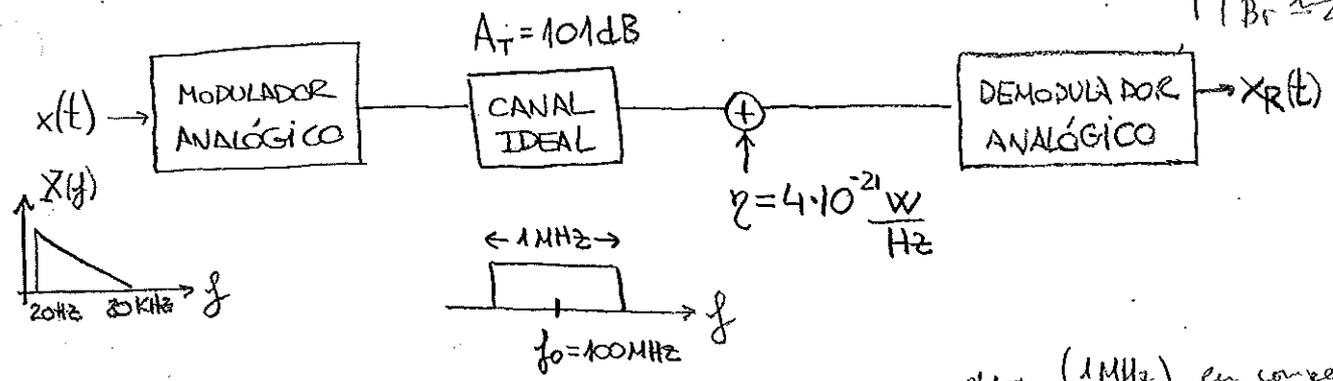
()

()

()

()

$\uparrow D \left\{ \begin{aligned} &\uparrow \text{SNR}_{\text{postd}} = 3D^2 \langle X_M^2(t) \rangle \geq \\ &\uparrow B_T \approx 2(D+1)W \end{aligned} \right.$



a) Como disponemos de un ancho de banda muy grande (1 MHz) en comparación con la señal mensaje (20 kHz), podemos usarlo para mejorar el comportamiento frente al ruido.

b) Es posible hacer con una modulación FM ya permite mejorar de SNR_{postd} a costa de aumentar el ancho de banda de la señal modulada.

$B = 2(D+1)W$
 $D = \frac{f_D}{W}$
 $f_D = k_F |X_{\text{máx}}|$

$B = 2 \left(\frac{k_F |X_{\text{máx}}|}{W} + 1 \right) W \rightarrow B = 2k_F |X_{\text{máx}}| + 2W$

$k_F = \frac{B - 2W}{2|X_{\text{máx}}|} = \frac{10^6 - 2 \cdot 20 \cdot 10^3}{2 \cdot 1} = 4,8 \cdot 10^5 \frac{\text{Hz}}{\text{V}} = 0,48 \frac{\text{MHz}}{\text{V}}$

$f_D = k_F |X_{\text{máx}}| = 0,48 \text{ MHz}$

$D = \frac{f_D}{W} = \frac{4,8 \cdot 10^5}{20 \cdot 10^3} = 24$

(1) Para que funcione, debemos estar por encima del umbral:

$Z_u = 20 \frac{B_T}{W} = 20 \frac{2(D+1)W}{W} = 40(D+1) = 40(24+1) = 1000$

$\frac{P_{R_u}}{2W} = Z_u \rightarrow P_{R_u} = 2W Z_u = 4 \cdot 10^{-21} \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1000 = 8 \cdot 10^{-14} \text{ W} \approx 10 \log 8 \cdot 10^{-14} = -10 \text{ dBm}$

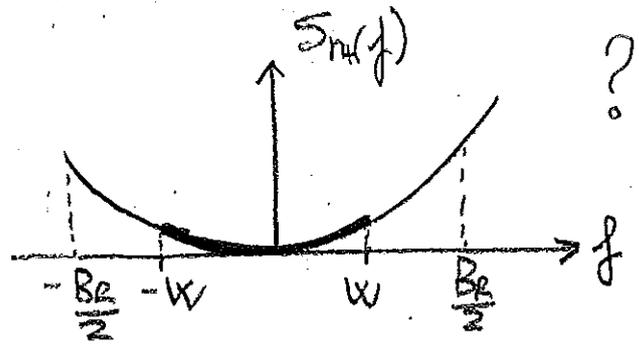
$A_T(\text{dB}) = P_{T_u}(\text{dBm}) - P_{R_u}(\text{dBm}) \Rightarrow P_{T_u}(\text{dBm}) = A_T(\text{dB}) + P_{R_u}(\text{dBm}) = 101 - 101 = 0 \text{ dBm}$

$\text{SNR}_{\text{postd}} = 3D^2 \langle X_M^2(t) \rangle \geq$ (FM)
 $\text{SNR}_{\text{postd}} = \geq$ (Banda Base)

$\left. \begin{aligned} &\text{Mejora} = 3D^2 \langle X_M^2(t) \rangle = 3 \cdot 24^2 \cdot 0,1 = 172,8 \\ &= 172,8 \approx 10 \log 172,8 = 22,4 \text{ dB} \end{aligned} \right\}$

e) Para restituir los valores de tensión $K_D \left(\frac{V}{Hz} \right) = \frac{1}{K_V \left(\frac{Hz}{V} \right)} = \frac{1}{4,8 \cdot 10^5 \frac{Hz}{V}} =$
 $= 20,083 \cdot 10^{-6} \frac{V}{Hz}$

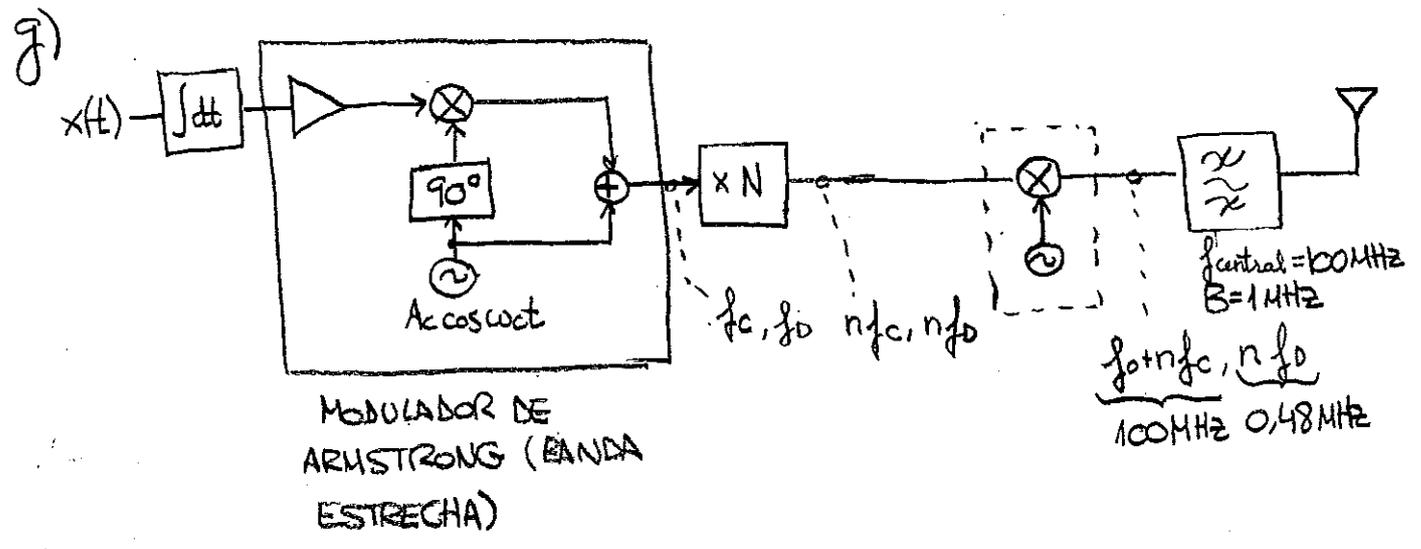
$$S_n(f) = \begin{cases} \frac{K_D^2}{A_c^2} 2f^2, & |f| < \frac{B_R}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B_R}{2} \end{cases}$$



f) Técnicas de preénfasis y deenénfasis

$$\boxed{\text{Mejora} = 20 \log \left(\frac{W}{f_c} \right) - 5 = 20 \log \left(\frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} \right) - 5 = 15 \text{ dB}}$$

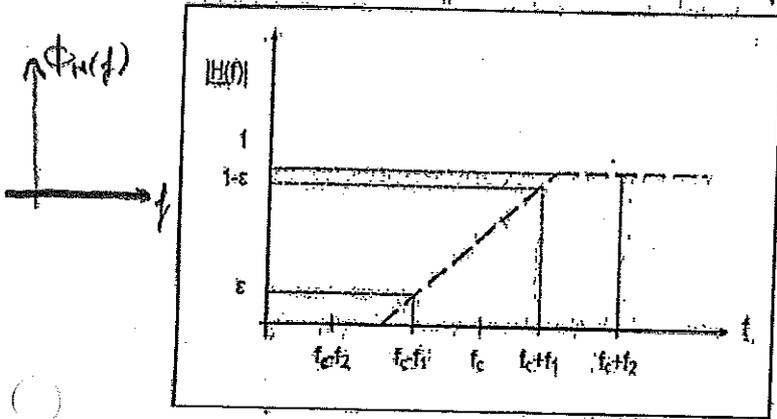
$f_c = 2 \text{ kHz}$



3.- Se pretende analizar un sistema de comunicaciones que utiliza como esquema de modulación banda lateral vestigial. La señal mensaje es:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$$

La modulación en banda lateral vestigial se obtiene modulando primero en doble banda lateral con portadora $\cos(2\pi f_c t)$ y posteriormente filtrando con un filtro en banda lateral vestigial. Se utilizará el filtro de la figura adjunta. Se pide:



a) Expresión matemática de la señal modulada en DBL. Expresión matemática de la señal modulada en banda lateral vestigial (asuma en este apartado que la fase de inserción del filtro es nula en toda la banda de la señal). Dibuje el espectro con todos sus detalles.

b) Expresión analítica de la señal demodulada (BLV) utilizando un esquema de demodulación coherente convencional con oscilador local: $y_{ol}(t) = C \cos(2\pi f_c t)$

c) Asuma que en recepción el oscilador presenta un desfase constante $y_{ol}(t) = C \cos(2\pi f_c t + \delta)$. Determine la expresión de la señal demodulada y comente el resultado.

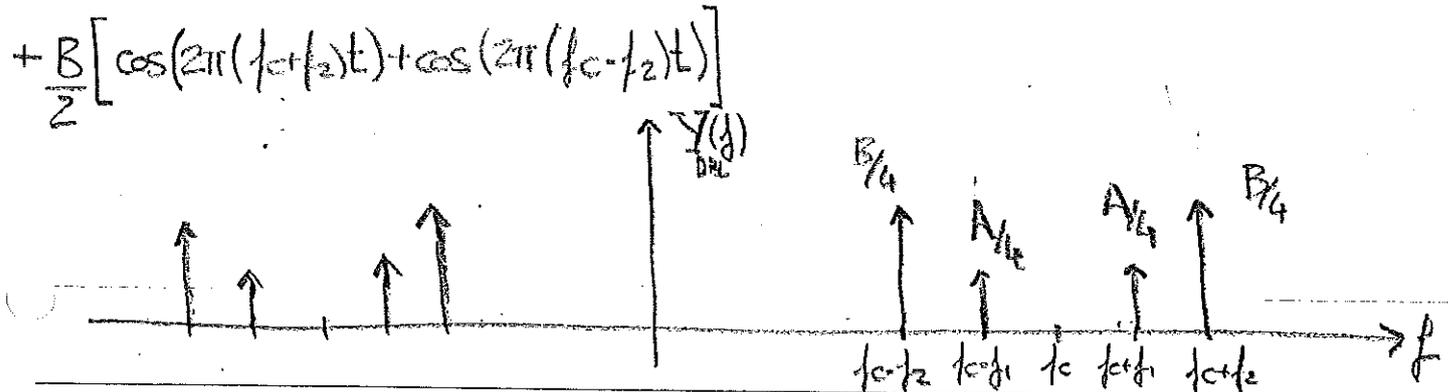
d) Suponga ahora que El filtro en banda lateral vestigial del modulador se describe matemáticamente por estas expresiones:

$$H(f_c - f_1) = \epsilon e^{j\theta}; \quad H(f_c + f_1) = (1 - \epsilon) e^{-j\theta}; \quad H(f_c + f_2) = 1 - \epsilon^{j\theta}$$

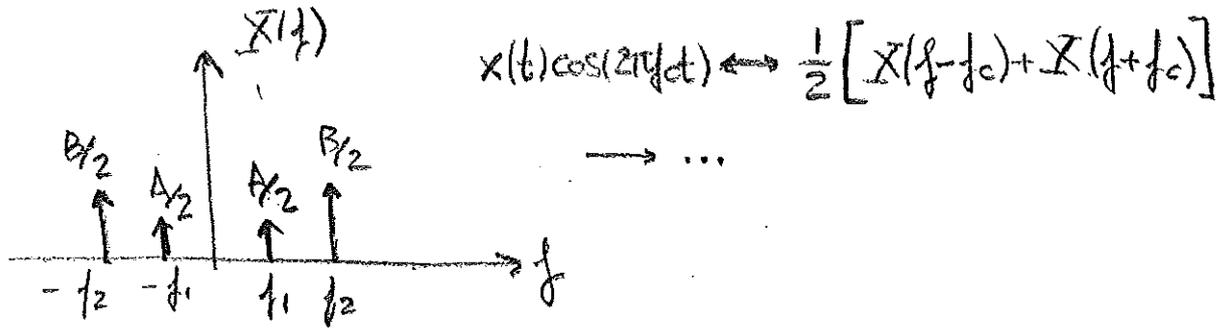
Se requiere que la señal demodulada (sin error de fase) sea una señal sin distorsión. Derive las expresiones de θ_1 y θ_2 en función de ϕ . Generalice el resultado dando la respuesta de fase de un filtro ideal de banda lateral vestigial.

a) $y_{DBL}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$

Nota 1 - Tiempo: $y_{DBL}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) = A \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_c t) + B \cos(2\pi f_2 t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_1)t) + \cos(2\pi(f_c - f_1)t)] + \frac{B}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_2)t) + \cos(2\pi(f_c - f_2)t)]$

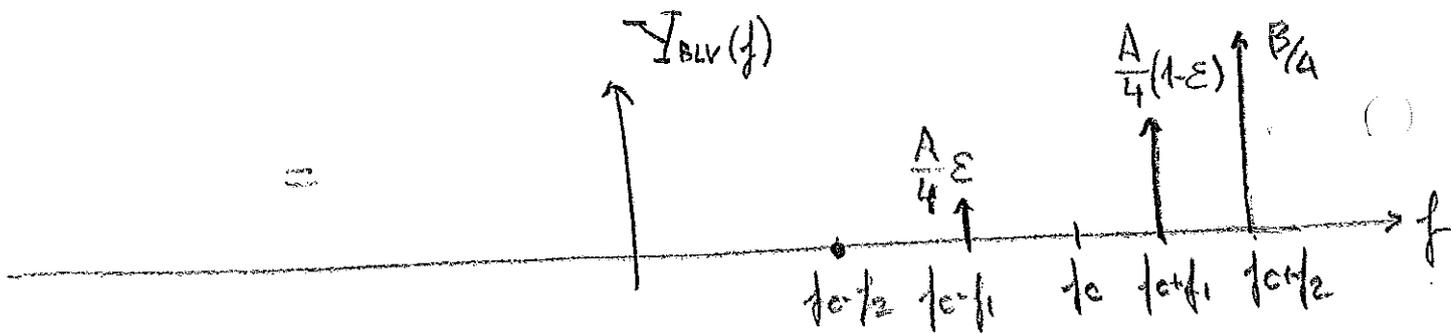


Forma 2 - rec:

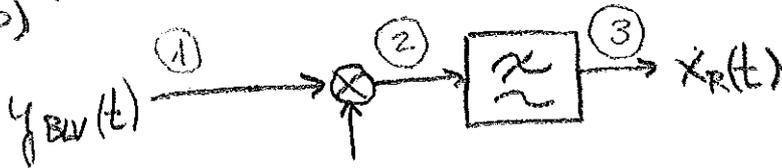


Así que el espectro de la BLV será:

$$y_{BLV}(t) = y_{DRL}(t) * h_{BLV}(t) \xrightarrow{F} Y_{BLV}(f) = Y_{DRL}(f) \cdot H_{BLV}(f)$$



$$b) y_{BLV}(t) = \frac{A}{2} \varepsilon \cos(2\pi(f_0 - f_1)t) + \frac{A}{2} (1-\varepsilon) \cos(2\pi(f_0 + f_1)t) + \frac{B}{2} \cos(2\pi(f_0 + f_2)t)$$



$C \cos(2\pi fct)$
COHERENTE !!

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} y_{BLV}(t) \cdot C \cos(2\pi fct) = C \frac{A}{2} \varepsilon \cos(2\pi(f_0 - f_1)t) \cos(2\pi fct) +$$

$$+ \frac{A}{2} (1-\varepsilon) C \cos(2\pi(f_0 + f_1)t) \cos(2\pi fct) + \frac{B}{2} C \cos(2\pi(f_0 + f_2)t) \cos(2\pi fct) =$$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \left[\cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi(2f_0 - f_1)t) \right] + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \left[\cos(2\pi(2f_0 + f_1)t) +$$

$$+ \cos(2\pi f_0 t) \right] + \frac{BC}{4} \left[\cos(2\pi(2f_0 + f_2)t) + \cos(2\pi f_0 t) \right]$$

$$\textcircled{3} \left[X_R(t) = \text{LPF} \left\{ y_{BLV}(t) \cdot C \cos(2\pi fct) \right\} =$$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \cos(2\pi f_1 t) + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t) =$$

$$= \frac{C}{4} \left[\underbrace{A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)}_{x(t)} \right] = \frac{C}{4} x(t)$$

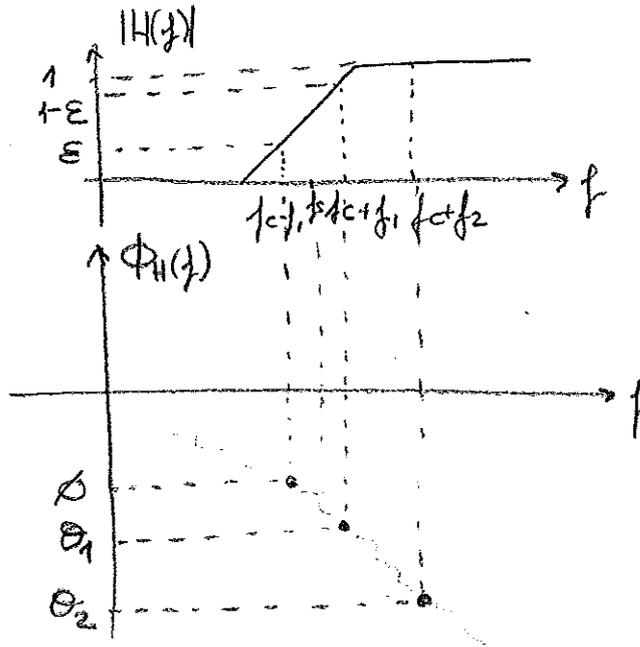
$\cos a \cos b = \dots$
 $\checkmark \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

c) ③ $x_R(t) = \text{LPF} \left\{ y_{BLV}(t) C \cos(2\pi f_c t) \right\} = \dots =$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \underbrace{\cos(-2\pi f_1 t - \delta)}_{\cos(2\pi f_1 t + \delta)} + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t - \delta) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t - \delta) \neq kx(t-t_0)$$

(DISTRORSIÓN!! Para recuperar correctamente la señal hace falta coherencia total entre el oscilador de Tx y Rx ($\delta=0$))

d) $H(f_c - f_1) = \varepsilon e^{j\phi}$
 $H(f_c + f_1) = (1-\varepsilon) e^{j\theta_1}$
 $H(f_c + f_2) = 1 e^{j\theta_2}$



① $y_{BLV}(t) = \frac{A}{2} \varepsilon \cos[2\pi(f_c - f_1)t + \phi] + \frac{A}{2} (1-\varepsilon) \cos[2\pi(f_c + f_1)t + \theta_1] +$
 $+ \frac{B}{2} \cos[2\pi(f_c + f_2)t + \theta_2]$

③ $x_R(t) = \frac{C}{4} \left[A(1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A\varepsilon \cos(2\pi f_1 t - \phi) + B \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \right]$

Para que no haya distorsión:

$$X_R(t) = KX(t-t_0) = K \left[A \cos(\underbrace{2\pi f_1(t-t_0)}_{2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_0}) + B \cos(\underbrace{2\pi f_2(t-t_0)}_{2\pi f_2 t - 2\pi f_2 t_0}) \right]$$

Empezamos:

$$X_R(t) = \frac{AC}{4} \cos(2\pi f_1 t - \phi) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) =$$

$$\boxed{\theta_1 = -\phi}$$

$$\boxed{\phi = 2\pi f_1 t_0}$$

$$= \frac{C}{4} \left[A \cos(\underbrace{2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_0}_{2\pi f_1(t-t_0)}) + B \cos(\underbrace{2\pi f_2 t + \theta_2}_{2\pi f_2(t-t_0)}) \right] = \frac{C}{4} X(t-t_0)$$

$$\boxed{\theta_2 = -2\pi f_2 t_0}$$

$$2\pi f_2 t - 2\pi f_2 t_0 = 2\pi f_2 t + \theta_2$$

Así que: $\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = -\phi \\ \theta_1 = -2\pi f_1 t_0 \\ \theta_2 = -2\pi f_2 t_0 \end{array} \right\}$

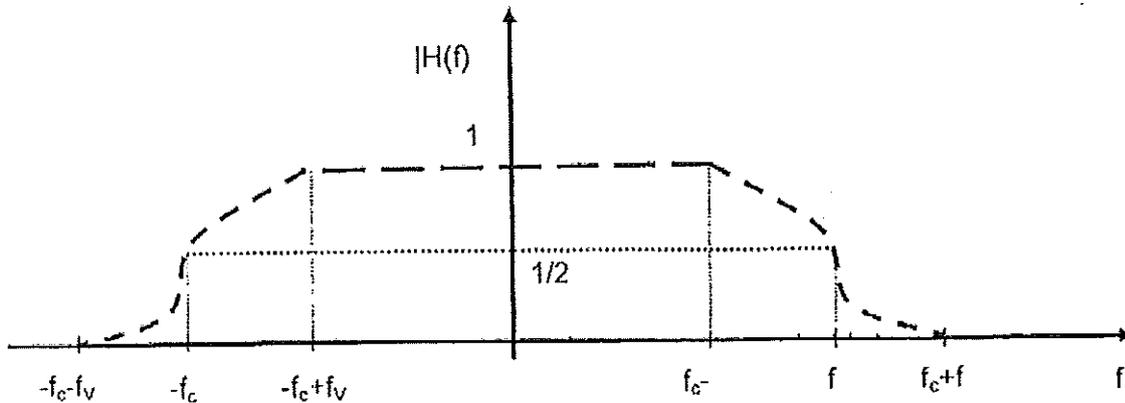
$$\boxed{\phi_H(f) = -2\pi(f-f_c)t_0 = -\frac{\phi}{f_1}(f-f_c)}$$

$$\phi = 2\pi f_1 t_0$$

$$t_0 = \frac{\phi}{2\pi f_1}$$

Filtro de fase lineal con desfase nulo a la frec. de portadora.

4.- Se pretende analizar un sistema de comunicaciones que utiliza como esquema de modulación banda lateral vestigial. La señal mensaje $x(t)$ es arbitraria de ancho de banda W . La señal modulada en banda lateral vestigial $y(t)$ se obtiene modulando la señal mensaje $x(t)$ en doble banda lateral, $z(t)$, con portadora $\cos(2\pi f_c t)$ y posteriormente filtrando con el filtro de la figura adjunta ($f_v < W$).



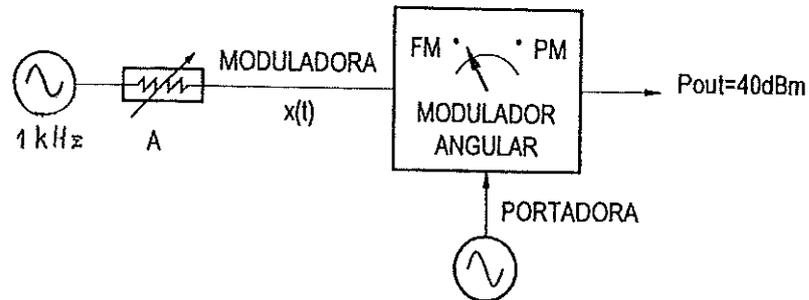
- Expresión matemática de los espectros $Z(f)$ y $Y(f)$ en función de $X(f)$ y $H(f)$ (asuma que la fase de inserción del filtro es nula en toda la banda de la señal). Dibuje el espectro con todos sus detalles.
- Condición que debe de cumplir el filtro $H(f)$ para que la señal demodulada utilizando un esquema de demodulación coherente convencional con oscilador local $y_{OL}(t) = C \cdot \cos(2\pi f_c t)$ sea proporcional a la señal mensaje.

La señal modulada $y(t)$ admite una representación paso banda $y(t) = y_F(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - y_C(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$, donde las componentes en fase y cuadratura, $y_F(t)$ e $y_C(t)$, son transformaciones lineales de la señal mensaje. Estas componentes se pueden interpretar como el paso de la señal mensaje en banda base a través de los filtros de respuesta impulsiva: $h_F(t) = h(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$ y $h_C(t) = h(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$, siendo $h(t)$ la transformada inversa de Fourier de $H(f)$.

- Calcule $H_F(f)$ y $H_C(f)$.
- Expresión de $y_F(t)$ en función de $x(t)$
- ¿En qué se convierte el filtro $H(f)$ si f_v tiende a cero? ¿Qué nueva modulación obtenemos en este caso?



2.- Un modulador angular se ataca con un coseno de 1KHz, cuya amplitud, A, se puede controlar: $x(t) = A \cdot \cos(2000\pi t)$, tal como indica la figura. La señal de salida tiene 40dBm de potencia medida sobre $R=1\Omega$. El modulador puede generar FM o PM según la posición de un conmutador. En los apartados a), b) y c) se considerará que el modulador está siempre en la posición "FM".



- Se aumenta la amplitud A hasta que en el espectro de la señal de salida se anula la raya de portadora, lo cual ocurre para una potencia de $x(t)$ igual a 20dBm (sobre 1Ω). Calcular la K_F del modulador.
- Se aumenta ahora la amplitud de $x(t)$ en 1dB. Indicar la potencia de salida a la frecuencia portadora.
- Se coloca un receptor a una cierta distancia. Sabiendo que la d.e.p. de ruido (unilat.) es $\eta = -110\text{dBm/Hz}$, calcular la máxima atenuación del enlace para estar por encima del umbral, en las condiciones del apartado b). Calcular la SNR de postdetección en esas condiciones (Nota: considere $W=1\text{KHz}$).
- Dibujar aproximadamente las formas de onda de la señal de salida para la posición del conmutador FM y PM. Se hará cada dibujo sobre un eje de tiempos entre $t=0$ y $t=1$ milisegundo, indicando claramente en qué instantes de tiempo los ciclos son más rápidos y en qué instantes más lentos.

()

()

()

()

Preguntas cortas Tema 3

1. **Junio 2008.** Un efecto típicamente observado al realizar una transmisión modulada en lugar de banda base a través de un canal lineal es:

- Que mejora (disminuye) la distorsión.
- Que mejora (disminuye) la atenuación.
- Ninguno de ellos.

Modulaciones lineales

1. **Junio 2004.** La función de transferencia de un filtro cumple $H(f) = 0$ para $f < 900 \text{ KHz}$ y $H(f) = 1$ para $f > 1 \text{ MHz}$. En la zona intermedia $H(f)$ está determinado. Se desea utilizarlo para generar una modulación BLU superior con una señal mensaje que no tiene componentes espectrales por debajo de 50 KHz . Indicar la frecuencia de portadora necesaria para la BLU.
2. **Septiembre 2004.** Dibuje el diagrama de bloques de un modulador BLUI por cambio de fase.
3. **Septiembre 2006.** Una portadora de 100 MHz se modula en BLU inferior por un tono de 1 MHz . Escriba la expresión analítica de la señal modulada en la forma más simplificada posible.
4. **Junio 2007.** Escriba la expresión analítica de una señal con modulación QAM analógica.
5. **Junio 2007.** La eficiencia de potencia en una señal AM:
 - Es mejor para una moduladora sinusoidal.
 - Es mejor para una moduladora que sea una onda cuadrada.
 - Es independiente de la forma de la señal moduladora.
6. **Junio 2008.** La señal $x(t) = 2 \cdot \cos(200\pi t + \pi/8) - 4 \cdot \sin(200\pi t)$ entra a un transformador de Hilbert. Escriba la expresión de la señal de salida.
7. **Junio 2008.** Una modulación QAM analógica:
 - Admite tanto demodulación coherente como no coherente.
 - Se trata de una multiplexación FDMA.
 - Ninguna de las anteriores.
8. **Junio 2008.** Una señal modulada en banda lateral única
 - Se puede demodular tanto coherente como no coherentemente.
 - La señal moduladora no puede tener componentes espectrales en frecuencia cero.
 - Se necesita enviar OL al demodulador.
9. **Septiembre 2008.** Una modulación en Banda Lateral Única analógica:
 - Admite tanto demodulación coherente como no coherente.
 - La potencia de portadora es la mitad de la potencia media.
 - Puede utilizar un transformador de Hilbert para la generación.
10. **Septiembre 2008.** Un filtro transformador de Hilbert.
 - Es un filtro no real (complejo).
 - Es un filtro de retardo constante.
 - Ninguna de las anteriores.
11. **Septiembre 2009.** Un filtro Transformador de Hilbert:
 - Alterará sólo la amplitud de la señal.
 - Alterará sólo la fase de la señal.
 - Alterará amplitud y fase de la señal simultáneamente.
12. **Septiembre 2009.** ¿Qué modulación se obtendrá al sustraer a una señal de AM la portadora?

()

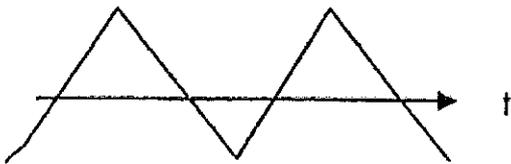
()

()

()

Modulaciones angulares

1. **Junio 2004.** Un modulador PM de Armstrong tiene un valor de $\beta = 0,1$. Calcular la variación máxima de decibelios que sufre la amplitud a lo largo del tiempo.
2. **Junio 2004.** En una transmisión con modulación FM, aumentar la potencia de la señal moduladora significa:
 - a) Incrementar el ancho de banda ocupado.
 - b) Incrementar la potencia transmitida.
 - c) No se modifica ni la potencia ni el ancho de banda de la señal transmitida.
3. **Septiembre 2004.** Un modulador PM de Armstrong tiene un valor de $\beta = 0,2$. Calcular la variación máxima en decibelios que sufre la amplitud a lo largo del tiempo.
4. **Septiembre 2006.** Indique todas las modulaciones analógicas que no requieran demodulación coherente.
5. **Junio 2007.** La señal mensaje $x(t)$ de la figura se aplica a un modulador PM. Dibuje el aspecto de la desviación instantánea de frecuencia de la señal modulada



6. **Septiembre 2008.** Un modulador de Armstrong
 - a) Sólo se utiliza en modulaciones angulares de fase.
 - b) Es un modulador de banda ancha.
 - c) Es una aproximación práctica de un modulador angular.
7. **Junio 2009.** Calcule la potencia (expresándola en dBm) de una señal de 1V de amplitud, modulada en FM por un tono de 1KHz, con una relación de desviación de 5, sobre una carga de 1Ω .

Modulaciones lineales con ruido

1. **Junio 2004.** Se dispone de una señal ya generada, modulada en AM. Si se coge dicha señal y se le suma más portadora (Sin alterar la potencia de las bandas laterales):
 - a) Disminuirá el índice de modulación.
 - b) Disminuirá la SNR de predetección en el receptor.
 - c) Aumentará el volumen de la señal demodulada en el receptor.
2. **Septiembre 2004.** El inconveniente más importante de la modulación AM es:
 - a) La necesidad de utilizar transmisores de gran potencia para obtener suficiente calidad
 - b) El efecto umbral.
 - c) El gran ancho de banda ocupado.
3. **Septiembre 2006.** Se dispone de un enlace AM y se aumenta el índice de modulación. Indique cual de los siguientes fenómenos no es esperable que ocurra:
 - a) Que aumente la potencia transmitida.
 - b) Que aumente el ancho de banda transmitido.
 - c) Que aumente la SNR de postdetección.
4. **Junio 2009.** En un demodulador coherente de DBL.
 - a) Influirá sólo la componente en fase del ruido.
 - b) Influirá sólo la componente en cuadratura del ruido.
 - c) Influirán las componentes en fase y cuadratura del ruido.

PROBLEMA
MATEMÁTICAS
RUIDO

Junio 2004.

$$y(t) = A_c \left[1 + m X_N(t) \right] \cos(\omega_c t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} + \underbrace{A_c m X_N(t) \cos \omega_c t}_{\text{bandas laterales}}$$

$$y(t) = \underbrace{A_{c1} \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} + \underbrace{A_{c1} m X_N(t) \cos \omega_c t}_{\text{bandas laterales}} = A_{c1} \left[1 + \underbrace{\left(\frac{A_c}{A_{c1}} m \right)}_{m'} X_N(t) \right] \cos(\omega_c t)$$

$$m' = \frac{A_c}{A_{c1}} m \Rightarrow \boxed{m' < m}$$

Solución
a

JUNIO 2009.

En el demodulador DBL utilizamos $\cos(\cdot)$ para demodular, por tanto solo nos quedamos con la componente del ruido del ruido multiplicado sobre coseno (es decir la componente en fase) donde el ruido pasa banda ~~ll~~ $n(t) = n_f(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$

Modulaciones angulares con ruido

1. **Septiembre 2004.** Un sistema FM (transmisor + receptor) está funcionando correctamente. Sin tocar el receptor se aumenta el índice de modulación. Cual de los siguientes efectos NO es previsible que se produzca:

- a) Incremento de la SNR de postdetección.
- b) Incremento del ancho de banda de la señal de salida del demodulador.
- c) Distorsión debida a un ancho de banda de predetección insuficiente.

2. **Septiembre 2006.** Cual de las siguientes afirmaciones es cierta, para igual valor de z :

- d) La modulación FM siempre produce mejor SNR de postdetección que la AM.
- e) La modulación AM siempre produce mejor SNR de postdetección que la FM
- f) Para valores muy bajos de z es posible que la SNR de AM sea mejor que la de FM.

3. **Junio 2007.** ¿Qué efecto negativo ocurre en un receptor de FM si el filtro paso banda de entrada es excesivamente ancho?

- d) Que se degrada la SNR de postdetección.
- e) Que se produce una distorsión en la señal.
- f) Que el umbral de demodulación es excesivamente elevado.

4. **Junio 2009.** El "Efecto Umbral"

- a) Se presenta solamente en los receptores de AM.
- b) Se presenta solamente en los receptores de FM.
- c) Se presenta en los receptores de FM y en los de AM si son ~~con~~^{no} coherentes.

5. **Septiembre 2009.** ¿Qué modulación lleva asociada una densidad espectral de ruido parabólica a la salida del demodulador?

- a) Todas las angulares.
- b) La PM.
- c) La FM.

SEPT 2004.

$$\uparrow k_F \Rightarrow \uparrow \beta \Rightarrow \uparrow D \Rightarrow \uparrow B_r = 2(D+1)W \Rightarrow \text{a verdadera}$$

$$\Downarrow \Rightarrow \uparrow SNR_{\text{postd}} = 3D^2 \langle X_w^2 \rangle \neq z \text{ si } D \uparrow \Rightarrow SNR_{\text{postd}} \uparrow \uparrow$$

$$\Downarrow \text{ c verdadera}$$

SEPT 2006

- d) $3D^2 \langle X_w^2(t) \rangle > E_p X$
- e) $E_p > 3D^2 \langle X_w^2(t) \rangle X$
- f) Es posible que $E_p > 3D^2 \langle X_w^2(t) \rangle$

Solución f.

JUNIO 2007

- d)
- e) X
- f)

$$z_a = z_0 \frac{\beta^2}{W}$$

↑ *ancho de banda*
esto a *efecto de ruido*

Solución f

()

()

()

()

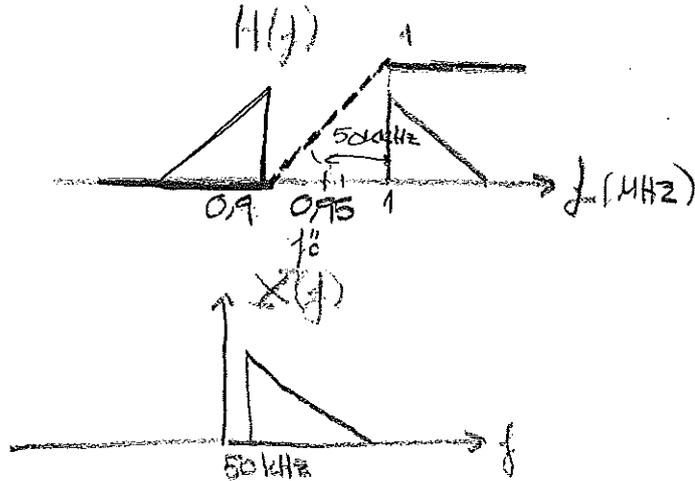
()

()

PREGUNTAS CORTAS TEMA 3

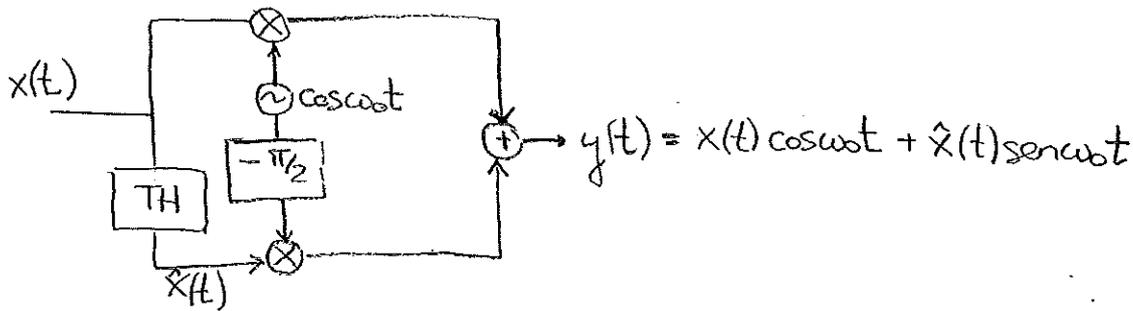
MODULACIONES LINEALES

① JUN 04.

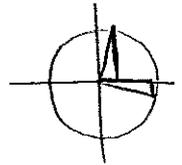


$$f_c = 950 \text{ kHz}$$

② SEPT 04



③ SEPT. 06 BLU inferior Portadora $100 \text{ MHz} = 10^8 \text{ Hz}$

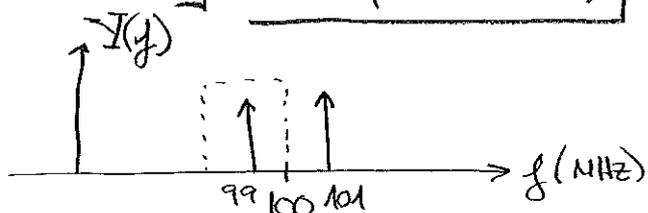
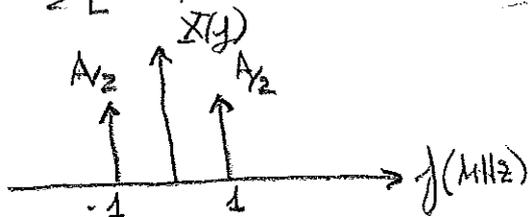


$$x(t) = A \cos(2\pi \cdot 10^6 t) \xrightarrow{\text{TH}} \hat{x}(t) = A \cos(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{\pi}{2}) = A \sin(2\pi \cdot 10^6 t)$$

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi \cdot 10^8 t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi \cdot 10^8 t) = A \cos(2\pi \cdot 10^6 t) \cos(2\pi \cdot 10^8 t) +$$

$$+ A \sin(2\pi \cdot 10^6 t) \sin(2\pi \cdot 10^8 t) = \frac{A}{2} [\cos(2\pi(10^8 + 10^6)t) + \cos(2\pi(10^8 - 10^6)t)] +$$

$$+ \frac{A}{2} [\cos(2\pi(10^8 - 10^6)t) - \cos(2\pi(10^8 + 10^6)t)] = A \cos(2\pi \cdot 99 \cdot 10^6 t)$$



Nota: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

④ JUN 07

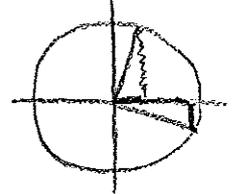
$$y(t) = x_1(t) \cos \omega t + x_2(t) \sin \omega t$$

⑥ JUN 08

$$x(t) = 2 \cos(200\pi t + \frac{\pi}{8}) - 4 \sin(200\pi t) \rightarrow \boxed{TH} \rightarrow y(t)$$

En sinusoides
equivale a un desfaseador
de -90°

$$y(t) = 2 \cos(200\pi t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}) - 4 \sin(200\pi t - \frac{\pi}{2}) =$$
$$= 2 \cos(200\pi t - \frac{3\pi}{8}) - 4 \sin(200\pi t - \frac{\pi}{2})$$

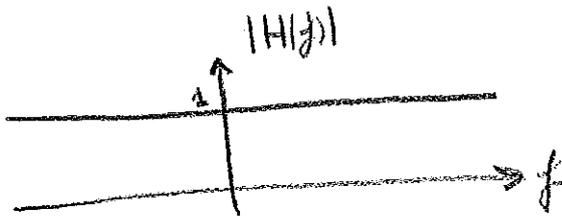


$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$$
$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$$

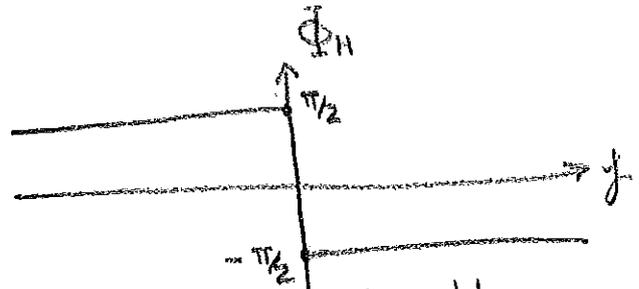
⑦ JUN 08.

¡OJO! No es FDMA pq. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ viajan en una sola banda de frecuencia, pero ortogonalmente (una sobre la portadora en fase, y otra sobre la portadora en cuadratura)

⑪



No modifica la amplitud



Si modifica la fase!!

⑫ SEPT 09.

DBL

MODULACIONES ANGULARES

① JUNIO 04

$\beta = 0,1$ Mod. Armstrong: $y(t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{y_F(t)} - \underbrace{A_c \varphi(t)}_{y_c(t)} \sin \omega_c t$

$\beta x_N(t)$

$r(t) = \sqrt{y_F^2(t) + y_c^2(t)} = \sqrt{A_c^2 + A_c^2 \beta^2 x_N^2(t)}$ $\rightarrow r_{\min} = \sqrt{A_c^2 (1 + \beta^2 \cdot 0)}$

$\varphi(t) = \arctg \left(\frac{y_c(t)}{y_F(t)} \right) = \arctg \frac{\beta x_N(t)}{A_c} \approx \frac{\beta x_N(t)}{A_c}$ $\rightarrow r_{\max} = \sqrt{A_c^2 (1 + \beta^2 \cdot 1)}$

$\beta x_N(t) \ll A_c$

$\Delta r = 20 \log \frac{\sqrt{A_c^2 (1 + \beta^2)}}{A_c} = 20 \log \sqrt{1 + \beta^2} = 0,043 \text{ dB}$

$\beta = 0,1$

② JUN 04

$y(t) = A_c \cos \left(\omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \right) = A_c \cos \left(\omega_c t + 2\pi f_D \int_{-\infty}^t x_N(\alpha) d\alpha \right)$

$f_D = k_f |x|_{\max}$

$P_x \uparrow \Rightarrow |x|_{\max} \uparrow \Rightarrow f_D \uparrow \Rightarrow B = 2(D+1)W = 2\left(\frac{f_D}{W} + 1\right)W = 2(f_D + W) \uparrow$

○ Sin embargo, la potencia transmitida no varía ($P_m = \frac{A_c^2}{2}$)

③ SEPT 04

$\Delta r = 20 \log \sqrt{1 + \beta^2} = 0,17 \text{ dB}$

④ DBL

AM

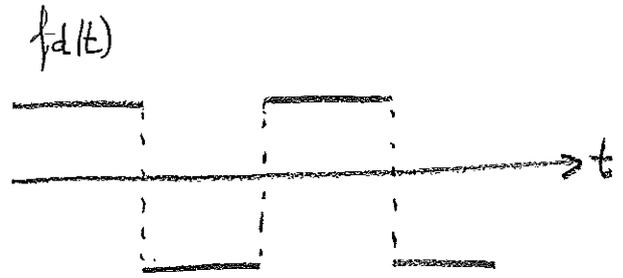
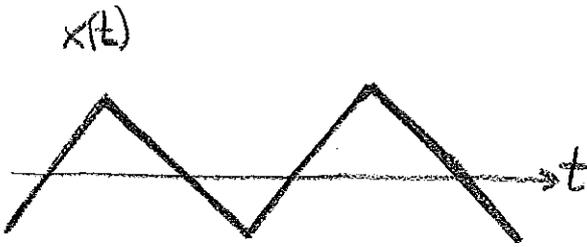
BLU, BLUC

QAM

FM
PM

Discriminadores: convierten la inform q hay en la fase/frec. en variaciones de amplitud, y luego se usan detectores de envolvente

⑤



$$y(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t + 2\pi k_f x(t)}_{\theta(t)}) \rightarrow f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \underbrace{2\pi k_f x'(t)}_k = f_d(t)$$

⑥ SEPT 08

⑦ JUN 09

$$R = 1 \Omega$$

$$A_c = 1 V$$

$$y(t) = A_c \cos(\omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t x(u) du) \rightarrow \overline{P_y} = \frac{A_c^2}{2R} = \frac{1^2}{2 \cdot 1} = 0.5 W \equiv 10 \log 500 = 27 \text{ dBm}$$

Tema 4



Preguntas cortas Tema 4

1. Junio 2007 y Septiembre 2009. Una señal de ancho de banda W (Hz) se muestrea con una frecuencia de muestreo 5 veces superior a la mínima necesaria. Posteriormente se cuantifica con 64 estados y se añade un bit de redundancia cada 3 bits de información. La velocidad de transmisión es 800 bits/s ¿Cuál es el ancho de banda de la señal?

2. Septiembre 2008. El añadir el bit de paridad en una transmisión digital para detectar errores.

- a) Se realiza en la codificación de canal.
- b) Se realiza en la codificación de línea.
- c) Ninguna de las anteriores.

3. Septiembre 2008. Enumere los tres procesos necesarios para la transmisión de señales MIC(PCM).

① $f_{smin} = 2W$ (Hz) $f_s = 5f_{smin} = 10W$ (Hz) $\leftarrow \frac{\text{muestras}}{\text{seg.}}$

$L = 64$ niveles $\Rightarrow n = \log_2 L = 6$ $\frac{\text{bits}}{\text{muestra}}$

$V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{seg.}} \right) = 800 \frac{\text{bit}}{\text{seg.}}$

$V_T \left(\frac{\text{bits}}{s} \right) = f_s \left(\frac{\text{muestras}}{s} \right) \cdot n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestras}} \right) \cdot \frac{4}{3}$

bits info ↑
bits redund ↓

$800 = 10 \cdot W \cdot 6 \cdot \frac{4}{3}$ $W = \frac{800 \cdot 3}{10 \cdot 6 \cdot 4} = 10 \text{ Hz}$

② Cod. de canal \Rightarrow (a)

③ Muestreo
Cuantificación
Codificación

()

()

()

()

Preguntas cortas Tema 5

Interferencia entre símbolos

1. **Septiembre 2004.** Un receptor por muestreo sin IES:
- Se integra a la información en el período de símbolo.
 - Además del símbolo sobre el que se decide, se tiene en cuenta el símbolo anterior y el siguiente
 - Sólo en ciertos instantes dentro del símbolo se garantiza que no existe IES.

Solución c

2. **Junio 2009 y Septiembre 2009.** Un sistema de transmisión digital binario en banda base emite pulsos NRZ a 200 Kb/s. Se desea transmitirlos por un canal de anchura de banda 100 KHz sin que exista IES en los instantes de muestreo:

- No es posible hacerlo.
- Sólo es posible hacerlo con un filtro de respuesta perfectamente rectangular (ideal).
- Sólo es posible hacerlo con un cierto filtro cuya respuesta no es perfectamente rectangular.

3. **Septiembre 2009.** En un receptor por muestro sin IES:

- Se integra la formación en el periodo de símbolo.
- Además del símbolo sobre el que se decide, se tienen en cuenta el símbolo anterior y el siguiente.
- Sólo en ciertos instantes dentro del símbolo se garantiza que no existe IES.

Solución c

Canales ruidosos. Probabilidad de error

1. **Junio 2004 y Septiembre 2006.** La codificación de línea binaria utilizando señales antipodales se caracteriza por:

- Tener una eficiencia espectral mínima para una velocidad de transmisión dada.
- Ser óptimas frente al ruido respecto a la probabilidad de error.
- Tener una separación espectral simétrica respecto a frecuencia cero.

Solución: b)

2. **Septiembre 2004.** Se dispone de un filtro adaptado a la señal $s_1(t)$. Si $n(t)$ es ruido aditivo, blanco y gaussiano de densidad espectral de potencia unilateral η : ¿Cuál es la relación señal a ruido a la salida del filtro si a la entrada se introduce una señal $x(t) = s_2(t) + n(t)$, donde la energía de $s_2(t)$ es 3 veces mayor que la de $s_1(t)$?

3. **Junio 2007.** Las señales antipodales se caracterizan por:

- Ser óptimas respecto a la eficiencia espectral
- Ser óptimas frente al ruido respecto a la probabilidad de error.
- Tener una separación espectral simétrica respecto a frecuencia cero.

Solución: b)

4. **Junio 2008.** El filtro adaptado.

- Será un filtro universal válido para cualquier tipo de señal.
- Será un filtro sin distorsión.
- Cada señal tendrá el suyo.

Solución: c

5. **Septiembre 2008.** El filtro adaptado.

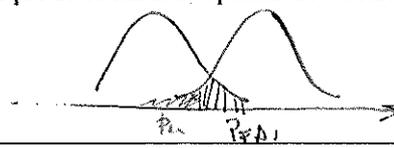
- Maximiza la probabilidad de error.
- Es efectivo solamente para la señal para la que fue diseñado, o una proporcional.
- Solo conserva la forma de onda de la señal para la que fue diseñada o una proporcional.

6. **Junio 2009.** Una fuente no simétrica genera en promedio más unos que ceros. Sabiendo que la transmisión es en banda base con código de nivel (NRZ) y receptor por muestro indique si el umbral óptimo de decisión estará por encima o por debajo del valor medio y justifique por qué.

$$P_e = p_0 P_{eA} + p_1 P_{eB} \quad p_1 > p_0$$

Por minimizar la prob. de error.

Por debajo



()

()

()

()

Tema 5

()

()

()

()

3.- Se necesita enviar una señal analógica, cuyas componentes espectrales están todas a frecuencias inferiores a 1 KHz; por un canal, que se puede aproximar por un filtro paso bajo ideal de 500 Hz de ancho de banda, mediante un sistema de comunicaciones digital. Para ello, se muestrea la señal a la frecuencia de muestreo más baja posible. Se estima, que con 16 niveles de cuantificación uniformemente espaciados se consigue una resolución de amplitud satisfactoria.

Deberá determinar:

- a) Velocidad de transmisión que soportará el canal.
- b) Número de símbolos diferentes que se van a necesitar.

Otra alternativa, sería transmitir dicha información por un canal paso banda ideal centrado en 1 MHz. Se va a seleccionar la modulación, que sin utilizar recuperación de portadora, consigue (para una relación E_b/η dada) la probabilidad de error más baja posible entre todas las estudiadas.

Deberá determinar:

- c) ¿Cual deberá ser la modulación elegida?
- d) Cual es la constelación correspondiente a dicha modulación. Dibújela para los casos de relación S/N grande y S/N pequeña. Clasifíquela (justificándolo) como ortogonal, antípodal o proporcional.
- e) Dibuje los diagramas de bloques del transmisor y del receptor.
- f) Dibuje la forma de onda transmitida para la secuencia binaria 001100 (dibuje dos ciclos de portadora por cada bit).
- g) Calcule el ancho de banda necesario para transmitir la señal modulada.
- h) Calcule la amplitud que deberá tener la señal a la salida del transmisor para conseguir una probabilidad de error de 10^{-6} cuando la densidad espectral de ruido a la entrada del receptor es de -134 dBm/Hz y el canal presenta una atenuación de 90 dB.
- i) En el caso de disponer de un canal con distorsión no lineal con ancho de banda la mitad del calculado (en g) y pudiendo usar recuperación de portadora. ¿Qué modulación debería haber elegido?

()

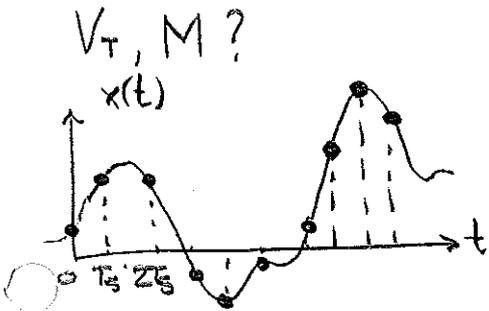
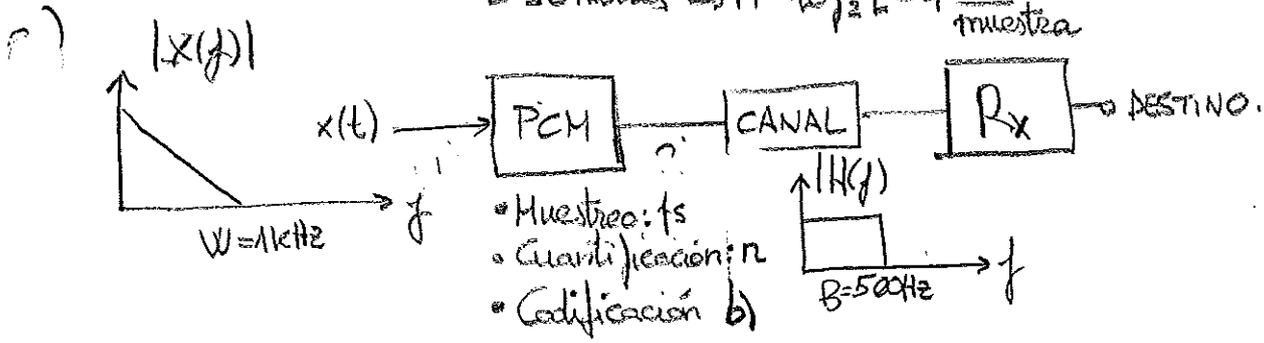
()

()

()

JUN 05. P3

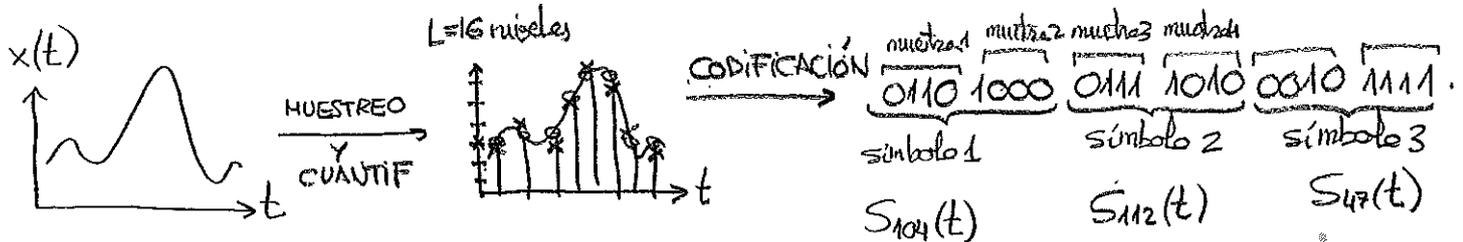
$L=16 \text{ niveles} \Rightarrow n = \log_2 L = 4 \text{ bits/muestra}$



$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2W \Rightarrow f_{s \text{ m\u00edn}} = 2W = 2 \text{ kHz} = 2 \cdot 10^3 \text{ muestras/s}$

$V_T = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) = 8000 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$

b) El canal disponible tiene 500 Hz de ancho de banda. Seg\u00fan el 1\u00b0 criterio de Nyquist dicho canal admite una velocidad de s\u00edmbolo de $V_{s \text{ m\u00e1x}} = 2B \frac{\text{s\u00edmb}}{\text{s}} = 1000 \frac{\text{s\u00edmbolos}}{\text{s}} = 10^3 \frac{\text{s\u00edmbolos}}{\text{s}}$, lo que obligar\u00e1 a utilizar una se\u00f1al multinivel para poder conseguir la velocidad de transmisi\u00f3n necesaria. Concretamente se deber\u00e1 enviar un s\u00edmbolo por cada 8 bits ($k=8 \frac{\text{bits}}{\text{s\u00edmbolo}}$) $\Rightarrow M = 2^k = 2^8 = 256$ s\u00edmbolos. Se deber\u00e1 usar un alfabeto con $M=256$ s\u00edmbolos (256 formas de onda distintas)



SEPT 05. P4 c) y d) (Exactamente iguales)

()

()

()

()

3. Se desea establecer una comunicación digital en banda base con el diagrama de bloques de la figura 1. La respuesta impulsional $h(t)$ del canal se representa en la figura 2.

- a) ¿Cuál es la máxima velocidad de símbolo sin IES que admite el canal?
- b) ¿Qué otras velocidades de símbolos sin interferencias entre símbolos se podrían utilizar?
- c) ¿Qué bloque se debería añadir si se pretendiese funcionar sin IES a una velocidad de símbolo inferior a la máxima pero superior a la segunda más alta?. Encuentre los parámetros más importantes del bloque para una velocidad de símbolo de 300 Kbaudios.
- d) Dibuje la respuesta de amplitud del canal en función de la frecuencia a partir de los datos de la figura 2.

La señal digital, procede de una señal analógica limitada en amplitud entre $\pm 1V$ y en frecuencia entre $\pm 50 \text{ KHz}$. Se muestrea a 150 KHz y las muestras se codifican con 8 bits.

- e) ¿Cuántos niveles diferentes distingue el conversor en la señal analógica?
- f) ¿Qué diferencia de tensión hay entre dos niveles consecutivos?
- g) ¿Qué velocidad de transmisión se necesita?
- h) ¿Qué tipo de codificación será necesario emplear?
- i) ¿Cuántos bits será necesario agrupar en cada símbolo?
- j) ¿Cuántos símbolos diferentes se enviarán al canal?

En la figura 3 se muestran las respuestas de amplitud (arriba) en unidades lineales y de fase (abajo) en radianes, que definen la función de transferencia del filtro paso bajo $H(f)$.

k) Evalúe la distorsión de amplitud en decibelios y el retardo en microsegundos que sufre la señal analógica al atravesar el filtro.



Figura 1

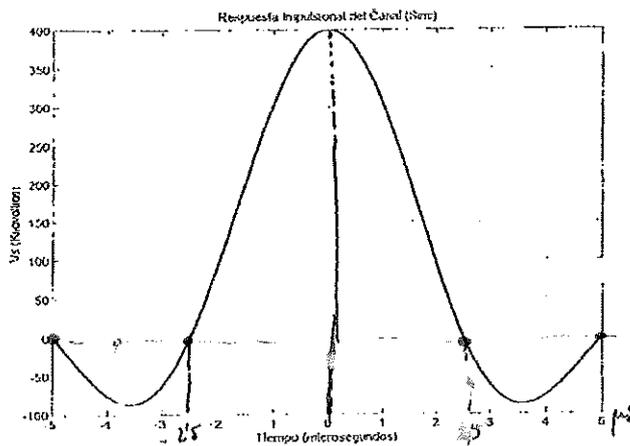


Figura 2

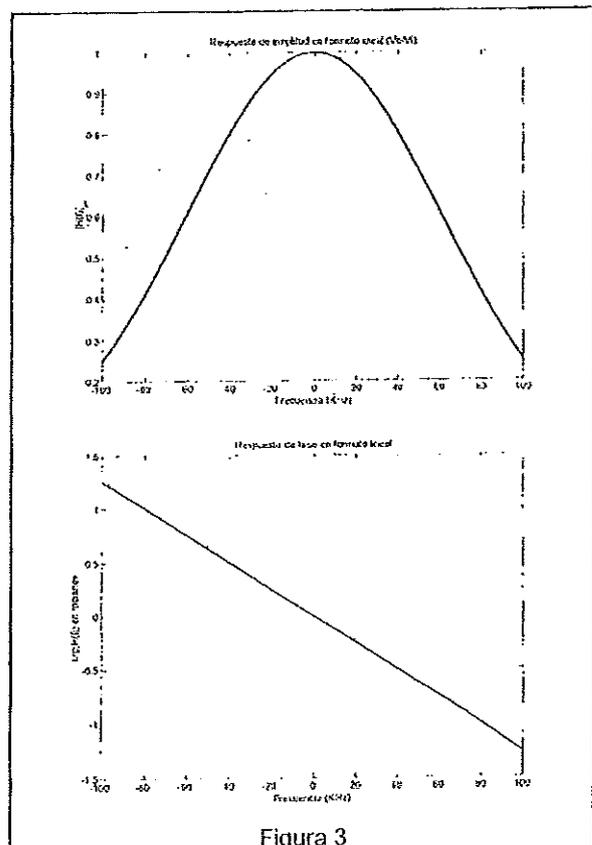


Figura 3

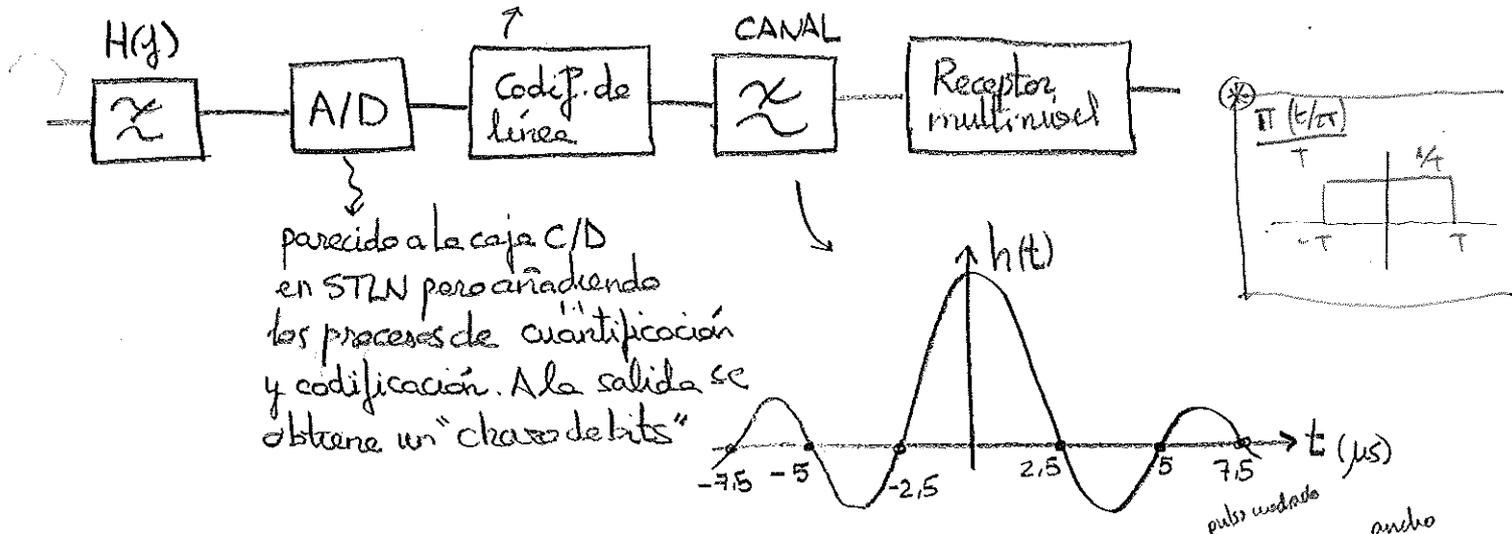
()

()

()

()

Salvo que digan lo contrario, se entiende q. la codif. de línea se hace con deltas.



a) d) 6. $\frac{\text{sen } 2\pi Bt}{2\pi Bt} = \text{sinc } 2Bt \xleftrightarrow{F} \begin{matrix} \text{rect} \\ \text{from } -B \text{ to } B \end{matrix}$

$\text{pulsos unidades} \Rightarrow \frac{\pi(1/2B)}{2B}$
 ancho

Así que el canal es un filtro paso bajo ideal. Para ver el ancho de banda:

$$\text{sen } 2\pi Bt_k = 0 \rightarrow 2\pi Bt_k = k\pi \rightarrow B = \frac{k}{2t_k} = \frac{k}{2 \cdot k(2.5 \cdot 10^{-6})} = 0.2 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 200 \text{ kHz}$$

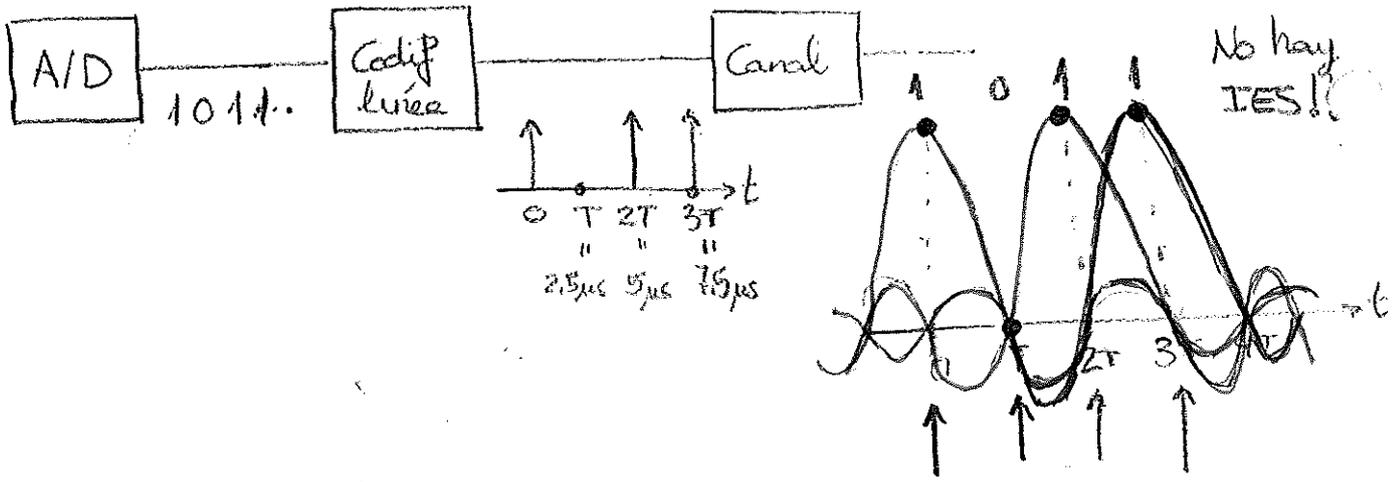
Según el 1^{er} criterio de Nyquist: $V_{s\text{máx}} = 2B = 2 \cdot 200 \cdot 10^3 = 400 \cdot 10^3 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$

El motivo es q. si enviamos símbolos cada 2.5 μs, la señal recibida en esos instantes coincidirá con los nulos de las señales recibidas anteriormente, evitando la IES. En el resto de instantes sí habrá IES.

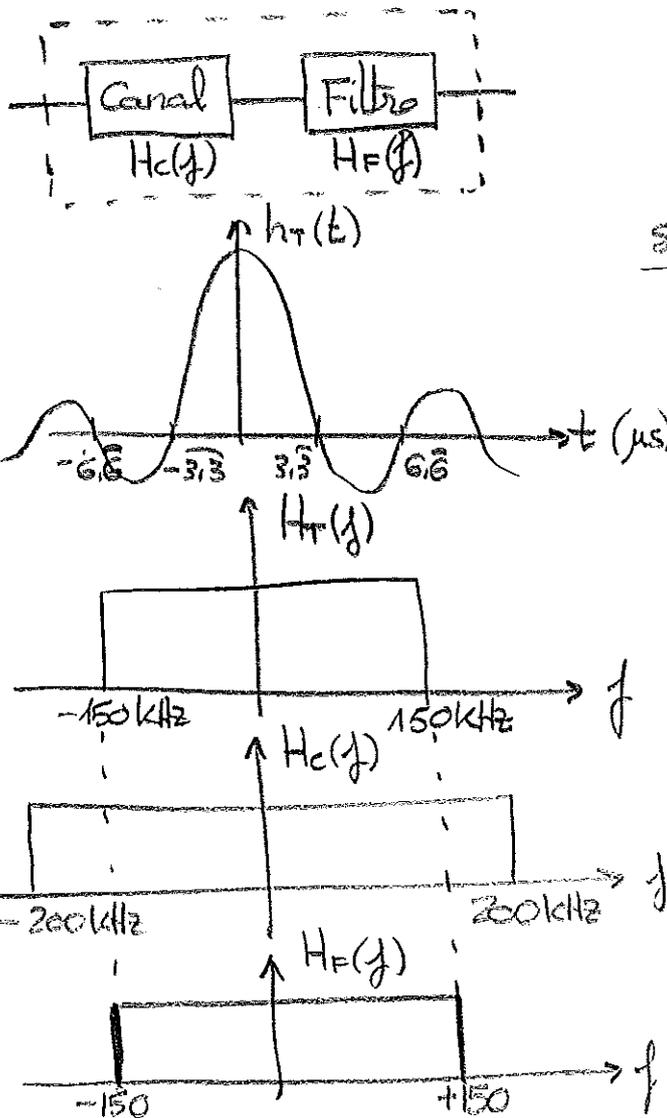
b) Si enviamos símbolos cada 5 μs tampoco habrá IES $\Rightarrow V_s = \frac{1 \text{ símbolo}}{5 \mu\text{s}} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} = 0.2 \cdot 10^6 = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$. Si los enviamos cada 7.5 μs tampoco habrá $\Rightarrow V_s = \frac{1 \text{ símbolo}}{7.5 \mu\text{s}} = \frac{1}{7.5 \cdot 10^{-6}} = 133,333 \cdot 10^3 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$ etc.

En general, las V_s sin IES serán $V_{s_n} = \frac{V_{s\text{máx}}}{n} = \frac{400}{n} \frac{\text{ksímb}}{\text{s}}$
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(Ver dibujo para a) detrás)



c) Para trabajar sin IES a una velocidad distinta de las anteriores, será necesario modificar la respuesta del canal añadiendo un filtro tras el mismo, de forma que la respuesta del conjunto canal + filtro sea un sinc con rulos cada $T' = \frac{1}{V_s'} = \frac{1}{300 \cdot 10^3} = 3.3 \mu s$



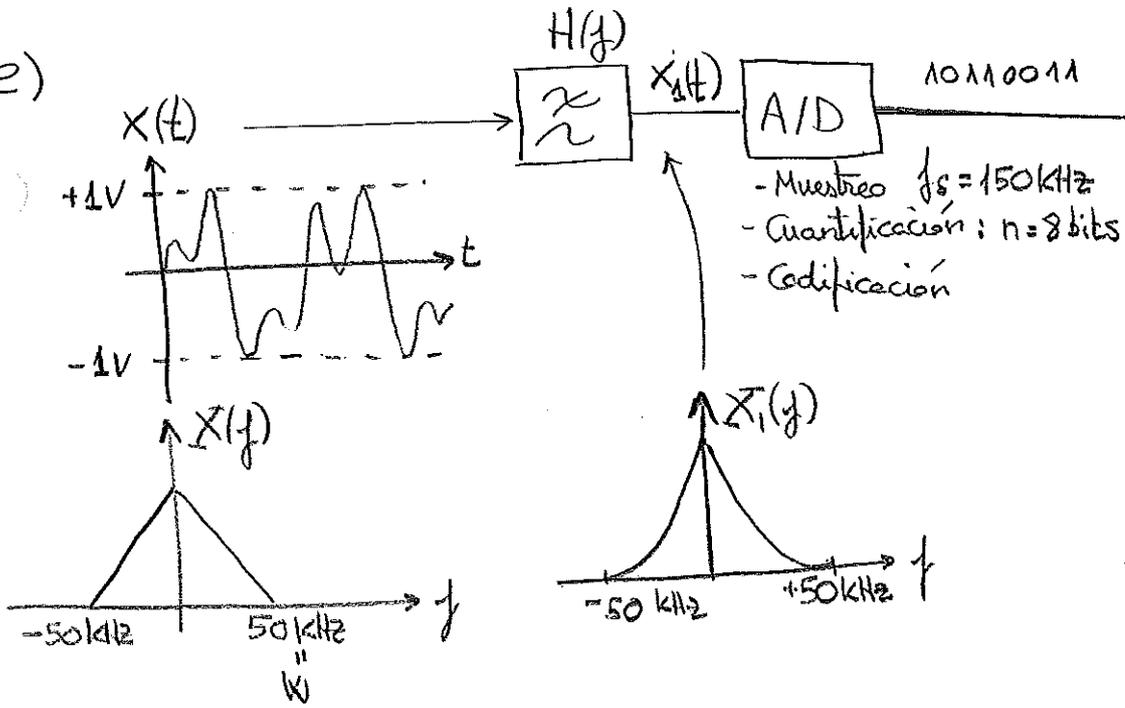
$$\frac{\sin(2\pi B'KT')}{2\pi B'KT'} = 0 \rightarrow$$

$$B' = \frac{1}{2T'} = \frac{V_s'}{2} = 150 \text{ kHz}$$

Criterio de Nyquist $T = \frac{1}{V_s}$

$$H_T(f) = H_C(f) \cdot H_F(f)$$

e)



- Muestreo $f_s = 150 \text{ kHz}$
- Cuantificación: $n = 8 \text{ bits} \Rightarrow L = 2^n = 256 \text{ niveles de cuantificación}$
- Codificación

Respuesta: $n = 8 \text{ bits} \Rightarrow L = 2^n = 256 \text{ niveles de cuantificación}$

f)
$$\frac{\Delta V}{L} = \frac{V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}}{L} = \frac{1V - (-1V)}{256 \text{ niveles}} = \frac{2V}{256 \text{ niveles}} = 7,8125 \cdot 10^{-3} \frac{V}{\text{nivel}} = 7,8125 \frac{\text{mV}}{\text{nivel}}$$

g)
$$V_T = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) = 8 \cdot 150 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 1,2 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

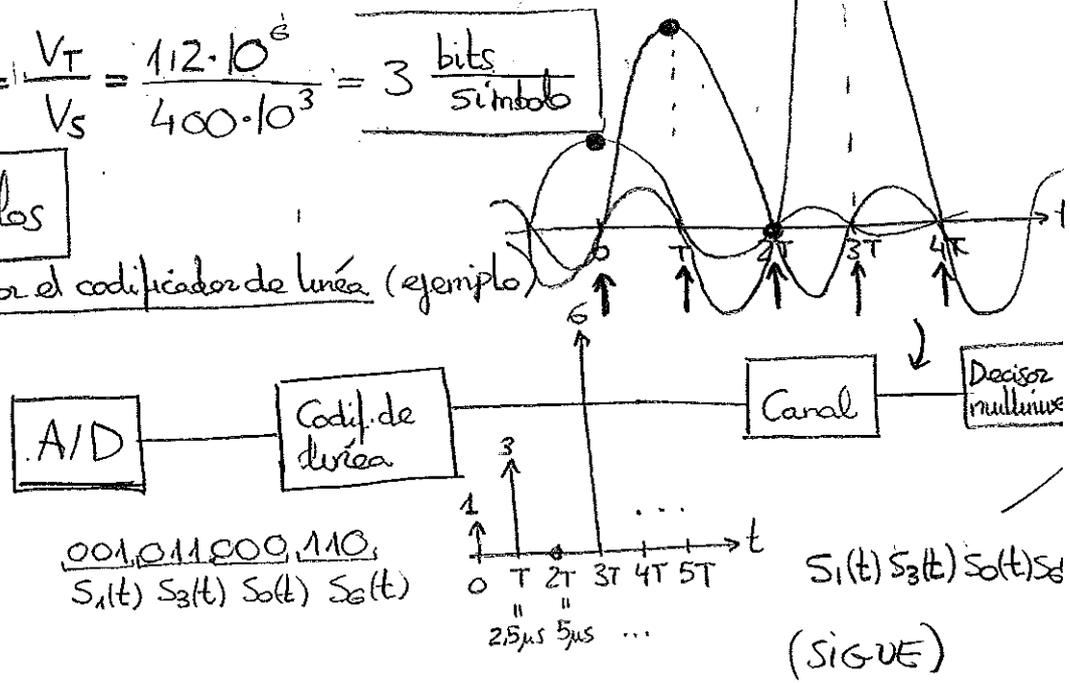
h) Empleando un alfabeto binario ($M=2$) $\Rightarrow V_s = V_T = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$
 pero $V_{s\text{máx}} = 400 \cdot 10^3 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$. Por ello será necesario utilizar codificación

i) multinivel.

i) $V_T = k V_s \Rightarrow k = \frac{V_T}{V_s} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{400 \cdot 10^3} = 3 \frac{\text{bits}}{\text{símbolo}}$

j) $M = 2^k = 8 \text{ símbolos}$

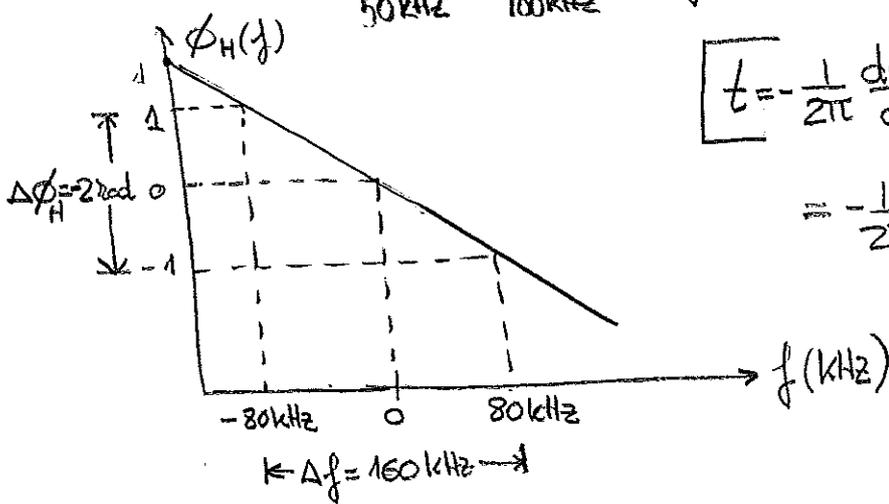
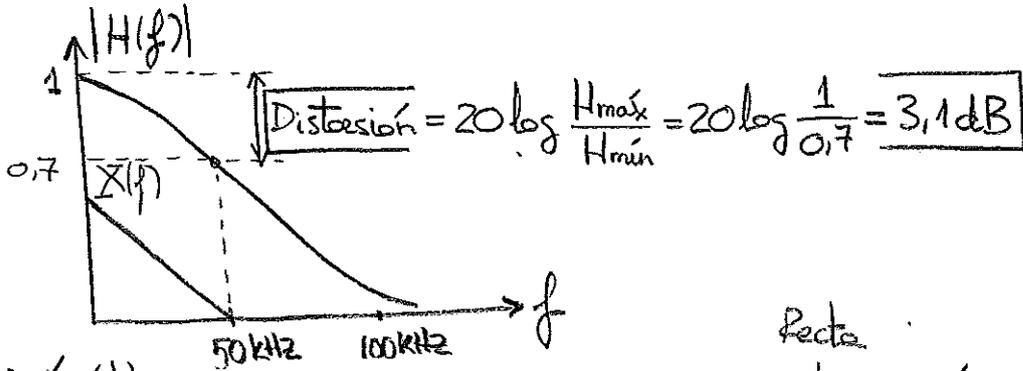
Símbolo	Señal asociada por el codificador de línea. (ejemplo)
000	$0\delta(t)$
001	$\delta(t)$
010	$2\delta(t)$
011	$3\delta(t)$
100	$4\delta(t)$
101	$5\delta(t)$
110	$6\delta(t)$
111	$7\delta(t)$



(SIGUE)



k)



Recta

$$t = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_H}{df} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \phi_H}{\Delta f} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi_H(80 \text{ kHz}) - \phi_H(-80 \text{ kHz})}{80 \cdot 10^3 - (-80 \cdot 10^3)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{-1 - 1}{160 \cdot 10^3} = 1.989 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1.98 \mu\text{s}$$

3.- Se muestrea una señal analógica de $W=25$ KHz de ancho. Las muestras se cuantifican y codifican con n bits, que se envían con un sistema de comunicaciones digital.

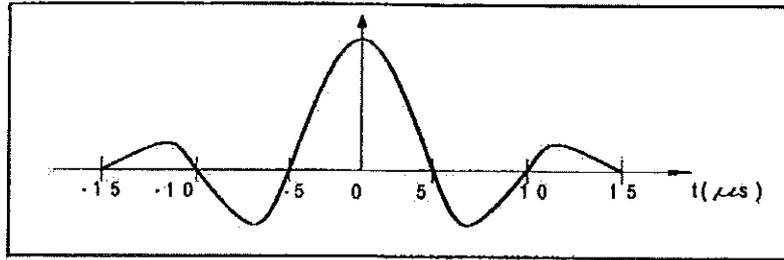


Figura 1

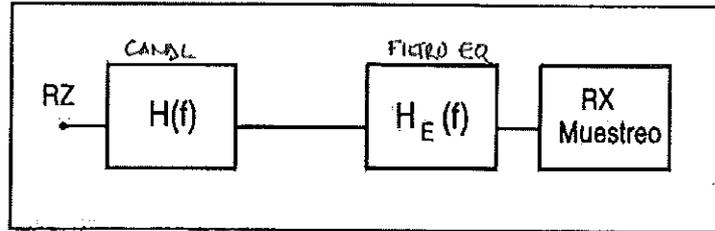


Figura 2.

En primera opción, el sistema responde al esquema de la figura 2, utilizando un código RZ-bipolar. El filtro $H_E(f)$ es muy suave y no elimina componentes espectrales de la señal. El canal tiene una función de transferencia $H(f)$ y la respuesta al impulso de la fig. 1. Se pide:

Filtros en:
 COSENO
 AZEANO

$$H(f) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) & ; |f| < 2B \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad (B=100\text{KHz})$$

- Máxima velocidad de símbolo que puede utilizarse en este esquema sin que exista IES.
- Razone si es necesaria o no la presencia del filtro $H_E(f)$ para que no haya IES, y en su caso, calcule cual debería ser su función de transferencia.
- Máximo número de niveles de cuantificación con que se podría digitalizar la señal analógica, en estas condiciones.

Como segunda opción se pasa a utilizar una modulación 16-QAM con portadora f_0 y un canal paso banda. La probabilidad de error de bit de esta modulación se puede aproximar

por: $BER \approx \frac{3}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{5 \cdot \eta}}\right)$, siendo $\eta = -160 \text{ dBm/Hz}$.

- Determinar la potencia media recibida necesaria si se requiere que en promedio no haya más de 1 bit erróneo por cada 200 símbolos recibidos.
- Determinar el máximo valor de amplitud (voltios) de la señal 16-QAM con la potencia anterior.

()

1957

1958

1959

1960

()

()

3.- Se muestrea una señal analógica de $W=25$ KHz de ancho. Las muestras se cuantifican y codifican con n bits, que se envían con un sistema de comunicaciones digital.

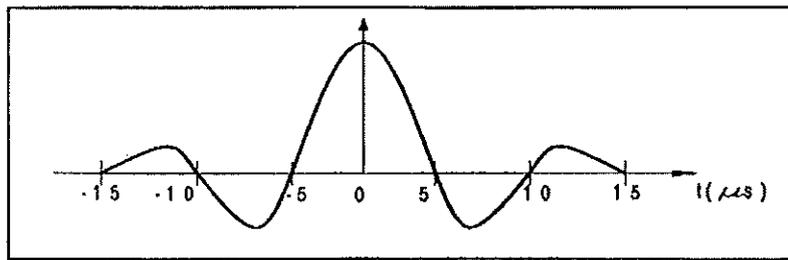


Figura 1

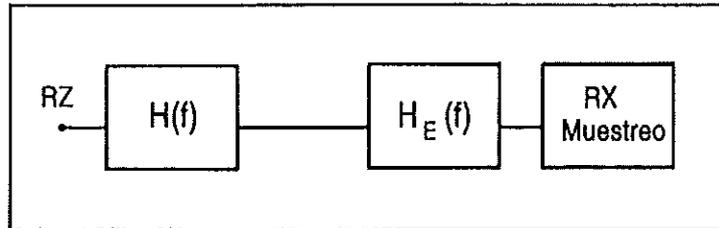


Figura 2.

En primera opción, el sistema responde al esquema de la figura 2, utilizando un código RZ-bipolar. El filtro $H_E(f)$ es muy suave y no elimina componentes espectrales de la señal. El canal tiene una función de transferencia $H(f)$ y la respuesta al impulso de la fig. 1. Se pide:

$$H(f) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) & ; |f| < 2B \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad (B=100\text{KHz})$$

- Máxima velocidad de símbolo que puede utilizarse en este esquema sin que exista IES.
- Razone si es necesaria o no la presencia del filtro $H_E(f)$ para que no haya IES, y en su caso, calcule cual debería ser su función de transferencia.
- Máximo número de niveles de cuantificación con que se podría digitalizar la señal analógica, en estas condiciones.

Como segunda opción se pasa a utilizar una modulación 16-QAM con portadora f_0 y un canal paso banda. La probabilidad de error de bit de esta modulación se puede aproximar por:

$$\text{por: } BER \approx \frac{3}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{5 \cdot \eta}}\right), \text{ siendo } \eta = -160\text{dBm/Hz}.$$

- Determinar la potencia media recibida necesaria si se requiere que en promedio no haya más de 1 bit erróneo por cada 200 símbolos recibidos.
- Determinar el máximo valor de amplitud (voltios) de la señal 16-QAM con la potencia anterior.

d) 16-QAM $\Rightarrow M=16 \Rightarrow k=4 \frac{\text{bits}}{\text{símbolo}}$

$$BER = \frac{1 \text{ bit}}{200 \text{ símbolos} \cdot 4 \frac{\text{bits}}{\text{símbolo}}} = \frac{1}{800} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{800} = \frac{3}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{5\eta}}\right) \\ \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{5\eta}}\right) = \frac{2}{2400} = 8,33 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

Mirando la gráfica: $\sqrt{\frac{2E_b}{5\eta}} \approx 2,4 \rightarrow E_b = \frac{2,4^2 \cdot 5\eta}{2}$

$$\eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \right) = 10 \log \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) \rightarrow \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} \right) = 10^{-\frac{160}{10}} = 10^{-16} \frac{\text{mW}}{\text{Hz}} = 10^{-17} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

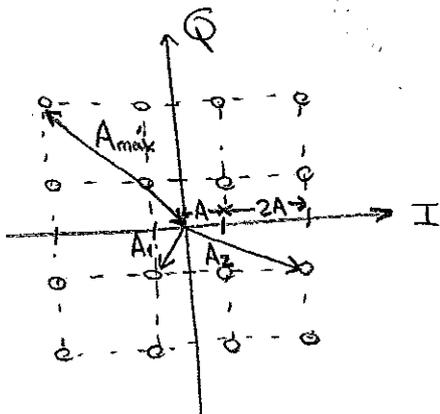
$$E_b = \frac{2,4^2 \cdot 5 \cdot 10^{-17}}{2} = 1,44 \cdot 10^{-18} \frac{\text{J}}{\text{bit}}$$

$$P_R (\text{W}) = E_b \left(\frac{\text{J}}{\text{bit}} \right) \cdot V_T \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right) = 1,44 \cdot 10^{-18} \cdot 200 \cdot 10^3 = 2,88 \cdot 10^{-13} \text{ W} =$$

$$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \quad V_T = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$$

$$= 2,88 \cdot 10^{-10} \text{ mW} = -95,4 \text{ dBm}$$

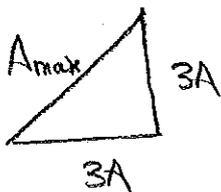
e)



$$P_R = \frac{1}{16} \left[4 \frac{A_1^2}{2} + 8 \frac{A_2^2}{2} + 4 \frac{A_{\text{máx}}^2}{2} \right]$$

$$A_1 \triangle A \rightarrow A_1^2 = A^2 + A^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{2}A$$

$$A_2 \triangle A \quad A_2^2 = (3A)^2 + A^2 \rightarrow A_2 = \sqrt{10}A$$



$$A_{\text{máx}}^2 = (3A)^2 + (3A)^2 \rightarrow A_{\text{máx}} = \sqrt{18}A$$

$$P_R = \frac{1}{16} \left[4 \frac{[\sqrt{2}A]^2}{2} + 8 \frac{[\sqrt{10}A]^2}{2} + 4 \frac{[\sqrt{18}A]^2}{2} \right] = \frac{1}{16} [4A^2 + 40A^2 + 36A^2] =$$

$$= \frac{80A^2}{16} = 5A^2 = 2,88 \cdot 10^{-13} \text{ W} \rightarrow A = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ V} = 0,24 \cdot 10^{-6} \text{ V} = 0,24 \mu\text{V}$$

$$A_{\text{máx}} = \sqrt{18}A = 1 \mu\text{V}$$

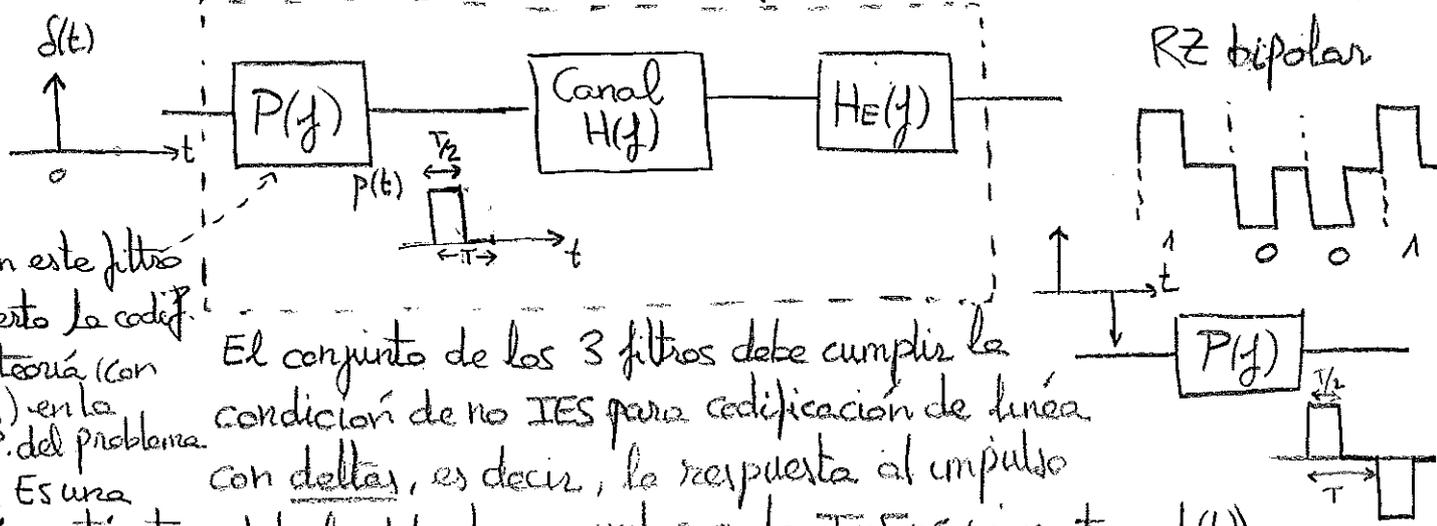
OJO! en la sol. oficial está mal las últimas cuentas.

a) La respuesta al impulso del canal tiene nulos cada $T = 5 \mu s$, por lo que podremos enviar 1 símbolo cada $5 \mu s$ sin que haya IES. \Rightarrow

$$V_{s\max} = \frac{1}{T} = \frac{1 \text{ símb}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 0,2 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{símb}}{\text{s}} = \boxed{200 \frac{\text{ksímb}}{\text{s}}}$$

Nota: Como se ha visto, tb son posibles velocidades de símbolo inferiores, si se envían símbolos cada $n5 \mu s$, $n=1,2,3, \dots \Rightarrow V_{sn} = \frac{V_{s\max}}{n} = \frac{200 \text{ ksímb}}{n \text{ s}}$

b) El filtro equalizador no sería necesario si la codificación de línea fuera con deltas, pero al ser un código RZ (retorno a cero)



El conjunto de los 3 filtros debe cumplir la condición de no IES para codificación de línea con deltas, es decir, la respuesta al impulso debe tener nulos cada $T = 5 \mu s$ (como tiene $h(t)$)

Así que: $P(f) H(f) H_E(f) = H(f) \Rightarrow H_E(f) = \frac{1}{P(f)}$

$$P(f) = \frac{\text{sen} \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}} \Rightarrow H_E(f) = \frac{\pi f \frac{T}{2}}{\text{sen} \pi f \frac{T}{2}}$$

Nota: $A \tau = \frac{\text{sen} \pi f \tau}{\pi f \tau}$ En nuestro caso $A=1$ $\tau = \frac{T}{2}$

Alfabeto binario ($M=2$) $\Rightarrow V_s = V_T = 200 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$

$W = 25 \text{ kHz} \Rightarrow f_s = 2W = 50 \cdot 10^3 \frac{\text{muestras}}{\text{s}}$

$V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) \Rightarrow n = \frac{V_T}{f_s} = \frac{200 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3} = 4 \frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \Rightarrow L = 2^n = 16 \text{ niveles de cuantif.}$



Problema 3

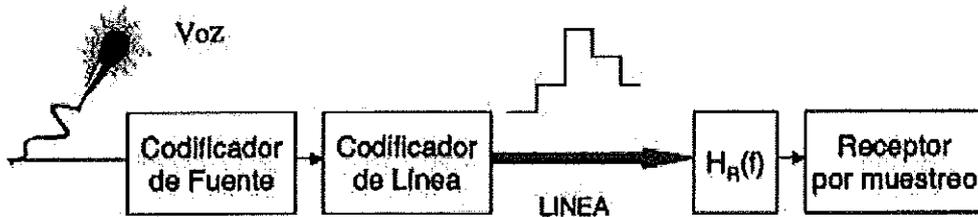
Teoría: El primer criterio de Nyquist: enunciado del teorema y condiciones para su cumplimiento, consecuencias sobre la velocidad de transmisión, condición general para que un filtro no produzca IES.

Ejercicio:

a) Sea $H_o(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} \left(1 + \cos \frac{\pi f}{B} \right); & |f| \leq B \\ 0; & \text{resto} \end{cases}$ { Filtro en COSENO ALZADO.

Demostrar que la utilización de un filtro con respuesta $H_o(f)$ en un sistema de comunicaciones digital no produce IES si la velocidad de símbolo es $v_s = B$

b) Sea el sistema de transmisión en banda base de la figura. La señal de voz tiene 6 KHz de ancho de banda y sus muestras se digitalizan con 8 bits. La codificación de línea utiliza pulsos de 4 niveles: $A_1 = 0V$; $1V$; $2V$ y $3V$ en función del símbolo transmitido, y de duración igual al periodo de símbolo. Sabiendo que se diseña el sistema para que no tenga IES aprovechando el resultado del apartado a), determine el mínimo valor posible de B .



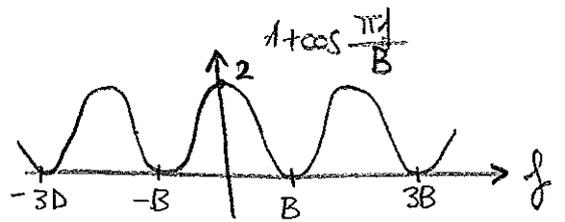
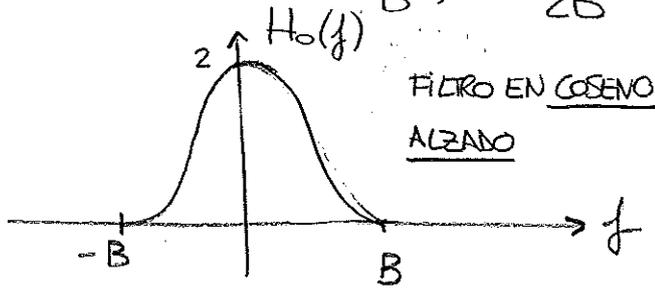
c) Sabiendo que todos los símbolos son equiprobables a priori, determine la potencia de la señal en la línea, separándola en sus componentes de continua y alterna.

d) Determine la respuesta $H_R(f)$ que debe tener el filtro del receptor para garantizar que no hay IES, aprovechando el resultado del apartado a).

Nota: Tenga en cuenta que $H_o(f)$ puede escribirse como $H_o(f) = \left(1 + \cos \frac{\pi f}{B} \right) \frac{\Pi(f/2B)}{2B}$ y que

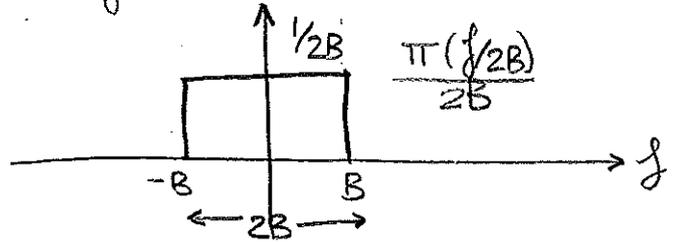
$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{2} \delta \left(t - \frac{1}{2B} \right) + \frac{1}{2} \delta \left(t + \frac{1}{2B} \right) \right] = \cos \frac{\pi f}{B}$$

a) $H_0(f) = (1 + \cos \frac{\pi f}{B}) \cdot \frac{\pi (1/2B)}{2B}$



$\cos \frac{\pi f}{B} = -1 \Rightarrow \frac{\pi f}{B} = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = (2k+1)B, k \in \mathbb{Z}$



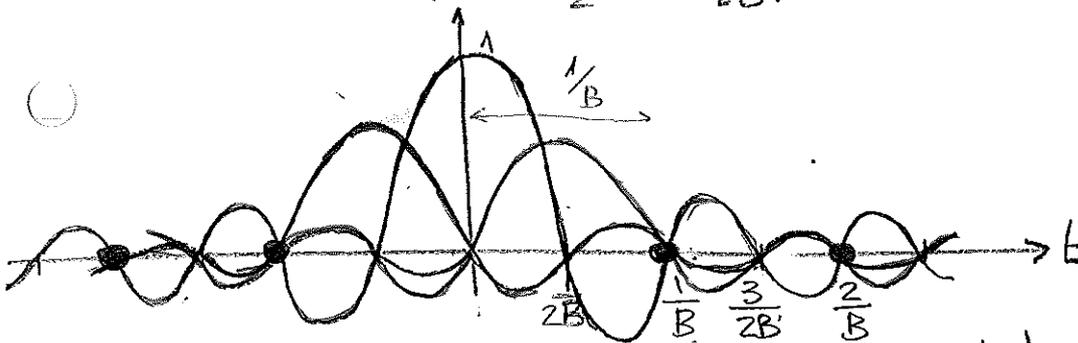
Para que no haya IES, $h_0(t)$ debe tener nulos equiespaciados

$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi f}{2B} \right\} * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi (1/2B)}{2B} \right\} = \left[\delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t - \frac{1}{2B}) + \frac{1}{2} \delta(t + \frac{1}{2B}) \right] *$

$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t - \frac{1}{2B}) + \frac{1}{2} \delta(t + \frac{1}{2B}) \right\} = \cos \frac{\pi f}{B}$

* $\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi B(t - \frac{1}{2B})}{2\pi B(t - \frac{1}{2B})} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi B(t + \frac{1}{2B})}{2\pi B(t + \frac{1}{2B})}$

$h_1(t) + \frac{1}{2} h_1(t - \frac{1}{2B}) + \frac{1}{2} h_1(t + \frac{1}{2B})$



La suma de las 3 sinc tiene nulos equiespaciados cada $T = \frac{1}{B} \Rightarrow$

$V_{s\max} = \frac{1}{T} = B$ notendrá IES

b) $V_T = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) \xrightarrow{f_s = 2W} \left[V_T = n 2W = 8 \cdot 2 \cdot 6 = 96 \frac{\text{kbits}}{\text{s}} \right]$

Como $M=4$ símbolos $\Rightarrow k = \log_2 M = 2 \frac{\text{bits}}{\text{símbolo}} \Rightarrow \left[V_s = \frac{V_T}{k} = 48 \frac{\text{kymb}}{\text{s}} \right]$

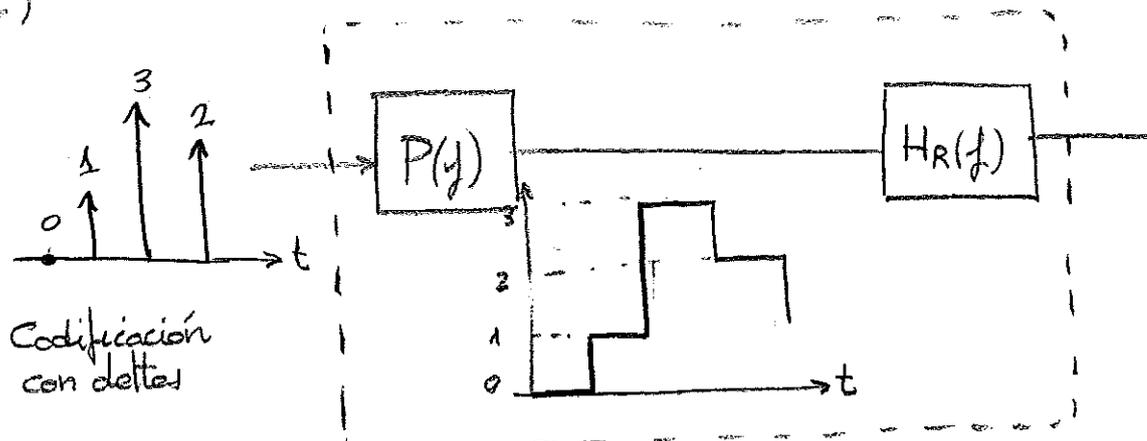
$V_s = B \Rightarrow \left[B = 48 \text{ kHz} \right]$

$$c) \boxed{P_{\text{media}} = \frac{1}{4} (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = \frac{1}{4} (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{4} \text{ W}}$$

$$\boxed{X_{\text{DC}} = \frac{1}{4} (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = \frac{1}{4} (0 + 1 + 2 + 3) = 1,5 \text{ V}} \Rightarrow \boxed{P_{\text{DC}} = X_{\text{DC}}^2 = 2,25 \text{ W}}$$

$$\boxed{P_{\text{AC}} = P_{\text{media}} - P_{\text{DC}} = 1,25 \text{ W}}$$

d.)



Filtro sin IES para codificación de canal con deltas (el del ap. a).

$$P(f) H_R(f) = H_0(f) \rightarrow H_R(f) = \frac{H_0(f)}{P(f)}$$

Así que:

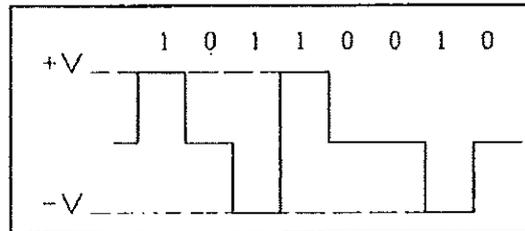
$$\boxed{H_R(f) = \begin{cases} (1 + \cos \frac{\pi f}{B}) \frac{\pi f}{B} \frac{1}{\sin \pi f T}, & |f| \leq B \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

$$P(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = \frac{\text{sac}(fT)}{\pi f}$$

3.- Se dispone de un sistema de comunicaciones digitales en banda base con un código de línea bipolar (con polaridad alterna de los unos) tal como el representado en la figura, siendo p_1 la probabilidad de que se envíe el símbolo "1". El receptor se utiliza un receptor por muestreo, perturbado por ruido aditivo, blanco, gaussiano de media cero y desviación estándar σ .

La decisión de cada símbolo se hace independientemente y de la misma manera (sin tener en cuenta si la polaridad correspondiente de la señal "1" es positiva o negativa): Se toma una muestra z de la señal recibida y se aplica la siguiente regla de decisión:

$$\begin{cases} \text{si } -\gamma \leq z \leq \gamma \rightarrow D_0 \\ \text{en caso contrario} \rightarrow D_1 \end{cases}$$



a) Determine las funciones densidad de probabilidad de z condicionadas a las hipótesis H_0 y H_1

b) Calcule la expresión de la probabilidad de error (suponga $V \gg \sigma$)

c) Determine el valor de γ que minimiza la anterior probabilidad de error.

d) Calcule la probabilidad de error con el resultado del apartado anterior y símbolos equiprobables.

e) Calcule la potencia media de la señal en función de V y p_1

f) ¿Ofrece este sistema algún tipo de protección frente a errores?

Nota:

$$\frac{d[\text{erfc}(u)]}{du} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2]$$

e) $P_u = p_0 P_{1|0} + p_1 P_{0|1} = (1-p_1) P_{1|0} + p_1 P_{0|1} = p_1 A^{1/2}$

f) Si, al usar codificación diferencial, detecta errores si se reciben 2 impulsos sucesivos de la misma polaridad.

()

()

()

()

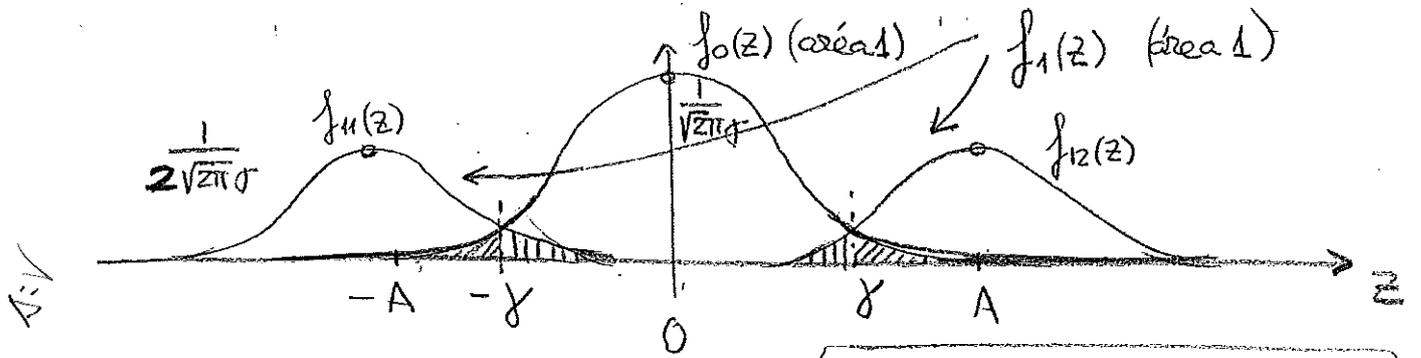
JUNO7. P4

a) muestra de proc. estoc: VA media 0 y desv. estándar σ

$$\begin{cases} -\gamma \leq z \leq \gamma \Rightarrow D_0 \\ |z| > \gamma \Rightarrow D_1 \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 0 + n(T_s) & \text{si } H_0 \\ A + n(T_s) & \text{si } H_1 \\ -A + n(T_s) & \text{si } H_1 \end{cases}$$

VA de media 0 y desv. estándar σ



Nota: Gaussiana media μ $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$f(z/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{área 1})$$

$$f(z/H_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z+A)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{área 1})$$

b) $P_e = P_{FA} \cdot P(H_0) + P_M \cdot P(H_1) = P_{FA} P_0 + P_M \cdot P_1$

$$\left. \begin{aligned} P_{FA} &= P(D_1/H_0) \\ P_M &= P(D_0/H_1) \end{aligned} \right\} P_{FA} = P(|z| > \gamma | H_0) = \int_{-\infty}^{-\gamma} f_0(z) dz + \int_{\gamma}^{+\infty} f_0(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz + \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = ?$$

$$= \text{erfc}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_M = \int_{-\gamma}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z+A)^2}{2\sigma^2}} dz + \int_{-\infty}^{+\gamma} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{A-\gamma}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{A-\gamma}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

$\left(\frac{1}{2}\right) P(|z+A| > A-\gamma) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) P(|z-A| > A-\gamma) \left(\frac{1}{2}\right)$

distancia entre z y A sólo quiero la mitad distancia

$$= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{A-\gamma}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Así que:
$$P_e = P_0 P_{FA} + P_1 P_M = P_0 \overset{(1-P_1)}{\text{erfc}}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P_1 \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{A-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

c) NOTA:
$$\frac{d}{du} [\text{erfc}(u)] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$\frac{d}{dx} [\text{erfc}(f(x))] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} f'(x) e^{-[f(x)]^2}$$
 regla cadena.

$$\frac{d}{dy} [\text{erfc}(f(y))] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} f'(y) e^{-[f(y)]^2}$$

$$\frac{dP_e}{dy} = (1-P_1) \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} + P_1 \frac{1}{2} \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(A-Y)^2}{2\sigma^2}} \frac{-1}{\sqrt{2}\sigma} = 0$$

$$(1-P_1) e^{-\frac{Y^2}{2\sigma^2}} - \frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-Y)^2}{2\sigma^2}} = 0 \rightarrow \frac{e^{-\frac{Y^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(A-Y)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{P_1/2}{1-P_1}$$

$$e^{\frac{-Y^2 + (A-Y)^2}{2\sigma^2}} = \frac{P_1}{2(1-P_1)} \xrightarrow{\ln} \frac{-Y^2 + A^2 + Y^2 - 2AY}{2\sigma^2} = \ln \frac{P_1}{2(1-P_1)}$$

$$A^2 - 2AY = 2\sigma^2 \ln \frac{P_1}{2(1-P_1)} \rightarrow Y = \frac{2\sigma^2 \ln \frac{P_1}{2(1-P_1)} - A^2}{-2A}$$

$$\rightarrow Y = \frac{A}{2} - \frac{\sigma^2}{A} \ln \left(\frac{P_1/2}{1-P_1} \right)$$

d)
$$\left. \begin{aligned} P_0 = 1 - P_1 = \frac{1}{2} \\ P_1 = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ Símbolos equiprobables}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{4} \text{erfc}\left(\frac{A-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad \left| \quad Y = \frac{A}{2} - \frac{\sigma^2}{A} \ln \frac{1}{2} = \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln 2 \right.$$

3.- El sistema de comunicaciones digitales de la figura 1 se utiliza para transmitir información digital a 1Mb/s, y emplea como codificación de línea las siguientes señales paso bajo (ceros y unos equiprobables):

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right); \quad T = \text{duración de un bit.}$$

- Determinar los valores de A y T
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor por muestreo precedido por un filtro de anchura de banda 4MHz (considere que dada la anchura de este filtro, la IES es despreciable).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor óptimo, con filtro adaptado.
 - Anchura de banda aproximada del filtro adaptado (Utilice para esta estimación el criterio de anchura de banda hasta el primer nulo de la función de transferencia).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea como codificación de línea una portadora modulada con la constelación de la figura 2 y un receptor óptimo, siendo la potencia transmitida igual que en el caso anterior.
- NOTA: Si lo considera necesario puede suponer que $\text{erfc}(x) \approx 0$ para $x > 4.5$.

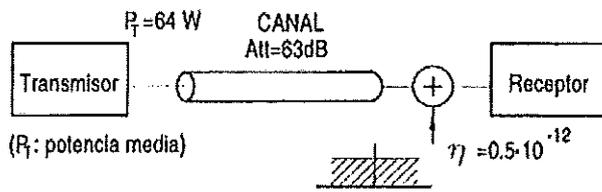


Figura 1.

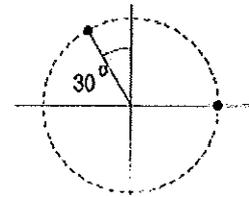


Figura 2

3. El sistema de comunicaciones digitales de la figura 1 se utiliza para transmitir información digital a 1Mb/s, y emplea como codificación de línea las siguientes señales paso bajo (ceros y unos equiprobables):

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right); \quad T = \text{duración de un bit.}$$

- Determinar los valores de A y T
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor por muestreo precedido por un filtro de anchura de banda 4MHz (considere que dada la anchura de este filtro, la IES es despreciable).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor óptimo, con filtro adaptado.
 - Anchura de banda aproximada del filtro adaptado (Utilice para esta estimación el criterio de anchura de banda hasta el primer nulo de la función de transferencia).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea como codificación de línea una portadora modulada con la constelación de la figura 2 y un receptor óptimo, siendo la potencia transmitida igual que en el caso anterior.
- NOTA: Si lo considera necesario puede suponer que $\text{erfc}(x) \approx 0$ para $x > 4.5$.

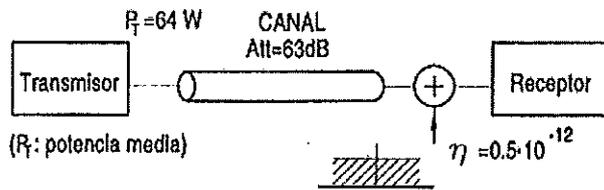


Figura 1.

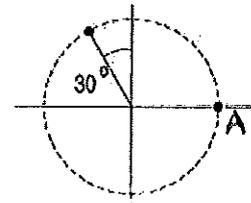


Figura 2

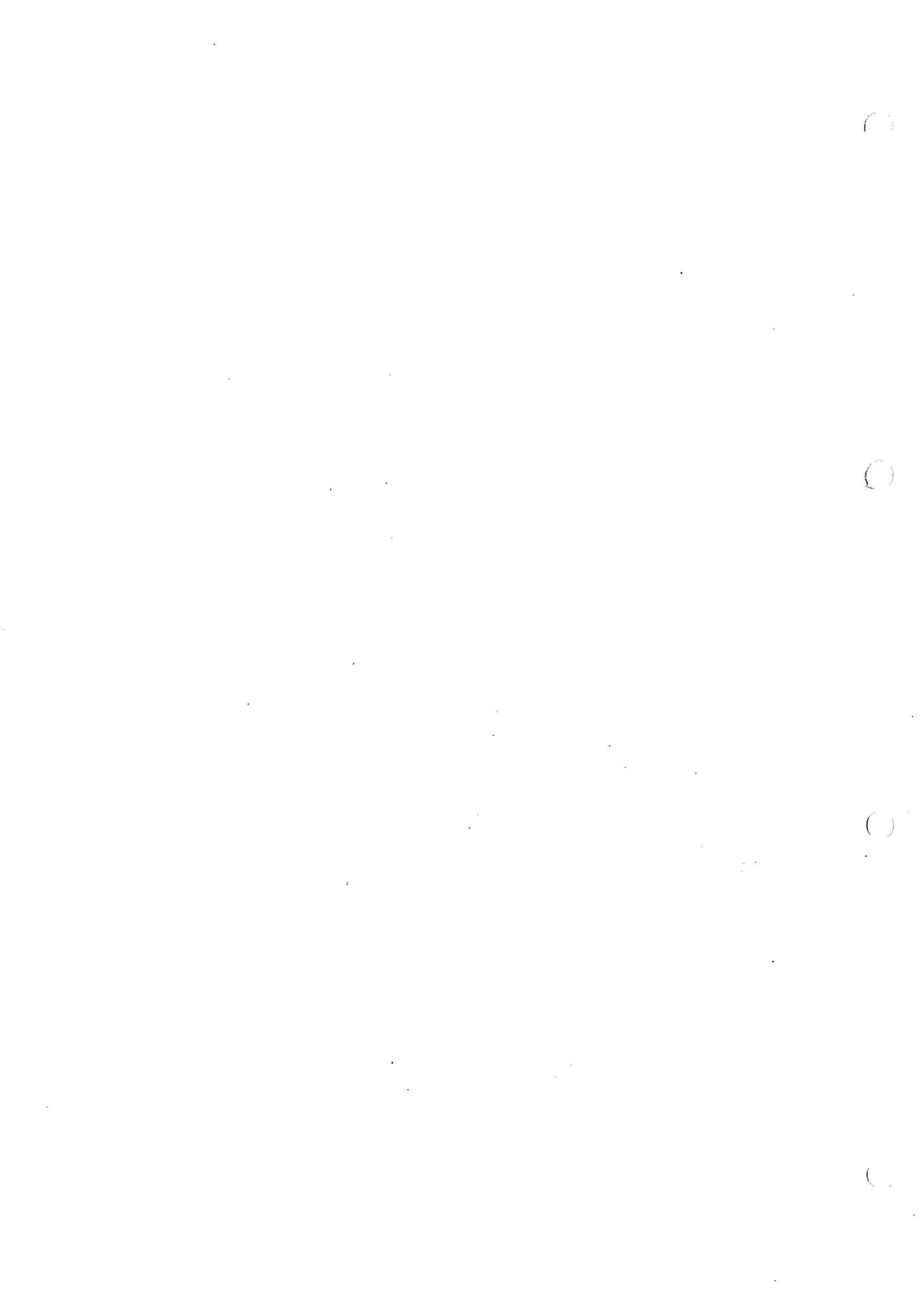
e) Receptor óptimo: $P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}}\right)$

$$\left. \begin{aligned} E_d &= E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1} \\ \rho &= \cos\theta = \cos 120^\circ \\ E_0 &= E_1 = \frac{A_R^2}{2} \cdot T = E \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} E_d &= 2E - 2 \frac{\cos 120^\circ}{-0.5} \cdot \sqrt{E^2} = 3E = \\ &= 3 \frac{A_R^2}{2} T = 3P_R T \end{aligned} \right\}$$

$$A_{\text{att}} = 10 \log \frac{P_T}{P_R} \rightarrow \frac{P_T}{P_R} = 10^{\frac{A_{\text{att}}}{10}} \rightarrow P_R = \frac{P_T}{10^{\frac{A_{\text{att}}}{10}}} = \frac{64}{10^{\frac{63}{10}}}$$

$$E_d = 3 \frac{64}{10^{\frac{63}{10}}} \cdot 10^{-6} = 9,623 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

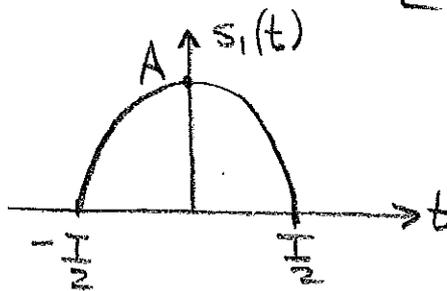
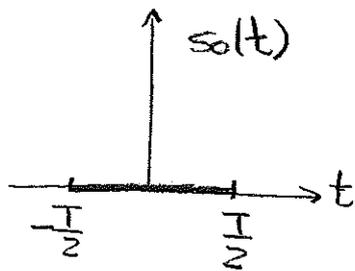
$$\text{Así que: } \left[P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}}\right] = \frac{1}{2} \text{erfc}\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{9,623 \cdot 10^{-11}}{0,5 \cdot 10^{-12}}}\right] = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \text{erfc}[6,93] \approx 0 \right]$$



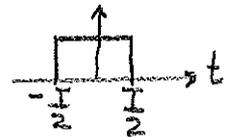
SEPT 01. P3

a) $M=2 \Rightarrow$ Alfabeta binario

$$V_s = V_r = 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}} \rightarrow V_s = \frac{1}{T} = 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{V_s} = 10^{-6} \frac{\text{s}}{\text{bit}}}$$



$$s_1(t) = A \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$P_T = 64 \text{ W}$$

$$P_T = P_0 \cdot P_{m|0} + P_1 \cdot P_{m|1} \quad (\text{símbolos equiprobables})$$

$$P_{m|1} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = \frac{A^2}{2}$$

Así que:

$$P_1 \cdot P_{m|1} = 64 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2} = 64 \rightarrow \boxed{A = \sqrt{4 \cdot 64} = 16 \text{ V}}$$

b) Receptor por muestreo:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (\text{Fórmula para umbral óptimo y datos equiprobables})$$

$$\sigma^2 = N = \frac{B}{2} 2B = \frac{17}{2} 2B = \frac{0.5 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ W} \rightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ V}}$$

$$\Delta = S_{IR}(T_s) - S_{OR}(T_s) = S_{IR}(T_s) = A_R$$

Nota: en las fórmulas de P_e siempre se trabaja con la amplitud de las señales recibidas.

$$A_{tt} = 63 \text{ dB} \rightarrow 20 \log \frac{A}{A_R} = 63 \rightarrow \frac{A}{A_R} = 10^{\frac{63}{20}} \rightarrow A_R = \frac{A}{10^{\frac{63}{20}}} = \frac{16 \text{ V}}{10^{\frac{63}{20}}}$$

$$\text{Así que } \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma} = \frac{A_R}{2\sqrt{2}\sigma} = \frac{\frac{16}{10^{\frac{63}{20}}}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3}} = 2.83$$

mal decididos

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(2.83) \approx 3 \cdot 10^{-5}}$$

$3 \cdot 10^{-5}$ bits erróneos
bit transmitido

3 bits erróneos
10^6 bits transmitidos

c) Receptor con filtro adaptado:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right]$$

$$S_d(t) = S_1(t) - \cancel{S_0(t)} \rightarrow S_{dR}(t) = S_{1R}(t) - \cancel{S_{0R}(t)} = A_R \cos \frac{\pi t}{T}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$E_d = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_d^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_R^2 \cos^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{A_R^2 T}{2}$$

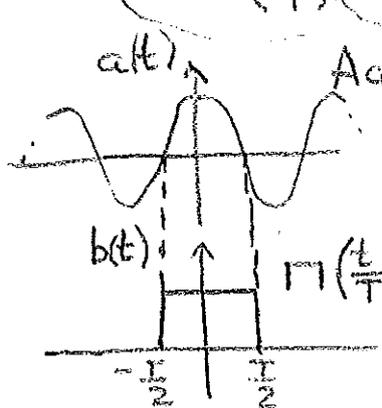
$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_R^2 T}{2\eta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(16 \frac{\text{dB}}{10 \frac{\text{dB}}{10}})^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-12}}} = 5,66$$

Así que: $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(5,65) \approx 0$

d) Filtro adaptado: $h(t) = S_d(T-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = S_d^*(f) e^{-j2\pi f T}$

$$|H(f)| = |S_d^*(f) e^{-j2\pi f T}| = |S_d(f)|$$

$$S_d(t) = S_1(t) - \cancel{S_0(t)} = A \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_d(f) = A(f) * B(f)$$

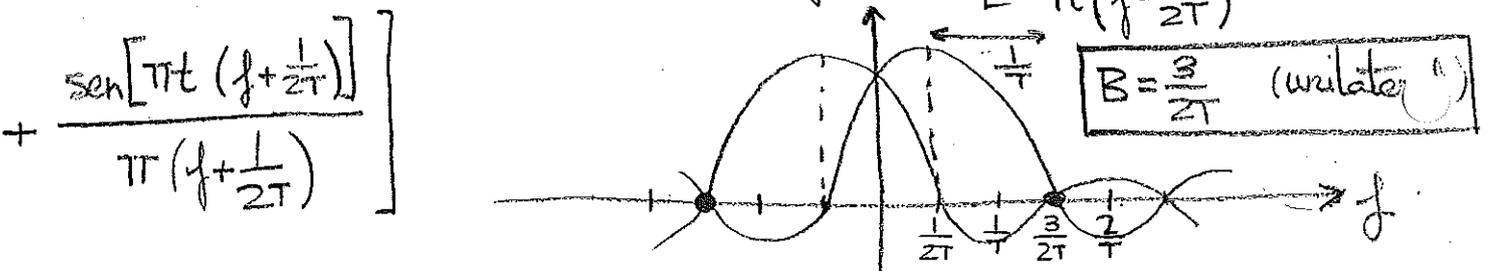


$$A(f) = \frac{A}{2} \left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) \right]$$

$$B(f) = \frac{\operatorname{sen}(\pi T f)}{\pi T f} = \frac{\operatorname{sen}(\pi T f)}{\pi f}$$

\downarrow
Osi

$$S_d(f) = \frac{A}{2} \left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) \right] * \frac{\operatorname{sen}(\pi T f)}{\pi f} = \frac{A}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}\left[\pi T \left(f - \frac{1}{2T}\right)\right]}{\pi \left(f - \frac{1}{2T}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left[\pi T \left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]}{\pi \left(f + \frac{1}{2T}\right)} \right]$$



3.- Las figuras muestran dos posibles constelaciones de un sistema digital de $M=8$ símbolos.

- a) Determine la velocidad de símbolo si la velocidad de bit deseada es de 90 Mbts/sec.

En las dos constelaciones la distancia de un símbolo dado al símbolo más próximo, D , es la misma, según se muestra en dichas figuras.

- b) Determine el radio r de la constelación de la figura 1 en función de D . Indique a qué sistema de modulación corresponde dicha constelación.
c) Determine los radios a y b de la constelación de la figura 2, en función de D .
d) Determine la potencia media transmitida en función de D , según se use una u otra constelación (suponga que todos los símbolos son equiprobables). Indique qué constelación es más ventajosa desde el punto de vista de potencia transmitida.

Suponga ahora que en el sistema de comunicaciones el único ruido importante es el ruido de fase (es decir, la fase de la señal correspondiente a cada símbolo sufre variaciones, alrededor del valor nominal).

- e) Indique el aspecto que tendría la constelación recibida en cada caso (es decir, según se haya enviado la constelación de la figura 1 ó 2).
f) Dibuje en el espacio de señal las regiones de decisión según se use una u otra constelación.
g) Indique cuál de las dos constelaciones es más inmune a los errores de fase. Razone su respuesta.

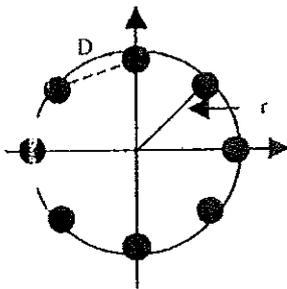


Fig. 1

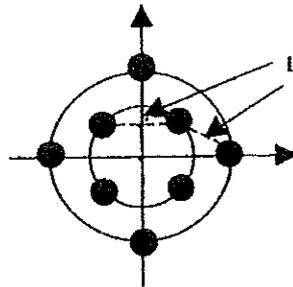


Fig 2) Radio menor: a. Radio mayor: b

()

()

()

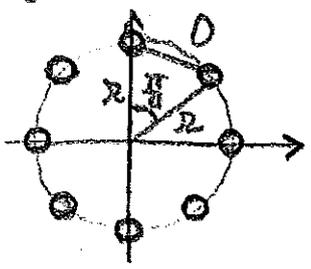
()

SEPTO2.P3

a) $V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) = k \left(\frac{\text{bits}}{\text{symb}} \right) V_s \left(\frac{\text{symb}}{\text{s}} \right) \rightarrow V_s = \frac{V_T}{k}$ } $V_s = \frac{90 \frac{\text{bits}}{\text{s}}}{3 \frac{\text{bits}}{\text{symb}}} = \underline{\underline{30 \frac{\text{symb}}{\text{s}}}}$

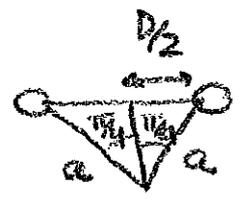
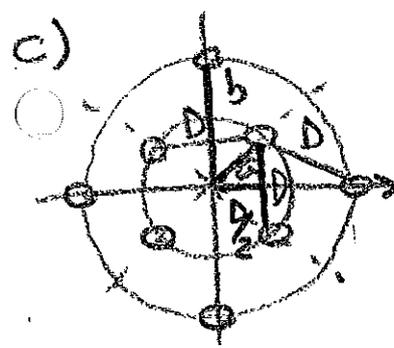
$M=8 \text{ symb} \Rightarrow k = \log_2 M = 3 \frac{\text{bits}}{\text{symb}}$

b) 8-PSK



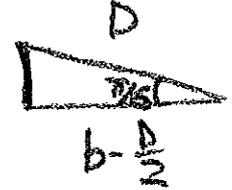
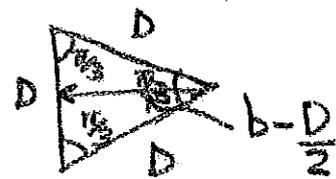
$\text{Sen } \frac{\pi}{4} = \frac{D/2}{R} \rightarrow$

$R = \frac{D}{2 \text{Sen } \frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{1,307 D}}$



$\text{Sen } \frac{\pi}{4} = \frac{D/2}{a} \rightarrow a = \frac{D}{2 \text{Sen } \frac{\pi}{4}} = \frac{D}{2 \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{0,707 D}}$

$\underline{\underline{0,707 D}}$



$\text{Cos } \frac{\pi}{6} = \frac{b - \frac{D}{2}}{D} \rightarrow b = \frac{D}{2} + D \text{Cos } \frac{\pi}{6} = \frac{D}{2} + 0,866 D = \underline{\underline{1,366 D}}$

d) $P_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{A_i^2}{2}$ (symb. equiprobables)

$P_{m1} = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} = \underline{\underline{0,854 D^2}}$

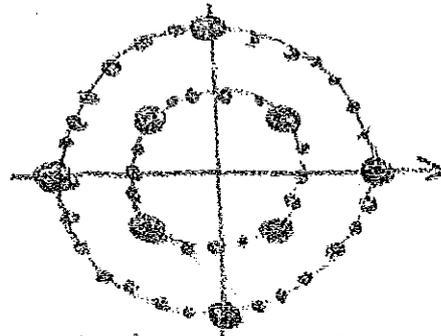
$P_{m2} = \frac{1}{8} \left[4 \frac{a^2}{2} + 4 \frac{b^2}{2} \right] = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \underline{\underline{0,591 D^2}}$

Afectos de potencia, es más ventajosa la constelación de la figura 2

e)

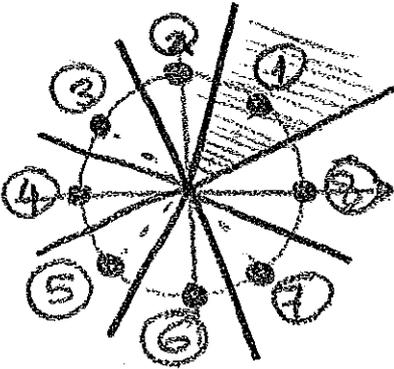


Cluster de puntos
en circunferencia de
radio r .

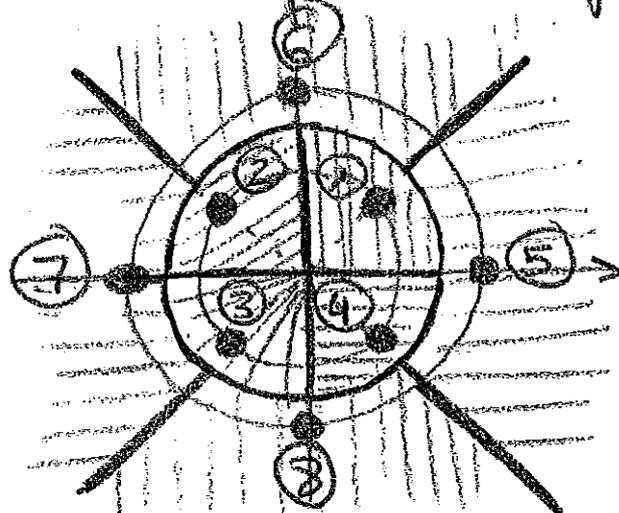


Cluster de puntos
en circunf. de radios a y b .

f)



Sectores de $\alpha = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad



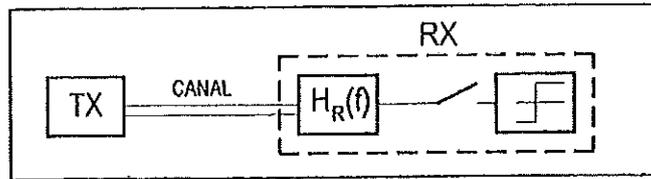
Sectores de $\frac{\pi}{2}$ rad.

g)

La constelación más inmune a errores de fase es la de la figura 2, ya que son sectores de $\frac{\pi}{2}$ frente a los sectores de $\frac{\pi}{4}$ de la figura 1.

4.- El sistema de comunicaciones digital binario de la figura utiliza un código RZ unipolar. Cada T segundos se recibe una de las siguientes señales:

$$\begin{cases} s_0(t) = 0 \\ s_1(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \end{cases}$$



siendo $A = 0.1 \text{ mV}$ y $T = 2 \mu\text{s}$. El canal atenúa 75 dB y añade ruido blanco gaussiano de d.e.p. unilateral $\eta = -128 \text{ dBm/Hz}$.

- Expresión de $H_R(f)$ sabiendo que se diseña para que tenga la mínima anchura posible y para que no exista interferencia entre símbolos.
- Para mejorar la BER se cambia $H_R(f)$ que se hace igual al filtro óptimo. Calcule la expresión de $h_R(t)$ para el nuevo filtro. Para este caso calcule el umbral óptimo de decisión y la BER. Tenga en cuenta que la expresión de $h_R(t)$ no puede depender de la amplitud recibida A . (Nota: en este apartado no tenga en cuenta la IES).
- Calcule la potencia de señal transmitida, en continua y en alterna.
- Se desea utilizar el anterior enlace para enviar una señal de audio analógica de 25 KHz de ancho de banda. Para ello se digitaliza con el correspondiente conversor A/D. Indique el máximo número posible de niveles de cuantificación con los que puede digitalizarse cada muestra de la señal.
- Se desea ahora enviar una señal de vídeo de 5 MHz de ancho de banda manteniendo el mismo número de niveles de cuantificación, por lo que se necesita aumentar la capacidad del enlace. Para ello se introducen los siguientes cambios:
 - Se introduce un codificador de fuente que reduce la velocidad de transmisión a su salida a la cuarta parte de la de entrada.
 - Se multiplica por diez la velocidad de símbolo ($T = 0.2 \mu\text{s}$)
 - El codificador de línea produce pulsos distintas amplitudes.

Indique el número de niveles distintos que deberá tener la señal transmitida.

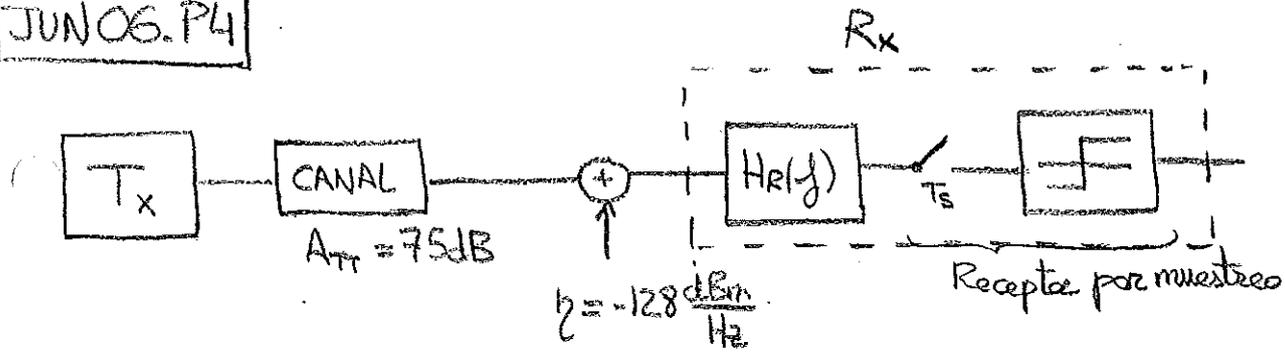
()

1. 100

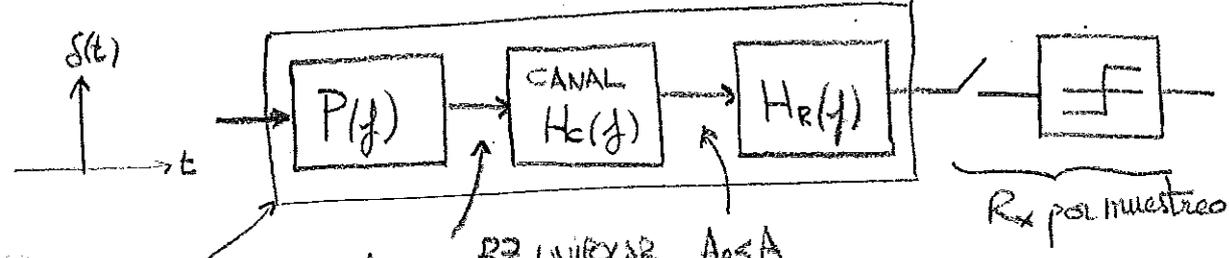
()

()

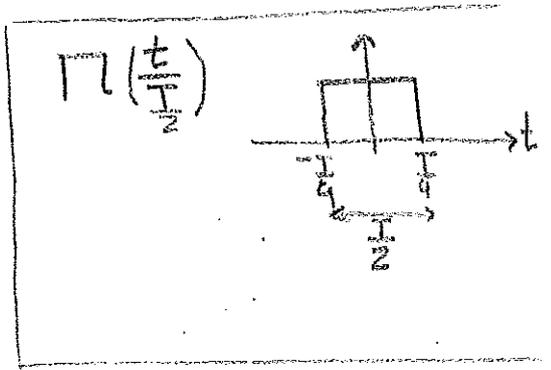
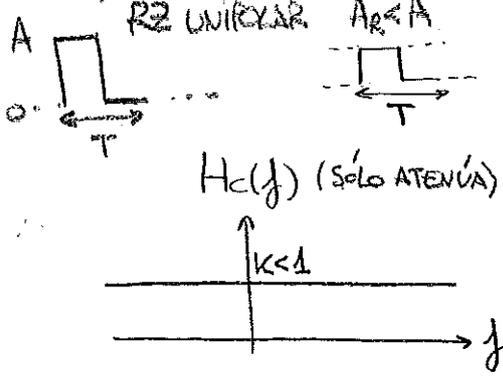
()



a) $H_R(f)$ para q. no haya IES (Sup^s q. no hay ruido)

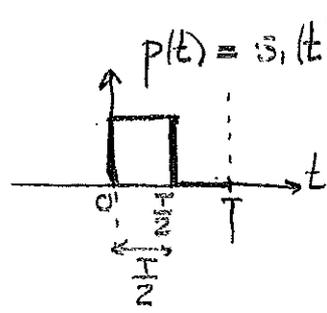
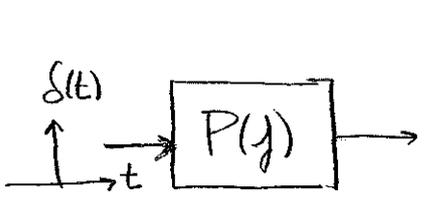


El conjunto de los 3 debe cumplir la condición de NO IES para codificación de líneas con deltas. Como tiene q. ser con el menor ancho de banda posible, el 1^{er} criterio de Nyquist nos dice que se tratará de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda $B = \frac{1}{2T}$, así que:



El 1^{er} criterio de Nyquist nos dice que se tratará de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda $B = \frac{1}{2T}$, así que:

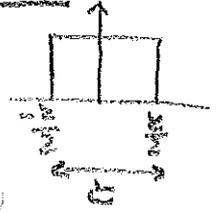
$$P(f) \cdot H_c(f) \cdot H_R(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \rightarrow H_R(f) = \begin{cases} \frac{1}{kP(f)}, & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



$$P(f) = \frac{\text{sen } \pi f \frac{T}{2}}{\pi f}$$

Nota: en rigor, al estar desplazado en el tiempo, debería estar multip. por exp. en frec.

TABLA:



$$A \frac{\text{sen}(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f \frac{T}{2}} = A \frac{\text{sen}(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f}$$

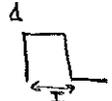
Así que:

$$H_R(f) = \begin{cases} \frac{\pi f}{k \text{sen}(\pi f \frac{T}{2})}, & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

b) Filtro adaptado a la señal de diferencia: $s_d(t) = s_1(t) - s_0(t) = s_1(t)$

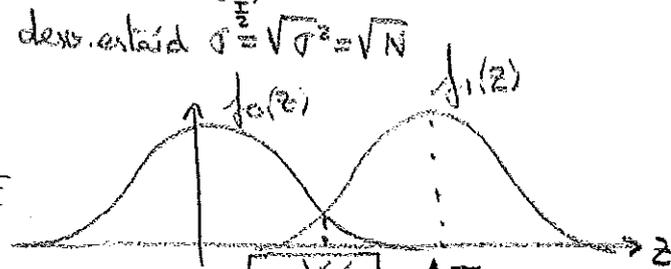
$$h_R(t) = k s_1(T-t) \rightarrow h_R(t) = \frac{k}{A} \Pi\left(\frac{(T-t) - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) = \Pi\left(\frac{\frac{3T}{4} - t}{\frac{T}{2}}\right)$$

lo ajustamos para q no dependa de la amplitud recibida \Rightarrow En la practica está adaptado a

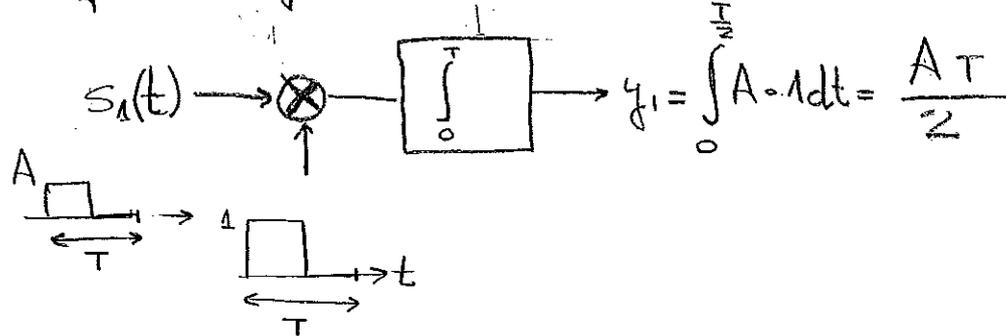


$$z = \begin{cases} (0 + n(T)) & \text{si } H_0 \\ (y_1 + n(T)) & \text{si } H_1 \end{cases}$$

= pero medio E



salida del filtro adaptado en el instante de muestreo. Como sabemos que sería igual a la salida de un correlador:



Nota: si los símbolos son equiprobables y se distrib. como dos gaussianas de la misma σ el nivel óptimo es el punto intermedio entre gaussianas $+\infty$

ó tb, como en la teoría: $S_{opt}(t) \Big|_{t=T} = s_1(t) * h_R(t) \Big|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} h_R(z) s_1(t-z) dz \Big|_{t=T} =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(z) s_1(T-z) dz = A \int_{-\infty}^{+\infty} h_R^2(z) dz = A E_{h_R} = A \left(\frac{1 \cdot T}{2} \right) = \frac{AT}{2}$$

$A \Pi\left(\frac{\frac{3T}{4} - z}{\frac{T}{2}}\right) = A h_R(z)$

Energía de un pulso de anchura $\frac{T}{2}$ y amplitud 1

Así que: $P_e = BER = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{N}}\right)$

$$E_d = E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 \frac{T}{2} = (0,1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2} = 10^{-14} \text{ J}$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{dBm}{Hz}\right) = -128 = 10 \log_2 \left(2 \left(\frac{mW}{Hz}\right) \right) \rightarrow 2 \left(\frac{mW}{Hz}\right) = 10^{-\frac{128}{10}} \rightarrow 2 \left(\frac{W}{Hz}\right) = \frac{10^{-\frac{128}{10}}}{1000} \frac{W}{Hz}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{2}} = 3,97 \approx 4 \Rightarrow \boxed{\text{BER} = P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(4) \approx 0,6 \cdot 10^{-8}}$$

6 bits erróneos

10^9 bits transmitidos

$$c) A_{\text{Tx}} = 75 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log \frac{A_{\text{Tx}}}{A_{\text{Rx}}} = 20 \log \frac{A_{\text{Tx}}}{A} = 75 \text{ dB}$$

$$\frac{A_{\text{Tx}}}{A} = 10^{\frac{75}{20}} \rightarrow \boxed{A_{\text{Tx}} = A \cdot 10^{\frac{75}{20}} = 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{75}{20}} = 0,562 \text{ V} = 562 \text{ mV}}$$

$$\boxed{P_{\text{Tx}} = P_0 \cdot P_{\text{Tx}|'0''} + P_1 \cdot P_{\text{Tx}|'1''}} = \frac{1}{2} P_{\text{Tx}|'1''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{\text{Tx}}^2}{2} = \frac{A_{\text{Tx}}^2}{4} = 0,0792 \text{ W} = \underline{\underline{79,2 \text{ mW}}}$$

$$P_{\text{Tx}|'1''} = \frac{1}{T} \int_0^T s_{\text{Tx}}^2(t) dt = \frac{1}{T} A_{\text{Tx}}^2 \cdot \frac{T}{2}$$


$$X_{\text{DC}} = P_0 X_{\text{DC}|'0''} + P_1 X_{\text{DC}|'1''} = \frac{A_{\text{Tx}}}{4} \rightarrow \boxed{P_{\text{DC}} = X_{\text{DC}}^2 = \frac{A_{\text{Tx}}^2}{16} = 19,8 \text{ mW}}$$

$$\boxed{P_{\text{AC}} = P_{\text{Tx}} - P_{\text{DC}} = 59,4 \text{ mW}}$$

$$d) T = 2 \mu\text{s} \rightarrow V_s = V_T = \frac{1 \text{ bit}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 500 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$$

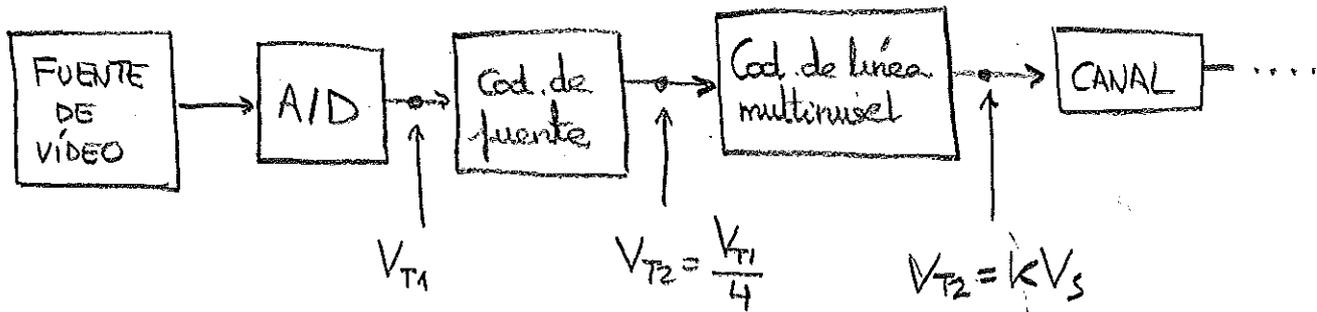
$$V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{V_T}{f_s} = \frac{500 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}}{50 \cdot 10^3 \frac{\text{muestras}}{\text{s}}} = 10 \frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \\ f_s = 2 \text{ W} = 50 \text{ kHz} = 50 \cdot 10^3 \frac{\text{muestras}}{\text{s}} \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L = 2^n = 1024 \text{ niveles de cuantificación}}$$

e) $W = 5 \text{ MHz}$

$L = 1024 \Rightarrow n = 10 \frac{\text{bits}}{\text{muestra}}$



$k = \log_2(M) \text{ ???}$

$V_s = \frac{1}{T} = \frac{1 \text{ símb.}}{0,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{símb}}{\text{s}}$

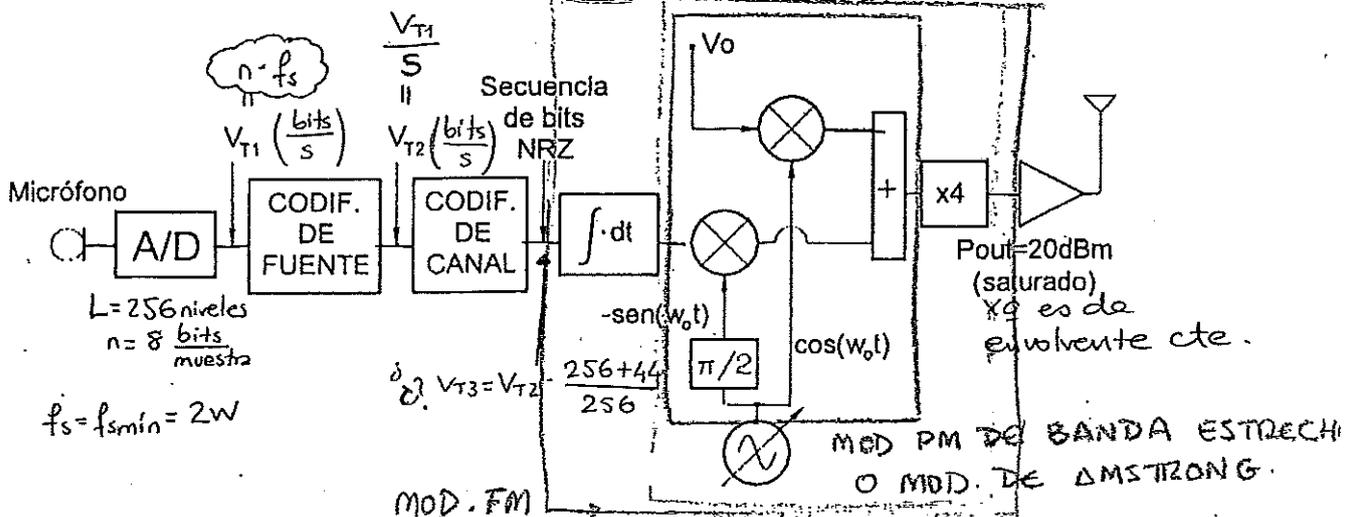
$V_{T1} \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) = 10 \cdot 10 \cdot 10^6 = 10^8 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{Mbits}}{\text{s}}$

$V_{T2} = \frac{10^8}{4} = 2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 25 \frac{\text{Mbits}}{\text{s}}$

$V_{T2} = k V_s \Rightarrow k = \frac{V_{T2} \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right)}{V_s \left(\frac{\text{símb}}{\text{s}} \right)} = \frac{25 \cdot 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}}}{5 \cdot 10^6 \frac{\text{símb}}{\text{s}}} = 5 \frac{\text{bits}}{\text{símb}} \Rightarrow M = 2^k = 2^5 = 32 \text{ símb}$

2.-Teoría (5puntos): La modulación FSK

Ejercicio (5puntos): La figura representa la parte de transmisión de un terminal de telefonía móvil similar al GSM. El convertor A/D cuantifica con 256 niveles las muestras de voz, que toma con frecuencia de muestreo mínima. El codificador de fuente comprime la información de forma tal que a su salida la velocidad de transmisión es cinco veces inferior a la de entrada. El codificador de canal añade 44 bits de control de errores por cada grupo de 256 bits que recibe.



- Sabiendo que la velocidad de transmisión final del sistema es de 15 Kbits/s, calcule el ancho de banda de la señal de voz.
- Sabiendo que el código NRZ es bipolar y de amplitud $A=\pm 10$ voltios, calcule la tensión V_0 para que la modulación sea MSK. Determine el ancho de banda ocupado.
- Calcule la amplitud en voltios de la señal de salida. Una estación base recibe simultáneamente N emisiones como esta, cada una en diferente frecuencia. Sabiendo que la atenuación entre cada terminal y la estación base es de 80dB y que la máxima potencia total que soporta el receptor de la estación base a su entrada es de -47dBm, determine el número máximo de emisiones N .
- Dibuje el esquema de bloques de la parte de recepción del terminal, hasta la obtención de la secuencia de bits referida en la figura. La señal MSK de entrada estará centrada en una frecuencia cualquiera entre 915 y 925 MHz. El receptor bajará esa señal hasta la frecuencia de 70 MHz, donde realizará la demodulación de los datos. Únicamente puede emplear filtros, multiplicadores, detectores de amplitud, osciladores, sumadores (o restadores) y un comparador con umbral. Indique los parámetros de todos los filtros que dibuje.

a) $V_{T3} = 15 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} = 15 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$

$V_{T3} = \frac{300}{256} V_{T2} \rightarrow V_{T2} = \frac{256}{300} V_{T3}$

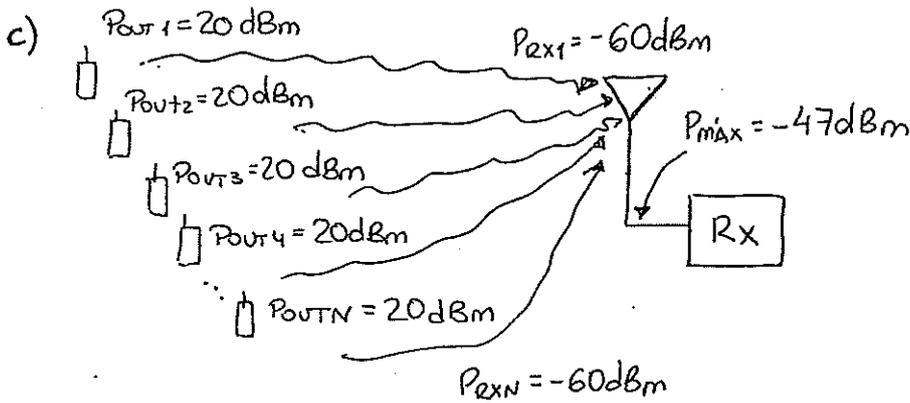
$V_{T1} = 5V_{T2}; \quad V_{T1} = 64 \frac{\text{kbits}}{\text{s}}$

$V_{T2} = 12,8 \frac{\text{kbits}}{\text{s}}$

$V_{T1} = n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{\text{s}} \right) = n \cdot 2W; \quad W = \frac{V_{T1}}{2n} = \frac{64 \cdot 10^3}{2 \cdot 8} = 4 \cdot 10^3 \text{ Hz};$

$W = 4 \text{ kHz}$

$$A_{TT} = 80 \text{ dB}$$



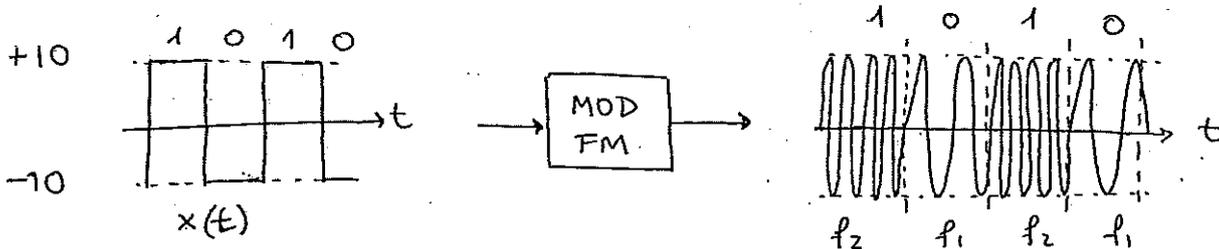
Podemos sumar las potencias porque cada móvil transmite dist. señal. son ortogonales.

$$P_{m\acute{a}x} (\text{mW}) = N \cdot P_{Rxi} (\text{mW}) ;$$

$$P_{m\acute{a}x} (\text{dBm}) = 10 \log (N \cdot P_{Rxi} (\text{mW})) = 10 \log N + 10 \log P_{Rxi} (\text{mW})$$

$$-47 \text{ dBm} = 10 \cdot \log N - 60 ; \quad \boxed{N = 19.95 \approx 20 \text{ m\u00f3viles}}$$

$$\Delta = \frac{1}{2T}$$



$$f_i(t) = f_0 + f_d(t) \rightarrow f_i(t) = f_0 + f_D \cdot X_N(t) \quad \text{NRZ bipolar } \pm 1V.$$

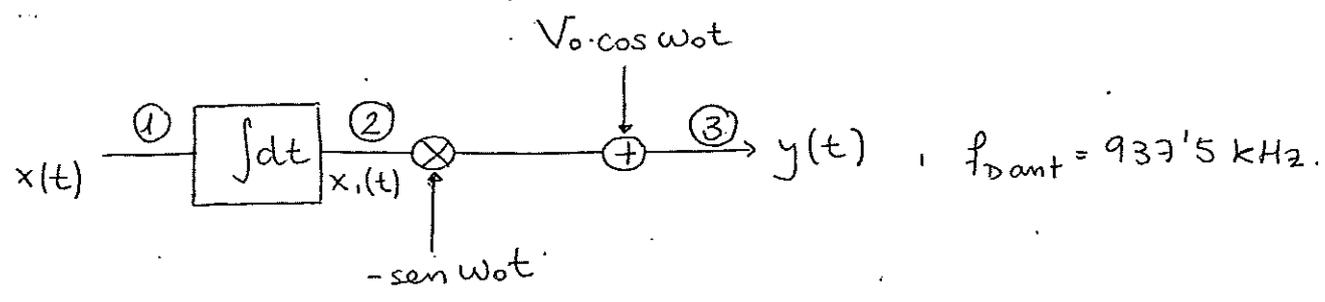
$$\left. \begin{array}{l} 0 : f_1 = f_0 - f_D \\ 1 : f_2 = f_0 + f_D \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Delta = f_2 - f_1 = 2f_D \\ \Delta = \frac{1}{2T} \text{ (MSK)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2f_D = \frac{1}{2T} ; f_D = \frac{1}{4T} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$V_T = V_c = \frac{1}{T} = 15 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}} ; T = \frac{1}{15 \cdot 10^3}$$

$$\Rightarrow f_D = 3.75 \cdot 10^3 \text{ Hz} ; \quad \boxed{f_D = 3.75 \text{ KHz}}$$

desv. m\u00e1xima de frecuencia del mod. FM, para MSK ($\Delta = \frac{1}{2T}$).

Antes del multiplicador $\times 4$: $f_{Dant} = \frac{f_D}{4} = 937.5 \text{ kHz}$



① $x_N(t) = \frac{x(t)}{10}$; $x(t) = 10 x_N(t)$

② $x_1(t) = \int_0^t x(\alpha) d\alpha$

③ $y(t) = V_0 \cdot \cos wot - x_1(t) \cdot \text{sen } wot$

NOTA:

EN FM: $y(t) = A_c \cdot \cos \left(wot + 2\pi f_{Dant} \int_0^t x_N(\alpha) \cdot d\alpha \right)$

Señal paso banda: $y(t) = r(t) \cdot \cos (wot + \varphi(t))$

$y(t) = y_F(t) \cdot \cos wot - y_C(t) \cdot \text{sen } wot$

$r(t) = \sqrt{y_F^2(t) + y_C^2(t)} = \sqrt{V_0^2 + x_1^2(t)} \approx V_0$

$\varphi(t) = \arctg \left(\frac{y_C(t)}{y_F(t)} \right) = \arctg \left(\frac{x_1(t)}{V_0} \right) \approx \frac{x_1(t)}{V_0}$

$x_1(t) \ll V_0$

Así que: $y(t) = r(t) \cdot \cos (wot + \varphi(t)) \approx V_0 \cdot \cos \left(wot + \frac{x_1(t)}{V_0} \right) =$

$= V_0 \cdot \cos \left(wot + \frac{1}{V_0} \cdot \int_0^t x(\alpha) d\alpha \right) =$

$= V_0 \cdot \cos \left(wot + \frac{10}{V_0} \cdot \int_0^t x_N(\alpha) d\alpha \right)$

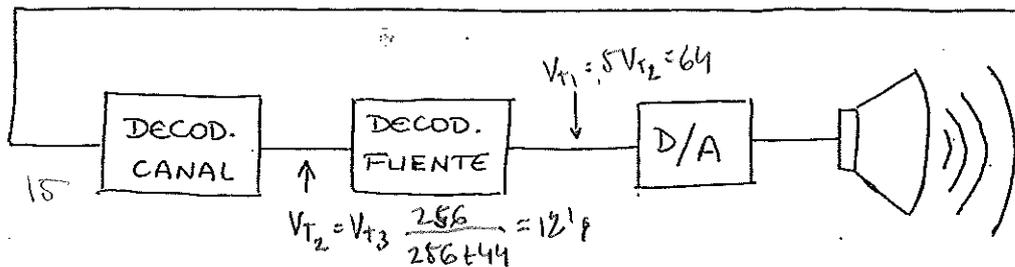
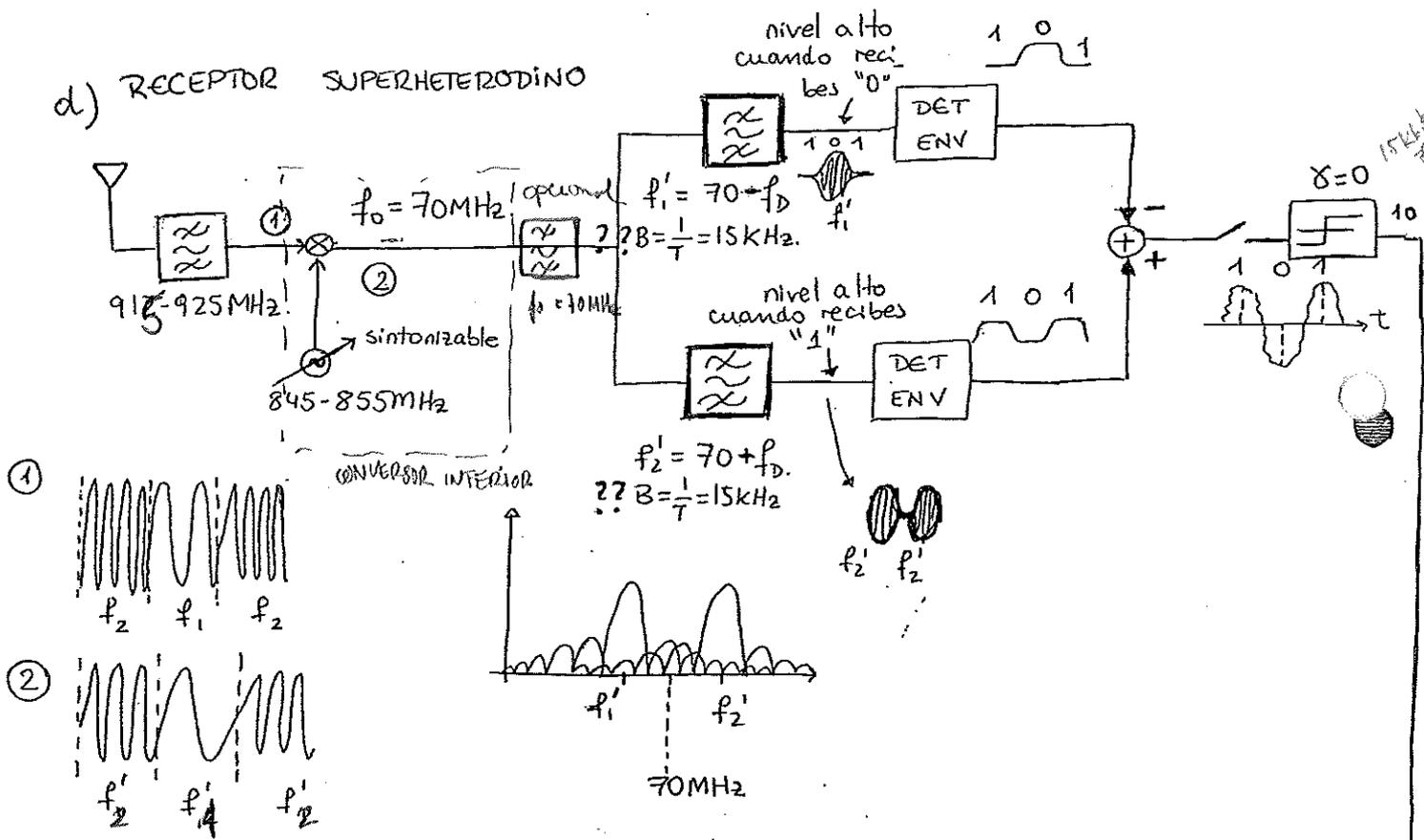
$x(t) = 10 x_N(t)$ $x_1(t) = \int_0^t x(\alpha) d\alpha$

Identificando: $\frac{10}{V_0} = 2\pi \cdot f_{Dant}$; $V_0 = \frac{10}{2\pi \cdot f_{Dant}}$; $V_0 = 1.69 \text{ mV}$

Δncho de banda: en MSK: $e = 1'5 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} = \frac{V_T}{B}$; $B = \frac{V_T}{e}$

$$B = \frac{V_T}{e} = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ bit/s}}{1'5 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}} = 10^4 \text{ Hz}; \quad \boxed{B = 10 \text{ kHz}}$$

d) RECEPTOR SUPERHETERODINO

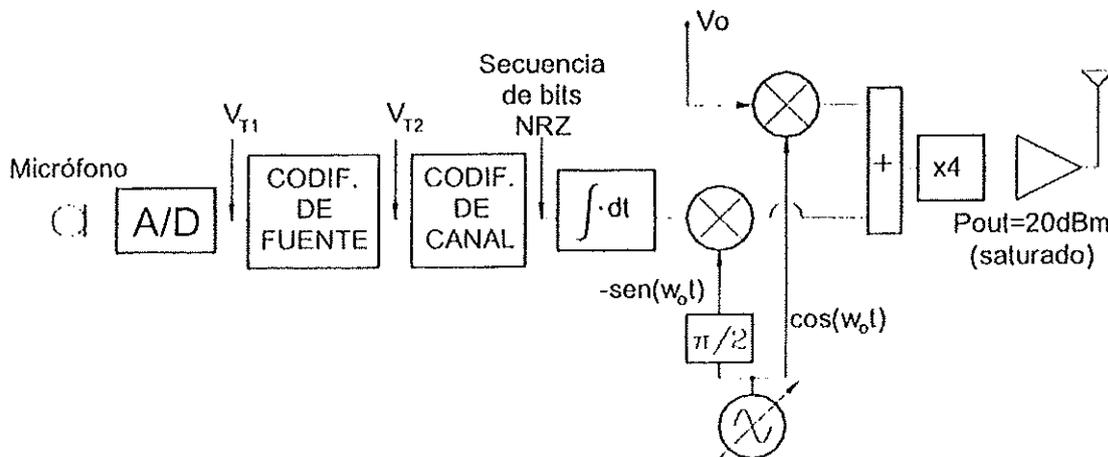


$$f_1' = 70 - f_D = 70 \cdot 10^6 - 3'75 \cdot 10^3 = 69996'25 \text{ kHz}$$

$$f_2' = 70 + f_D = 70 \cdot 10^6 + 3'75 \cdot 10^3 = 70003'75 \text{ kHz}$$

2.-Teoría (5puntos): La modulación FSK

Ejercicio (5puntos): La figura representa la parte de transmisión de un terminal de telefonía móvil similar al GSM. El convertor A/D cuantifica con 256 niveles las muestras de voz, que toma con frecuencia de muestreo mínima. El codificador de fuente comprime la información de forma tal que a su salida la velocidad de transmisión es cinco veces inferior a la de entrada. El codificador de canal añade 44 bits de control de errores por cada grupo de 256 bits que recibe.



- Sabiendo que la velocidad de transmisión final del sistema es de 15 Kbits/s, calcule el ancho de banda de la señal de voz.
- Sabiendo que el código NRZ es bipolar y de amplitud $A = \pm 10$ voltios, calcule la tensión V_0 para que la modulación sea MSK. Determine el ancho de banda ocupado.
- Calcule la amplitud en voltios de la señal de salida. Una estación base recibe simultáneamente N emisiones como esta, cada una en diferente frecuencia. Sabiendo que la atenuación entre cada terminal y la estación base es de 80dB y que la máxima potencia total que soporta el receptor de la estación base a su entrada es de -47 dBm, determine el número máximo de emisiones N .
- Dibuje el esquema de bloques de la parte de recepción del terminal, hasta la obtención de la secuencia de bits referida en la figura. La señal MSK de entrada estará centrada en una frecuencia cualquiera entre 915 y 925 MHz. El receptor bajará esa señal hasta la frecuencia de 70 MHz, donde realizará la demodulación de los datos. Únicamente puede emplear filtros, multiplicadores, detectores de amplitud, osciladores, sumadores (o restadores) y un comparador con umbral. Indique los parámetros de todos los filtros que dibuje.

()

()

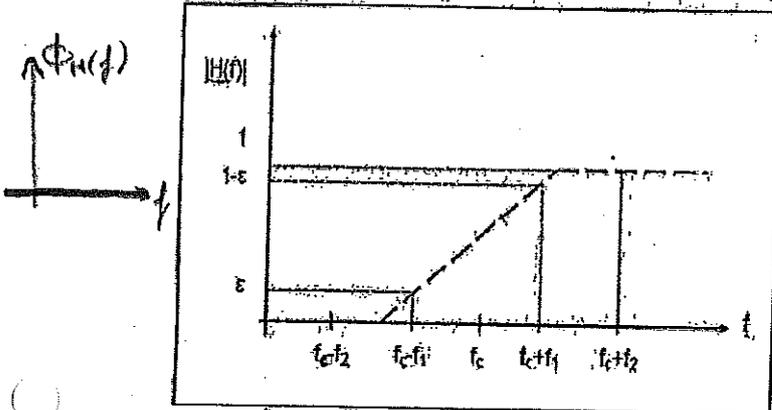
()

()

3.- Se pretende analizar un sistema de comunicaciones que utiliza como esquema de modulación banda lateral vestigial. La señal mensaje es:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$$

La modulación en banda lateral vestigial se obtiene modulando primero en doble banda lateral con portadora $\cos(2\pi f_c t)$ y posteriormente filtrando con un filtro en banda lateral vestigial. Se utilizará el filtro de la figura adjunta. Se pide:



a) Expresión matemática de la señal modulada en DBL. Expresión matemática de la señal modulada en banda lateral vestigial (asuma en este apartado que la fase de inserción del filtro es nula en toda la banda de la señal). Dibuje el espectro con todos sus detalles.

b) Expresión analítica de la señal demodulada (BLV) utilizando un esquema de demodulación coherente convencional con oscilador local: $y_{ol}(t) = C \cos(2\pi f_c t)$

c) Asuma que en recepción el oscilador presenta un desfase constante $y_{ol}(t) = C \cos(2\pi f_c t + \delta)$. Determine la expresión de la señal demodulada y comente el resultado.

d) Suponga ahora que El filtro en banda lateral vestigial del modulador se describe matemáticamente por estas expresiones:

$$H(f_c - f_1) = \alpha e^{j\theta_1}; \quad H(f_c + f_1) = (1 - \beta) e^{j\theta_2}; \quad H(f_c + f_2) = 1 - \beta^{j\theta_2}$$

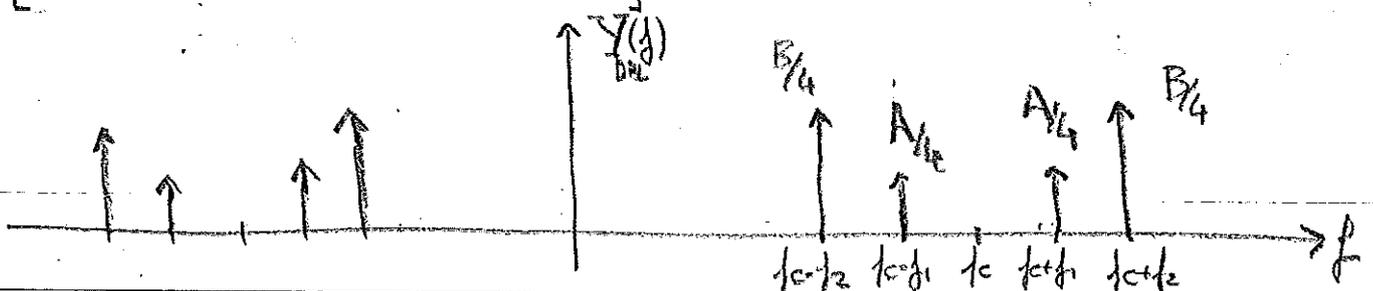
Se requiere que la señal demodulada (sin error de fase) sea una señal sin distorsión. Derive las expresiones de θ_1 y θ_2 en función de ϕ . Generalice el resultado dando la respuesta de fase de un filtro ideal de banda lateral vestigial.

a) $y_{DBL}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$

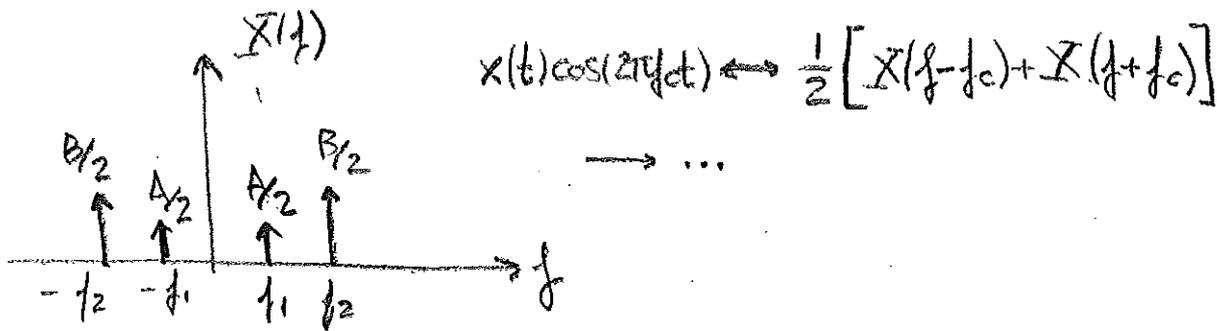
Suma 1 - Tiempo: $y_{DBL}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) = A \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_c t) + B \cos(2\pi f_2 t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_1)t) + \cos(2\pi(f_c - f_1)t)] +$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$+ \frac{B}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_2)t) + \cos(2\pi(f_c - f_2)t)]$$

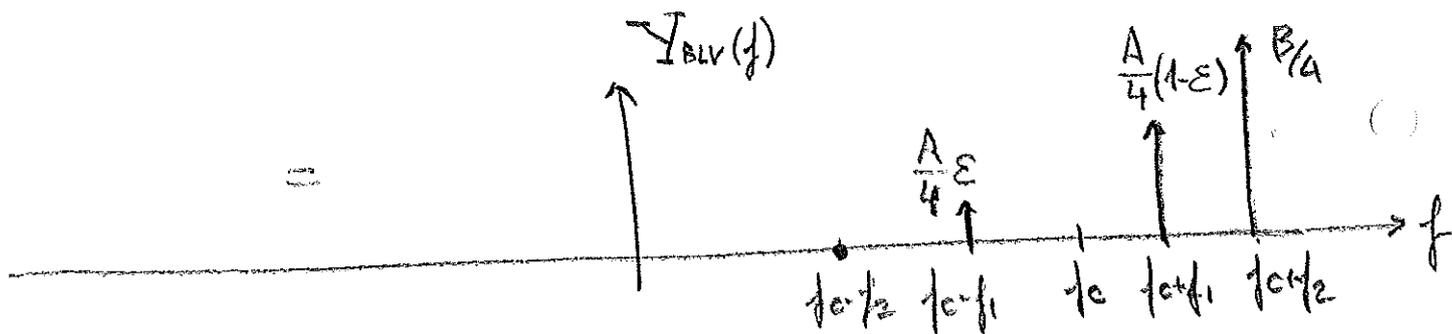


Forma 2 - prec:

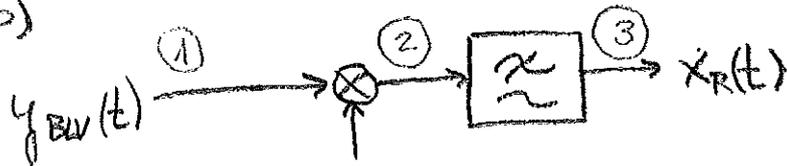


Así que el espectro de la BLV será:

$$y_{BLV}(t) = y_{PRE}(t) * h_{BLV}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_{BLV}(f) = Y_{PRE}(f) \cdot H_{BLV}(f)$$



$$b) y_{BLV}(t) = \frac{A}{2} \varepsilon \cos(2\pi(f_c - f_1)t) + \frac{A}{2} (1-\varepsilon) \cos(2\pi(f_c + f_1)t) + \frac{B}{2} \cos(2\pi(f_c + f_2)t)$$



$\cos(2\pi f_c t)$
COHERENTE!!

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} y_{BLV}(t) \cdot C \cos(2\pi f_c t) = C \frac{A}{2} \varepsilon \cos(2\pi(f_c - f_1)t) \cos(2\pi f_c t) +$$

$$+ \frac{A}{2} (1-\varepsilon) C \cos(2\pi(f_c + f_1)t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{B}{2} C \cos(2\pi(f_c + f_2)t) \cos(2\pi f_c t) =$$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \left[\cos(2\pi f_c t) + \cos(2\pi(2f_c - f_1)t) \right] + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \left[\cos(2\pi(2f_c + f_1)t) + \right.$$

$$\left. + \cos(2\pi f_c t) \right] + \frac{BC}{4} \left[\cos(2\pi(2f_c + f_2)t) + \cos(2\pi f_c t) \right]$$

$$\textcircled{3} \left[x_R(t) = \text{LPF} \left\{ y_{BLV}(t) \cdot C \cos(2\pi f_c t) \right\} =$$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \cos(2\pi f_1 t) + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t) =$$

$$= \frac{C}{4} \left[\underbrace{A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)}_{x(t)} \right] = \frac{C}{4} x(t)$$

$$\cos a \cos b = \dots$$

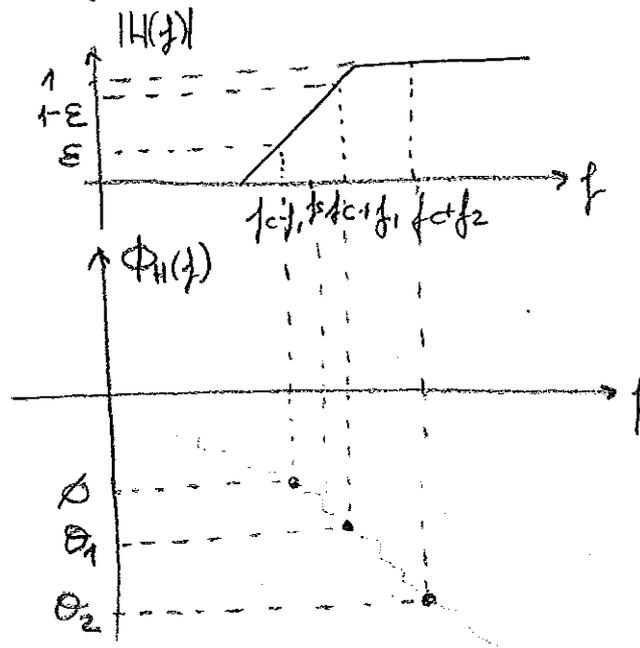
$$\checkmark \cos^2 x = \cos 2x$$

c) ③ $x_R(t) = \text{LPF} \left\{ y_{BLV}(t) C \cos(2\pi f_c t) \right\} = \dots =$

$$= \frac{AC}{4} \varepsilon \underbrace{\cos(2\pi f_1 t - \delta)}_{\cos(2\pi f_1 t + \delta)} + \frac{AC}{4} (1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t - \delta) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t - \delta) \neq k x(t-t_0)$$

DISTORSIÓN!! Para recuperar correctamente la señal hace falta coherencia total entre el oscilador de Tx y Rx ($\delta=0$)

d) $H(f_c - f_1) = \varepsilon e^{j\phi}$
 $H(f_c + f_1) = (1-\varepsilon) e^{j\theta_1}$
 $H(f_c + f_2) = 1 e^{j\theta_2}$



① $y_{BLV}(t) = \frac{A}{2} \varepsilon \cos[2\pi(f_c - f_1)t + \phi] + \frac{A}{2} (1-\varepsilon) \cos[2\pi(f_c + f_1)t + \theta_1] +$
 $+ \frac{B}{2} \cos[2\pi(f_c + f_2)t + \theta_2]$

③ $x_R(t) = \frac{C}{4} \left[A(1-\varepsilon) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A \varepsilon \cos(2\pi f_1 t - \phi) + B \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \right]$

Para que no haya distorsión:

$$X_R(t) = Kx(t-t_0) = K \left[A \cos(\underbrace{2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_0}_{2\pi f_1(t-t_0)}) + B \cos(\underbrace{2\pi f_2 t - 2\pi f_2 t_0}_{2\pi f_2(t-t_0)}) \right]$$

Empezamos:

$$X_R(t) = \frac{AC}{4} \cos(2\pi f_1 t - \phi) + \frac{BC}{4} \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) =$$

$$\boxed{\theta_1 = -\phi}$$

$$\boxed{\phi = 2\pi f_1 t_0}$$

$$= \frac{C}{4} \left[A \cos(\underbrace{2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_0}_{2\pi f_1(t-t_0)}) + B \cos(\underbrace{2\pi f_2 t + \theta_2}_{2\pi f_2(t-t_0)}) \right] = \frac{C}{4} x(t-t_0)$$

$$\boxed{\theta_2 = -2\pi f_2 t_0}$$

$$2\pi f_2 t - 2\pi f_2 t_0 = 2\pi f_2 t + \theta_2$$

$$\text{Así que: } \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = -\phi \\ \theta_1 = -2\pi f_1 t_0 \\ \theta_2 = -2\pi f_2 t_0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\phi_H(f) = -2\pi(f-f_c)t_0 = -\frac{\phi}{f_1}(f-f_c)}$$

$$\phi = 2\pi f_1 t_0$$

$$t_0 = \frac{\phi}{2\pi f_1}$$

Filtro de fase lineal con desfase nulo a la frec. de portadora.

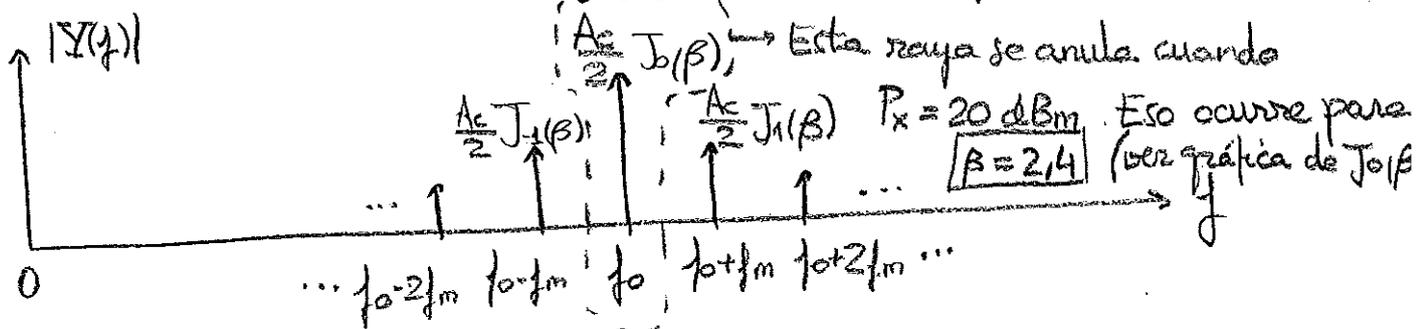
JUN 04. P4 $x(t) = A \cos(\omega_m t)$

a) $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t))$ $f_D = \max\{f_d(t)\} = \max\{K_F x(t)\} =$
 $\beta = \frac{f_D}{f_m}$ (chuleta) $= K_F |x(t)|_{\max} = K_F A$

Así que: $\beta = \frac{K_F A}{f_m} \rightarrow K_F = \frac{\beta f_m}{A}$

Se anula la raya de portadora con $P_x(\text{dBm}) = 20 \text{ dBm}$ ($R = 1 \Omega$)

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$



En el momento en el que $\beta = 2.4$:

$P_x(\text{dBm}) = 10 \log P_x(\text{mW}) = 20 \text{ dBm} \rightarrow P_x(\text{mW}) = 10^{\frac{20}{10}} = 100 \text{ mW} = 0.1 \text{ W}$

$\frac{A^2}{2R} = P_x(\text{W}) \rightarrow A = \sqrt{2R P_x(\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.1} = \sqrt{0.2} = 0.447 \text{ V}$

Así que: $K_F = \frac{\beta f_m}{A} = \frac{2.4 \cdot 1 \text{ kHz}}{0.447 \text{ V}} = 5.37 \frac{\text{kHz}}{\text{V}}$

b) Ahora $P_x(\text{dBm}) = 21 \text{ dBm} \rightarrow 10 \log P_x(\text{mW}) = 21 \text{ dBm} \rightarrow P_x = 10^{\frac{21}{10}} = 125.9 \text{ mW}$

$P_x(\text{W}) = \frac{A^2}{2R} \rightarrow A = \sqrt{2R P_x(\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.1259} = 0.5 \text{ V}$

Así que: $\beta' = \frac{K_F A}{f_m} = \frac{5.37 \frac{\text{kHz}}{\text{V}} \cdot 0.5 \text{ V}}{1 \text{ kHz}} = 2.69$

Ahora, la raya de portadora tendrá una amplitud: $\frac{A_c}{2} J_0(\beta')$

por lo que su potencia será:

la sinusoida en el tiempo tiene el doble de amplitud que la delta en el espectro.

$$P_{out} = \frac{\left[2 \cdot \frac{A_c}{2} J_0(\beta')\right]^2}{2R}$$

$$P_{out} = \frac{A_c^2}{2R} \left[J_0(2,69)\right]^2 = 10 \cdot 0,15^2 = 0,225 \text{ W}$$

gráfica $n=0$
 $\approx 0,15$

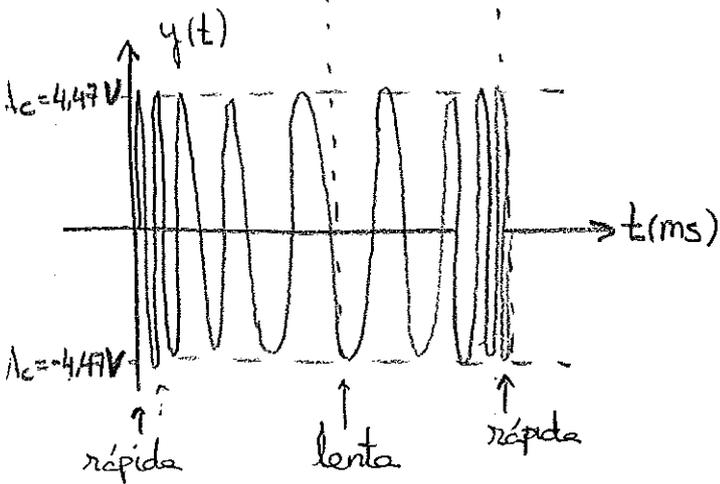
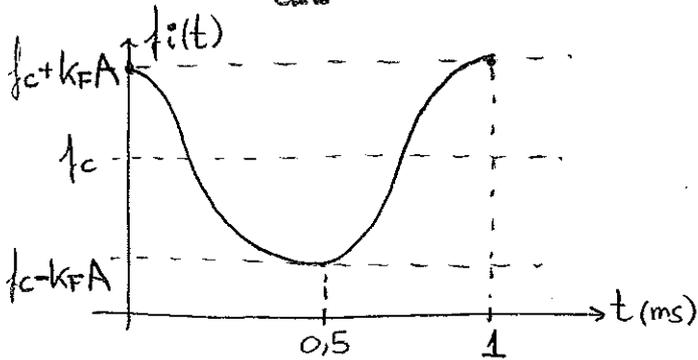
ojo! la sol. oficial está mal !!

$$P_{out} \text{ (dBm)} = 10 \log P_{out} \text{ (mW)} = 40 \text{ dBm} \rightarrow P_{out} \text{ (mW)} = 10^{\frac{40}{10}} = 10^4 \text{ mW} = 10 \text{ W}$$

d) **FM** $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + K_F \int x(\alpha) d\alpha)$

$\theta(t)$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + K_F x(t) = f_c + K_F \cdot A \cdot \cos(\omega_m t) = f_c + K_F \cdot A \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$$



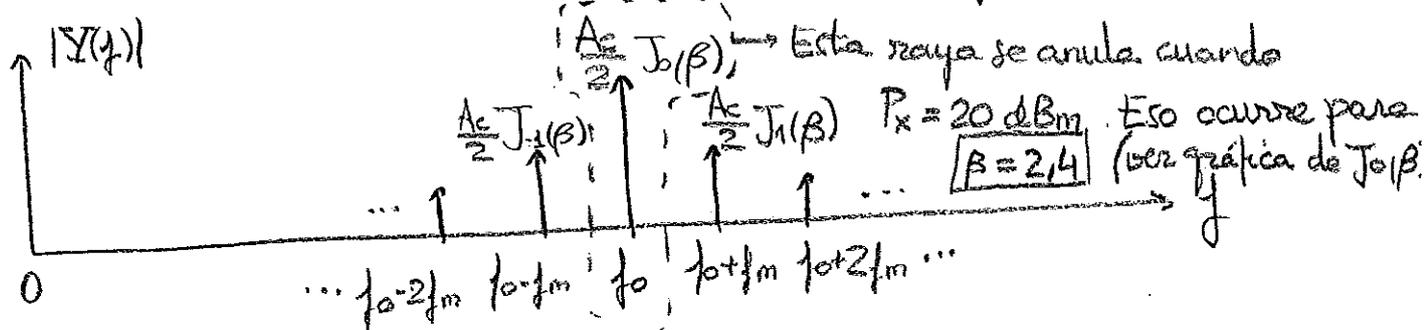
JUN 04. P4 $x(t) = A \cos(\omega_m t)$

a) $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t))$ $f_D = \max\{f_d(t)\} = \max\{K_F x(t)\} =$
 $\beta = \frac{f_D}{f_m}$ (chuleta) $= K_F |x(t)|_{\max} = K_F A$

Así que: $\beta = \frac{K_F A}{f_m} \rightarrow K_F = \frac{\beta f_m}{A}$

Se anula la raya de portadora con $P_x(\text{dBm}) = 20 \text{ dBm}$ ($R = 1 \Omega$)

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$



En el momento en el que $\beta = 2.4$:

$P_x(\text{dBm}) = 10 \log P_x(\text{mW}) = 20 \text{ dBm} \rightarrow P_x(\text{mW}) = 10^{\frac{20}{10}} = 100 \text{ mW} = 0.1 \text{ W}$

$\frac{A^2}{2R} = P_x(\text{W}) \rightarrow A = \sqrt{2R P_x(\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.1} = \sqrt{0.2} = 0.447 \text{ V}$

Así que: $K_F = \frac{\beta f_m}{A} = \frac{2.4 \cdot 1 \text{ kHz}}{0.447 \text{ V}} = 5.37 \frac{\text{kHz}}{\text{V}}$

b) Ahora $P_x(\text{dBm}) = 21 \text{ dBm} \rightarrow 10 \log P_x(\text{mW}) = 21 \text{ dBm} \rightarrow P_x = 10^{\frac{21}{10}} = 125.9 \text{ mW}$

$P_x(\text{W}) = \frac{A^2}{2R} \rightarrow A = \sqrt{2R P_x(\text{W})} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.1259} = 0.5 \text{ V}$

Así que: $\beta' = \frac{K_F A}{f_m} = \frac{5.37 \frac{\text{kHz}}{\text{V}} \cdot 0.5 \text{ V}}{1 \text{ kHz}} = 2.69$

Ahora, la raya de portadora tendrá una amplitud: $\frac{A_c}{2} J_0(\beta')$

por lo que su potencia será:

$$P_{out} = \frac{\left[2 \cdot \frac{A_c}{2} J_0(\beta')\right]^2}{2R}$$

la sinusoida en el tiempo tiene el doble de amplitud que la delta en el espectro.

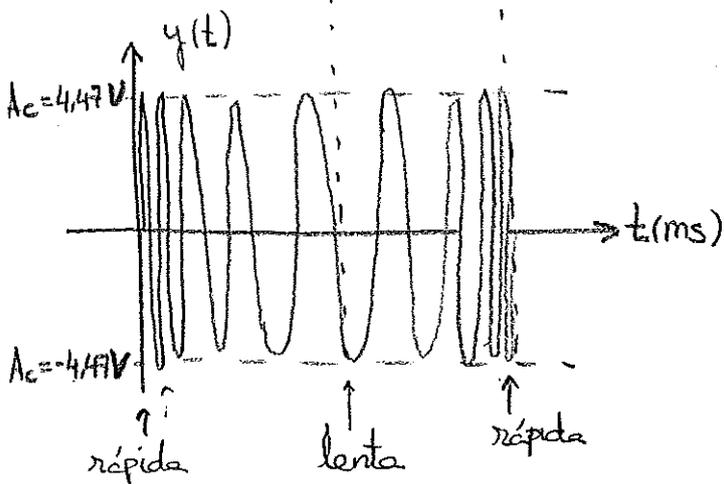
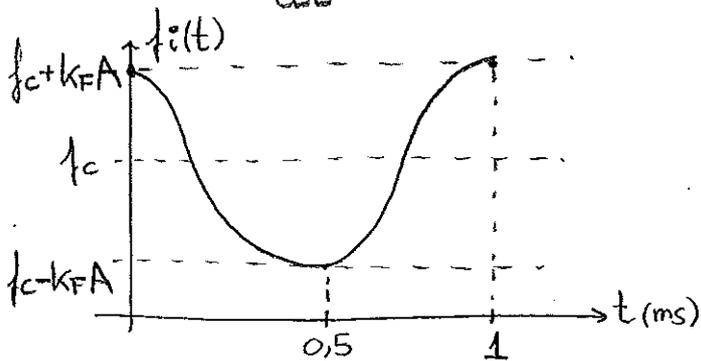
$$P_{out} = \frac{A_c^2}{2R} \left[J_0(2,69) \right]^2 = 10 \cdot 0,15^2 = 0,225 \text{ W}$$

ojo! la sol. oficial está mal !!

$$P_{out} \text{ (dBm)} = 10 \log P_{out} \text{ (mW)} = 40 \text{ dBm} \rightarrow P_{out} \text{ (mW)} = 10^{\frac{40}{10}} = 10^4 \text{ mW} = 10 \text{ W}$$

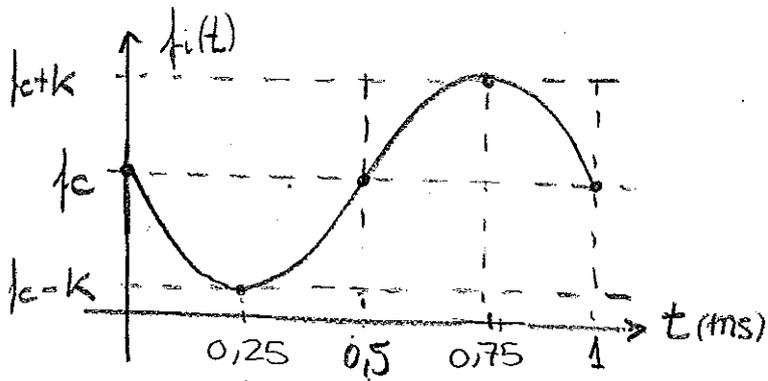
d) **FM** $y(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_F \int x(\alpha) d\alpha)$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + k_F x(t) = f_c + k_F \cdot A \cdot \cos(\omega_m t) = f_c + k_F \cdot A \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$$



PM $y(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t + k_p x(t)}_{\theta(t)})$

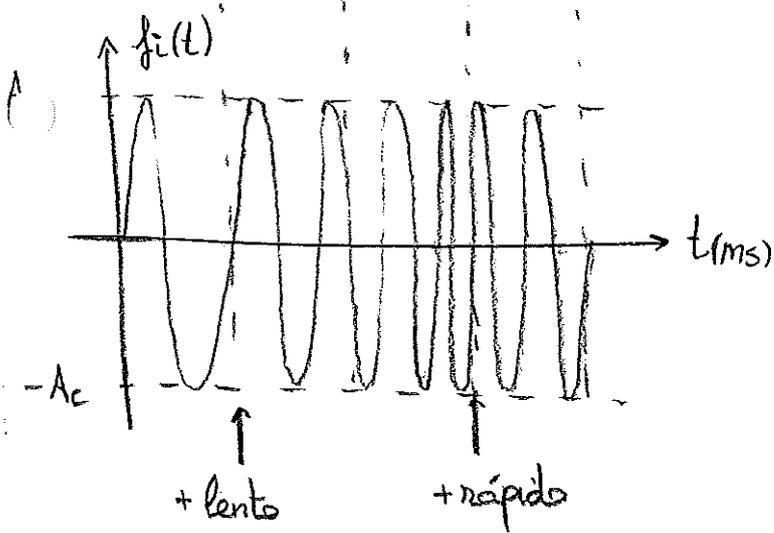
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{k_p}{2\pi} x'(t) = f_c - \frac{k_p A_c \omega_m}{2\pi} \sin(2\pi \cdot 10^3 t)$$



$$t = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow f_i = f_c - k \sin \pi = f_c$$

$$t = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow f_i = f_c - k \sin \frac{\pi}{2} = f_c - k$$

$$t = 0.75 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow f_i = f_c - k \sin \frac{3\pi}{2} = f_c + k$$





$$e) \quad \boxed{X_{R1}(t) = \text{LPF} \left\{ y_R(t) \cos(2\pi f_0(t - \tau_g)) \right\} =}$$

$$= \text{LPF} \left\{ H_0 x_1(t - \tau_g) \cos^2(2\pi f_0(t - \tau_g)) + H_0 x_2(t - \tau_g) \sin(2\pi f_0(t - \tau_g)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_g)) \right\} =$$

$$= \text{LPF} \left\{ H_0 x_1(t - \tau_g) \frac{1 + \overset{\text{eliminado}}{\cos(2\pi(2f_0)(t - \tau_g))}}{2} + H_0 x_2(t - \tau_g) \frac{1}{2} \overset{\text{eliminado}}{\sin(2\pi(2f_0)(t - \tau_g))} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} H_0 x_1(t - \tau_g) = \frac{1}{2} H_0 V \cos(2\pi f_m(t - \tau_g))$$

Análogamente:

$$\boxed{X_{R2}(t) = \text{LPF} \left\{ y_R(t) \sin(2\pi f_0(t - \tau_g)) \right\} = \dots = \frac{1}{2} H_0 x_2(t - \tau_g) =}$$

$$= \frac{1}{2} H_0 2V \sin(2\pi f_m(t - \tau_g))$$



4.- Se dispone de un sistema de comunicaciones digitales en banda base con un código de línea bipolar como el representado en la figura, siendo p_1 la probabilidad de que se envíe el símbolo "1". La señal se envía por un canal cuya respuesta al impulso es:

$$h(t) = B \left(\frac{\text{sen } \pi B t}{\pi B t} \right)^2$$

- a) Determine la función de transferencia del canal y su ancho de banda.
- b.) Máxima velocidad de transmisión sin interferencia entre símbolos en caso de que la codificación fuera con deltas.
- c) Determine la respuesta que debe tener el filtro ecualizador del receptor para garantizar que no haya IES con la codificación de línea de la figura.

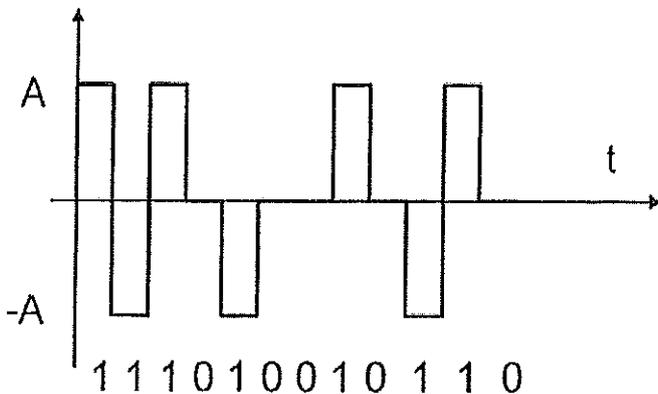
El recepción se utiliza un receptor por muestreo, perturbado por ruido aditivo, blanco, gaussiano de media cero y desviación estándar σ . La decisión de cada símbolo se hace de forma independiente: Se toma una muestra z de la señal recibida y se aplica la siguiente regla de decisión:

$$\begin{cases} -\gamma \leq z \leq \gamma & \Rightarrow D_0 \\ |z| > \gamma & \Rightarrow D_1 \end{cases}$$

d) Se ha fijado un umbral de decisión $\gamma = A/2$, calcule las probabilidades a priori de los dos símbolos para que ese umbral sea óptimo. La expresión de la probabilidad de error P_e es la siguiente:

$$P_e = p_0 \cdot \text{erfc} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{p_1}{2} \cdot \text{erfc} \left(\frac{A-\gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

e) ¿Cuál es el valor óptimo del umbral si $p_0 = 3p_1$?



Nota:

$$\frac{d[\text{erfc}(u)]}{du} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2]$$

()

()

()

()

Tema 6

Preguntas cortas Tema 6

Esquemas de modulación digital

1. **Junio 2004 y Septiembre 2006.** Utilizando una modulación QPSK se pretende enviar la información de una fuente cuya velocidad de transmisión es $V_T = 64\text{Kbit/s}$ de modo que exista IES. ¿ Cuántos canales con modulación 256-QAM y $V_T = 64\text{Kbit/s}$ se podrían meter en ese mismo ancho de banda?
2. **Junio 2004 y Septiembre 2006.** Una Señal de ancho de banda W (Hz) se muestrea con una frecuencia de muestreo 3 veces superior a la mínima necesaria. Posteriormente se cuantifica con 2^n estados ¿Cuál es la velocidad de transmisión? ¿Y la velocidad de símbolo si se transmite utilizando una modulación M-PSK? Dedúzcalo en función de W , n y M
3. **Septiembre 2004.** Dos señales QPSK y BPSK con el mismo ancho de banda en el lóbulo principal del espectro. Las señales moduladoras respectivas en banda base:
 - a) Tienen la misma velocidad de transmisión (V_T)
 - b) La señal correspondiente a la QPSK tiene doble V_T .
 - c) La señal correspondiente a la base BPSK tiene doble V_T .
4. **Junio 2007.** Indique que afirmación es cierta en modulación DPSK:
 - a) Admite tanto demodulación coherente como no coherente.
 - b) Su eficiencia espectral es mejor que la BPSK para misma velocidad de transmisión.
 - c) La potencia de portadora es la mitad de la potencia media.
5. **Junio 2008.** Escriba cuál es la modulación FSK que manteniendo la ortogonalidad tiene la separación de frecuencias lo más baja posible, y cuantifique dicha separación.
6. **Junio 2008.** Si varias fuentes de información comparten un canal por el que envían señales moduladas en FSK simultáneamente, con portadoras distintas. Indique cuál es la respuesta correcta:
 - a) Se trata de un sistema TDMA con asignación de frecuencias variable a cada usuario.
 - b) Se trata de una modulación FDMA digital.
 - c) Ninguna de las anteriores.
7. **Junio 2009.** Los sistemas de comunicaciones móviles se diseñan para usar varias portadoras a diferentes frecuencias. Por cada portadora hay ocho usuarios a los que se les asigna dicha portadora secuencialmente. Indique cuál es la verdadera.
 - a) Se trata de un sistema de acceso TDMA y modulación FM.
 - b) Se trata de una modulación FDMA.
 - c) Se trata de un sistema con acceso conjunto TDMA y FDMA.
8. **Septiembre 2009.** Indique que afirmación falsa en modulación ASK.
 - a) Admite tanto demodulación coherente como no coherente.
 - b) Su eficiencia espectral es mejor que si se utiliza BPSK para la misma velocidad de transmisión.
 - c) La potencia de portadora es la mitad de la potencia media.

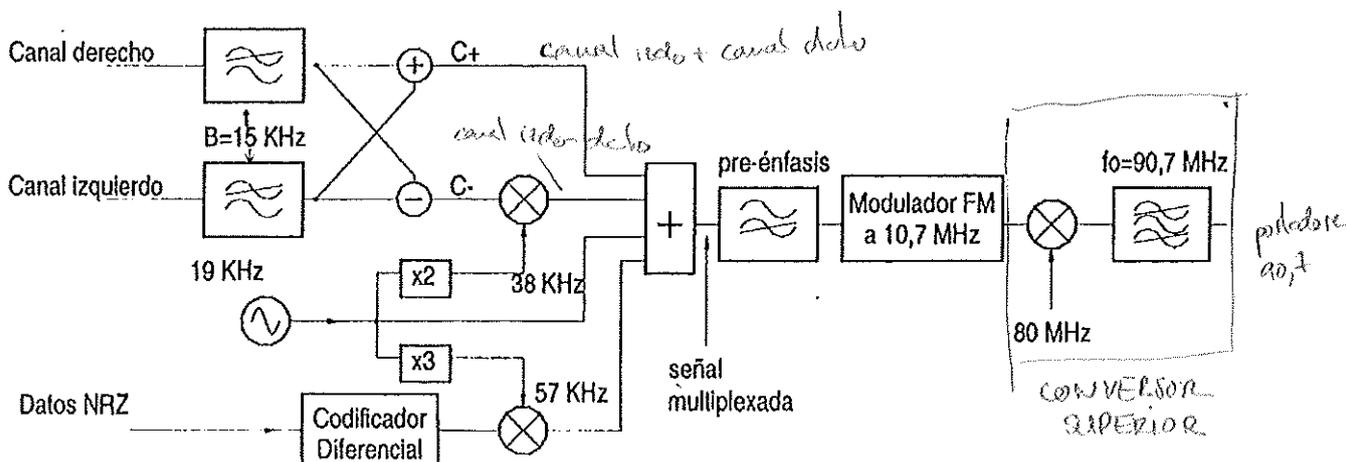
Canales ruidosos. Probabilidad de error

1. **Junio 2009.** Una modulación digital de envolvente constante
 - a) Produce menos BER que una de envolvente no constante, para la misma SNR.
 - b) Produce mayor BER que una de envolvente no constante, para la misma SNR.
 - c) No tiene por qué tener mayor o menor BER que una de envolvente no constante.
2. **Junio 2009.** Una transmisión ASK a 10Mb/s con símbolos equiprobables utiliza una amplitud de $120\text{ dB}\mu\text{V}$. Calcule la energía media por bit.



3.- Las emisoras de radiodifusión en FM en la banda de 87,5 a 108 MHz, complementan su funcionalidad con transmisión de datos mediante el sistema Radio Data System (RDS) que facilita al usuario información sobre la emisora que ha elegido, el tipo de programa que se está emitiendo, etc. El diagrama de bloques simplificado de una emisora que emite en estéreo con RDS es el que se muestra en la figura 1. Los datos se suministran en código NRZ Unipolar (+V y 0) a una velocidad de 1187,5 bits/seg. La máxima desviación de frecuencia que produce el modulador de FM cuando a su entrada tiene la señal multiplexada es $f_D = 75$ KHz, La frecuencia más alta de dicha señal es de 59375 Hz. El nivel de la señal piloto de 19 KHz es tal que él solo (en ausencia del resto de componentes de señal multiplexada) produce una desviación de frecuencia de $f_{D1} = 3,75$ KHz.

- Dibuje el espectro de la señal a la salida del modulador cuando solo se inyecta la señal piloto y se anulan las demás contribuciones. Indique los niveles relativos de las primeras rayas laterales respecto a la portadora.
- Calcule el ancho de banda de la señal emitida cuando se inyecta la señal multiplexada al modulador FM.
- Dibuje de forma cualitativa el espectro de la señal multiplexada.
- Dibuje las formas de onda correspondientes a la secuencia 101100 que se podrán observar en la entrada de datos y a la salida del codificador diferencial
- Dibuje el diagrama de bloques de un receptor adecuado a la señal emitida que suministre los canales suma, diferencia y los datos. Se deberá emplear un demodulador FM a 10,7 MHz, un oscilador, filtros (especificando la frecuencia central en el caso de filtros paso banda) así como todos los elementos adicionales que estime oportuno.
- Dibuje de forma cualitativa las respuestas de amplitud y fase del resultado de conectar en cascada los filtros de pre-énfasis y de-énfasis, suponiendo que se han dimensionado ambos para no producir distorsión. Razone la respuesta.
- ¿Cuál es la modulación empleada en la subportadora digital?



1

2

3

4

a) La señal piloto es una senoide de $f_m = 19 \text{ kHz}$

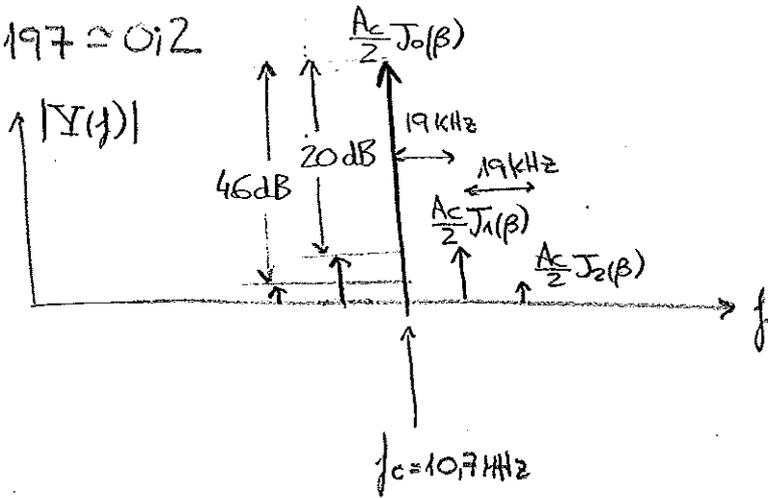
CHULETA:

$$\beta = \frac{f_{DM}}{f_m}$$

$$y(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m t), \quad f_c = 10,7 \text{ MHz}$$

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cdot [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

$$\beta = \frac{f_{DM}}{f_m} = \frac{3,75 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^3} = 0,197 \approx 0,2$$



$$J_0(0,2) = 0,99$$

$$J_1(0,2) = 0,1$$

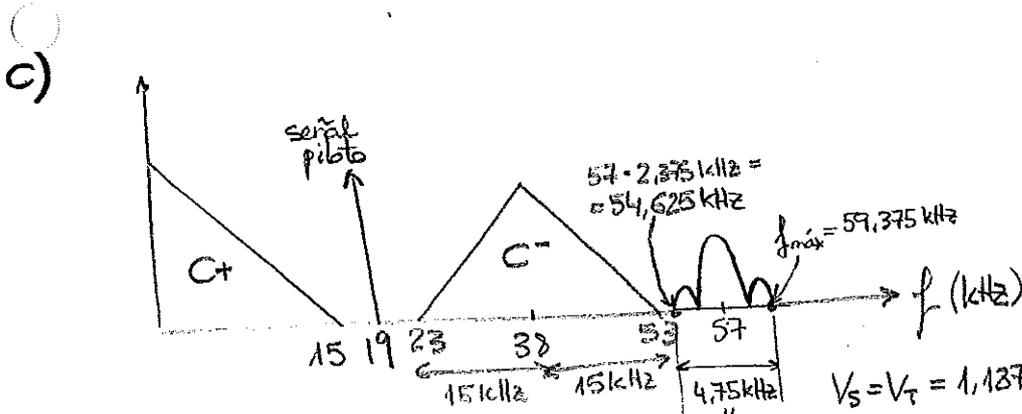
$$J_2(0,2) \approx 0,005$$

$$J_3(0,2) = 0$$

...

$$\Delta_{01} = 20 \log \frac{\frac{A_c}{2} J_0(\beta)}{\frac{A_c}{2} J_1(\beta)} = 20 \log \frac{0,99}{0,1} = 19,9 \approx 20 \text{ dB}$$

$$\Delta_{02} = 20 \log \frac{\frac{A_c}{2} J_0(\beta)}{\frac{A_c}{2} J_2(\beta)} = 20 \log \frac{0,99}{0,005} \approx 46 \text{ dB}$$



$\frac{4}{T} \rightarrow$ Mas ancho de banda del necesario ($\frac{1}{T}$)

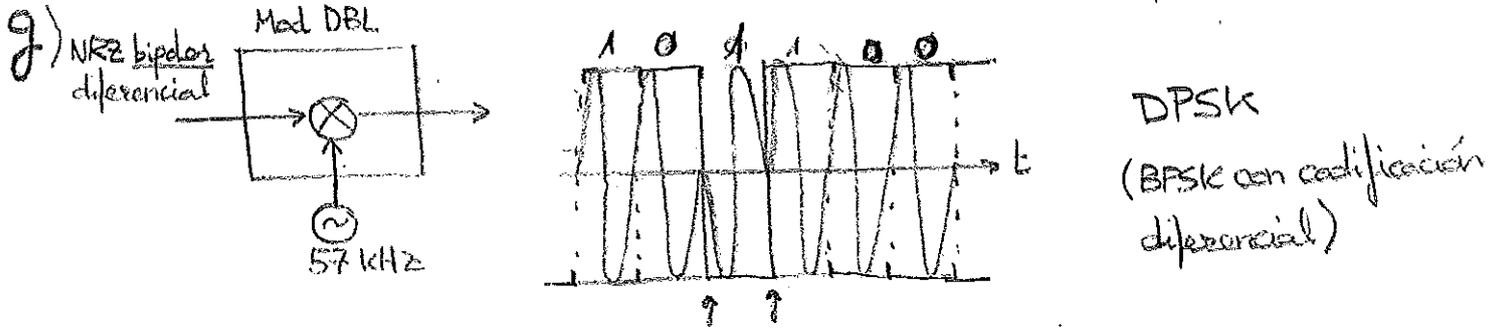
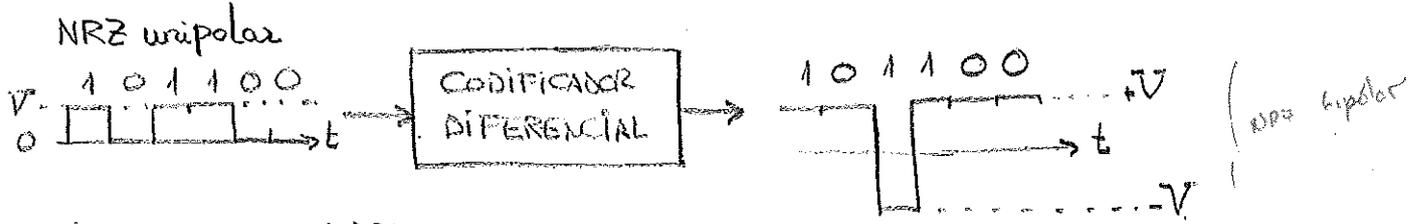
b) REGLA DE CARSON: $B = 2(D+1)W = 2\left(\frac{f_D}{W} + 1\right)W = 2(f_D + W) =$

$$= 2(75 \cdot 10^3 + 59,375 \cdot 10^3) = 268,75 \cdot 10^3 = 268,75 \text{ kHz}$$

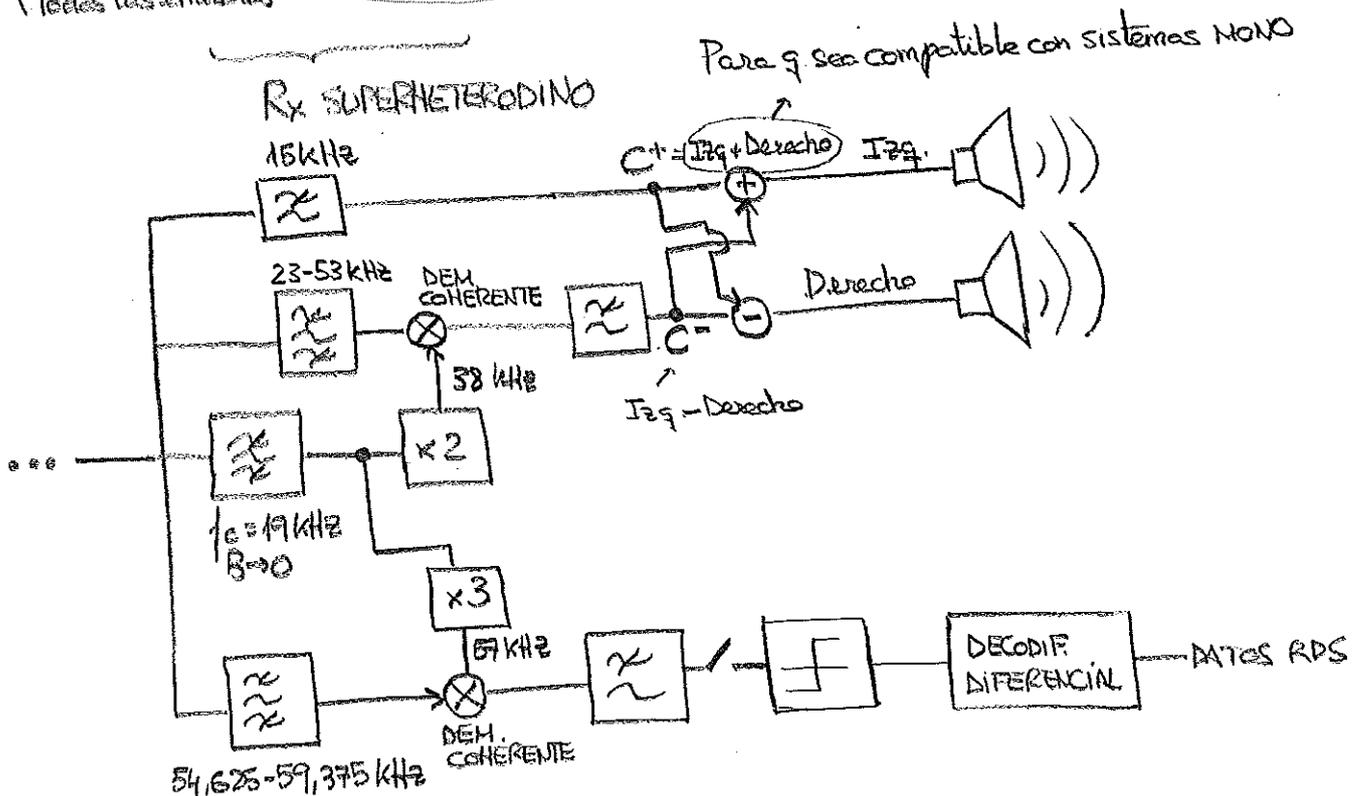
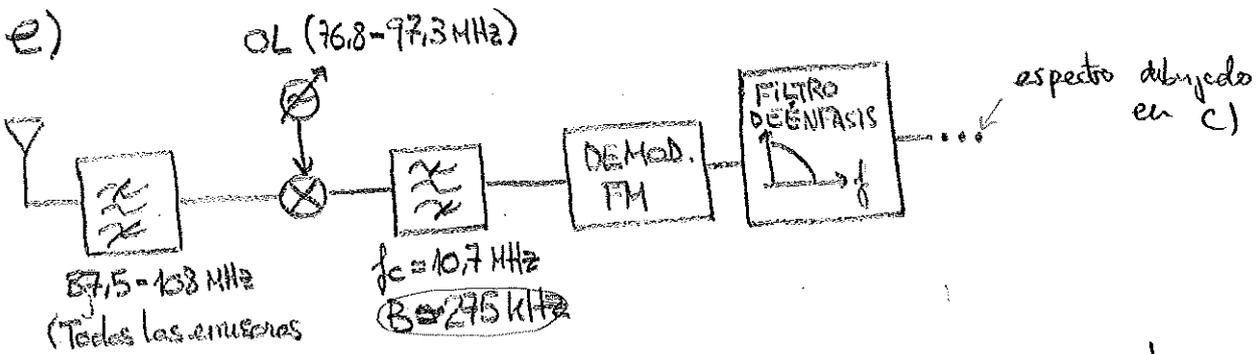
Nota: Para un modulator la señal es

siempre paso bajo y su ancho de banda es la frecuencia

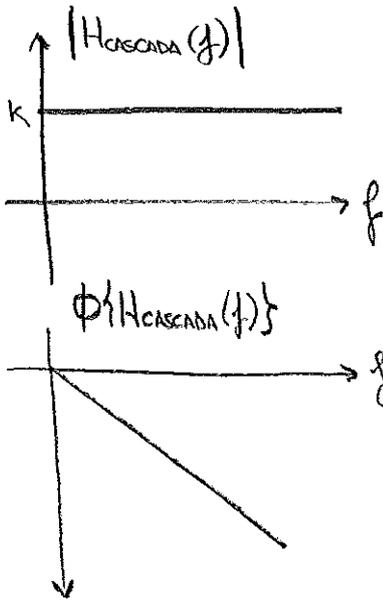
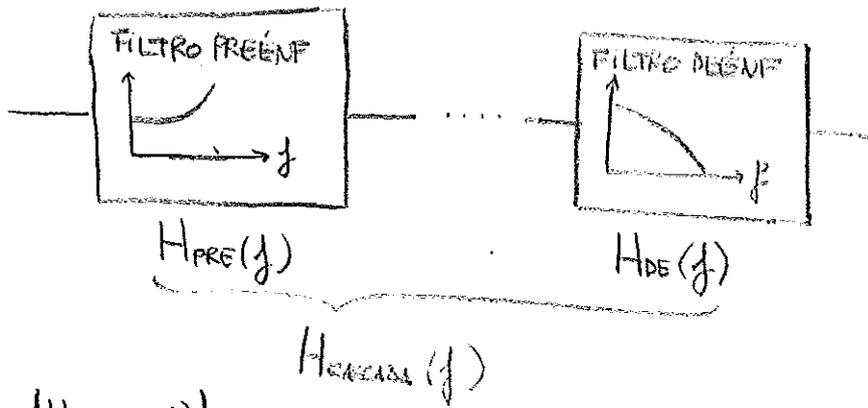
d) Suponiendo q parturas de un 0:



Nota: La salida del codificador diferencial debe ser NRZ bipolar p. si no, en lugar de DPSK, obtendríamos una ASK con codificación diferencial



f)



Módulo $c = \Rightarrow$ No hay distorsión lineal de amplitud

Fase lineal \Rightarrow No hay distorsión lineal de fase

Pendiente negativa p.g. el retardo $\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{df}$ ^{pendiente $c =$} > 0

(El retardo total introducido por ambos filtros debe ser positivo)

()

()

()

()

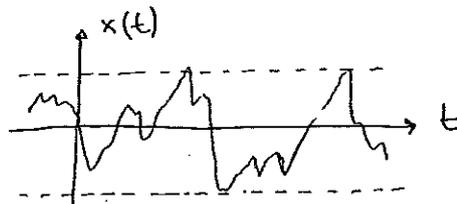
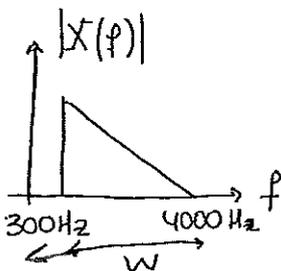
3.- Se desea transmitir digitalmente una señal de audio con frecuencias comprendidas entre 300 y 4.000 Hz, con valores de tensión comprendidos entre $\pm 1V$. Para la transmisión, se va a utilizar un convertor analógico / digital con la frecuencia de muestreo lo más baja posible, capaz de distinguir variaciones de tensión de la señal analógica de entrada inferiores a 2 mV.

- Calcule el número de bits (mínimo) que habrá de tener el convertidor A/D.
- Calcule el ancho de banda mínimo que habrá de tener el canal de banda base ideal capaz de extraer el flujo binario generado por el convertidor (la codificación de línea es de tipo binario).
- Dibuje la forma de onda (identificando los parámetros principales) resultante de transmitir la secuencia 10110 en Código AMI.

Posteriormente, una vez recibida y regenerada la información en banda base, se aplica ésta a un modulador que la traslada a 1 MHz. El modulador será binario (no multinivel)

y se elegirá entre los posibles aquel que proporcione mayor protección frente al ruido, sabiendo que no se dispone de detección coherente en el receptor.

- Justifique la elección.
- Calcule el ancho de banda mínimo que se necesitará para transmitir la información con el modulador elegido.
- Calcule la potencia con la que se habrá de transmitir para asegurar que la probabilidad de error sea $P_e < 0,5 \cdot 10^{-8}$, cuando en el canal exista una atenuación de 100 dB y el ruido añadido tenga una densidad espectral $\eta_n = -110$ dBm/Hz.
- Dibuje la forma de onda que habrá a la salida del modulador cuando se aplique la secuencia de entrada 10110 (No dibuje la portadora a escala, dibuje dos ciclos de portadora por bit). Dibuje la constelación para ésta modulación.
- Calcule la potencia hubiese sido necesaria en caso de haber dispuesto de un demodulador coherente y haber usado la modulación óptima en esas condiciones.



a) $\Delta V = 2 V$

$$\frac{\Delta V}{L} \leq 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow L \geq \frac{\Delta V}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} = 10^3$$

$L = 2^{10} = 1024$ niveles de cuantificación.

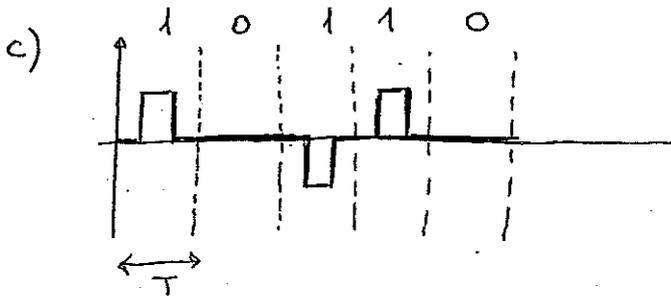
(se redondea a la potencia de 2 por exceso).

$$n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) = \log_2 L = \log_2 1024; \quad n = 10 \frac{\text{bits}}{\text{muestra}}$$

$$b) \left. \begin{aligned} V_T \left(\frac{\text{bits}}{s} \right) &= n \left(\frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \right) \cdot f_s \left(\frac{\text{muestras}}{s} \right) \\ f_s &= f_{\text{mín}} = 2W = 8 \text{ kHz} = 8000 \frac{\text{muestras}}{s} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_T &= 10 \cdot 8 \cdot 10^3; \\ V_T &= 8 \cdot 10^4 \frac{\text{bits}}{s} \end{aligned}$$

1^{er} criterio Nyquist: $B_{min} = \frac{V_s}{2} = \frac{V_T}{2} = 4 \cdot 10^4 \text{ Hz};$
 $M = 2 \text{ simb.}$
 $V_s = V_T$

$B_{min} = 40 \text{ kHz}$



$T = \frac{1}{V_T} = \frac{1}{8 \cdot 10^4 \frac{\text{bits}}{\text{s}}}$

$T = 0.125 \cdot 10^{-4};$ $T = 12.5 \frac{\mu\text{s}}{\text{bit}}$

- d) Alfabeto binario
- ASK $\left\{ \begin{array}{l} \text{coherente} \\ \text{incoherente} \end{array} \right.$
 - FSK $\left\{ \begin{array}{l} \text{coherente} \\ \text{incoherente} \end{array} \right.$
 - ~~BPSK~~ $\left\{ \begin{array}{l} \text{coherente} \\ \text{incoherente} \end{array} \right.$
 - DPSK $\left\{ \begin{array}{l} \text{coherente} \\ \text{incoherente} \end{array} \right.$

la mejor frente al ruido de estas es:

DPSK incoherente

Para una misma BER, puedo transmitir 3dB menos que con ASK / FSK incoherente.

Nda: $k = \frac{e \left(\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}} \right)}{\text{Hz}} = k = \log_2 M$ es solo si $B = B_{min}$

e) $e \left(\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}} \right) = \frac{V_T \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right)}{B(\text{Hz})};$ $B(\text{Hz}) = \frac{V_T \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right)}{e \left(\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}} \right)} = \frac{8 \cdot 10^4}{1};$ $B = 80 \text{ kHz}$

$B_{min} = \frac{1}{T} = V_s = V_T = 80 \cdot 10^3 \text{ Hz} = \frac{80 \text{ kHz}}{E_b}$

f) DPSK: $P_e = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{E_b}{\eta}} < 0.5 \cdot 10^{-8};$ despejando: $E_b = -\eta \cdot \ln 10^{-8}$

$\eta = 10^{-14} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$

Así que: $E_b = -10^{-14} \ln 10^{-8}$

$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = \frac{2E_0}{2} = E_0 = \frac{A^2}{2} T = \frac{A^2}{2V_T} = \frac{P_{Rx}}{V_T};$ $E_b = \rho_0 E_0 + \rho_1 E_1$

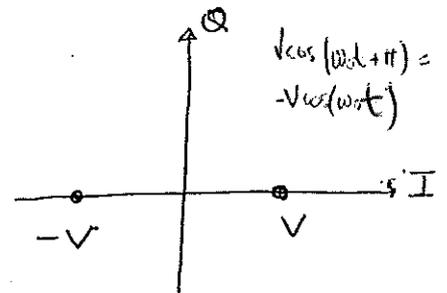
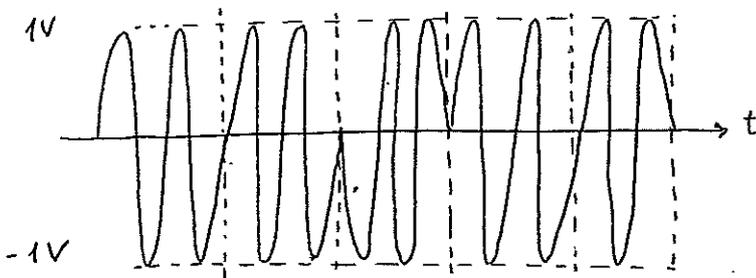
$P_{Rx}(\text{W}) = E_b \left(\frac{\text{J}}{\text{bit}} \right) \cdot V_T \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right) = 1.474 \cdot 10^{-8} \text{ W} \approx -48.3 \text{ dBm}$

$P_{Tx}(\text{dBm}) = P_{Rx}(\text{dBm}) + A_{TT}(\text{dB});$ $P_{Tx}(\text{dBm}) = 51.7 \text{ dBm} \approx 147 \text{ W}$

h) La modulación óptima en esas condiciones sería BPSK/DPSK coherente, que tiene 1dB de mejora respecto a BPSK incoherente. Bastaría con emitir 1dB menos de potencia.

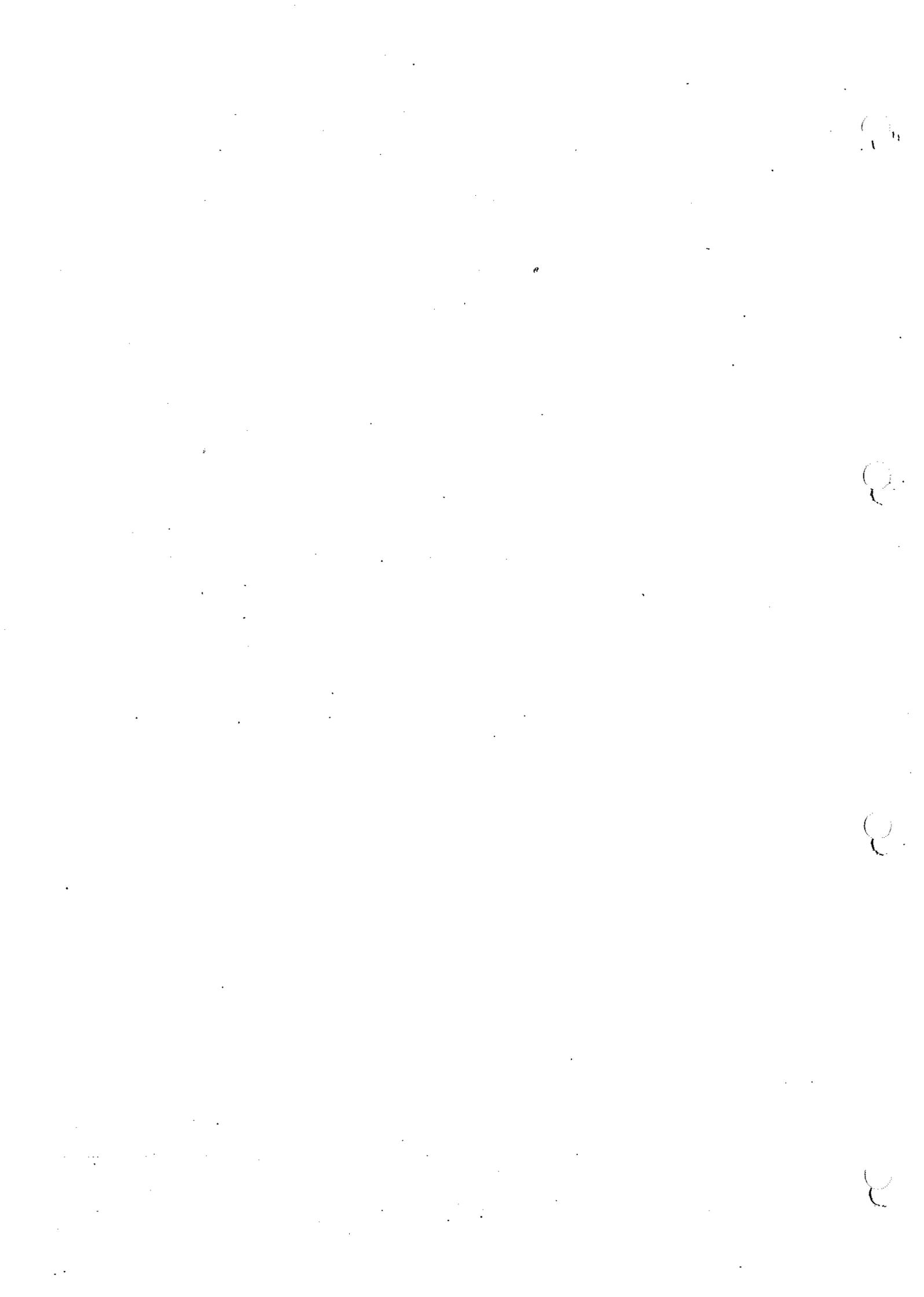
$$P_{TX} = 50.7 \text{ dBm}$$

g) la forma de onda y la constelación son:

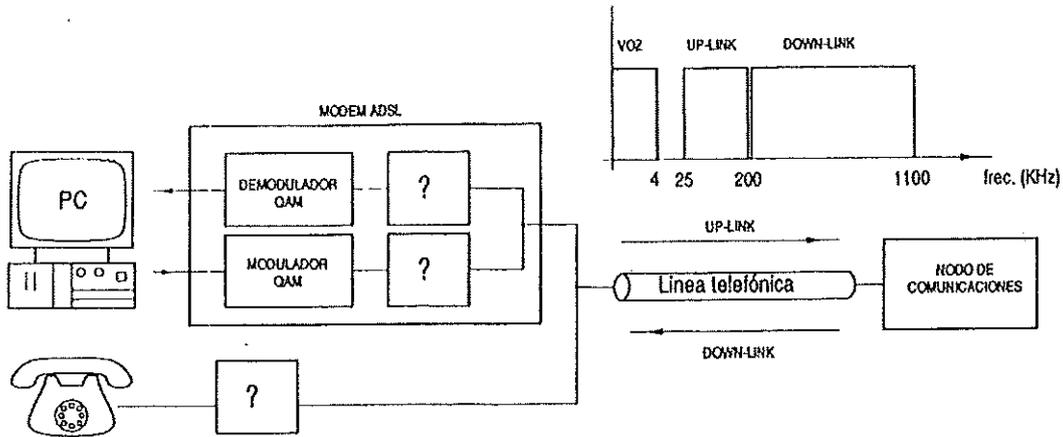


$$s_0(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_c t)$$

$$s_1(t) = -\sqrt{2} \cos(\omega_c t)$$



3.- La figura representa un enlace de comunicaciones ADSL que permite intercambiar datos entre un PC y un nodo de comunicaciones a la vez que se mantiene una conversación telefónica (voz). Los enlaces "ascendente" y "descendente" comparten la misma línea. La figura muestra también el espectro de la señal en la línea.



- Indique qué tipo de elementos son los bloques marcados con "?" en la figura, indicando también sus parámetros más relevantes. ¿Qué tipo de multiplexación se utiliza?
- Dibuje el diagrama de bloques del elemento "MODULADOR QAM"

Considere ahora que los 900 KHz de espectro asignados al down-link están en realidad divididos en 225 canales de 4KHz cada uno. En cada uno de estos canales individuales de 4KHz hay una modulación QAM independiente. El ancho de banda de cada uno de esos canales es el mínimo posible para la modulación.

- En el canal hay ruido blanco de densidad espectral de potencia η . Demuestre que en cada canal individual se cumple la siguiente relación: $SNR = k \cdot E_b / \eta$
- El sistema realiza una medida de la SNR en cada uno de los canales, tras lo cual elige para cada uno de ellos de forma independiente la modulación QAM que más capacidad tenga y siempre que se obtenga una BER mejor de 10^{-5} . Sabiendo que en los canales 1 a 125 tienen una SNR de 27 dB y los canales 126 a 225 tienen una SNR de 20 dB determinar la velocidad de transmisión del enlace descendente.
- El anterior down-link se utiliza para bajarse de Internet una canción de 3 minutos de duración. La canción en su formato original analógico tiene un ancho de banda de 15 KHz. Para la versión digital que se transmite por el sistema se muestreó con frecuencia mínima y se codificaron las muestras con 8 bits. El enlace descendente utiliza una codificación de canal de Reed-Solomon, en la que por cada 32 bits de información se añaden 4 de protección contra errores. Indicar el tiempo que se tarda en bajarse la canción completa.

NOTA: La probabilidad de error en las modulaciones M-QAM es:

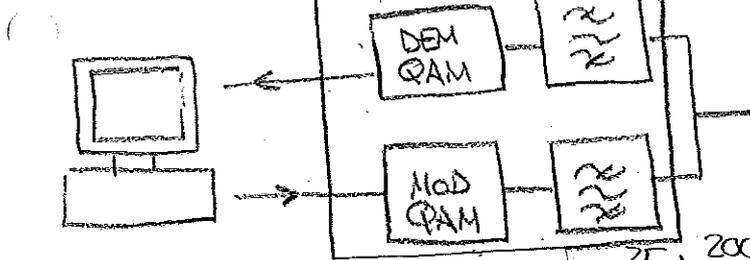
$$BER \approx \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot E_b}{2(M-1)\eta}} \right]; \text{ con } E_b = \text{Energía media por bit y } k = \log_2 M$$

JUN 03. P3

a)

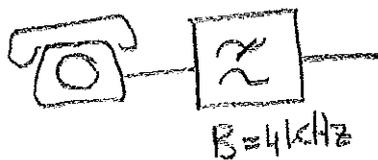
$$B = 1100 - 200 = 900 \text{ kHz}$$

$$f_c = 200 + \frac{1100 - 200}{2} = 650 \text{ kHz}$$

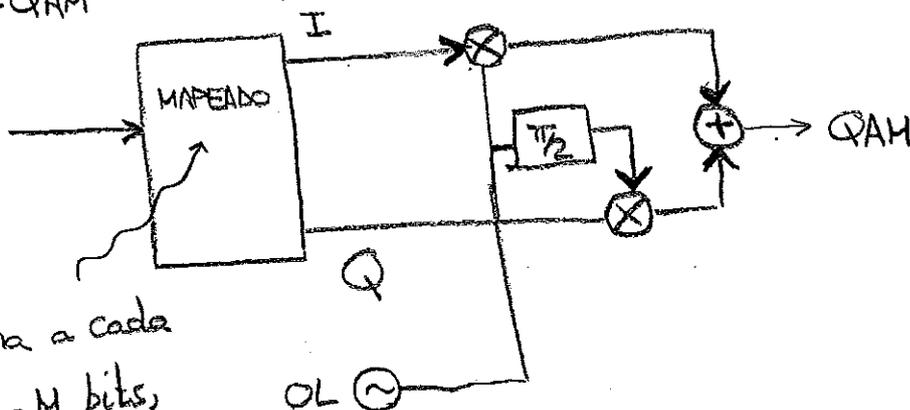


$$f_0 = 25 + \frac{200 - 25}{2} = 112,5 \text{ kHz}$$

$$B = 200 - 25 = 175 \text{ kHz}$$



b) M-QAM



Asigna a cada $k = \log_2 M$ bits, el valor de I y Q asociados a su símbolo (la constelación).

c) Si cada canal utiliza el mínimo ancho de banda posible (Nyquist)

$$B = V_s = \frac{1}{T} \Rightarrow N = 2B = 2V_s$$

$$V_r = kV_s$$

La potencia de señal: $S = E_b \left(\frac{I}{\text{bit}} \right) \cdot V_r \left(\frac{\text{bits}}{s} \right) = E_b \cdot kV_s$ así que

$$\boxed{SNR = \frac{S}{N} = \frac{E_b k V_s}{2 V_s} = \frac{E_b k}{2}}$$

$$d) \text{BER} \approx \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{3kE_b}{2(M-1)\eta}} \right] = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{3\text{SNR}}{2(M-1)}} \right]$$

$\text{SNR} = \frac{E_b k}{\eta}$

Canales 1 a 125 $\rightarrow \text{SNR} = 27 \text{dB} \approx 10 \log \text{SNR} \rightarrow \text{SNR} = 10^{2.7} = 501.2$

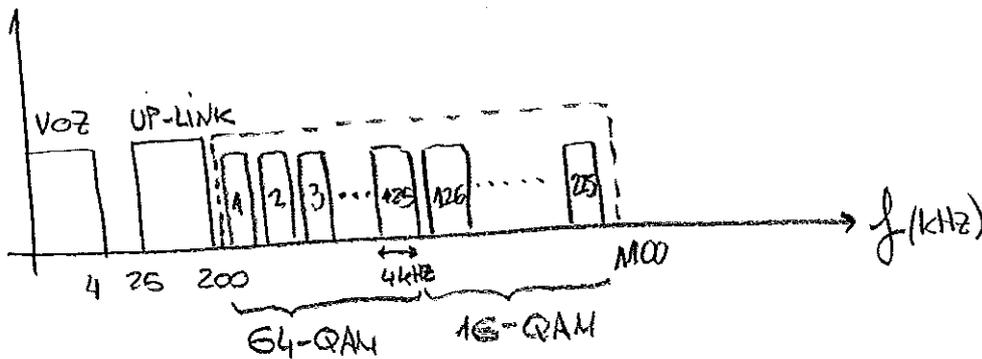
M	k	A	X	BER
4	2	0,5	15,8	≈ 0
16	4	0,375	7,1	≈ 0
64	6	0,292	3,45	$0,3 \cdot 10^{-6}$
256	8	0,234	1,71	$3,5 \cdot 10^{-3} > 10^{-5} \times$

64-QAM

Canales 126 a 225 $\rightarrow \text{SNR} = 20 \text{dB} \approx 10 \log \text{SNR} \rightarrow \text{SNR} = 10^{2.0} = 100$

M	k	A	X	BER
4	2	0,5	7,1	$< 10^{-10}$
16	4	0,375	3,6	$3 \cdot 10^{-6}$
64	6	0,292	1,54	$8,5 \cdot 10^{-3} > 10^{-5} \times$
256	8	0,234		

\Rightarrow 16 QAM



Cada uno de los canales 1 a 125: $V_{Ti} = B(\text{Hz}) e_{64\text{-QAM}} \left(\frac{\text{bits}}{\text{Hz}} \right) = 4 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 6 \frac{\text{bits}}{\text{Hz}} = 24 \frac{\text{kbit}}{\text{s}}$

" " " " " 126 a 225: $V_{Ti} = B(\text{Hz}) e_{16\text{-QAM}} \left(\frac{\text{bits}}{\text{Hz}} \right) = 4 \cdot 10^3 \cdot 4 = 16 \frac{\text{kbit}}{\text{s}}$

$e_{64\text{-QAM}} = k = 6 \frac{\text{bits}}{\text{Hz}}$

Así q. la capacidad del enlace descendente será:

$$I_{\text{DOWN-LINK}} = 125 \times 24 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} + 100 \times 16 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} = 4600 \frac{\text{kbit}}{\text{s}} = 4,6 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}} = 575 \frac{\text{kbyte}}{\text{s}}$$

e) 3 minutos \equiv 180 s

$$\left. \begin{array}{l} W = 15 \text{ kHz} \\ f_s = 2W \end{array} \right\} f_s = 30 \text{ kHz} = 30 \cdot 10^3 \frac{\text{muestras}}{\text{s}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ n = 8 \frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \end{array} \right\} V_T \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right) = n \cdot f_s = 240 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$$

Tras la codif. Reed-Solomon:

$$V_T' = \frac{36}{32} \cdot V_T = 270 \cdot 10^3 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 270 \text{ kbps}$$

$$\text{Tamaño de la canción: } N_{\text{bits}} = V_T' \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right) T_{\text{CANCION}} (\text{s}) = 48,6 \cdot 10^6 \text{ bits}$$

$$\text{Tiempo de descarga} = \frac{N_{\text{bits}} (\text{bits})}{V_{\text{DOWN-LINK}} \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right)} = \frac{48,6 \cdot 10^6 \text{ bits}}{4,6 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}} = 10,56 \text{ s.}$$

○

○

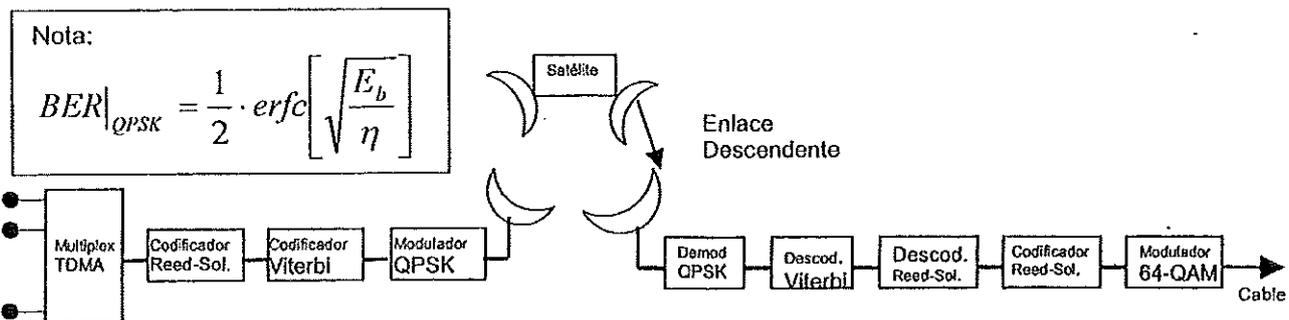
○

○

2.- La figura muestra el esquema de un sistema de distribución de TV digital via satélite. En la cabecera del sistema se multiplexan en el tiempo varios canales de TV de 4Mbit/seg y un canal de señalización de 2Mbits/s. Tras el TDMA se forma una secuencia de bits que, tras sufrir una compleja codificación de canal, modula una portadora en QPSK. La codificación de canal concatena un código de Viterbi y un código de bloque Reed-Solomon. La codificación de Viterbi es del tipo (3/4), es decir, se añade un bit de redundancia por cada 3 bits de información. La de Reed-Solomon es de tipo (188/204): se generan 204 bits de salida por cada de 188 bits de entrada.

Tras pasar por el satélite donde la señal no sufre ninguna modificación, el receptor es un transmodulador que convierte la modulación QPSK en 64-QAM. Para ello recupera la información digital tras un proceso de demodulación y descodificación de canal, inverso al realizado en el transmisor, y posteriormente vuelve a utilizar una codificación de canal Reed-Solomon (188/204), y modula en 64-QAM una portadora de 100 MHz.

- a) La velocidad de transmisión a la salida del demodulador QPSK es de 54.98 Mbit/s. Calcule el número de canales de TV que se multiplexan
- b) La probabilidad de error tras el demodulador QPSK es de $3 \cdot 10^{-2}$. Determine la potencia de salida del amplificador del satélite colocado en el enlace descendente para garantizar esta probabilidad de error. La atenuación del enlace descendente es $AT=200$ dB y $\eta=-130$ dBm/Hz.
- c) En el transmisor, el modulador QPSK emplea filtros para evitar la IES de un ancho de banda superior en un 35% al filtro ideal del criterio de Nyquist. Calcule cuál es la eficiencia espectral, y el ancho de banda de la señal modulada
- d) Calcule la velocidad de transmisión de la señal 64-QAM a la salida y el ancho de banda de la señal modulada en 64-QAM.
- e) En el extremo final del cable se debe extraer la información de la señal 64-QAM. Construya un receptor y justifique los elementos que utilice y sus parámetros básicos



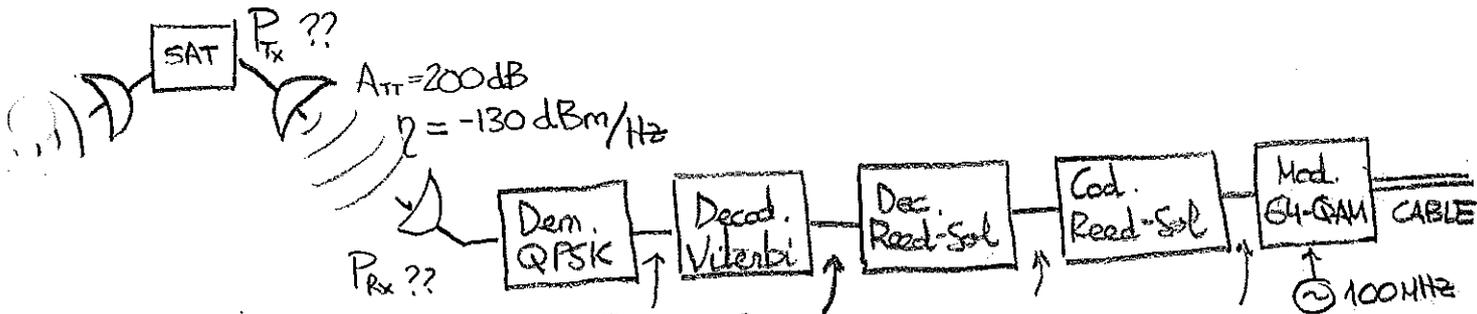
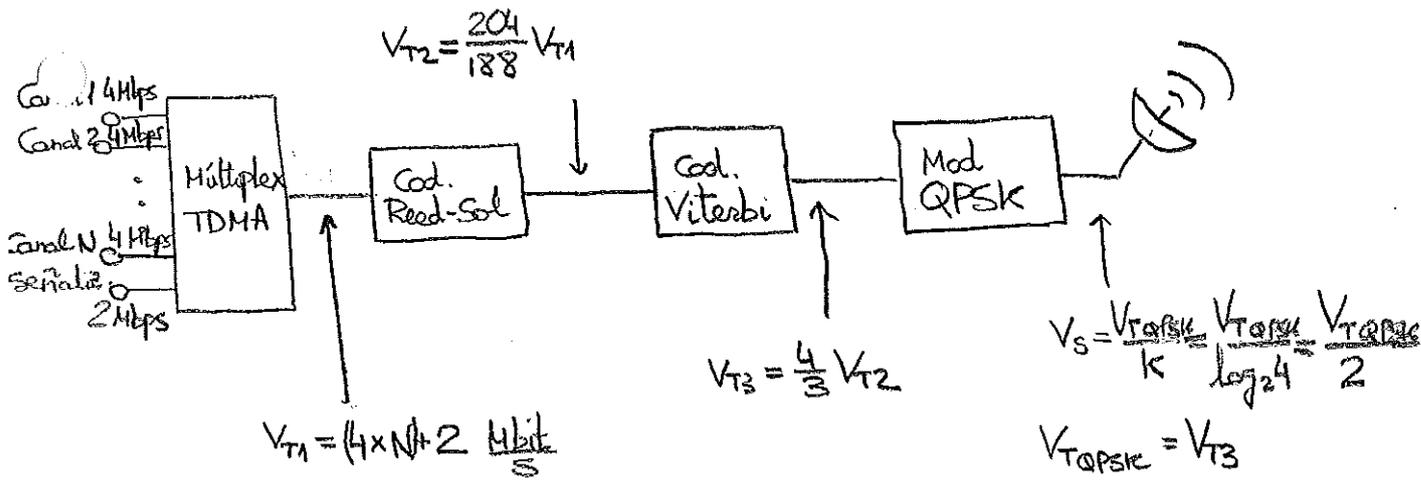
()

()

()

()

JUN 06. P2



① $V_{TQPSK} = V_{T3} = \frac{4}{3} V_{T2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{204}{188} V_{T1} = \frac{4}{3} \frac{204}{188} (4N+2) = 54,98 \frac{\text{Hbit}}{\text{s}}$

$4N+2 = \frac{54,98 \cdot 3 \cdot 188}{4 \cdot 204} \rightarrow N = 9 \text{ canales}$

② QPSK: $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) = 3 \cdot 10^{-2} \rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{\eta}} = 1,3 \rightarrow E_b = (1,3)^2 \cdot \eta$

$\eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}}\right) = -130 \frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} \rightarrow \eta \left(\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}}\right) = 10 \log \eta \left(\frac{\text{mW}}{\text{Hz}}\right) \rightarrow \eta = 10^{-13} = 10^{-16} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$

Así que: $E_b = 1,69 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{bit}} \rightarrow P_{Rx} (\text{W}) = E_b \left(\frac{\text{J}}{\text{bit}}\right) \cdot V_{TQPSK} \left(\frac{\text{bits}}{\text{s}}\right) =$

$= 1,69 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{bit}} \cdot 54,98 \cdot 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 9,3 \cdot 10^{-9} \text{ W} = -50,3 \text{ dBm}$

$P_{Tx} = P_{Rx} + A_{TT} = 149,7 \text{ dBm}$

$$\textcircled{3} \quad B = 1,35 B_{\text{Nyquist}} = 1,35 \cdot \frac{1}{T} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 1,35 \cdot \frac{V_{\text{QPSK}}}{2} = \underline{37,1115 \text{ MHz}} \end{array} \right.$$

$$V_s = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{V_s}$$

$$V_s = \frac{V_{\text{QPSK}}}{k} = \frac{V_{\text{QPSK}}}{2}$$

$$\boxed{e = \frac{V_{\text{QPSK}}}{B} = \frac{54,98 \cdot 10^6 \frac{\text{bit}}{\text{s}}}{37,1115 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 1,48 \frac{\text{bits}}{\text{Hz}}}$$

Nota: con el filtro ideal de Nyquist $B = \frac{1}{T} \Rightarrow e = k = 2 \frac{\text{bits}}{\text{Hz}}$

$$\textcircled{4} \quad \boxed{V_{T2}' = V_{T2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{V_{T3}}{V_{T2}} = 39,86 \text{ Mbit/s}} \quad \text{Sol. oficial:}$$

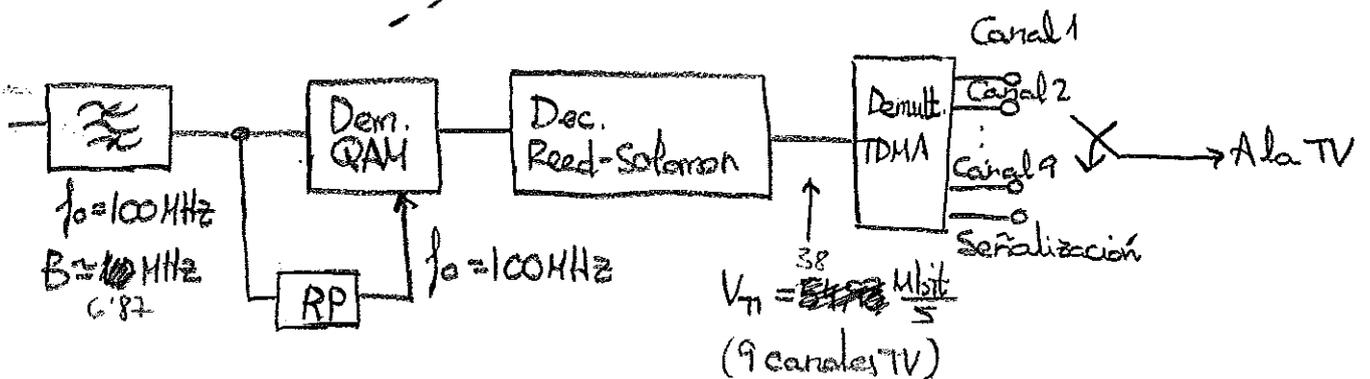
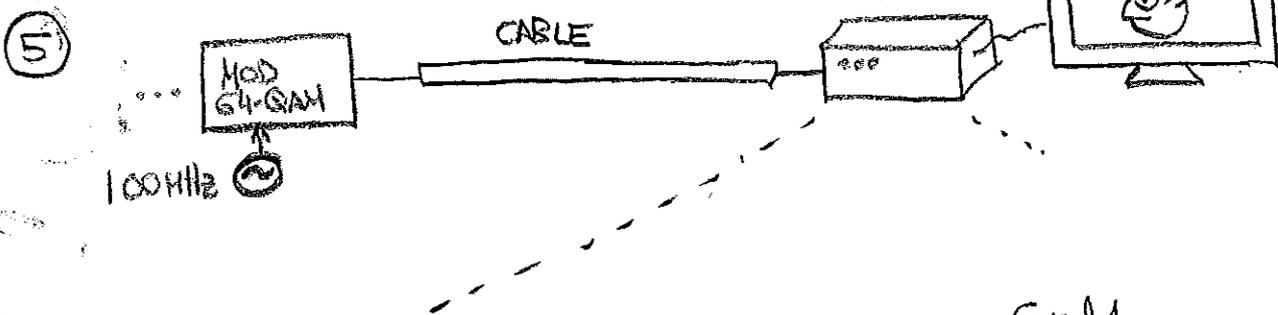
$$V_T = 41,34 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

$$B = 6,87 \text{ MHz}$$

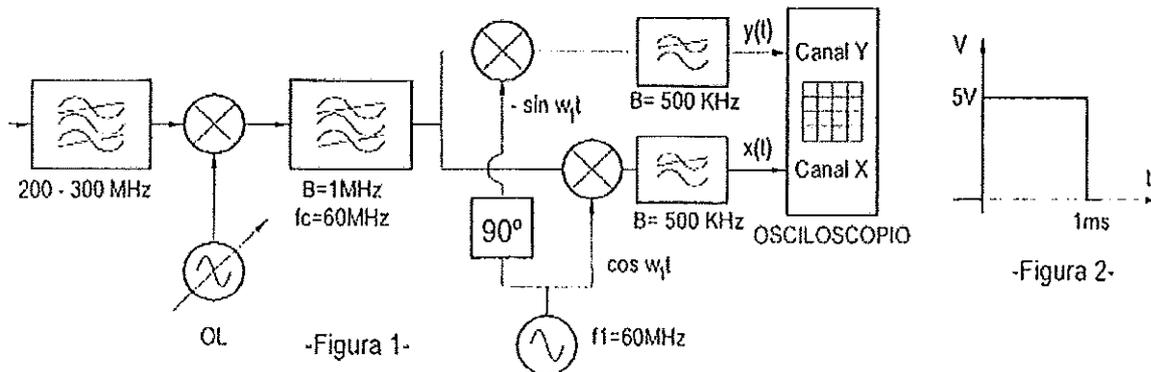
Ancho de banda:

$$\text{Forma 1: } e_{64\text{-QAM}} = \frac{V_{T2}'}{B} \quad \left[B = \frac{V_{T2}'}{e_{64\text{-QAM}}} = \frac{V_{T2}'}{k \cdot \log_2 4} = \frac{V_{T2}'}{6} = \underline{10 \text{ MHz}} \right]$$

$$\text{Forma 2: } \boxed{B = \frac{1}{T} = V_s = \frac{V_{T2}' \left(\frac{4}{3}\right)}{k \left(\frac{\text{bits}}{\text{simbolos}}\right)} = 10 \text{ MHz}}$$



2.- La figura 1 muestra la estructura de un receptor superheterodino capaz de analizar distintos tipos de señales centradas entre 200 y 300 MHz. En este ejercicio se van a conectar distintos tipos de señales, centradas siempre en la frecuencia $f_0=210\text{MHz}$. Se supone que todos los osciladores son coherentes en fase y frecuencia con el del transmisor (en otras palabras, no existen derivas aleatorias de fase en ningún punto).



-Figura 1-

-Figura 2-

En primer lugar se conecta a la entrada una señal modulada en FM. La señal moduladora $x_m(t)$ se presenta en la figura 2 y tiene una duración total de 1ms y un ancho de banda aproximado de $W=1\text{KHz}$.

- Indique el máximo valor de la constante K_f de la modulación FM para que la señal se reciba sin distorsión por el sistema
- Indique el valor necesario de la frecuencia de OL
- Calcule la potencia media la señal $x_m(t)$
- Dibuje forma de las señales de salida $x(t)$ e $y(t)$

A continuación se introduce una señal 16-QAM, sin modificar la frecuencia de OL

- Dibuje la forma presentada en la pantalla del osciloscopio cuando se recibe la señal 16-QAM con datos aleatorios
- Sabiendo que la amplitud máxima de la señal 16-QAM es de $63\text{dB}\mu\text{V}$, calcule su potencia media
- Determine la máxima velocidad de transmisión posible de la señal 16-QAM que se recibiría sin distorsión.
- Dibuje la forma obtenida en la pantalla del osciloscopio si se cambia la frecuencia del último oscilador a 61 MHz

3.- El sistema de comunicaciones digitales de la figura 1 se utiliza para transmitir información digital a 1Mb/s, y emplea como codificación de línea las siguientes señales paso bajo (ceros y unos equiprobables):

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right); \quad T = \text{duración de un bit.}$$

- Determinar los valores de A y T
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor por muestreo precedido por un filtro de anchura de banda 4MHz (considere que dada la anchura de este filtro, la IES es despreciable).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea un receptor óptimo, con filtro adaptado.
 - Anchura de banda aproximada del filtro adaptado (Utilice para esta estimación el criterio de anchura de banda hasta el primer nulo de la función de transferencia).
 - Calcular la probabilidad de error si se emplea como codificación de línea una portadora modulada con la constelación de la figura 2 y un receptor óptimo, siendo la potencia transmitida igual que en el caso anterior.
- NOTA: Si lo considera necesario puede suponer que $\text{erfc}(x) \approx 0$ para $x > 4.5$.

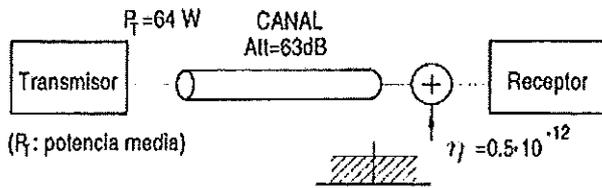


Figura 1.

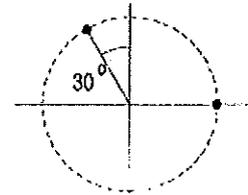


Figura 2



3.- Las respuestas de amplitud (atenuación en dB) y fase (en radianes) de una cierta longitud de cable RG-216/U son las que se muestran en las figuras.

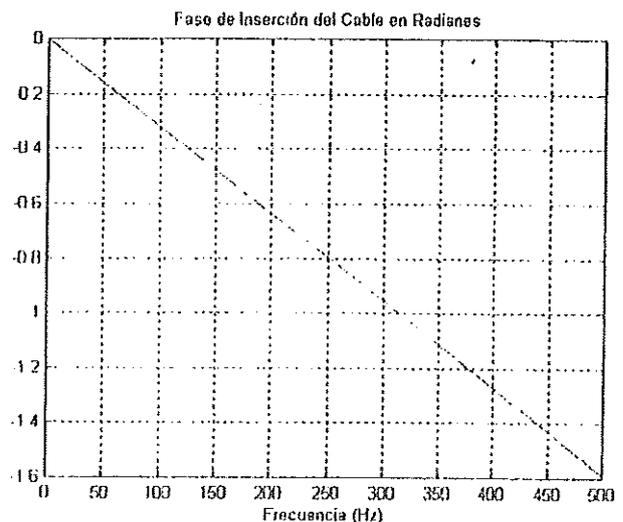
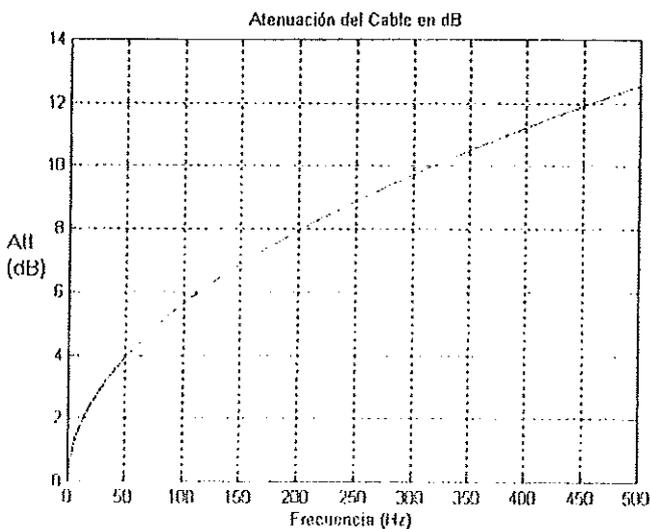
- a) Dibuje la ganancia en función de la frecuencia que deberá tener un ecualizador de amplitud que compense la respuesta del cable para resultar en un canal sin distorsión de amplitud y con 10 dB de ganancia.
- b) Calcule el retardo que introducirá el cable en la señal. Teniendo en cuenta que la velocidad de fase en el cable es de $1,98 \cdot 10^8$ m/s, calcule su longitud.

Una vez ecualizado el cable, se puede modelar como un canal paso bajo ideal con frecuencia de corte de 500 Hz que se usará para enviar una señal analógica paso bajo de ancho de banda 1 KHz. Para ello se va a utilizar un sistema de comunicaciones digitales en banda base con frecuencia de muestreo mínima y con 16 niveles de cuantificación uniformemente espaciados.

- c) Calcule la velocidad de transmisión que soportará el canal.
- d) Calcule el número de símbolos diferentes que se van a necesitar.

Posteriormente, se va a enviar dicha información por un canal radio centrado en 100 MHz. Para ello, se envía la señal binaria original utilizando un modulador ASK y un receptor incoherente.

- e) Calcule el ancho de banda mínimo que se necesitará para efectuar la transmisión.
- f) Dibuje las constelaciones para dicha señal cuando la S/N es grande y cuando es pequeña. Clasifíquela (justificándolo) como ortogonal, antipodal o proporcional.
- g) Dibuje la forma de onda transmitida para la secuencia 10110 (simplifique a dos ciclos de portadora por símbolo).
- h) Calcule la amplitud que deberá tener la señal a la salida del transmisor para conseguir una probabilidad de error de 10^{-6} cuando la densidad espectral de ruido a la entrada del receptor es de -134 dBm/Hz y el canal presenta una atenuación de 90 dB.



(

)

)

)

3.- Se desea transmitir digitalmente una señal de audio con frecuencias comprendidas entre 300 y 4.000 Hz, con valores de tensión comprendidos entre + 1V. Para la transmisión, se va a utilizar un conversor analógico / digital con la frecuencia de muestreo lo más baja posible, capaz de distinguir variaciones de tensión de la señal analógica de entrada inferiores a 2 mV.

- a) Calcule el número de bits (mínimo) que habrá de tener el convertidor A/D.
- b) Calcule el ancho de banda mínimo que habrá de tener el canal de banda base ideal capaz de extraer el flujo binario generado por el convertidor (la codificación de línea es de tipo binario).
- c) Dibuje la forma de onda (identificando los parámetros principales) resultante de transmitir la secuencia 10110 en Código AMI.

Posteriormente, una vez recibida y regenerada la información en banda base, se aplica ésta a un modulador que la traslada a 1 MHz. El modulador será binario (no multinivel)

y se elegirá entre los posibles aquel que proporcione mayor protección frente al ruido, sabiendo que no se dispone de detección coherente en el receptor.

- d) Justifique la elección.
- e) Calcule el ancho de banda mínimo que se necesitará para transmitir la información con el modulador elegido.
- f) Calcule la potencia con la que se habrá de transmitir para asegurar que la probabilidad de error sea $P_e < 0,5 \cdot 10^{-8}$, cuando en el canal exista una atenuación de 100 dB y el ruido añadido tenga una densidad espectral $\eta_0 = -110$ dBm/Hz.
- g) Dibuje la forma de onda que habrá a la salida del modulador cuando se aplique la secuencia de entrada 10110 (No dibuje la portadora a escala, dibuje dos ciclos de portadora por bit). Dibuje la constelación para ésta modulación.
- h) Calcule la potencia hubiese sido necesaria en caso de haber dispuesto de un demodulador coherente y haber usado la modulación óptima en esas condiciones.



SEPT06.P4 d) $y = \frac{A}{2}$

NOTE: $\frac{d}{du} [\exp(u)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$
 $\frac{d}{dy} [\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2})] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$

$$P_e = P_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) + P_1 \cdot \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{(A-y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\left. \frac{dP_e}{dy} \right|_{y_{opt}} = P_0 \left[\frac{2 \cdot 1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} \right] + P_1 \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} \right] = 0 \rightarrow$$

$$-P_0 e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} + \frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} = 0 \rightarrow -P_0 e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} = -\frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}}$$

$$P_0 e^{-\frac{(\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} = \frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} \rightarrow P_0 e^{-\frac{A^2}{8\sigma^2}} = \frac{P_1}{2} e^{-\frac{A^2}{8\sigma^2}} \rightarrow y_{opt} = \frac{A}{2}$$

$$P_0 = \frac{P_1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_1 = 2P_0 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{2}{3} \\ P_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e) Si $P_0 = 3P_1$: d) y_{opt} ?

$$\left. \frac{dP_e}{dy} \right|_{y_{opt}} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow P_0 e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} = \frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} \rightarrow P_0 = 3P_1$$

$$\rightarrow 3P_1 e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} = \frac{P_1}{2} e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} \rightarrow 6 e^{-\frac{y_{opt}^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} = 1$$

$$6 e^{\frac{-y_{opt}^2 + (A-y_{opt})^2}{2\sigma^2}} = 1 \rightarrow e^{\frac{-y_{opt}^2 + A^2 - 2Ay_{opt} + y_{opt}^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{6} \rightarrow \ln$$

$$\frac{A^2 - 2Ay_{opt}}{2\sigma^2} = \ln \frac{1}{6} \rightarrow A^2 - 2Ay_{opt} = 2\sigma^2 \ln \frac{1}{6} \rightarrow$$

$$\boxed{y_{opt} = \frac{2\sigma^2 \ln \frac{1}{6} - A^2}{-2A} = \frac{A}{2} - \frac{\sigma^2}{A} \ln \frac{1}{6}}$$

()

()

()

()

Preguntas cortas Tema 6

Esquemas de modulación digital

1. **Junio 2004 y Septiembre 2006.** Utilizando una modulación QPSK se pretende enviar la información de una fuente cuya velocidad de transmisión es $V_T = 64 \text{Kbit/s}$ de modo que exista ^{no} \overline{B} . ¿ Cuántos canales con modulación 256-QAM y $V_T = 64 \text{Kbit/s}$ se podrían meter en ese mismo ancho de banda?

2. **Junio 2004 y Septiembre 2006.** Una Señal de ancho de banda W (Hz) se muestrea con una frecuencia de muestreo 3 veces superior a la mínima necesaria. Posteriormente se cuantifica con 2^n estados ¿Cuál es la velocidad de transmisión? ¿Y la velocidad de símbolo si se transmite utilizando una modulación M-PSK? Dedúzcalo en función de W , n y M

3. **Septiembre 2004.** Dos señales QPSK y BPSK con el mismo ancho de banda en el lóbulo principal del espectro. Las señales moduladoras respectivas en banda base:

a) Tienen la misma velocidad de transmisión (V_T)

b) La señal correspondiente a la QPSK tiene doble V_T .

c) La señal correspondiente a la base BPSK tiene doble V_T .

$$B = \frac{1}{T} = V_s \Rightarrow V_s \text{ QPSK} = V_s \text{ BPSK}$$

$$V_T = k V_s \Rightarrow \frac{V_T \text{ QPSK}}{2} = V_T \text{ BPSK}$$

$$V_s = \frac{V_T}{k}$$

4. **Junio 2007.** Indique que afirmación es cierta en modulación DPSK:

a) Admite tanto demodulación coherente como no coherente.

b) Su eficiencia espectral es mejor que la BPSK para misma velocidad de transmisión.

c) La potencia de portadora es la mitad de la potencia media.

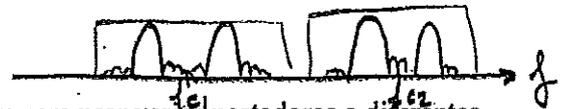
5. **Junio 2008.** Escriba cuál es la modulación FSK que manteniendo la ortogonalidad tiene la separación de frecuencias lo más baja posible, y cuantifique dicha separación. MSK $\Delta = \frac{1}{2T}$

6. **Junio 2008.** Si varias fuentes de información comparten un canal por el que envían señales moduladas en FSK simultáneamente, con portadoras distintas. Indique cuál es la respuesta correcta:

a) Se trata de un sistema TDMA con asignación de frecuencias variable a cada usuario.

b) Se trata de una modulación FDMA digital.

c) Ninguna de las anteriores.



7. **Junio 2009.** Los sistemas de comunicaciones móviles se diseñan para usar varias portadoras a diferentes frecuencias. Por cada portadora hay ocho usuarios a los que se les asigna dicha portadora secuencialmente. Indique cuál es la verdadera.

a) Se trata de un sistema de acceso TDMA y modulación FM.

b) Se trata de una modulación FDMA.

c) Se trata de un sistema con acceso conjunto TDMA y FDMA.

8. **Septiembre 2009.** Indique que afirmación falsa en modulación ASK.

a) Admite tanto demodulación coherente como no coherente. \checkmark

b) Su eficiencia espectral es mejor que si se utiliza BPSK para la misma velocidad de transmisión. F

c) La potencia de portadora es la mitad de la potencia media.

Canales ruidosos. Probabilidad de error

1. **Junio 2009.** Una modulación digital de envolvente constante

a) Produce menos BER que una de envolvente no constante, para la misma SNR.

b) Produce mayor BER que una de envolvente no constante, para la misma SNR.

c) No tiene por qué tener mayor o menor BER que una de envolvente no constante.

2. **Junio 2009.** Una transmisión ASK a 10Mb/s con símbolos equiprobables utiliza una amplitud de 120 dB μ V. Calcule la energía media por bit.



PREGUNTAS CORTAS TEMA 6

ESQUEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL

① JUN 04 Y SEPT 06

$$V_T = 64 \frac{\text{kbit}}{\text{s}}$$

$$e_{\text{QPSK}} = \frac{V_T (\frac{\text{bit}}{\text{s}})}{B(\text{Hz})} \rightarrow B(\text{Hz}) = \frac{V_T (\frac{\text{bit}}{\text{s}})}{e_{\text{QPSK}}} = \frac{64 \cdot 10^3}{2} = 32 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 32 \text{ kHz}$$

$$k = \log_2 4 = 2$$

$$e_{256\text{-QAM}} = \frac{V_T'}{B} \rightarrow V_T' = B e = 32 \cdot 10^3 \cdot 8 = 64 \cdot 10^3 \cdot 4$$

$$e_{256\text{-QAM}} = k = \log_2 256 = 8$$

$$\frac{V_T'}{V_T} = 4 \text{ canales}$$

② JUN 04 y SEPT 06

$$f_s = 3 \cdot f_{s\text{min}} = 3 \cdot 2 \text{ W} = 6 \text{ W} \left\{ \begin{array}{l} V_T (\frac{\text{bits}}{\text{s}}) = n (\frac{\text{bits}}{\text{muestra}}) \cdot f_s (\frac{\text{muestras}}{\text{s}}) \\ = n 6 \text{ W} \end{array} \right.$$

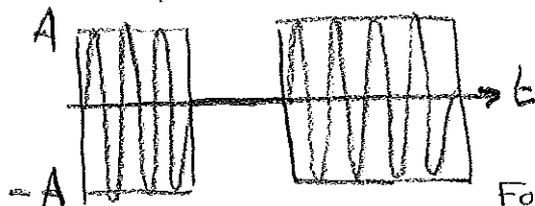
$$L = 2^n$$

$$V_T = k V_s = \log_2 M \cdot V_s \rightarrow V_s = \frac{V_T}{\log_2 M} = \frac{n 6 \text{ W}}{\log_2 M}$$

CANALES RUIDOSOS. PROBAB. DE ERROR

②

ASK



$$V_T = V_s = 10 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}} = 10^7 \frac{\text{bits}}{\text{s}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} = 10^7 \rightarrow T = 10^{-7} \text{ s} \\ V_s = \frac{1}{T} \end{array} \right.$$

FORMA 1:

$$A(\text{dB}\mu) = 20 \log A(\mu\text{V}) \rightarrow A(\mu\text{V}) = 10^{\frac{120}{20}} = 10^6 \mu\text{V} = 1 \text{ V}$$

$$E_1 = \frac{A^2}{2} T = \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ J} \left\{ \begin{array}{l} E_0 = P_0 E_0 + P_1 E_1 = \\ = \frac{E_0 + E_1}{2} = 25 \cdot 10^{-8} \text{ J} \end{array} \right.$$

$$E_0 = 0 \text{ J}$$

FORMA 2:

$$P_m = P_0 P_{m|0} + P_1 P_{m|1} = \frac{P_{m|0} + P_{m|1}}{2} = \frac{A^2/2}{2} = \frac{A^2}{4} = 0,25 \text{ W}$$

$$E_b \left(\frac{\text{J}}{\text{bit}} \right) = \frac{P_m \left(\frac{\text{J}}{\text{s}} \right)}{V_T \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right)} = \frac{0,25}{10^7} = 0,25 \cdot 10^{-7} = 2,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{bit}}$$